# წრფეების და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება სივრცეში

*სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება.*

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ორი სიბრტყე ზოგადი განტოლებებით შესაბამისად

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0$ და $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

სიბრტყის პარალელობის პირობაა მათი ნორმალური ვექტორების კოლინეარობა, ხოლო ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობაა მათი კოორდინატების პროპორციულობა. ე.ი.

**სიბრტყეების პარალელობა $\boldsymbol{\pi_1 \,||\, \pi_2}$ ჩაიწერება ასე** $\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$.

**სიბრტყეების დამთხვევა $\boldsymbol{\pi_1 = \pi_2}$ ჩაიწერება ასე** $\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$.

სიბრტყის მართობულობის პირობაა მათი ნორმალური ვექტორების მართობულობა, ხოლო ორი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულობა ე.ი.

**სიბრტყეების მართობულობა $\boldsymbol{\pi_1 \perp \pi_2}$ ჩაიწერება ასე $\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$.**

**სიბრტყეების შორის კუთხე.** სიბრტყეების შორის ორი კუთხიდან ერთი ემთხვევა მათ ნორმალურ ვექტორებს შორის კუთხეს α, მეორე კი ტოლია კუტხის π-α.

სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

# *წრფეების ურთიერთგანლაგება.*

ორი წრფე სივრცეში შეიძლება ა) ემხვეოდეს ერთმანეთს, ბ) იყოს პარალელური და არ ემთხვეოდეს ერთმანეთს, გ) თანაიკვეთებოდეს ან დ) იყოს აცდენილი. ჩავწეროთ ეს შემთხვევები წრფეათა განტოლებების ტერმინებში.

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ორი წრფე მათი კანონიკური განტოლებებით შესაბამისად შესაბამისად

$$\boldsymbol{L_1}: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1};$$

$$\boldsymbol{L_1}: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

ე.ი. $\boldsymbol{L_1}$ წრფე გადის $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1, z_1)}$ წერტილზე და მისი მიმმართველი ანუ მგეზავი ვექტორია $\boldsymbol{s_1(l_1, m_1, n_1)}$.

ანალოგიურად, $\boldsymbol{L_2}$ წრფე გადის $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2, z_2)}$ წერტილზე და მისი მგეზავი ვექტორია $\boldsymbol{s_2(l_2, m_2, n_2)}$.

**ორი წრფის დამთხვევა ნიშნავს რომ ისინი პარალელურია ანუ მათი მგეზავი ვექტორების პარალელურია, ე.ი.**

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (1)$$

**და აქვთ ერთი მაინც საერთო წერტილი.** ვთქვათ ეს საერთო წერტილია $x_2$, ანუ $x_2$ აკმაყოფილებს $L_1$ წრფის განტოლებას. **ე.ი.**

$$\frac{x_2-x_1}{l_1} = \frac{y_2-y_1}{m_1} = \frac{z_2-z_1}{n_1} \qquad (2).$$

$\boldsymbol{L_1}$=$\boldsymbol{L_2}$ **ჩაიწერება ასე: სრულდება (1) და (2)**

$\boldsymbol{L_1} \mid\mid \boldsymbol{L_2}$ **მაგრამ არ ემთხვევა ნიშნავს სრულდება (1) და არ სრულდება (2).**

თუ ორი წრფე აცენლი არაა მაშინ ისინი ერთ სიბრტყეშია, ანუ ვექტორები **$\boldsymbol{s_1(l_1, m_1, n_1)}$, $\boldsymbol{s_2(l_2, m_2, n_2)}$, და $\overrightarrow{\boldsymbol{M_1\, M_2}}$= $(\boldsymbol{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1})$ ერთ სიბრტყეშია (კომპლანარულია), რაც ნიშნავს**

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3).$$

ე.ი

$L_1$ და $L_2$ წრფეები იკვეთება ნიშნავს, სრულდება (3) და არ სრულდება (2).

$L_1$ და $L_2$ წრფეები აცდენილია ნიშნავს არ სრულდება (3.)

## წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგება

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$,

და $\boldsymbol{L}$ წრფე კანონიკური განტოლებით

$$\boldsymbol{L}: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

კვლავ გავიხსენოთ რომ ეს ნიშნავს: **ვექტორი კოორდინატებით** $(\boldsymbol{A,B,C})$ არის $\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყის ნორმალური ვექტორი,** ხოლო ვექტორი კოორდინატებით $(\boldsymbol{l,m,n})$ **არის** $\boldsymbol{L}$ წრფის მგეზავი და $\boldsymbol{L}$ წრფე გადის $(\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})$ წერტილზე.

ამიტომ ზემოთმოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად ვასკვნით რომ:

$\boldsymbol{L}$ ძევს $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყეში ნიშნავს წერტილი $(\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})\in\boldsymbol{\pi}$ და $(\boldsymbol{A,B,C})$ მართობულია $(\boldsymbol{l,m,n})$, ანუ

$\boldsymbol{L}$ ძევს $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყეში $\leftrightarrow$ $\begin{cases}\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D=0}\\ \boldsymbol{Al+Bm+Cn=0}\end{cases}$ ;

$\boldsymbol{L}\,||\,\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყის, მაგრამ არ ეკუთვნის $\leftrightarrow$ $\begin{cases}\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0}\\ \boldsymbol{Al+Bm+Cn=0}\end{cases}$ ;

$\boldsymbol{L}$ კვეთს $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყეს $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{Al+Bm+Cn\neq 0}$.