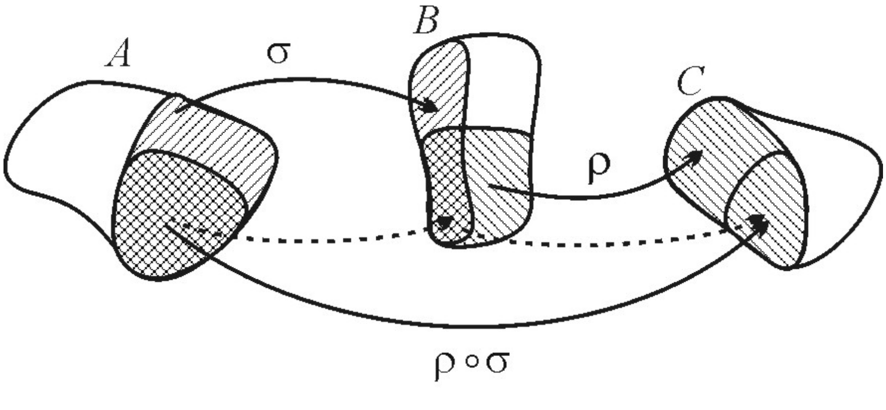
Tamar kvirikaSvili, aleqsandre laSxi,
baCuki mesabliSvili, Tornike qadeiSvili

kompiuteruli maTematika

saxelmZRvanelo saqarTvelos teqnikuri universitetis
informatikis fakultetis studentebisaTvis

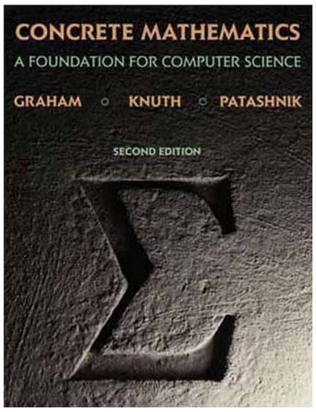


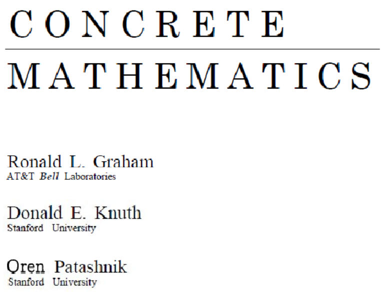
stu 2012

winasityvaoba

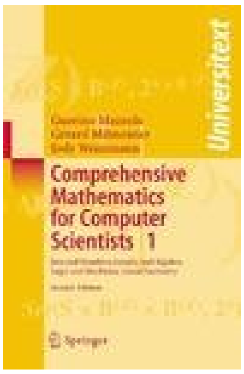
kursi “kompiuteruli maTematika” (“maTematika kompiuteruli mecnierebebisaTvis“) ukve didi xania iswavleba msoflios wamyvan universitetebSi. saqme imaSia, rom kompiuteruli mecnierebis (informatikis) saWiroebebisaTvis ar aris sakmarisi maTematikis standartuli kursis (ZiriTadad – kalkulusis da wrfivi algebris) sakiTxebi, aucilebelia codna Tanamedrove maTematikis iseTi dargebidan, rogorebicaa – zogadi algebra, logika, diskretuli maTematika, grafTa Teoria, kombinatorika da sxv.

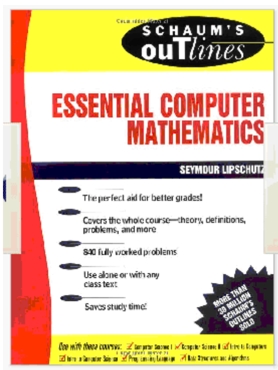
erTerTi pirveli aseTi kursi Seiqmna stenfordis universitetSi kompiuteruli mecnierebebis “gurus” (swored ase ixsenieben mas) donald knutis mier. misi saxelmZRvanelo CONCRETE MATHEMATICS, rac ar niSnavs “konkretuls”, aramed “uwyvet”-CONtinuous da “diskretul”-disCRETE maTematikas, didi xania bestseleria am dargSi

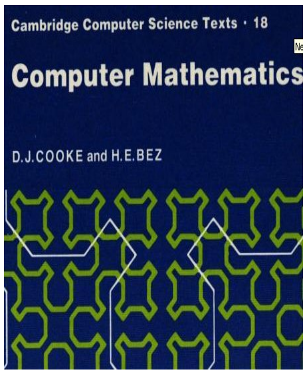




amJamad arsebobs bevri kargi saxelmZRvanelo am saganSi:







saqarTveloSi kompiuteruli maTematikis kursi pirvelad dainerga da ukve 5 welia ikiTxeba Cvens kaTedraze (saqarTvelos teqnikuri universitetis 104 kaTedra). informatikis fakultetis ukve ramdenime aTasma studentma gaiara es kursi da, imedi gvaqvs, SeiZina kvalificiuri informatikosisaTvis aucilebeli codna da unarebi.

winamdebare teqsti ar warmoadgens kursis ukve dadgenil da dasrulebul saxelmZRvanelos. saerTod, axali saleqcio kursis saxelmZRvanelos daweriT dawyeba upasugismgeblo saqmed migvaCnia. kargi saxelmZRvaneloebi ase iqmneba – ramdenime wlis ganmavlobaSi wakiTxuli leqciebis konspeqtebi ixveweba, ivseba da mokldeba, xdeba saerTaSoriso gamocdilebis gaTvaliswineba, uaRresad mniSvnelovania studentebisagan ukukavSiriT miRebuli informacia, da mxolod amis Semdeg bedavs kvalificiuri avtori saxelmZRvanelos gamoSvebas. ai, am procesis garkveul etapze gTavazobT Cveni leqciebis metnaklebad Sejerebul, gamdidrebul – Semoklebul, magram aradasrulebul variants. es aradsrulebuloba SeiZleba Rirsebadac CaiTvalos, radgan rigi sakiTxebisa paralelurad aris gadmocemuli gansxvavebuli TvalTaxedviT da meTodikiT, rac mkiTxvels aZlevs saSualebas sxvadasxva kuTxiT gaecnos masalas.

kursSi gadmocemulia maTematikis is sakiTxebi, romelTac aqvT uSualo gamoyenebani Tanamedrove informatikaSi (kompiuterul mecnierebaSi). es sakiTxebia: simravleTa Teoria, mimarTebebi da asaxvebi, kombinatorika, maTematikuri logika, bulis algebrebi, zogadi da wrfivi algeba, diskretuli maTematika, geometria, grafTa Teoria. aqve SevniSnavT, rom avtorebi swored am dargebSi momuSave maTematikosebi arian. garda amisa, kursSi mocemulia maTematikis am sakiTxTa gamoyenebebi uSualod kompiuterul mecnierebaSi: kodirebis Teoria, kriptografiis sakiTxebi, kompiuteruli tomografiis maTematika, globaluri pozicionirebis sistemis (GPS) maTematika. studenti daeufleba agreTve kompiuterul programebs MAPLE, MATHLAB, romelTa meSveobiTad xdeba ZiriTadad amocanebis amoxsna.

T. qadeiSvili, a. laSxi, T. kvirikaSvili, b. mesabliSvili

Tbilisi, maisi, 2012 weli

სიმრავლეთა თეორია

§ 1. სიმრავლეები და მათი სპეციფიკაცია

როგორც შესავალში იყო აღნიშნული, ჩვენ გვსურდა აგვეგო მათემატიკური თეორია საკმაოდ მკაცრად, მაგრამ ამ დროს დასაბუთების თვალსაზრისით წარმოიქმნება გარკვეული სიძნელეები. ამის ნაცვლად ჩვენ ვიწყებთ ისეთი საწყისი ცნებების აღწერით, როგორიც არის სიმრავლე. მიუხედავად იმისა, რომ მასალა შეიძლება მოგვეჩვენოს მარტივად, ეს კეთდება იმისათვის, რომ მკითხველმა გაარჩიოს პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილი მაგალითები.

სიმრავლე – ეს არის გარკვეული განსხვავებული ობიექტების ერთობლიობა, სადაც ნებისმიერი ობიექტისთვის შეიძლება დავადგინოთ, მიეკუთვნება თუ არა ეს ობიექტი მოცემულ სიმრავლეს.

სიმრავლე, რომელიც ემორჩილება მხოლოდ ასეთ შეზღუდვას, შეიძლება შეიცავდეს თითქმის ნებისმიერი ხასიათის ობიექტებს. მაგალითად:

- სიმრავლე ლონდონის ყველა მიწისქვეშა სადგურისა;
- სიმრავლე მარცხენა ფეხსაცმელებისა;
- სიმრავლე ნატურალური რიცხვებისა $1, 2, 3, 4, \ldots$.
- სიმრავლე სპეციალური საბეჭდი მოწყობილობებისათვის საჭირო სიმბოლოებისა;
- სიმრავლე კონკრეტული კომპიუტერის ოპერაციების კოდებისა.

საბოლოოდ, ჩვენთვის საინტერესო იქნება შემდეგი სიმრავლეები:

- სიმრავლე იდენტიფიკატორებისა, რომლებიც გვხვდება გარკვეულ პროგრამაში;
- სიმრავლე ოპერაციებისა იმავე პროგრამაში;
- სიმრავლე ოპერაციებისა, რომლებიც შეიძლება შესრულდეს მოცემული ინსტრუქციის შემდეგ იმავე პროგრამაში.

ამასთან, ეს სიმრავლეები საკმაოდ რთულია კვლევისათვის. უმეტესად გამოვიყენებთ ზოგიერთ აბსტრაქტულ სიმრავლეს. ისეთებს, როგორიცაა რიცხვთა სიმრავლეები.

სიმრავლეებს, ჩვეულებრივ აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, \ldots$ და ჩაიწერება ორიდან ერთი ხერხით. თუ სიმრავლე შეიცავს რამდენიმე ელემენტს, მაშინ, უბრალოდ, ვწერთ მის ყველა ელემენტს. მაგალითად, თუ A-ს განვსაზღვრავთ როგორც 6-სა და 10-სშორის მკაცრად მოთავსებულ მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ ეს შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A = \{7, 8, 9\}$$

და წავიკითხავთ ასე:

“A არის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს 7,8,9-ს”.

აქ “=” სიმბოლო გამოიყენება გარკვეული აზრით: A უდრის სიმრავლეს … შემდეგში გამოვიყენებთ გამოთქმას: “უდრის თუ არა A …”. ამიტომ უნდა შემოვიტანოთ ამ ფაქტის სამართლიანობის დადგენის პროცედურა. სხვა სიტყვებით, სიმრავლე შეიძლება დავახასიათოთ გარკვეული თვისებებით. ამგვარად, A სიმრავლე შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც

$$A = \Big\{x :\ x \text{ არის მთელი რიცხვი},\ 6 < x < 10\Big\}$$

და წავიკითხოთ ასე:

“A არის ყველა ისეთი x-სა, რომ …”.

A სიმრავლეს ეკუთვნის მხოლოდ ის ელემენტები, რომლებიც არის 6-ზე მეტი და 10-ზე ნაკლები მთელი რიცხვები. ე. ი. 7, 8 და 9. ამრიგად, გვაქვს 7,8,9 როგორც წინათ.

სიმრავლეებს ხშირად განიხილავენ, როგორც “ელემენტების არადალაგებულ ერთობლიობას”, თუმცა ზოგჯერ საჭიროა ხაზი გავუსვათ, რომ, მაგალითად,

$$\{7, 8, 9\}, = \{8, 9, 7\} = \{9, 7, 8\}, \ldots$$

ელემეტების დალაგებაზე არავითარ პირობას არ ვაყენებთ. ამიტომ არასწორი იქნებოდა დაგვეშვა რაიმე განსაზღვრული დალაგება.

ნებისმიერი მოცემული ობიქტისათვის შეიძლება განვსაზღვროთ ეკუთვნის თუ არა იგი A სიმრავლეს. კერძოდ, თუ რიცხვი ეკუთვნის სიმრავლეს, მაშინ ვიტყვით, რომ “ეს რიცხვი არის სიმრავლის ელემენტი”. მაგალითად, თუ 7 არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ეს ფაქტი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$7 \in A.$$

ხოლო ფაქტი “6 არ არის A-ს ელემენტი”, ჩაიწერება ასე:

$$6 \notin A.$$

“$\in$” სიმბოლო წარმოდგება ბერძნული ასო ε-დან. უარყოფა აღინიშნება $\notin$ სიმბოლოთი. ოპერაციის (ან ოპერაციული სიმბოლოს) უარყოფის ასეთი აღნიშვნა ზოგადად მიღებულია მათემატიკაში და ხშირად იქნება გამოყენებული შემდეგში.

აღვნიშნოთ, რომ დიდი ყურადღება უნდა მიექცეს სიმრავლეთა სპეციფიკაციას. თითოეული სიმრავლისათვის უნდა ჩაიწეროს მისი სპეციფიკაცია. სიმრავლის წარმოქმნის პროცესი შეიძლება გრძელდებოდეს უსასრულოდ დიდხანს. შედეგად ვღებულობთ სიმრავლეს, რომელიც შეესაბამება განსაზღვრას. ნაწილობითი სპეციფიკაცია იმ შემთხვევაში შეიძლება იყოს სასარგებლო, როცა გარკვეული არ არის ეკუთვნის თუ არა მოცემული ელემენტი სიმრავლეს. აქამდე გვხვდებოდა სიმბოლოები: $\{\vdots\}$, $\{\ldots\}$, $\in$ და $\notin$. მათი გამოყენება საკმაოდ მარტივად გვეჩვენება, მაგრამ მოითხოვს გარკვეულ ჩვევებს, რომლებიც ილუსტრირებული იქნება შემდეგ მაგალითებზე

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. სიმრავლეთა მოყვანილი განსაზღვრებებიდან რომელია სწორი:

$$
\begin{aligned}
&A=\{1,2,3\},\\
&B=\{5,6,6,7\},\\
&C=\{x:\ x\notin A\},\\
&D=\{A,C\},\\
&E=\big\{x:\ x=1 \text{ ან } x=\{y\} \text{ და } y\in E\big\},\\
&F=\big\{\text{სიმრავლეები, რომლებიც არ წარმოადგენს თავის თავის ელემენტს}\big\}=\\
&\quad=\big\{x:\ x \text{ სიმრავლეა და } x\notin x\big\}.
\end{aligned}
$$

A სიმრავლის წევრთა რაოდენობა ადვილად გამოითვლება და სიმრავლის ელემენტები არ მეორდება, მაშინ განსაზღვრება სწორია.

B სიმრავლე გამოიყურება აგრეთვე სწორად, მხოლოდ იმის გამოკლებით, რომ რიცხვი 6 გვხვდება ორჯერ. ჩვენ შეგვიძლია შევამოწმოთ ეკუთვნის თუ არა ელემენტი სიმრავლეს. ამგვარად, ეს უმნიშვნელოვანესი მოთხოვნა სიმრავლის განსაზღვრებაში შესრულებულია. მაშასადამე, შეგვიძლია ეს წაწერა განვიხილოთ როგორც სწორი და $\{5,6,7\}$-ის ეკვივალენტური. ამასთან, ამ სიტუაციაში წარმოიქმნება შემდეგი პრობლემები. თუ განვიხილავთ B-ს პირველ განსაზღვრებას და ამოვაგდებთ სიმრავლიდან ერთ-ერთ 6-ს, მაშინ ცხადია, გვექნება $6\in B$ და $6\notin B$. წარმოიქმნება წინააღმდეგობა. ამიტომ სიმრავლეთა განსაზღვრებაში სიმბოლოების გამეორებას განვიხილავთ, როგორც ერთი და იმავე სიმბოლოს მოხსენიებას, ხოლო მის დუბლირებას, როგორც უყურადღებობას. გამეორებული სიმბოლოების ამორება წარმოქმნის შემდგომი მათემატიკური მსჯელობის საფუძველს.

A სიმრავლე შეიცავს რიცხვებს, ამან შეიძლება გამოიწვიოს გაუგებრობა, რადგან რიცხვები არ არსებობს, უფრო ზუსტად, ჩვენ ვიყენებთ რიცხვთა სიმბოლოებს. ეს სიმბოლოები იწოდება ისევე, როგორც რიცხვები. ამიტომ B არის სახელების სიმრავლე და სახელებს, ჩვეულებრივ, ვიყენებთ, რათა წარმოვიდგინოთ ის ობიექტები (ელემენტები), რომლებზეც ვუთითებთ. გამოთვლებში სახელებს აქვს განსაკუთრებული მნიშვნელობა, განსაკუთრებით პროგრამული ენების სემანტიკის შესწავლაში (პროგრამის არსის). აქ არ არის ამ პრობლემების დეტალური განხილვის ადგილი.

ავიღოთ, მაგალითად, სიმრავლე

$$
\begin{aligned}
X=\big\{&\text{“პასკალის შესავალი”},\\
&\qquad\text{“სტრუქტურული მონაცემების საფუძვლები”},\ \text{“პასკალის შესავალი”}\big\}.
\end{aligned}
$$

ეს არის ორი წიგნის დასახელების სიმრავლე, რომლის ერთი ელემენტი უყურადღებობის გამო ორჯერ არის წაწერილი, ან ეს არის სამი წიგნის სიმრავლე, რომელთაგან ორს ერთი და იგივე დასახელება აქვს. თუ ეს ასე, მაშინ ორი წიგნი “პასკალის შესავალი” რაიმე ხერხით უნდა გავყოთ. მოცემული ინფორმაციით არ შეიძლება გავარკვიოთ სწორი პასუხი, ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში ფრთხილად უნდა ვიყოთ.

C სიმრავლის განსაზღვრებაც, ისევე როგორც A-ს, სწორია, რადგან თუ $x \in A$, მაშინ $x \notin C$ და თუ $x \notin A$, მაშინ $x \in C$. C სიმრავლე ძალიან დიდია: ის შეიცავს "ყველაფერს" 1, 2 და 3 რიცხვის გარდა. აღნიშვნა "ყველაფერს" გამოყოფილია და, როგორც მალე ვნახავთ, მათემატიკური თვალსაზრისით "საშიშია".

რადგან A და C განსაზღვრებები სიმრავლეებს წარმოადგენს, აქედან ვლებულობოთ, რომ D-ს განსაზღვრებაც, აგრეთვე, სწორია. შევნიშნოთ, რომ ეს სიმრავლეთა კლასი (არაფერი არასწორი ამაში არ არის!) ისეთია, რომ მას აქვს მხოლოდ ორი ელემენტი, კერძოდ, $1 \notin D$, თუნდაც $1 \in A$ და $A \in D$. ეს ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რადგან $1 \neq A$, $1 \neq C$ და მხოლოდ A და C წარმოადგენს D სიმრავლის ელემენტებს.

E სიმრავლე არის რეკურსულად განსაზღვრული სიმრავლის პირველი მაგალითი. იგი განისაზღვრება (ნაწილობრივ) თავისივე ტერმინებში. მისი აგების პროცესი უსასრულოდ გრძელდება, ამიტომ ელემენტების განსაზღვრისთვის უნდა გვქონდეს წესი. მათ ჩაწერას ვერ შევძლებთ ცხადად. შევნიშნოთ, რომ E არ განისაზღვრება მთლიანად E-ს ტერმინებში, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ სიმრავლეზე რაიმე, რაც არ არის დამოკიდებული განსაზღვრებაზე. ამ შემთხვევაში ეს არის ის რომ $1 \in E$. გვაქვს:

$$\begin{aligned} &1 \in E, \ \text{ამიტომ}\ \{1\} \in E,\\ &\{1\} \in E, \ \text{ამიტომ}\ \{\{1\}\} \in E,\\ &\{\{1\}\} \in E, \ \text{ამიტომ}\ \{\{\{1\}\}\} \in E \ \text{ და ა. შ.} \end{aligned}$$

თუმცა აგების პროცესი შემოსაზღვრული არ არის, ვირებთ რა ნებისმიერ ელემენტს და თუ გვაქვს საკმაო დრო, შეიძლება განვსაზღვროთ შედის თუ არა ეს ელემენტი E სიმრავლეში.

ახლა გადავიდეთ F სიმრავლეზე. ეს საკმაოდ რთული ამოცანაა. რომ დავინახოთ, თუ რატომ არ შეიძლება არსებობდეს F, დასაწყისში დავუშვათ მისი არსებობა, ხოლო შემდეგ ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი ელემენტი (იგი აღვნიშნოთ y-ით), რომლისთვისაც არ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $y \in F$ თუ $y \notin F$. საერთოდ, "უხერხული " მაგალითის გამოკვლევა, რომელზეც შეგვეძლება ლოგიკური ნაკლის ჩვენება, ადვილი არ არის. მაგრამ, მოცემულ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ თვით F სიმრავლე. საკითხის გასარკვევად აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე G-ით. თუ, როგორც დავუშვით, F საძიებელი სიმრავლეა, მაშინ ან $G \in F$, ან $G \notin F$. განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა: ა) $G \in F$, მაშინ G აკმაყოფილებს პირობას: $G \notin G$, და, მაშასადამე, $G \notin F$.

ბ) $G \notin F$, ეს ნიშნავს, რომ G არ აკმაყოფილებს F სიმრავლეში შესვლის პირობას, ე. ი. $G \in G$, მაშასადამე, $G \in F$.

მაშასადამე, ყველა შემთხვევაში მივდივართ წინააღმდეგობამდე. ამიტომ F არ შეიძლება არსებობდეს. სა იქნა დაშვებული შეცდომა? სიმრავლეთა სიმრავლეები, შესაძლებელია, ამოიხსნება, უსასრულოდ დიდი სიმრავლეებიც (მაგალითად, ზემოთ განხილული E სიმრავლე), აგრეთვე ამოიხსნება, მაგრამ "ყველა სიმრავლეთა სიმრავლეებზე" მუშაობა არ შეიძლება სიმრავლეთა ჩვეულებრივი თეორიით. ეს მოითხოვს სხვა სახის მათემატიკას. სიმრავლეთა თეორიის ეს ანომალია

ცნობილია როგორც რასელის პარადოქსი. თუ უკვე გვაქვ H სიმრავლე, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ I.

ამგვარად, ჩვენ გამოვიკვლევთ მხოლოდ იმ სიმრავლეებს, რომლებიც შეიძლება ცხადად ჩაიწეროს ან აიგოს კარგად განსაზღვრული პროცესებით. ამიტომ სიმრავლეები არც ისეთი ტრივიალურია, როგორც ეს დასაწყისში შეიძლება გვეჩვენოს. ამასთან, თუ ზემოთ მოყვანილ წესებს მივყვებით, მათზე მუშაობა არ იქნება განსაკუთრებულად რთული. შეეცადეთ დამოუკიდევლად გააკეთოთ შემდეგი სავარჯიშო:

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.1.

1. განიხილეთ სიმრავლის ინტერპრეტაციის ორი შესაძლო ვარიანტი მაინც

$$\{\text{სმიტი, სმიტი, ბრაუნი}\}.$$

განსაზღვრეთ თითოეული მათგანი იმდენად ცალსახად, რამდენადაც ეს შესაძლებელია.

2. განიხილეთ შემდეგი ოთხი სიმრავლე:

ა) $\{1, 2, 3, 4\}$;
ბ) $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}\}$;
გ) $\{1, \text{ერთი}, \text{one}, \text{uno}, \text{ein}\}$;
დ) $\{5, \mathrm{V}, \text{ხუთი}, \text{five}\}$.

გაარკვიეთ ამ სიმრავლეების ჩაწერა როგორ შეიძლება გამარტივდეს და მათ შორის რომლებია ეკვივალენტური. განიხილეთ ყველა შესაძლო ინტერპრეტაცია, რომლებიც აკმაყოფილებს ზემოთ აღწერილ ვარაუდებს.

3. შეამოწმეთ შემდეგი მტკიცებულებების სამართლიანობა:

“ეს მტკიცებულება არასწორია” და “მე მატყუარა ვარ”

მტკიცებულებაში რომელი სიტყვები მოითხოვს საკუთრივ (ე. ი. მათემატიკურად ზუსტ) განსაზღვრებას. იმისათვის, რომ პასუხები გავხადოთ მათემატიკურად მკაცრი?

4. ვთქვათ, X არის $\{1, 2\}$ სიმრავლე, ხოლო Y – $\{x :\ x \in y+z;\ y,\, z \in X\}$ სიმრავლე. განსაზღვრეთ ცხადი სახით Y სიმრავლე. როგორია ეს სიმრავლეები

$$\{y :\ y = x + z;\ x,\, z \in X\} \ \text{და}\ \{y :\ x = y + z;\ x,\, z \in X\}.$$

5. დავუშვათ, რომ x არის ელემენტი და არა სიმრავლე. მაშინ $y \notin x$ ნებისმიერი y-თვის და აქედან გამომდინარეობს, რომ $x \notin x$. შეიძლება თუ არა გავამარტივოთ $\{x, \{x\}, \{\{x\}\}\}$ სიმრავლე? რა შეიძლება ითქვას $\{x, y, \{x, y\}\}$ სიმრავლის მიმართ?

6. ვთქვათ, A არის ყველა მტელ რიცხვთა სიმრავლე. აღწერეთ სიტყვებით შემდეგი სიმრავლე:

$$X = \{x :\ x \in A \ \text{და}\ x = 1 \ \text{ან}\ (x-2) \in X\}.$$

§ 2. უმარტივესი ოპერაციები სიმრავლეებზე

როგორც 1.1 მაგალითში "მცდარი სიმრავლის" განხილვისას ვნახეთ, სიმრავლეების განსაზღვრისას საჭიროა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე. მიუხედავად ამისა, მოცემული სიმრავლეებიდან მარტივი წესებით ახალი სიმრავლეების აგებისას შეიძლება უმტკივნეულოდ მივიღოთ მრავალი საინტერესო მაგალითი.

მოგვიანებით მოვიყვანთ იმ ფორმალურ წესებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს სიმრავლეებზე განსაზღვრული ოპერაციები, ხოლო ახლა შემოვიტანთ ზოგიერთი აღნიშვნა. დავიწყოთ უმარტივესი ოპერაციებიდან.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლე. A **და** B **სიმრავლეების თანაკვეთა** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის როგორც A-ს, ასევე B-ს და აღინიშნება შემდეგნაირად: $A \cap B$; ამგვარად,

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ და } x \in B\}.$$

ანალოგიურად, A **და** B **სიმრავლეების გაერთიანება** აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ ან } x \in B\}.$$

თანაკვეთისა და გაერთიანების განსაზღვრებები გამომდინარეობს შესაბამისად, "და" და "ან" სიტყვებიდან, ამიტომ როგორც შედეგი გვაქვს:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

და რაც, ალბათ, ნაკლებად ცხადია

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

ეს იგივეობები მნიშვნელოვანია. შემდგომი მათემატიკური მსჯელობებიდან გამოჩნდება, რომ ზოგჯერ საჭიროა $A \cup A$ (შესაბამისად, $A \cap A$) დავიყვანოთ A-ზე, ან პირიქით, A გავაფართოვოთ $A \cup A$ (შესაბამისად, $A \cap A$)-მდე.

განსაზღვრება. A **და** B **სიმრავლეების სხვაობა** (რომელსაც, აგრეთვე, ეწოდება B-ს დამატება A-მდე) ჩაიწერება $A \setminus B$ სახით და განისაზღვრება თანაფარდობით

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

ამიტომ, თუ $A = \{1, 2, 3\}$ და $B = \{2, 3, 4\}$, მაშინ $A \setminus B = \{1\}$ და $B \setminus A = \{4\}$.

შემდეგი განსაზღვრება ჩართულია სისრულისათვის. მიუხედავად იმისა, რომ მას უშუალოდ იშვიათად გამოვიყენებთ, ქვემოთ ვნახავთ, რომ ამ ოპერატორს დიდი მნიშვნელობა აქვს მანქანურ არითმეტიკაში.

განსაზღვრება. A და B ელემენტების **სიმეტრიული სხვაობა** ანუ $A \triangle B$ განისაზღვრება, როგორც

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

შესაძლებელია $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$ აღნიშვნებმა მკითხველი დააბნია, ან შეიძლება ეგონოს, რომ ისინი იმდენად ელემენტარულია, რომ მათ არავითარი პრაქტიკული გამოყენება არ აქვთ. შემდეგი მაგალითები მოგვეხმარება ამის გარკვევაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს P და Q ორი პროგრამა. A არის P პროგრამის მონაცემთა ყველა მნიშვნელობის სიმრავლე, ხოლო B – Q პროგრამის სიმრავლე, მაშინ $A \cap B$ იქნება მონაცემთა ყველა მნიშვნელობის სიმრავლე, რომელიც მისაწვდომია P და Q-თვის; $A \cup B$ მონაცემთა ყველა მნიშვნელობის სიმრავლეა, რომელიც მისაწვდომია P-თვის ან Q-თვის (ერთ-ერთისთვის მაინც), $A \setminus B$ არის ყველა იმ მონაცემთა სიმრავლე, რომელიც მისაწვდომია P-თვის, მაგრამ არა Q-თვის. $B \setminus A$ მისაწვდომია Q-თვის და არა P-თვის, $A \triangle B$ არის ყველა იმ მონაცემთა სიმრავლე, რომელიც მისაწვდომია მხოლოდ ერთი, ან P ან Q, პროგრამისთვის.

შედგომი მსჯელობის წინ მოსახერხებელი იქნება განვსაზღვროთ ორი სპეციალური სიმრავლე. პირველი მათგანია ცარიელი სიმრავლე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ცარიელი სიმრავლე (აღინიშნება $\varnothing$-ით), რომელსაც თვისებით (???????)

$$x \notin \varnothing, \quad \text{ნებისმიერი } x\text{-თვის.}$$

მეორე სიმრავლეს, რომლის განსაზღვრაც ამოცანაზეა დამოკიდებული, უნივერსალური სიმრავლე ეწოდება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . უნივერსალური სიმრავლე (აღინიშნება $\mathcal{E}$-ით) არის მოცემულ ამოცანაში განსახილველი ყველა ელემენტი სიმრავლე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ორი A და B სიმრავლე **არ თანაიკვეთება**, თუ $A \cap B = \varnothing$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ყოველ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია $\mathcal{E}$ უნივერსალური სიმრავლე, განვსაზღვროთ A **სიმრავლის დამატება** (აღინიშნება A'-ით), როგორც

$$A' = \mathcal{E} \setminus A = \{x : \ x \notin A\}.$$

$\varnothing$, $\mathcal{E}$ და A' სიმრავლეების განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს

$$A \cup A' = \mathcal{E}, \quad A \cap A' = \varnothing$$

იგივეობების სამართლიანობა.

შემდეგში ნაჩვენები იქნება, რომ მოცემულია $\mathcal{E}$-თვის ეს იგივეობები საკმარისია, რათა ცალსახად განვსაზღვროთ A'.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.2. ვთქვათ,

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}, \ \ A = \{1, 3, 4\}, \ \ B = \{2, 3\}, \ \ C = \{1, 4\}.$$

განსაზღვრებიდან ადვილად ვიპოვით, მაგალითად, A', $B \cap C$, $C \setminus A$ და ა. შ. ამასთან, შეიძლება დაგვჭირდეს უფრო რთული გამოსახულებების გამოკვლევა, რომელიც შეიცავს ორ ან მეტ ოპერაციას. რადგანაც ამ შემთხვევაში ისმება

საკითხი, როგორ განვსაზღვროთ რიგი, რომლითაც სიმრავლეებზე უნდა მოვახდინოთ ელემენტარული ოპერაციები, ამიტომ გამოვიყენებთ ფრჩხილებს. ფრჩხილებში ჩასმული თითოეული გამოსახულება უნდა შესრულდეს მანამ, ვიდრე მისი შედეგი იქნება გამოყენებული სხვა გამოთვლებში. მაგალითად, $(A \cap B)'$ გამოსახულებაში. თანაკვეთა გამოითვლება უფრო ადრე, ვიდრე დამატება.

ეს შეთანხმება, ცხადია, საკმარისია.ამასთან, იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ ფრჩხილების დიდი რაოდენობა, არ მოვითხოვთ ფრჩხილებს მაშინ, როცა გვინდა შევასრულოთ დამატების ოპერაცია სიმრავლეებზე ნებისმიერი $\{\cup, \cap, \setminus, \triangle\}$ ოპერაციის წინ. ამიტომ $A \cap B'$ ნიშნავს $A \cap (B')$ და ა. შ. მაშასადამე,

$$A \cap B' = A \cap \{1, 4\} = \{1, 4\},$$
$$(A \cap B)'\{3\}' = \{1, 2, 4\},$$
$$(B \setminus A) \cup C\{2\} \cup C = \{1, 2, 4\}.$$

მკითხველს შეიძლება გაუკვირდეს, მსჯელობა რატომ არის აგებული სიმრავლის და არა რიცხვის ცნებაზე. მართლაც, აქამდე ჩვენ რიცხვებს ვიკვლევდით მხოლოდ როგორც სიმრავლეთა ელემენტებს. ეს მხოლოდ იმისთვის კეთდებოდა, რომ მკითხველი გაცნობოდა იმ ობიექტებს, რომლებთანაც მას მოუხდება მუშაობა. საქმე იმაშია, რომ არსებობს უფრო რთული სიმრავლეები, ვიდრე რიცხვთა სიმრავლეა. ჩვენ შეგვიძლია რიცხვები მივიღოთ სიმრავლეებიდან და არა პირიქით. ამასთან, შემდგომი თეორიის მრავალი დამატებებისათვის უნდა გავაკეთოთ ზუსტი მტკიცება ზოგიერთი სპეციალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. იმისათვის, რომ უზრუნველვყოთ საფუძველი, რომლის საშუალებითაც აგებული იქნება ასეთი სიმრავლეები, განვსაზღვროთ მთელი დადებითი რიცხვების (ნატურალური რიცხვების) $\mathbb{N}$ სიმრავლე:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

$\mathbb{N}$ სიმრავლის ზუსტი განსაზღვრა "$+$" და "$-$" არითმეტიკულ ოპერაციებთან მოცემული იქნება ქვემოთ. ამასთან, ამ თავში ვივარაუდებთ, რომ მკითხველისთვის ცნობილია $\mathbb{N}$ სიმრავლის ზოგიერთი თვისება. ანალოგიურად, $\mathbb{Z}$-ს, როგორც ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლეს:

$$\mathbb{Z} = \{\, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \,\}.$$

რა თქმა უნდა, $\mathbb{N}$ და $\mathbb{Z}$ სიმრავლეები არ შეიძლება ჩაიწეროს ცხადად. ამასთან, გამოსახულება "$\ldots$" უნდა გავიგოთ როგორც "და ასე შემდეგ".

ახლა განვიხილოთ სიმრავლე

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{x : \ x \in \mathbb{N}, \ 1 \le x \le n\}.$$

მას გააჩნია n ელემენტი. ვიტყვით, რომ ამ სიმრავლის **სიმძლავრე** (ან **ზომა**, **ნორმა**, **სიგრძე**) არის n. ეს აღინიშნება ასე:

$$|A| = \mathrm{card}(A) = n.$$

შედეგში ნებისმიერ B სიმრავლეს, რომელსაც ელემენტების იგივე რაოდენობა გააჩნია, რაც A სიმრავლეს, ექნება იგივე სიმძლავრე და, ცხადია, საჭირო არ იქნება ამ ელემენტების ჩამოთვლა. მცირე სიმრავლეებისათვის საკმაოდ ადვილია ელემენტების ჩამოთვლა, მაგრამ სხვა სიმრავლეებისთვის (მაგალითად, $\mathbb{N}$

სიმრავლისათვის) ეს შეიძლება იყოს შეუძლებელი. ქვემოთ მოცემული იქნება ელემენტების რაოდენობის გამოთვლის, მაგრამ, ამავე დროს, არაფორმალური წესი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვიტყვით, რომ X სიმრავლე **სასრულია**, თუ $X = \varnothing$ ან თუ რომელიმე $n \in \mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\{1, 2, \ldots, n\}$ სიმრავლე, რომელსაც აქვს ელემენტების იგივე რაოდენობა, რაც X სიმრავლეს. თუ $X \neq \varnothing$ და არანაირი n არ მოიძებნება, მაშინ X სიმრავლეს ეწოდება **უსასრულო**.

ახლა, როცა შემოვიტანეთ რამდენიმე განსაზღვრება, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე სავარჯიშო. სიმრავლეები ადვილად ჩასაწერი რომ გავხადოთ, ელემეტებისათვის კვლავ გამოვიყენებთ რიცხვებს და ასოებს, მაგრამ გვემახსოვრება, რომ იგივე ოპერაციები შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი სიმრავლეებისთვის.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2.1.

1. ვთქვათ,

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}, \;\; X = \{1, 5\}, \;\; Y = \{1, 2, 4\}, \;\; Z = \{2, 5\}.$$

ვიპოვოთ სიმრავლეები:
ა) $X \cap Y'$; ბ) $(X \cap Z) \cup Y'$; გ) $X \cup (Y \cap Z)$; დ) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; ე) $(X \cup Y)'$; ვ) $X' \cap Y'$; ზ) $(X \cap Y)'$; თ) $(X \cup Y) \cup Z$; ი) $X \cup (Y \cup Z)$; კ) $X \setminus Z$; ლ) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

2. ვთქვათ,

$$\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f\}, \;\; A = \{a, b, c\}, \;\; B = \{f, e, c, a\}, \;\; c = \{d, e, f\}.$$

ვიპოვოთ სიმრავლეები:
ა) $A \setminus C$; ბ) $B \setminus C$; გ) $C \setminus B$; დ) $A \setminus B$; ე) $A' \cup B$; ვ) $B \cap A'$; ზ) $A \cap C$; თ) $C \cap A$; ი) $C \triangle A$.

3. მოცემულია A და B ორი ისეთი ნებისმიერი სიმრავლე, რომ $A \cap B = \varnothing$. რას წარმოადგენს $A \setminus B$ და $B \setminus A$ სიმრავლეები?

4. მოცემულია C და D ორი ისეთი ნებისმიერი სიმრავლე, რომ $C \cap D' = \varnothing$. რა შეიძლება ითქვას $C \cap D$ და $C \cup D$ სიმრავლეებზე?

5. მოცემულია ნებისმიერი X სიმრავლე. ვიპოვოთ სიმრავლეები:
ა) $X \cap X'$; ბ) $X \cup X'$; გ) $X \setminus X'$.

6. შემდეგი მტკიცებულობებიდან რომელია სამართლიანი? ვიპოვოთ სიმრავლეები:
ა) $0 \in \varnothing$; ბ) $\varnothing = \{0\}$; გ) $|\{\}| = 1$; დ) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$; ე) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$.
ეს "მზაკვრული" კითხვაა. შეიძლება მოგვეჩვენოს მარტივად ცარიელი სიმრავლე და მისი თვისებები არ არის საკმაოდ მნიშვნელოვანი.

7. ვთქვათ, M და N არის ორი კომპიუტერი ფიქსირებული პროგრამებით. ვთქვათ, A არის მონაცემთა მნიშვნელობების სიმრავლე, რომელიც მისაწვდომია M კომპიუტერისათვის და, თუ $x \in A$ და M მანქანა მუშაობს x შესასვლელი სიტყვით, მაშინ M ჩერდება და იძლევა შედეგს. ანალოგიურად, ვთქვათ, B არის

მონაცემთა მნიშვნელობების სიმრავლე, რომლებიც იწვევს N კომპიუტერის გაჩერებას და შედეგის მოცემას. თუ A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი მისაწვდომია M და N კომპიუტერისათვის, რა შეგვიძლია ვთქვათ B' სიმრავლეზე? ავხსნათ ეს სიტუაცია სიმბოლოების საშუალებით და განვმარტოთ ამ ინფორმაციის უსარგებლობა.

8. სიმრავლეთა ტერმინებით ავხსნათ 2.1 მაგალითი რატომ არის სწორი.

9. გაერთიანების ოპერაციის განსაზღვრის დროს აღნიშნული იყო, რომ ვიყენებდით “ან”-ს. როგორც შეიძლება სიმრავლეთა ტერმინებში გამოვსახოთ გამომრიცხავი “ან”.

10. გამოთვლებში ხშირად ახალი სიმრავლეების შესაქმნელად გამოიყენება არითმეტიკული ობიექტები. ასე, თუ A და B რიცხვითი სიმრავლეებია, მაშინ

$$A+B=\big\{x:\ x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\big\}.$$

ანალოგიურად გამისაზღვრება $+$, $-$, $/$ ოპერაციები რიცხვთა სიმრავლეებს შორის. ვიპოვოთ შემდეგი სიმრავლეები:

ა) $\{1,2\}+\{1,3\}$; ბ) $\{1,2\}\cup\{1,3\}$; გ) $\{1,2\}*\{1,3\}$; დ) $\{1,2\}\cap\{1,3\}$; ე) $\{1,2\}-\{1,3\}$; ვ) $\{1,2\}\setminus\{1,3\}$; ზ) $\{2,4\}/\{2\}$; თ) $\{2,4\}\setminus\{2\}$; ი) $\{2,4\}-\{2\}$.

11. იმისათვის, რომ შევძლოთ სიმრავლეებზე ოპერაციების ტექნიკის გამოყენება კონკრეტულ ამოცანაში, რაღაც ეტაპზე საჭირო იქნება “არამათემატიკური” მტკიცება გადავიყვანოთ მათემატიკურში. ჩვეულებრივ (მხოლოდ არა ყოველთვის), ამით აღწერა ხდება უფრო კომპაქტური. ამასთან, მათემატიკური გამოსახულება ყოველთვის იქნება მათემატიკურად მკაცრი. მაშინ, როდესაც საწყისი გამოსახულება შეიძლება ასეთი იყოს (სადაც ეს ხდება, საჭიროა ვიპოვოთ რა აკლია ტავდაპირველ ფორმულირებას). ახლა საჭიროა:

ა) შევეცადოთ ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი მტკიცებულობები სიმრავლეთა ენაზე:

- მოცემულია A, B და C სიმრავლეები. განვსაზღვროთ სიმრავლე, რომელიც თავის თავში შეიცავს ამ სიმრავლეებიდან მხოლოდ ორს.
- წინა ამოცანა ამოვხსნათ იმ პირობით, რომ A, B და C სიმრავლეები ურთიერთარათანამკვეთია.
- მოცემულია V, W, Y, X და Z სიმრავლეები. განვსაზღვროთ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს V, W, X და Y სიმრავლეებიდან ორს მაინც და არ შეიცავს Z-ს.

ბ) ანალგიურად აღვწეროთ სიტყვებით შემდეგი სიმრავლეები

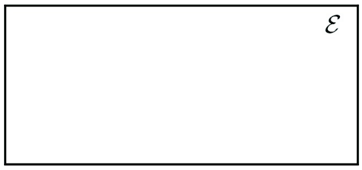
$$\big(J\cap(K\cup L)\big)'\cup(H\setminus L),$$
$$(P\cup R\cup Q)\setminus\big(P\cap(Q\setminus R)\big),$$
$$\big((E\setminus F)\cup(F\setminus E)\big)'\cup G.$$

§ 3. ვენის დიაგრამები

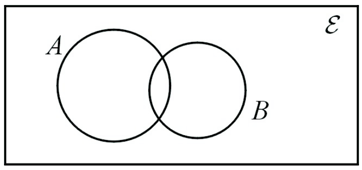
ხშირად სასრგებლოა გვქონდეს სიმრავლეთა გეომეტრიული წარმოდგენა. ასეთი წარმოდგენები ვერ შეცვლის დამტკიცებებს, მაგრამ, შეიძლება სასარგებლო იყოს იმისათვის, რომ სწრაფად და მარტივად დავრწმუნდეთ სამართლიანია

თუ არა კონკრეტული მტკიცებულება. დიაგრამებს, რომლებსაც ჩვენ გამოვიყენებთ, **ვენის დიაგრამები** ეწოდება (ინგლისელი მათემატიკოსის ჯონ ვენისა სახელის მიხედვით) და აიგება ისე, როგორც ეს ქვემოთ არის აღწერილი.

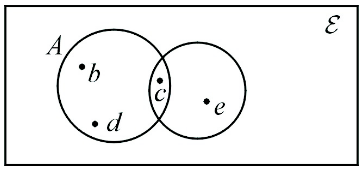
პირველ რიგში დავხაზოთ დიდი $\mathcal{E}$ მართკუთხედი (ნახ. 3.1). შემდეგ მართკუთხედის შიგნით ჩავხაზოთ წრეები (ან სხვა შესაბამისი შეკრული წირი), რომ წარმოვიდგინოთ სიმრავლეები. ისინი უნდა იკვეთებოდნენ ამოცანაში მოთხოვნილ ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში და, შესაბამისად, უნდა იყოს აღნიშნული (ნახ. 3.2). წერტილები, რომლებიც მდებარეობს დიაგრამის სხვადასხვა არის შიგნით შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შესაბამის სიმრავლეთა ელემენტები. თუ სიმრავლეებში ელემენტების რიცხვი მცირეა, მაშინ ცალკეული ელემენტი შეიძლება ჩაიწეროს შესაბამისი არეების შიგნით, რეოგორც ეს ნაჩვენებია 3.1 მაგალითში.



ნახ. 3.1



ნახ. 3.2

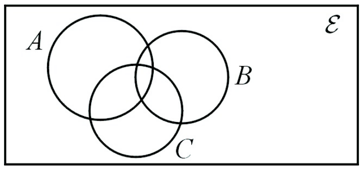


ნახ. 3.3

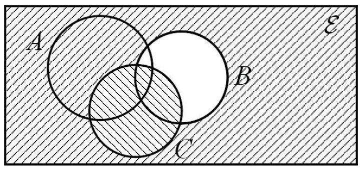
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. ვთქვათ, $\mathcal{E} = \{b, c, d, e\}$, $A = \{b, c, d\}$, $A = \{c, c\}$. შესაბამისი დიაგრამა გამოსახულია 3.3 ნახაზზე. ამ სურათით სრულად არის ილუსტრირებული 3.1 მაგალითი. თუ, მაგალითად, $A \in \mathcal{E}$, მაშინ გაუგებარია, რისი გამოსახვა შეიძლებოდა დიაგრამაზე. იმ შემთხვევებში, როდესაც გამოიყენება სიმრავლეთა უფრო რთული კონსტრუქციები, უნდა ვერიდოთ დიაგრამების სახით მათ გამოსახვას.

როდესაც გვაქვს, შესაბამისად, აგებული დიაგრამა, მისი გარკვეული არე შეიძლება დავშტრიხოთ ახალწარმოქმნილ სიმრავლეთა განსასაზღვრავად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2. იმისათვის, რომ წარმოვადგინოთ $A \cup (B' \cap C)$ სიმრავლე, დავიწყოთ 3.4 ნახაზზე ნაჩვენები ზოგადი დიაგრამით. B' დავშტრიხოთ ერთი მიმართულებით დიაგონალური ხაზებით



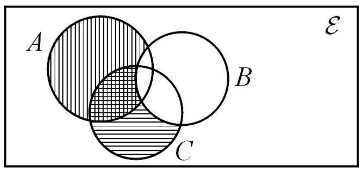
ნახ. 3.4



ნახ. 3.5

ხოლო C – სხვა მიმართულების დიაგონალური ხაზებით (ნახ. 3.5). ორმაგად დაშტრიხული ფართობი წარმოადგენს $B' \cap C$ სიმრავლეს.

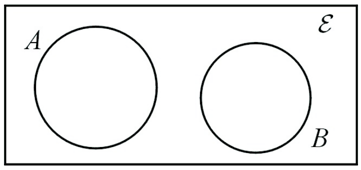
დიაგრამის ახალ ასლზე ეს არე დავშტრიხოთ ჰორიზონტალური ხაზებით, ხოლო A – ვერტიკალურით. 3.6 ნახაზზე მთლიანად დაშტრიხული არე წარმოადგენს $A \cup (B' \cap C)$ სიმრავლეს. თუ ცალკეულ შემთხვევაში განსახილველ სიმრავლეებზე გვაქვს დამატებითი ინფორმაცია, ის შეიძლება გამოვიყენოთ ვენის დიაგრამის გასამარტივებლად.



ნახ. 3.6

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. ვთქვათ, $A \cap B = \varnothing$. ეს შეესაბამება 3.7 ნახაზის დიაგრამას.

შევნიშნოთ, რომ ხშირ შემთხვევაში სიმრავლეები შეიცავს საკმაოდ ბევრ ელემენტს და, მაშასადამე, ეს ელემენტები არ შეიძლება წარმოვადგინოთ ცალკე.



ნახ. 3.7

ამიტომ უფრო მოსახერხებელია ამ შემთხვევაში ვილაპარაკოთ თითოეულ სიმრავლეზე, როგორც მთელზე და არ ვახსენოთ ცალკეული ელემენტები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.1.

1. დახაზეთ დიაგრამა, რომლითაც ილუსტრირებული იქნება 2.1 სავარჯიშოს პირველ ამოცანაში განსახილველი სიმრავლეები.

2. როგორც შეიძლება წარმოვადგინოთ ვენის დიაგრამების საშუალებით შემდეგი სიმრავლეები:

$$\{A,\{A\}\},\ \ \{\{a\},\{b\}\},\ \ \{X,Y,Z\},$$

სადაც

$$X=\big\{x:\ x=1 \text{ ან } (x-2)\in X\big\},$$
$$Y=\big\{x:\ x=3 \text{ ან } (x-3)\in Y\big\},$$
$$Z=\big\{x:\ x=2 \text{ ან } (x-2)\in Z\big\}.$$

§ 4. ქვესიმრავლეები

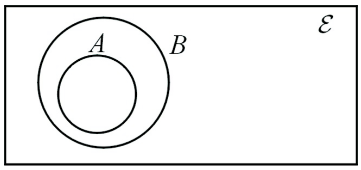
თანაკვეთის, გაერთიანების, სხვაობის და დამატების ოპერაციები გვაძლევს ახალი სიმრავლეების ფორმირების საშუალებას. მაგრამ, როგორც წესი, არ შეგვიძლია ვთქვათ, თუ როგორ შეეფარდება ერთი სიმრავლე სხვებს. მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია ორი X და Y სიმრავლე. $X\cap Y$ თანაკვეთა გარკვეული აზრით “ნაკლები” (ან უკიდურეს შემთხვევაში არ აღემატება) X სიმრავლეზე. მართლაც, $X\cap Y$ სიმრავლის ყველა ელემენტი, აგრეთვე, მიეკუთვნება X სიმრავლეს. ამ დაკვირვებიდან შეიძლება ფორმალურად განვსაზღვროთ სიმრავლეთა და სხვადასხვა გამოსახულებების ტოლობა იმავე სიმრავლისათვის. ამ განსაზღვრებების საშუალებით შეგვიძლია, აგრეთვე, დავწეროთ იმ მნიშვნელოვანი ფაქტების შესაფერისი ლოგიკური დასაბუთებები, რომლებიც სიმრავლეებს შეეხება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, A და B სიმრავლეები ისეთია, რომ თუ $x\in A$, მაშინ $x\in B$. მაშინ ამობობენ, რომ A **არის B-ს ქვესიმრავლე** და აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $A\subseteq B$. შესაბამისი ვენის დიაგრამა გამოსახულია 4.1 ნახაზზე. ამასთან, თუ არსებობს B-ს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A-ს, მაშინ A-ს უწოდებენ B-ს **საკუთრივ ქვესიმრავლეს** და ჩაიწერება $A\subset B$ სახით. ეს ნიშნავს, რომ რაღაც აზრით B უფრო დიდია ვიდრე A, მაგრამ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ასეთმა ტერმინმა შეიძლება დაგვაბნიოს. მაშასადამე,

ამ ტერმინის გამოყენების სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ. ეს თანაფარდობები შეძლება, აგრეთვე, ჩაიწეროს შებრუნებული რიგით

$$B \supset A \text{ და } B \supseteq A.$$

მაშინ ამბობენ, რომ B მოიცავს A-ს.



ნახ. 4.1

ცხადია, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისთვის სამართლიანია შემდეგი სამი თანაფარდობა:

$$\varnothing \subseteq A, \quad A \subseteq A, \quad A \subseteq \mathcal{E}.$$

აქედან მეორე თანაფარდობა არის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი. ამობობენ, რომ A და B სიმრავლეები **ეკვივალენტურია** (ჩაიწერება $A = B$), თუ

$$A \subseteq B, \quad B \subseteq A.$$

ეს ნიშნავს, რომ A-ს ყველა ელემენტი არის B-ს ელემენტები, ხოლო B-ს ყველა ელემენტი – A-ს ელემენტი.

სიმრვლეთა ეკვივალენტურობის განსაზღვრების გამოყენებით დავამტკიცოთ ზოგიერთი სიმრავლის იდენტურობა, რისთვისაც გავარჩიოთ ხუთი მაგალითი. ეს მაგალითები წარმოადგენს დამტკიცებების მაგალითებს. ამიტომ ვალდებული ვართ მოკლედ განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ რატომ უნდა ვიზრუნოთ დამტკიცებებზე კომპიუტერულ მეცნიერებაში. მკაცრად რომ ვთქვათ, როგორც ეს ჩვეულებრივ კეთდება, ჩვენ რაღაც უნდა დავამტკიცოთ მხოლოდ ერთჯერ. შემდეგ გამოვალთ იქიდან, რომ ინფორმაციის ეს ნაწილი სამართლიანია და, მაშასადამე, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ლაქტი. ამასთან, როგორც გამოთვლითი მეცნიერების უმრავლეს შემთხვევაში ხდება, მეთოდი, რომლითაც შედეგებს ვღებულობთ, ისევე მნიშვნელოვანია, როგორც თვით შედეგი. დამტკიცებების ანალიზის შემდეგ ნათელი ხდება გამოთქმული ვარაუდები და ის შედეგები, რომლებთანაც ამ ვარაუდებს მივყავართ. აგრეთვე, გასაგები ხდება დასკკვნების გამოტანის პროცესები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ამოცანების ამოხსნისას.

შეიძლება, აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ თეორემების დამტკიცება აყალიბებს ავტომატურად გადასაწყვეტი ყველა ამოცანის საფუძველს. მაგრამ ამას განვიხილავთ მოგვიანებით. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

4.1 მაგალითში უშუალოდ მტკიცდება შემდეგი ორი თანაფარდობის სამართლიანობა:

ა) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

ბ) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

თითოეულ ამ დამტკიცებათაგან შედგება შემდეგი სახის მტკიცებულებებისგან:

$$\text{“თუ } P, \text{ მაშინ } Q\text{”}.$$

(თუ P მართებულია, მაშინ მართებულია Q). მოხერხებულობისათვის ეს მტკიცებულება ჩავწეროთ, როგორც “$P \Longrightarrow Q$” და წავიკითხავთ:

$$\text{“}P\text{-დან გამომდინარეობს } Q\text{”}.$$

ამრიგად, თუ გვაქვს $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ისეთი მიმდევრობა, რომ $P_0 \Longrightarrow P_1$, $P_1 \Longrightarrow P_2, \ldots, P_{n-1} \Longrightarrow P_n$ (P_0-დან გამომდინარეობს P_1, P_1-დან გამომდინარეობს $P_2, \ldots, P_{n-1}$-დან გამომდინარეობს P_n), მაშინ გვაქვს პირდაპირი მტკიცებულება $P_0 \Longrightarrow P_n$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1. A, B და C სიმრავლეებისთვის დავამტკიცოთ, რომ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

$$x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in A \ \text{ და } \ x \in (B \cup C) \Longrightarrow$$

(ასეთი დაჯგუფება აუცილებელია, რადგან ფრჩხილები ნიშნავს, რომ გაერთიანება უნდა გამოვთვალოთ თანაკვეთის წინ)

$$\Longrightarrow x \in A \ \text{ და } \ (x \in B \ \text{ ან } \ x \in C) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x \in A \ \text{ და } \ x \in B) \ \text{ ან } \ (x \in A \ \text{ და } \ x \in C) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x \in A \cap B) \ \text{ ან } \ (x \in A \cap C) \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

ამრიგად,

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული ჩართვა:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow (x \in A \cap B) \ \text{ ან } \ (x \in A \cap C) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x \in A \ \text{ და } \ x \in B) \ \text{ ან } \ (x \in A \ \text{ და } \ x \in C) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x \in A \ \text{ და } \ (x \in B \ \text{ ან } \ x \in C) \Longrightarrow x \in A \ \text{ და } \ x \in B \cup C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

მაშასადამე,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

ამიტომ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

ამ კერძო შემთხვევაში დამტკიცების მეორე ნაწილი ზუსტად ემთხვევა პირველს და, მაშასადამე, შეიძლება ჩავწეროთ

$$x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in A \ \text{ და } \ x \in B \cup C \ \text{ და ა. შ.}$$

აქ “$\Longleftrightarrow$” სიმბოლო აღნიშნავს, რომ $P \Longrightarrow Q$ და $Q \Longrightarrow P$. ეს შეიძლება წავიკითხოთ ასე “მაშინ და მხოლოდ მაშინ” და აღნიშნავს ორი P და Q მტკიცებულებების ეკვივალენტურობას.

მაგრამ ყოველთვის არ არის ასე ადვილი არგუმენტის და შედეგის შექცევა. ზოგადად დამტკიცება უნდა ჩატარდეს ორივე მიმართულებით ცალკ-ცალკე. შევნიშნოთ, რომ ეკვივალენტურობა შეიძლება ადვილად მივიღოთ ვენის შესაბამისი დიაგრამიდან.თუმცა, ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ისეთი დიაგრამის დახაზვა, რომლის მიმართ შეიძლება ვიყოთ დარწმუნებული, რომ იგი იმდენად პასუხობს მოთხოვნებს, რამდენადაც საჭიროა. ამიტომ აუცილებელია უშუალო დამტკიცება. ეს დამტკიცება დამოკიდებულია “და” და “ან”-ს მნიშვნელობებს შორის შინაგან ურთიერთკავშირზე. შემდგომში, როცა განსაზღვრული იქნება ზგიერთი ალგებრული სტრუქტურები, ვაჩვენებს, რომ ეს არ წარმოადგენს სირთულეს.

4.2–4.5 მაგალითებში ასევე ვიყენებთ პირდაპირ დამტკიცებებს, მაგრამ ეს დამტკიცებები ჩაწერილია რამდენიმე სხვა სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.2. მოცემულია $\mathcal{E}$ სიმრავლის მიმართ ნებისმიერი A ($A \subseteq \mathcal{E}$) სიმრავლის დამატება ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ორი B და C სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული მათგანი აკმაყოფილებს A სიმრავლის დამატების მოთხოვნას, ე. ი.

$$B \cap A = C \cap A = \varnothing \ \text{და} \ B \cup A = C \cup A = \mathcal{E}.$$

მაშინ

$$\begin{aligned} B = B \cap \mathcal{E} = B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup (B \cap A) = \\ = (B \cap C) \cup \varnothing = B \cap C, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$x \in B \Longrightarrow x \in B \ \text{და} \ x \in C \Longrightarrow B \subseteq B \cap C \Longrightarrow B \subseteq B \ \text{და} \ B \subseteq C.$$

მაგრამ ვიცით, რომ $B \subseteq B$. ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$B \subseteq C.$$

ანალოგიურად (შევუცვლით რა როლებს B-ს და C-ს), მივიღებთ:

$$C \subseteq B.$$

საიდანაც $B = C$, ე. ი. $B = C = A'$ და A' ერთადერთია.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითი თავის თავში შეიცავს ძირითად მათემატიკურ მიდგომას, რომელიც გამოიყენება ერთადერთობის დასამტკიცებლად. დასაწყისში იგულისხმება, რომ არსებობს ორი ასეთი ობიექტი, ხოლო შემდეგ მტკიცდება, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა.

შემდეგ მაგალითში კვლავ მივმართავთ ვარაუდს “ან”-ის შესახებ, რათა შესაძლებლობა გვქონდეს $A \cup B \cup C$ გამოსახულება დავწეროთ როგორც $A \cup (B \cup C)$ ან $(A \cup B) \cup C$, როცა ეს უფრო მოსახერხებელი იქნება საჭირო გარდაქმნებისთვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3. მოცემულია A, B და C სიმრავლეები ისეთი, რომ

$$A \cup B \cup C = \mathcal{E}$$

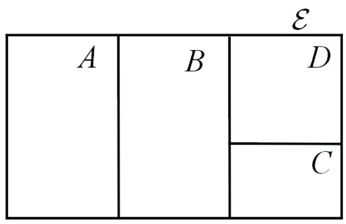
და A, B და C წყვილ-წყვილად არ ტანაიკვეთება, მაშინ
$$A' = B \cup C, \quad B' = A \cup C, \quad C' = A \cup C.$$

დამტკიცება.
$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = \mathcal{E},$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

მაშასადამე, $B \cup C$ აკმაყოფილებს A'-ის პირობას, A' ერთადერთია. ამიტომ $A' = B \cup C$. ანალოგიურად ტარდება დამტკიცება B' და C'-თვის.

მაგალითი 4.4. ნებისმიერი X და Y სიმრავლეებისთვის სამართლიანია თანაფარდობა
$$(X \cap Y)' = (X \cap Y') \cup (X' \cap Y) \cup (X' \cap Y').$$

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ 4.3 მაგალითიდან გვაქვს A, B და C სიმრავლეები და
$$C = D \cup E \text{ და } D \cap E = \varnothing.$$
(4.2 ნახაზზე გამოსახულია ვენის დიაგრამა, სადაც $\mathcal{E}$ სიმრავლე დაყოფილია შესაბამისად). მაშინ A, B, D და E სიმრავლეები ურთიერთარათანამკვეთია და
$$A \cup B \cup D \cup E = \mathcal{E}.$$
უფრო მეტიც,
$$A' = B \cup C,$$
ამიტომ
$$A' = B \cup D \cup E.$$



ნახ. 4.2

ახლა ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ ვიგულისხმებთ
$$A = X \cap Y, \ B = X \cap Y', \ D = X' \cap Y \text{ და } E = X' \cap Y',$$
მაშინ მოთხოვნილი პირობები შესრულდება და ამიტომ საჭირო შედეგი მაშინვე გამომდინარეობს წინა მსჯელობებიდან.

მაგალითი 4.5. ნებისმიერი X და Y სიმრავლეებისთვის მართებულია თანაფარდობა
$$(X \cap Y)' = X' \cup Y'.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

$$x \in (X \cap Y)' \Longleftrightarrow x \in (X \cap Y') \cup (X' \cap Y) \cup (X' \cap Y') \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in (X \cap Y') \cup (X' \cap Y') \cup (X' \cap Y) \cup (X' \cap Y') \Longleftrightarrow$$

(ერთი წევრი გამეორებულია. ეს შესაძლებელია, რადგან $A = A \cup A$ ნებისმიერი A-თვის)

$$\Longleftrightarrow x \in \big((X \cap Y') \cup (X' \cap Y')\big) \cup \big((X' \cap Y) \cup (X' \cap Y')\big) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in \big((X \cup X') \cap Y'\big) \cup \big(X' \cap (Y \cup Y')\big) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in (\mathcal{E} \cap Y') \cup (X' \cap \mathcal{E}) \Longleftrightarrow x \in Y' \cup X' \Longleftrightarrow x \in X' \cup Y',$$

ამრიგად, $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$.

4.5 მაგალითში მიღებულ და მის მსგავს შედეგს (იხ. 4.5 სავარჯიშო) **დე მორგანის კანონები** ეწოდება. ეს კანონები მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მატემატიკურ ლოგიკაში.

4.1–4.5 მაგალითების თანმიმდევრობა გვიჩვენებს, როგორ შეიძლება განვავითაროთ მათემატიკური თეორია მარტივი თეორემების დამტკიცებების გამოყენებით და გამოვიყვანოთ ისეთი მნიშვნელოვანი შედეგები, როგორიც დე მორგანის კანონებია. ვიდრე ამ თავის დასკვნით ნაწილზე გადავალთ, შევეცადოთ გადავწეროთ 4.2–4.5 მაგალითებში განხილული ამოცანების დამტკიცებები ფორმალური სახით, როგორც ეს 4.1 მაგალითში გავაკეთეთ. მოგვიანებით შემოვიტანთ საჭირო ტერმინოლოგიას, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოვიყენოთ უფრო მოკლე აღნიშვნები. დასაწყისში შემოვიტანთ ორ განსაზღვრებას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეები **არაეკვივალენტურია**, თუ ისინი არ არის ეკვივალენტური. ეს თვისება იმის ტოლფასია, რომ ერთ-ერთი სიმრავლე $A \setminus B$ ან $B \setminus A$ არაცარიელია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . მოცემული X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს X **სიმრავლის ხარისხი** ეწოდება და აღინიშნება $\mathcal{P}(X)$-ით. (ზოგიერთი ავტორი იყენებს 2^x აღნიშვნას. ამის მიზეზი გასაგები გახდება მოგვიანებით, როცა გავარჩევთ რამდენიმე მაგალითს.) ფორმალურად

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

კერძოდ, შევნიშნოთ, რომ რადგან $\varnothing \subseteq X$ და $X \subseteq X$, ამიტომ

$$\varnothing \in \mathcal{P}(X), \quad X \in \mathcal{P}(X).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.6. ვთქვათ, $A = \{1, 2, 3\}$, მაშინ

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\big\}.$$

ამ პარაგრაფს დავასრულებთ დამტკიცების ორი ირიბი მეთოდის განხილვით. პირველი მეთოდი არის საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი. გავიხსენოთ რასელის პარადოქსი (1.1. მაგალითი):

$$F \in F \Longrightarrow F \notin F \text{ და } F \notin F \Longrightarrow F \in F.$$

თუ აღვნიშნავთ $F \in F$ მტკიცებულებებს P-ით, მაშინ მივიღებთ:

$$P \text{ მართებულია } \Longrightarrow P \text{ მცდარია და } P \text{ მცდარია} \Longrightarrow P \text{ მართებულია.}$$

მათემატიკის საფუძველს წარმოადგენს ვარაუდი იმის შესახებ, რომ არ შეიძლება არსებობდეს მტკიცებულება, რომელიც არის ჭეშმარიტი და რომელიც არის მცდარი (ე. ი. ლოგიკური სისტემა უნდა იყოს შინაარსიანი. ჩვენ უარვყოფთ რასელის სიმრავლეს იმიტომ, რომ მისი განსაზღვრება უსაფუძვლოა განსახილველი აზრით.)

ვთქვათ, გვაქვს გამონათქვამთა $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ერთობლიობა და გვინდა დავამტკიცოთ (P_1 ჭეშმარიტია და P_2 ჭეშმარიტია და ... და P_n ჭეშმარიტია) $\Longrightarrow Q$ ჭეშმარიტია, ან, უფრო მარტივად,

$$(P_1 \text{ და } P_2 \text{ და } \ldots \text{ და } P_n) \Longrightarrow Q.$$

თუ დავუშვებთ გამონათქვამს (P_1 და P_2 და ... და P_n და არა Q), ე. ი. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ჭეშმარიტია, ხოლო – Q მცდარი და აქედან გამოვიტანოთ რაიმე P მტკიცებულება, რომელიც ერთდროულად ჭეშმარიტიც არის და მცდარი, მაშინ ლოგიკური სისტემა, დაფუძნებული (P_1 და P_2 და ... და P_n და არა Q) გამონათქვამზე, დაუშვებელია. მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$(P_1 \text{ და } P_2 \text{ და } \ldots \text{ და } P_n) \Longrightarrow Q.$$

რადგან (არა Q) დაშვებას მივყავართ წინააღმდეგობამდე. ზემოთ ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.7. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისთვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავუშვათ, რომ $\mathcal{E}$, $\varnothing$ და ა. შ. სიმრავლეებს თვისებები (ე. ი. განსაზღვრებები) შესრულებულია და, რომ $A \subset B$ და $B' \nsubseteq A'$ (ზემოთ აღწერილი სიტუაციის ტერმინებში Q არის $B' \subseteq A'$). მაშინ

$$A \subseteq B \Longrightarrow \text{თუ } x \in A, \text{ მაშინ } x \in B; \tag{$*$}$$

$B' \subseteq A \Longrightarrow$ არსებობს რაღაც ისეთი y ელემენტი, რომ

$$y \in B' \text{ და } y \notin A'.$$

($*$)-დან გამომდინარეობს თანაფარდობა

$$y \in A \Longrightarrow y \in B \Longrightarrow y \in B' \text{ და}$$

$$y \in B \Longrightarrow y \in B' \cap B = \varnothing (\text{წინააღმდეგობა}),$$

მაშასადამე, მიღებული $B' \nsubseteq A'$ მცდარია, ამიტომ $B' \subseteq A'$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$B' \subseteq A' \Longrightarrow A \subset B.$$

მაშასადამე, გვაქვს:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'.$$

ეს მაგალითი ასევე ვრცელდება ირიბი დამტკიცების მეორე მეთოდზეც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.8. ვთქვათ, P არის გამონათქვამი "დღეს ხუთშაბათია", ხოლო Q – "დღეს კვირის დღეა". მაშინ $(P \Longrightarrow Q)$ აღნიშნავს "თუ დღეს ხუთშაბათია, მაშინ ეს კვირის დღეა", ხოლო (არა $Q \Longrightarrow$ არა P) იქნება "თუ დღეს არ არის კვირის დღე, მაშინ ეს დღე არ არის ხუთშაბათი".

ეს ორი გამონათქვამი ეკვივალენტურია (ე. ი. ისინი ერთდროულად ან ჭეშმარიტია ან მცდარია).

ამ თვალსაზრისით ვენის დიაგრამები შეიძლება გამოვიყენოთ სიტუაციის გასარკვევად, მაგრამ ყველა შედეგი გამოტანილი უნდა იყოს ამოცანაში მოცემული ვარაუდებიდან. უნდა გვახსოვდეს, რომ თუ რაიმე მტკიცებულება ჭეშმარიტია, უნდა შეგვეძლოს მისი დამტკიცება. თუ მტკიცებულება მართლაც ცხადია, მაშინ ადვილად დავამტკიცებთ მას, თუ არა, მაშინ, როგორც ჩანს, ეს არცისე ცხადია, როგორც გვეგონა და სრულიად შესაძლებელია, მცდარიც იყოს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4.1.

1. დავამტკიცოთ, რომ

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

2. ვთქვათ, მოცემულია A, B, C: $C \subseteq B$ სიმრავლეები. დავამტკიცოთ, რომ
ა) $A \cap C \subseteq A \cap B$; ბ) $A \cup C \subseteq A \cup B$; გ) $A \setminus B \subseteq A \setminus C$; დ) $C \setminus A \subseteq B \setminus A$; ე) $B' \setminus A \subseteq C' \setminus A$.

3. დავამტკიცოთ, რომ თუ $A \subseteq B$, მაშინ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

4. აჩვენეთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5. დავამტკიცოთ, რომ

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

(მითითება: აჩვენეთ, რომ $(A \cup B) \cup (A' \cap B') = \mathcal{E}$ და $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \varnothing$.)

6. დაამტკიცეთ შემდეგი მტკიცებულებების ეკვივალენტურობა, ე. ი. რომ თითოეულიდან გამომდინარეობს მეორე
ა) $A \cup B = \mathcal{E}$; ბ) $A' \subseteq B$; გ) $A' \cap B' = \varnothing$.

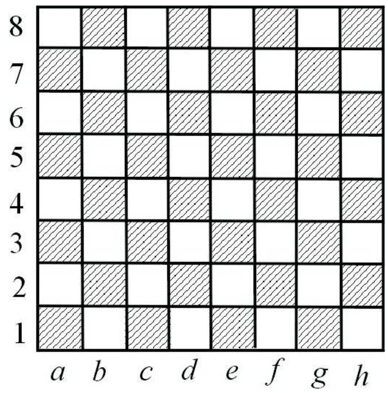
7. შემდეგი მტკიცებულებებიდან რომელია მართებული:
ა) $0 \in \varnothing$; ბ) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$; გ) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; დ) $\varnothing \subseteq \mathcal{E}$; ე) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$?
ამ კითხვის პასუხები შეადარეთ 2.1(6) სავარჯიშოს პასუხებს. $\in$ და $\subseteq$ სიმბოლოებს შორის არსებობს კავშირი, მაგრამ ისინი ერთიდაიგივე არ არის.

8. ვაჩვენოთ, რომ სასრული A სიმრავლისთვის $|2^A| = 2^{|A|}$. (მითითება: ამოწერეთ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ სიმრავლე და განიხილეთ მისი ქვესიმრავლეები.)

§ 5. სიმრავლეთა ნამრავლი

აქამდე ჩვენ ძირითადად არსებული სიმრავლეებიდან უფრო მცირე ზომის სიმრავლეების აგებას ვიხილავდით, ახლა განვიხილავთ დიდი სიმრავლეების აგების

ერთ-ერთ ყველაზე უფრო ზოგად ხერხს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ჭადრაკის დაფის უჯრედებზე განთავსებული სიმრავლე (სურ. 1.10).



ნახ. 5.1

განვიხილოთ სვეტების სიმრავლე, რომლებსაც აღვნიშნავთ $a, b, \ldots, h$-ით (მარცხნიდან მარჯვნივ), სტრიქონების სიმრავლე, რომლებსაც აღვნიშნავთ $1, 2, \ldots, 8$-ით (ქვემოდან ზემოთ). მაშასადამე, თითოეული უჯრა ცალსახად შეიძლება იყოს მოცემული ორი სიმბოლოთი: ერთი $F = \{a, b, \ldots, h\}$ სიმრავლიდან, მეორე $R = \{1, 2, \ldots, 8\}$ სიმრავლიდან. მაგალითად, $a1$, $b3$, $h5$, $e3$ და ა. შ. ამგვარად, სვეტების F სიმრავლისა და სტრიქონების R სიმრავლისაგან შევქმენით დაფის ყველა უჯრის სიმრავლე.

ეს მაგალითი თავის თავში შეიცავს ახალ იდეებს, რომლებიც სიმრავლეთა ნამრავლის აგებისას გამოიყენება. ამასთან, იმისათვის, რომ შეგვეძლოს განსახილველი სიტუაციის განზოგადება, უნდა ვიყოთ ცოტა უფრო მეტად ზუსტები.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . აღვნიშნოთ n-ელემენტიანი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმდევრობა $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ით. აქ მრგვალი ფრჩხილები გამოყენებულია იმისათვის, რომ მივუთითოთ იმ რიგზე, რომლითაც ჩაწერილია ელემენტები. მაგალითად, თუ $x - 1 \neq x_2$, მაშინ $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$ არ ემთხვევა $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მიმდევრობას. ვუწოდოთ n **სიგრძის ნაკრები**. 2 სიგრძის ნაკრებს ვუწოდოთ წყვილი.

ვთქვათ, მოცემულია $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n სიმრავლე. ყველა $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ნაკრების ისეთ სიმრავლეს, სადაც $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$-ს $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სიმრავლეთა **პირდაპირი ნამრავლი** ეწოდება. და აღინიშნება $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ სიმბოლოთი. სხვა აღნიშვნების გამოყენების ამ ნამრავლს ჩავწერთ უფრო მოკლედ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.1. ვთქვათ, $X = \{0, 1\}$, $Y = \{x, y\}$, $z = \{0, 1, 2\}$, მაშინ

$$X \times Y = \big\{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y)\big\},$$
$$Y \times X = \big\{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1)\big\}.$$

ამგვარად, $X \times Y \neq Y \times X$.

მაგალითად,

$$X \times Z = \big\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\big\}$$

$(0,1)$ და $(1,0)$ $X \times Z$ სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტებია. ჭადრაკის დაფის მაგალითზე F და R სიმრავლეები არ იკვეთებიან. $(e,3) \in F \times R$, ხოლო $(3,e) \notin F \times R$ $(\in R \times F)$, ამიტომ $3e$ ჩანაწერი უნდა უარვყოთ, როგორც არასწორი ჭადრაკის დაფისთვის.

ხშირად გამოვიყენებთ პირდაპირ ნამრავლს ერთნაირი სიმრავლეებისთვის. ამ შემთხვევაში უფრო მოსახხერხებელი იქნება $A \times A \times \cdots \times A$ ჩავწეროთ A^n სახით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 5.1.

1. ვთქვათ, $X = \{a,b,c\}$ და $Y = \{a,b,e,f\}$. იპოვეთ $X \times Y$ და Y^2.

2. დაამტკიცეთ, რომ $A \subseteq X$ და $B \subseteq Y$, $A \times B \subseteq X \times Y$.

3. დაამტკიცეთ, რომ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი არაცარიელი A და B სიმრავლეებისთვის სრულდება

ა) $\varnothing \times A = \varnothing$; ბ) $\mathcal{E} \times A \neq A$; გ) $A \subseteq A \times A$; დ) $|A \times \{x\}| = |A|$; ე) $A \times B = B \times A$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = B$.

მიმართებები

გამოთვლებში ხშირად საჭიროა ავირჩიოთ სიმრავლეთა ისეთი ელემენტები, რომლებიც აკმაყოფილებს რაიმე “მიმართებას”. ეს ცნება საკმაოდ ზოგადია. ამიტომ იგი ფართოდ გამოსაყენებელია. ბუნებრივია, მიმართების შესაბამისი შერჩევისას მისი არგუმენტები ერთიმეორესთან შეიძლება დაკავშირებული იყოს საკმაოდ მარტივად. აუცილებელი არა რის ისინი დაკავშირებული იყოს რაღაც მარტივი ან ცხადი ფორმულით, თუმცა, ისეთ სიტუაციებში, როცა მოთხოვნილია რაიმე გამოთვლების ჩატარება. ზოგჯერ შეიძლება ვიპოვოთ მიმართების მოხერხებული აღწერა.

ვიდრე ამ საკითხს მათემატიკური პოზიციიდან მივუდგებით, განვიხილოთ რამდენიმეიდეა, რომლებიც წარმოიქმნება შემდეგი მარტივი სიტუაციის განხილვიდან (რომლებსაც, აგრეთვე, მივყავართ მიმართების ცნების შემოტანამდე). ვთქვათ, რაღაც გვაქვს პროგრამების P სიმრავლე. მონაცემთა მნიშვნელობების D სასრული სიმრავლე და შედეგების R სიმრავლე. თუ D-დან ავირჩევთ კონკრეტულ მნიშვნელობას, იგი შეიძლება გამოვიყენოთ P-დან არებულ ზოგიერთ პროგრამაში და P-დან აღებული თითოეული პროგრამისთვის არებობს მნიშვნელობათა ერთობლიბა D სიმრავლიდან, რომლებიც ამ პროგრამაში გამოიყენება. ამგვარად, გვაქვს შესაბამისობა მონაცემთა მნიშვნელობებსა და პროგრამებს შორის. მაშასადამე, $D \times P$ სიმრავლეში არსებობს ელემენტები, რომლებიც საინტერესოა გარკვეული თვალსაზრისით. ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ რაიმე $p \in P$ პროგრამას, მაშინ ის D-დან არებულ მონაცემთა შესაბამის მნიშვნელობებს დააკავშირებს R სიმრავლიდან აღებულ შედეგებთან. შეიძლება განვიხილოთ მონაცემები, რომლებსაც P მიჰყავთ გაჩერებამდე ან განვიხილოთ შედეგები, რომლებიც არ შეიძლება მივიღოთ P-დან. მაშასადამე, ჩვენ მივდივართ $(D \times R)$ სიმრავლის ქვესიმრავლეებთან D-დან R-კენ გადამუშავების დროს წარმოიქმნება რაღაც ასოციაციები, რომელბიც შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს ტერმინოლოგიის დამახსოვრებისთვის.

გადავიდეთ ფორმალურ განხილვებზე.

§ 1. ძირითადი ცნებები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სიმრავლეებზე განსაზღვრული **n-ადგილიანი R მიმართება** ეწოდება $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ პირდაპირი ნამრავლის ქვესიმრავლეს.

ამრიგად, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტები დაკავშირებული R მიმართებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, სადაც $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ დალაგებული набор-ია.

იფრო ხშირად გვხვდება მიმართება, როცა $n = 2$. ამ შემთხვევაში მას ეწოდება **ბინარული მიმართება**. ამრიგად, A და B სიმრავლეებს შორის ბინარული მიმართება არის $A \times B$ პირდაპირი ნამრავლის ქვესიმრავლე. თუ ეს სიმრავლეები ეკვივალენტურია (ვთქვათ, A-ს ტოლია), მაშინ ვიტყვით, რომ A^2-ს ქვესიმრავლე განსაზღვრავს მიმართებას A სიმრავლეზე.

მიმართებები არ წარმოადგენს რაიმე ახალს. შეიძლება ავაგოთ მიმართებები, რომლებიც უეჭველად ნაცნობი იქნება მკითხველისთვის. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. ვთქვათ, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ და $R = \{(x, y) :\ x,\, y \in A;\ x$ არის y-ის ჯერადი$\}$. მაშინ R მიმართება შეიძლება ჩავწეროთ ცხადად:

$$R = \Big\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),(2,2),(4,2),\\ (6,2),(8,2),(3,3),(6,3),(4,4),(8,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8)\Big\}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.2. ვთქვათ, $A = \{a, b, c, d\}$. განვიხილოთ მისი ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე $\mathcal{P}(A)$. მასზე განვსაზღვროთ ბინარული მიმართება $R = \{(X, Y) : X,\, Y \in \mathcal{P}(A),\ X \subset Y\}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. განვიხილოთ ჭადრაკის დაფა. ვთქვათ, $F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ და, ვთქვათ,

$$S = F \times R.$$

ამრიგად, S არის ჭადრაკის დაფის უჯრედების სიმრავლე. უჯრედები აღინიშნება (x, y) წყვილებით, სადაც $x \in F$, $y \in R$. S სიმრავლეზე განვსაზღვროთ C ბინარული მიმართება: $(s, t) \in C$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა s და t არის S სიმრავლის ელემენტები და ეტლს შეუძლია ერთი სვლით გაიაროს s-დან t-მდე ცარიელ დაფაზე. (გავიხსენოთ, რომ ეტლს შეუძლია მოძრაობა ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მიმართულებით.) ამიტომ იცვლება ან ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური კოორდინატი და არა ორივე ერთდროულად, ე. ი. $C \in S \times S$ და

$$C = \Big\{\big((f_s, r_s,(t_f, r_t)\big) :\ \big(f_s = f_t \text{ და } r_s \neq r_t\big) \text{ ან } \big(f_s \neq f_t \text{ და } r_s = r_t\big)\Big\}.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ნებისმიერი A სიმრავლისთვის განვსაზღვროთ J_A **იგივური მიმართება** და U_A **უნივერსალური მიმართება** შემდეგნაირად:

$$J_A = \big\{(a, a) :\ a \in A\big\}, \quad U_A = \big\{(a, b) :\ a \in A,\ b \in A\big\}.$$

ამრიგად, $U_A = A^2$. რადგან $\varnothing \subseteq A^2$, ამიტომ $\varnothing$ ცარიელი სიმრავლეც წარმოადგენს ბინარული მიმართებას და მას ეწოდება **ცარიელი მიმართება**.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . A და B სიმრავლეებს შორის ყოველ R ბინარულ მიმართებას დავუკავშიროთ ორი სიმრავლე – $\mathcal{D}(R)$ განსაზღვრის არე და $\mathcal{R}(R)$

მნიშვნელობათა არე. ისინი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\mathcal{D}(R) = \{x : (x,y) \in R\}, \quad \mathcal{R}(R) = \{y : (x,y) \in R\}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. ზემოთ განხილულ 1.1 მაგალითში

$$\mathcal{D}(R) = A, \quad \mathcal{R}(R) = A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.4. დავუშვათ, რომ გვაქვს რაღაც პროგრამა, რომელიც $A = \{1,2,3,4,5\}$ სიმრავლიდან კითხულობს ორ x და y რიცხვს და თუ $x < y$, ბეჭდავს ისეთ z რიცხვს (ასევე A სიმრავლიდან), სადაც $x \leq z < y$. პროგრამა ჩერდება A-დან ყველა რიცხვის წაკითხვის შემდეგ. ეს ამოცანა განსაზღვრავს შემდეგ $P \subseteq A^2 \times A$ მიმართებებს:

$$\begin{aligned} P = \Big\{&((1,2,1),((1,3),1),((1,3),2),((1,4),1),((1,4),2),\\ &((1,4),3),((1,5),1),((1,5),2),((1,5),3),((1,5),4),\\ &((2,3),2),((2,4),2),((2,4),3),((3,4),3),((3,5),3),((3,5),4),\\ &((4,5),4),((2,5),2),((2,5),3),((2,5),4)\Big\}, \end{aligned}$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P) &= \Big\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,3),(2,5),\\ &\qquad (3,4),(3,5),(4,5)\Big\} \subset A^2,\\ \mathcal{R}(P) &= \{1,2,3,4\} \subset A. \end{aligned}$$

თითოეული მიმართება სიმრავლეს წარმოადგენს და შეგვიძლია დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნოთ, აგრეთვე არსებობს მიმართებების ბერძნული პატარა ასოებით აღნიშვნის პრაქტიკაც. მაგალითად, ρ, σ, τ. ხშირად იყენებენ შემდეგ აღნიშვნებს:

ა) $(a,b) \in \rho$, ე. ი. (a,b) არის ρ-ში.

ბ) $a\rho b$, ე. ი. a დაკავშირებულია b-თან ρ მიმართებით.

გ) $b \in \rho(a)$.

მოცემული ბინარული მიმართებიდან შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა მიმართებებიც.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, R არის ბინარული მიმართება. განვსაზღვროთ R^{-1} **შებრუნებული მიმართება**. შემდეგნაირად:

$$R^{-1} = \big\{(x,y) : (y,x) \in R\big\}.$$

ამრიგად, R^{-1} ელემენტების იგივე წყვილს აკავშირებს, მაგრამ სხვა დალაგებით.

მაშასადამე, თუ $R \subseteq A \times B$, მაშინ

$$R^{-1} \subseteq B \times A, \quad \mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{R}(R), \quad \mathcal{R}(R^{-1}) = \mathcal{D}(R).$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, R არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული რაიმე მიმართება. R მიმართების დამატება ვუწოდოთ ისეთ R' მიმართებას, რომელიც განსაზღვრული შემდეგნაირად: $xR'y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არ არის R მიმართებაში y-თან. ცხადია, სიმრავლის ენაზე გვექნება $R' = A^2 \setminus R$.

უფრო მოხერხებული იქნება $\mathcal{D}_R$ და $\mathcal{R}_R$ აღნიშვნების გამოყენება $\mathcal{D}(R)$ და $\mathcal{R}(R)$ აღნიშვნების ნაცვლად.

სავარჯიშო 1.1.

1. ვთქვათ, $X = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\rho = \{(x, y) :\ x, y \in X,\ x < y\}$. ამოწერეთ ρ-ს და ρ^{-1}-ს ყველა ელემენტი.

2. ვთქვათ, $A = \{a, b, c\}$ და $\mathcal{E} = \mathcal{P}(A)$. ამოწერეთ $\mathcal{E}$-ზე განსაზღვრული $\subset$ და $\subseteq$ მიმართებების ყველა ელემენტი.

3. $A = \big\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\big\}$. R არის A-ზე განსაზღვრული ბინარული მიმართება:
$$R = \big\{(x, y) :\ x, y \in A,\ x^2 = y\big\}.$$
აღწერეთ R სიმრავლე. რამდენ ელემენტს შეიცავს F^{-1}, R'?

4. ვთქვათ, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ρ მიმართება:
$$\rho = \big\{(x, y) :\ x, y \in B \text{ და } x + y = 7\big\}.$$
აღწერეთ ρ, როგორც სიმრავლე. რა კავშირია ρ და ρ^{-1} მიმართებებს შორის?

5. ვთქვათ, $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^2$ და $\rho = \{(x, y) :\ x < y\}$. აღწერეთ ρ-ს დამატება ρ' ("ნაკლებია" მიმართების გამოყენების გარეშე).

6. ვთქვათ, $\sigma = \rho = \{(x, y) :\ x \subset y\}$. შეიძლება თუ არა σ' აღვწეროთ იგივე ხერხით, როგორც ρ' წინა ამოცანაში? დაასაბუთეთ.

7. ვთქვათ, ქუჩაზე არის ჩვეულებრივი წესით დანომრილი 30 სახლი: კენტი ნომრები ერთ მხარეს, ლუწი ნომრები მეორე მხარეს. ვთქვათ, h_n აღნიშნავს n-ნომრიან სახლში მცხოვრებ მოსახლეს. ამ ქუჩის მოსახლეობის სინრავლეზე განვსაზღვროთ N მიმართება: h_i არის h_j-თან N მიმართებები, თუ ისინი მეზობლები არიან. სიმბოლოების საშუალებით აღწერეთ N მიმართება.

8. განვიხილოთ ჭადრაკის დაფის უჯრედების S სიმრავლეზე მასზე განვსაზღვროთ K მიმართება: x უჯრა არის y უჯრასთან K მიმართებაში, თუ ცხენს შეუძლია გადავიდეს x-დან y-ზე ერთი სვლით. აღწერეთ K მიმართება სიმბოლოების საშუალებით.

9. ვთქვთ, G არის მიმართება S-ზე განსაზღვრული მიმართება: x მიმართებაშია y-თან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის თეთრი პაიკის საწყისი პოზიცია, ხოლო y არის უჯრა, რომელიც პაიკის პირველი სვლა მთავრდება. აღწერეთ G, $\mathcal{D}(G)$ და $\mathcal{R}(G)$ სიმრავლეები.

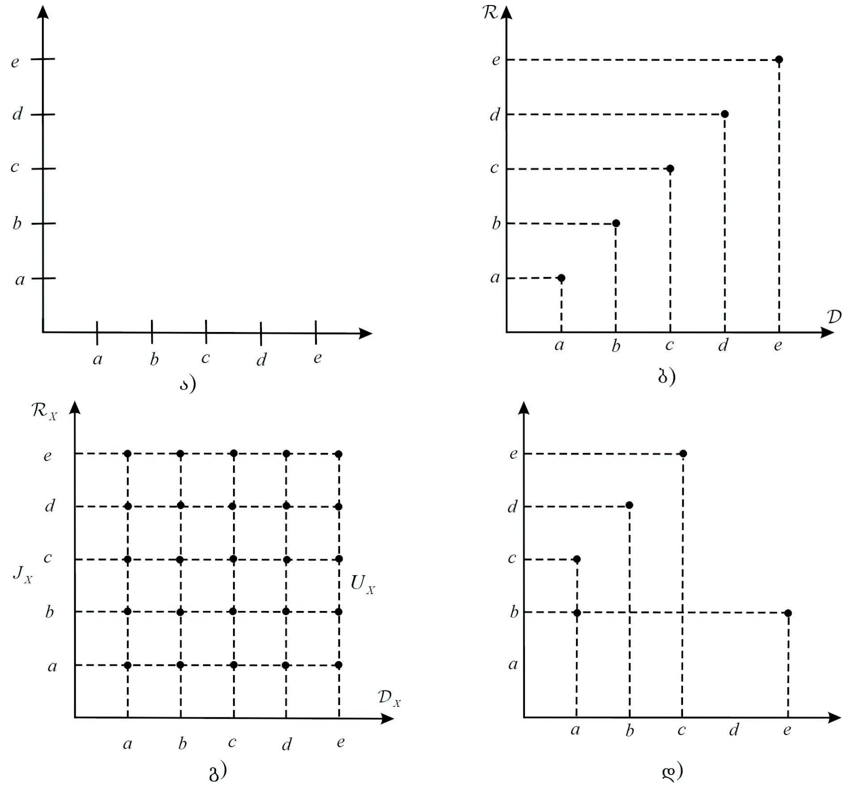
§ 2. გრაფიკული წარმოდგენები

ამოცანის ამოხსნის დროს პირველ ეტაპზე ხშირად მოსახერხებელია დახაზვა იმისათვის, რომ უფრო ნათლად დავინახოთ ამოცანის ყველა კომპონენტი. ეს

განსაკუთრებით მოსახერხებელია მიმართებების აღწერისთვის. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ მიმართებების აღწერის გრაფიკულ მეთოდებს.

განვიხილოთ $X=\{a,b,c,d,e\}$ სიმრავლეს და J_X, U_X და R მიმართებები: $R=\big\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,e),(e,b)\big\}$.

დავხაზოთ ორი, ურთიერთმართობული ღერძი: OX – ჰორიზონტალური, OY – ვერტიკალური. თითოეულ მათგანზე წერტილებით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ელემენტები.

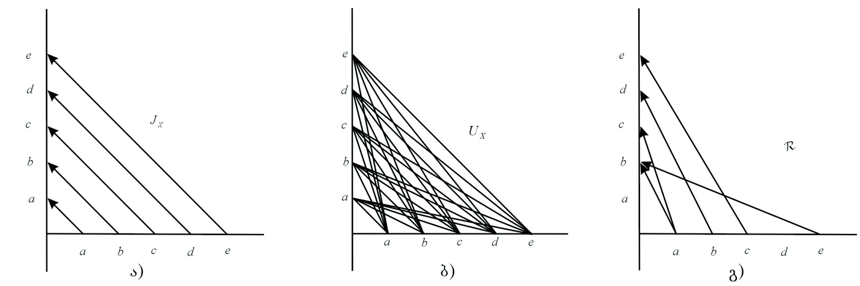


ნახ. 2.1

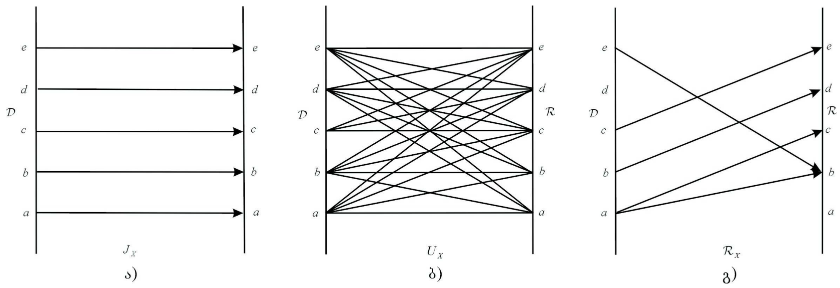
სიმრავლეები, რომელბიც შეესაბამება J_X, U_X და R-ს გამოსახულია 2.1(ბ), 2.1(გ), 2.1(დ) ნახაზებზე.

მიმართების გრაფიკული წარმოდგენის მეორე მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: წერტილების ნაცვლად ისრებით შევაერთოთ $x \in \mathcal{D}$ და $y \in \mathcal{R}$. ელემენტები (ნახ. 2.2(ა), 2.3(ბ), 2.3(გ), 2.3(დ))

განსაზღვრის $\mathcal{D}_X$ არე და მნიშვნელობათა $\mathcal{R}_X$ არე შეიძლება წარმოვადგინოთ პარალელურ ღერძებზე, როგორც 2.3 ნახაზზეა ნაჩვენები:

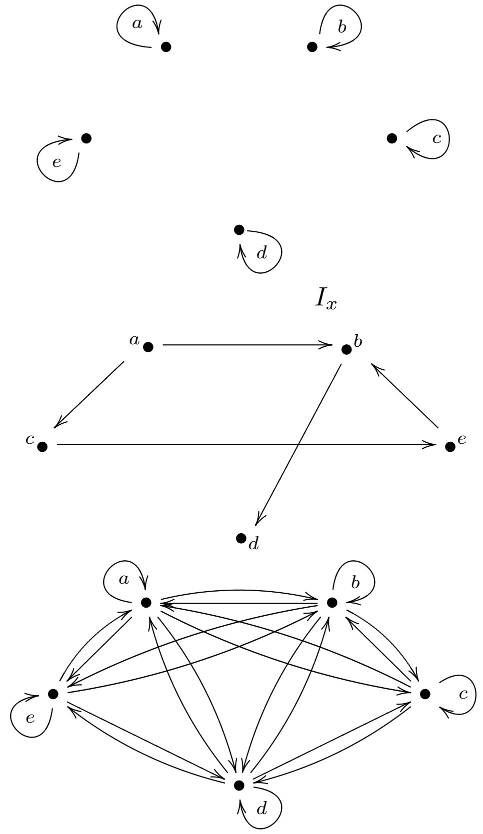


ნახ. 2.2



ნახ. 2.3

არსებობს ასეთი მეთოდიც, როცა X სიმრავლე მოცემულია წერტილებით, ხოლო მასზე განსაზღვრული მიმართება ნაჩვენებია ისრებით. 2.4 ნახაზზე მოცემულია J_X, U_X და R მიმართებები ამგვარი გრაფიკული მეთოდით



ნახ. 2.4

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2.1.

1. დახაზეთ დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს სავარჯიშო 2.1(1)-ში განხილულ ρ მიმართებას.

2. დახაზეთ დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს სავარჯიშო 2.1(3)-ში განხილულ მიმართებას.

3. დახაზეთ დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს სავარჯიშო 2.1(5)-ში განხილულ N მიმართებას, თუ ქუჩაზე არის ათი სახლი.

§ 3. მიმართებების თვისებები

ცხადია, რომ ზოგადი მიმართებები, რომლებიც სიმრავლეთა პირდაპირი ნამრავლის მხოლოდ ქვესიმრავლეებია, არ არის განსაკუთრებით საინტერესო. მაგრამ, როცა მიმართებები აკმაყოფილებს ზოგიერთ დამატებით პირობებს, მათზე შეიძლება უფრო მეტი რამის თქმა. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ზოგიერთ იმ ძირითად თვისებებს, რომლებიც შეიძლება ჰქონდეს მიმართებას. ამბობენ, რომ თვისებას ადგილი აქვს მაშინ, თუ შესრულებულია შესაბამისი პირობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, ρ არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართება. მაშინ

ა) ρ **რეფლექსურია**, თუ $x\rho x$, ნებისმიერი $x \in A$;

ბ) ρ **სიმეტრიულია**, თუ $x\rho y$ მიმართება იწვევს $y\rho x$ მიმართებას.

გ) ρ **ტრანზიტულია**, თუ $x\rho y$ და $y\rho z$ მიმართებები იწვევს $x\rho z$ მიმართებას.

დ) ρ **ანტისიმეტრიულია**, თუ $x\rho y$ და $y\rho x$ მიმართებები იწვევს $x = y$ ტოლობას.

შემოტანილი ცნებები განვმარტოთ მაგალითებზე

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1.

1. $\rho = \big\{(x,y): \ x,y \in \mathbb{N}$ და გამყოფია y-ის$\big\}$, მაშინ ρ მიმართება

ა) რეფლექსურია, რადგან ნებისმიერი ნატურალური x რიცხვი თავის თავის გამყოფია, ე. ი. $x\rho x$, ნებისმიერი $x \in \mathbb{N}$;

ბ) სიმეტრიული არ არის, რადგან 3 გამყოფია 6-ის, მაგრამ 6 არ არის 3-ის გამყოფი, ე. ი. $x\rho y \not\Longrightarrow y\rho x$.

გ) ტრანზიტულია, რადგან თუ $y/x \in \mathbb{N}$ და $z/y \in \mathbb{N}$, მაშინ

$$\frac{z}{y} = \left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{z}{y}\right) \in \mathbb{N}.$$

ე. ი. $x\rho y, y\rho z \Longrightarrow x\rho z$.

დ) ანტისიმეტრიულია, რადგან თუ $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}$ და $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$, მაშინ $x = y$, ე. ი. $(x\rho y$ და $y\rho x) \Longrightarrow x = y$

2. $\sigma = \big\{(x,y): \ x,y \in \mathbb{N}, \ x \le y\big\}$, მაშინ σ

ა) რეფლექსურია, რადგან ნებისმიერი x-თვის $x \leq x$, ე. ი. $x\sigma x$, ნებისმიერი $x \in \mathbb{N}$.

ბ) არასიმეტრიულია, რადგან თუ $5 \leq 7$, მაგრამ $7 \nleq 5$, ე. ი. $x\sigma y \not\Longrightarrow y\sigma x$.

გ) ტრანზიტულია, რადგან თუ $x \leq y$ და $y \leq z$, მაშინ $x \leq z$, ე. ი. $(x\sigma y, y\sigma z) \Longrightarrow x\sigma z$.

დ) ანტისიმეტრიულია, რადგან თუ $x \leq y$ და $y \leq x$, მაშინ $x = y$, ე. ი. $(x\sigma y$ და $y\sigma x) \Longrightarrow x = y$.

3. $\tau = \big\{(x,y):\ x,y \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ და x და y-ს საერთო გამყოფი აქვს$\big\}$, მაშინ τ

ა) რეფლექსურია, ე. ი. $x\tau x$, ნებისმიერი $x \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

ბ) სიმეტრიული, ე. ი. $x\tau y = y\tau x$.

გ) არ არის ტრანზიტული რადგან 4-სა და 6-ის საერთო გამყოფია $2 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$-ის და 9-ის – $3 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, მაგრამ 4-სა და 9-ს საერთო გამყოფი არ აქვთ.

დ) არ არის ანტისიმეტრიული: $4\sigma 6$, $6\sigma 4$, მაგრამ $4 \neq 6$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2. ვთქვათ, P არის მთელი ხალხის სიმრავლე. განვსაზღვროთ ორი მიმართება

$$A = \big\{(x,y):\ x,y \in P,\ x \text{ არის } y\text{-ის წინაპარი}\big\}.$$

ეს მიმართება რეფლექსური არ არის, სიმეტრიული არ არის, ანტისიმეტრიულია, ტრანზიტულია.

$$S = \big\{(x,y):\ x,y \in P, \text{ და } x \text{ და } y \text{ საერთო მშობლები ჰყავთ}\big\}.$$

ცხადია, რომ A მიმართება რეფლექსურია, სიმეტრიულია, ტრანზიტულია.

შევნიშნოთ, რომ სიმეტრიულობისა და ანტისიმეტრიულობის თვისებები არ არის ურთიერთგამომრიცხავი. ნებისმიერი X სიმრავლისათვის J_X იგივური მიმართება არის სიმეტრიულიც და ანტისიმეტრიულიც. შეიძლება გვქონდეს მიმართება, რომელიც არც სიმეტრიულია და არც ანტისიმეტრიული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. ვთქვათ, P არის მთელი ხალხის სიმრავლე. განვსაზღვროთ B მიმართება

$$B = \big\{(x,y):\ x,y \in P,\ x \text{ არის } y\text{-ის ძმა}\big\}.$$

განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც ოჯახში არის ორი ძმა. p და q და ერთი და – r. B მიმართება არ არის სიმეტრიული, რადგან pBr მაგრამ არა rBp. ეს მიმართება, ასევე, არ არის ანტისიმეტრიული, რადგან pBq და qBp, მაგრამ p და q განსხვავებული (ნახ. 3.1)

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[rr] \arrow[dr] & & q \arrow[ll, bend right] \arrow[dl] \\
& r &
\end{tikzcd}$$

ნახ. 3.1

უფრო ზოგად სიტუაციაში შეგვიძლია მიმართების ზემოთ განხილული თვისებების ინტერპრეტაცია დიაგრამების აგების გზით:

ა) მიმართება რეფლექსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული კვანძისთვის (წერტილისთვის) დიაგრამაზე არსებობს ისარი, რომელიც იწყება და მთავრდება ამ კვანძზე.

ბ) მიმართება სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული ისრისთვის, რომელიც ორ კვანძს აერთებს, აგრეთვე, არსებობს ამ კვანძების საწინააღმდეგო მიმართულებით შემაერთებელი ისარი.

გ) მიმართება ტრანზიტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y კვანძების ყოველი წყვილისთვის, რომელბიც შეერთებულია ერთმანეთთან ისრების მიმდევრობით: x-დან a_1-მდე, a_1-დან a_2-მდე, $\ldots$, a_n-დან y-მდე, არსებობს, აგრეთვე, x-ის y-თან შემაერთებელი ისარი.

დ) მიმართება ანტისიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არსებობს ურთიერთსაწინააღმდეგოისრების წყვილით შეერტებული ორი სხვადასხვა კვანძი.

არსებობს მიმართების ბევრი სხვა თვისება, რომლებიც შეიძლებოდა განგვეხილა, მაგრამ, ზემოთ აღნიშნული თვისებები არს უფრიო მნიშვნელოვანი და ხშირად იქნება შემდგომში გამოყენებული.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.1.

1. არის თუ არა შემდეგი მიმართებები რეფლექსური, სიმეტრიული, ტრანზიტული ან ანტისიმეტრიული:

ა) $R = \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{Z}, a-b \text{ არის ლუწი}\}$.

ბ) $A = \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{N}, a+b \text{ არის ლუწი}\}$.

გ) P მთელი ხალხის სიმრავლეა,
$B = \{(a,b) : a,b \in P\ a \text{ და } b\text{-ს საერთო წინაპარი ჰყავთ}\}$.

დ) $D = \{(a,b) :\ a,b \in P\ a \text{ არის } b\text{-ს მშობელი}\}$.

ე) $M = \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{Z},\ a = 2b\}$.

ვ) $Q = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z},\ a \text{ იყოფა } b\text{-ზე}\}$.

ზ) $E = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ a \text{ ყოფს } b\text{-ს}\}$.

თ) $F = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N},\ a \text{ ყოფს } b\text{-ს}\}$.

ი) $L = \{a, b, c\}$, მიმართება L-ზე:

$$\mathcal{A} = \big\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,a)\big\}.$$

2. შემდეგი მტკიცებულება არის მცდარი: სიმეტრიული და ტრანზიტული მიმართება არის რეფლექსური, რადგან aRb და bRa იწვევს aRa-ს. იპოვეთ შეცდომა. $\{1, 2, 3\}$ სიმარვლეზე განსაზღვრეთ მიმართება, რომელიც იქნება სიმეტრიული, ტრანზიტული და არ იქნება რეფლექსური.

3. ვთქვათ, ρ არის მიმართება A და B სიმრავლეებს შორის. თუ $a \in A$, მაშინ $\rho(a)$-ით აღვნიშნოთ $\{b:\ a\rho b\}$ სიმრავლე. $\rho(a)$ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე. ვთქვათ, $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია შემდეგი მიმართებები:

$$\rho = \{(a,b):\ a < b\}, \quad \sigma = \big\{(a,b): b-1 < a < b+2\big\},$$
$$\tau = \{(a,b):\ a^2 \le b\}, \quad \delta = \big\{(a,b):\ |a| = |b|\big\}.$$

იპოვეთ შემდეგი სიმრავლეები

ა) $\rho(0)$; ბ) $\sigma(0)$; გ) $\tau(0)$; დ) $\rho(1)$; ე) σ^{-1}; ვ) $\tau(-1)$; ზ) $\delta(0)$, $\delta(-2)$, $\delta(2)$.

§ 4. დაყოფა და ეკვივალენტობის მიმართება

მრავალ გამოთვლით ამოცანაში ვიღებთ დიდ სიმრავლეებს და ვყოფთ ისეთნაირად, რომ ყველა ჩვენთვის საინტერესო სიტუაცია შესაძლებელი იყოს გამოვიკვლიოთ რამდენიმე სწორად შერჩეულ მაგალითზე. მაგალითად, პროგრამირების ენის მახასიათებლების ხარისხობრივი შეფასების მიღების ერთ-ერთი გზა არის ამ ენაზე დაწერილი კონკრეტული პროგრამების განხილვა. მაგრამ თითოეული საინტერესო ენა, ისეთი მაღალი დონის ენების ჩათვლით, როგორიცაა პასკალი წარმოშობს უსასრულოდ ბევრ პროგრამას და, მაშასადამე, პროგრამები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ისინი სწორად ასახავდეს ენის ღირსებებს და ნაკლოვანებებს. უფრო კონკრეტულები რომ ვიყოთ, ვიგულისხმოთ, რომ ენას აქვს სამი ძირითადი სამართი სტრუქტურა, მისაწვდომობის ოთხი მეთოდი და მეტი მას არ აქვს არანაირი განსაკუთრებული თვისებები. ჩვენ შეგვიძლია მაგალითის სახით აგვეღო შვიდი პროგრამა, რომელთაგან თითოეული მათგანი შეიცავს ენის მხოლოდ ერთ მახასიათებელს (თუმცა, ზოგადად, თითოეული პროგრამა შეიძლება იყენებდეს ენის ერთზე მეტ მახასიათებელს). მაშინ ამ პროგრამების გამოკვლევა დაფარავდა ენის თვისებების უდიდეს ნაწილს. მათემატიკურად ეს შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A არაცარიელი სიმრავლეს, A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N})$ არის A სიმრავლის ისეთ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა, რომ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

ამ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობას A **სიმრავლის დაფარვა** ეწოდება.

მაგალითი 4.1. $\{A, B\}$ არის $A \cup B$ სიმრავლის დაფარვა.

თუ გამოვიყენებთ დაფარვის ცნებას, შეგვიძლია უზრუნველვყოთ, რომ არცერთი თვისება არ იყოს გამოტოვებული, რადგან თითოეული ელემენტი ეკუთვნის დაფარვის ერთ ქვესიმრავლე მაინც. ამასთან, ზოგადად, შეიძლება გვხვდებოდეს გამეორების შემთხვევებიც. თუ შემდეგში მოვითხოვთ, რომ დაფარვის ელემენტები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებოდეს, მაშინ, გამეორება აღარ იქნება, ე. ი. თითოეული ელემენტი მხოლოდ ერთ ქვესიმრავლეში შევა. აქედან წარმოიქმნება **დაყოფის** ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . არაცარიელი A სიმრავლის **დაყოფა** ეწოდება ქვესიმრავლეთა ისეთ $\mathcal{P}(A)$ ერთობლიობას, რომლისთვისაც სრულდება ორი პირობა

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$, $A_i \in \mathcal{P}(A)$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$.

ამგვარად, A სიმრავლე დაყოფილია ისეთნაირად, რომ მისი თითოეული ელემენტი ეკუთვნის დაყოფის მხოლოდ ერთ ქვესიმრვლეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.2. $\mathcal{E}$ უნივერსალური სიმრავლეს

1) $\{A, A'\}$ არის $\mathcal{E}$-ის დაყოფა;

ბ) $\{A \cap B, A \cap B', A' \cap B, A' \cap B'\}$ არის $\mathcal{E}$-ის დაყოფა;

გ) $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ არის $A \cup B$-ის დაყოფა.

A სიმრავლის $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ დაყოფა ამ სიმრავლეზე განსაზღვრავს გარკვეულ π მიმართებას:

$x\pi y$ მაშინ და მხლოდ მაშინ, როცა $x, y \in A_k$. ცხადია, ნებისმიერი $x \in A$ ელემენტისათვის გვექნება $x\pi x$. მაშასადამე, π მიმართება რეფლექსურია.

ვთქვათ, $x\pi y$ და $y\pi z$. პირველი მიმართება ნიშნავს $x, y \in A_k$, მეორე $-\, y, z \in A_k$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x, z \in A_k$. რაც ნიშნავს $x\pi z$ მიმართებას. აქედან ვასკვნით, რომ π მიმართება ტრანზიტულია.

ვთქვათ, $x\pi y$, ე. ი. $x, y \in \pi$, რაც იგივეა $y, x \in \pi$. ეს ნიშნავს, რომ $y\pi x$ და π მიმართება სიმეტრიულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებას ეკვივალენტობის მიმართება ეწოდება, თუ ის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3. ყველა სამკუთხედის სიმრავლეზე განვსაზღვროთ მიმართება

$$\big\{(x, y) :\ x \text{ და } y \text{ სამკუთხედებს აქვთ ერთნაირი ფართობი}\big\}.$$

ცხადია, ეს ეკვივალენტობის მიმართებაა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, ρ ეკვივალენტობის მიმართებაა A სიმრავლეზე. $x \in A$ ელემენტისათვის განვსაზღვროთ ეკვივალენტობობის $[x]$

კლასი

$$[x] = \{y : \ x\rho y\}.$$

ამგვარად, $[x]$ არის A-ს ყველა იმ ელემენტის სიმრავლე, რომლებიც ρ-ეკვივალენტურია x-ის იმ შემთხვევაში, როცა სიმრავლეზე განიხილება მხოლოდ ერთი ეკვივალენტობის მიმართება, შეგვიძლია გამოვიყენოთ აგრეთვე "$\equiv$" ("ეკვივალენტურია") აღნიშვნა, ამიტომ

$$[x] = \{y : \ x \equiv y\}.$$

ცალკეულ სპეციალურ შემთხვევაში ეკვივალენტობის აღნიშვნისთვის იყენებენ "$\sim$" სიმბოლოს. როდესაც განსაზღრულია ეკვივალენტობის მიმართება, მთელი სიმრაფვლის შემოწმების ნაცვლად შეგვიძლია ნებისმიერად ავირჩიოთ წარმომადგენლები (თითო-თითო ეკვივალენტობის კლასიდან), რაც ამარტივებს გამოთვლებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.4. ვთქვათ, s სიფქსირებული ნატურალური რიცხვია. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ρ_s მიმართება:

$$\rho_s = \big\{(x, y) : x - y = ns, \text{ სადაც } n \in \mathbb{Z}\big\}.$$

განვიხილოთ შემთხვევა $s = 10$. მაშინ

$$[1] = \{1, 11, 21, -9, -19, \ldots\},$$
$$[25] = \{35, 75, -105, -15, \ldots\} \text{ და ა. შ.}$$

სინამდვილეში არსებობს ეკვივალენტობის მხოლოდ ათი სხვადასხვა კლასი. $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ რიცხვები ეკუთვნის სხვადასხვა კლასებს. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ისინი ამ კლასების წარმომადგენლებად. ამ ეკვივალენტობის კლასების სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{Z}_{10}$-ით და ეწოდება ნაშთთა კლასები მოდულით 10. საზოგადოდ, ნებისმიერი $m \in \mathbb{N}$-თვის, $\mathbb{Z}_m$ ნაშთთა კლასები მოდულით m, შეიცავს m სხვადასხვა კლასს:

$$\mathbb{Z}_k = \Big\{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\Big\}.$$

განვიხილოთ $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ სიმრავლე. (a, b) წყვილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც a/b წილადი. $= bZ \times \mathbb{N}$ სიმრავლის ელემენტების აღნიშვნის ეს ორი ხერხი სხვადასხვაა, მაგრამ ისინი "იზომორფულია". შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია აღნიშვნის ერთი ფორმიდან მეორეზე გადასვლა.

არსებობს სხვადასხვა ელემენტი $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ სიმრავლეში, რომლებიც სასურველია განვიხილოთ, როგორც ერთი და იგივე, თუმცა ისინი სხვადასხვანაირად ჩაიწერება. ეს სირთულე რომ გადავლახოთ, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ეკვივალენტობის მიმართება შემდეგნაირად: $(a, b) \equiv (c, d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cdot d = b \cdot c$. ამ მიმართებით განსაზღვრულ ეკვივალენტობის კლასებს ეწოდება **რაციონალური რიცხვები**, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ $\mathbb{Q}$ სიმბოლოთი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{R}$ სიმბოლოთი. ეს რიცხვები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\ldots o d_n \ldots d_2 d_1 d_0 \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n \ldots,$$

სადაც ყოველი d_i და δ_j ეკუთვნის სიმრავლეს

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \mathbb{Z}_{10},$$

$d_n \neq 0$, გარდა $n = 0$ შემთხვევისა. დასაშვებია უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი. ნული d_n-ის წინ, ჩვეულებრივ გამოიტოვება.

A სიმრავლეზე განსაზღვრული ეკვივალენტობის ρ მიმართების **ინდექსი** ეწოდება ρ მიმართებით ინდუცირებულ A კლასებს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4.1.

1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ეკვივალენტობის მიმართება წარმოქმნის ისეთ დაყოფას, რომ ნებისმიერი $x, y \in A$ ელემენტებისთვის სრულდება ან $[x] = [y]$ ან $[x] \cap [y] = \varnothing$.

2. ვთქვათ, A სასრული სიმრავლეა. როგორი ეკვივალენტობის მიმართებები წარმოქმნის ეკვივალენტობის კლასების უდიდეს და უმცირეს.

3. თუ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ არის A სიმრავლის დაყოფა და A სასრულია, აჩვენეთ, რომ

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

§ 5. დალაგების მიმართება

რამდენადაც ტოლობის ცნებიდან წარმოქიმნება ეკვივალენტობის მათემატიკური ცნება, ზოგიერთი უტოლობა, ასევე შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც მოდელი მიმართებათა ფართო კლასებისთვის.

A სიმრავლეზე განსაზღვრულ რეფლექსურ, ტრანზიტულ და ანტისიმეტრიულ მიმართებების ნაწილობრივი დალაგება (ან დალაგება) ეწოდება. დალაგება (ანუ დალაგების მიმართება) არის $\leq$ მიმართების განზოგადება.

თუ განსაზღვრული $\leq$ მიმართება, მაშინ შეიძლება $<$ მიმართების განსაზღვრა შემდეგნაირად:

$$a < b \Longleftrightarrow a \leq b \ \text{ და } \ a \neq b.$$

ანალოგიურად, თუ მოცემულია $<$ მიმართება, მაშინ $\leq$ მიმართებაა განვსაზღვრავთ ასე:

$$a \leq b \Longleftrightarrow a < b \ \text{ ან } \ a = b.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.1. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი A სიმრავლე, მაშინ $\mathcal{P}(A)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $\subseteq$ მიმართება არის ტრივიალური დალაგების მიმართება ($X \subseteq X$ ყველა X-თვის, თუ $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq X$, მაშინ $X = Y$; თუ $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq Z$, მაშინ $X \subseteq Z$).

დალაგების მიმართებას ეწოდება **სრული**, თუ ნებისმიერი $x, y \in A$ ელემენტებისთვის სრულდება ან $X \subseteq Y$ ან $Y \subseteq X$ (ან ორივე).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.2. ცხადია, რომ მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე განსაზღვრული დალაგება არ არის სრული, ხოლო რიცხვთა ბუნებრივი დალაგება R ნამდვილ ღერძზე სრული.

შევნიშნოთ, რომ სრულად დალაგებულ სიმრავლეს **წრფივად დალაგებულსაც** უწოდებენ.

მათემატიკის შესწავლაში პროგრესის მიღწევებთამ ერთად ცხადი ხდება, რომ მათემატიკა არ არის ცალკეულლი იდეების ნაკრები, არამედ ერთიმეორესთან დაკავშირებული კონცეპტუალური ცნებების ერთობლიობაა, რომლებიც გამოიყენება მრავალი ერთიმეორისგან განსხვავებული სიტუაციები. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ძირითადი პრინციპი დადგენილი და გამოკვლეულია, იგი, ფაქტობრივად, ერთნაირად წყვეტს პრობლემებს ყველა ამ სხვადასხვა შემთხვევისთვის. შემეგი მაგალითი წარმოადგენს ამის მარტივ ილუსტრაციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.3. $\mathbb{N}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული დალაგების საფუძველზე შეგვიძლია ფორმალურად მივიღოთ ჩვეულებრივი დალაგების მიმართება $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ და $\mathbb{R}$ რიცხვთა სიმრავლეებზე.

განვიხილოთ $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე.მსჯელობის გამარტივების მიზნით $\mathbb{Z}$ დავყოთ შემდეგნაირად:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup A, \ \text{სადაც} \ A = \{-x : \ x \in \mathbb{N}\}.$$

განვსაზღვროთ $\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე მიმართება ყველა შესაძლო x და y ელემენტების განხილვით $\{\mathbb{N} \cup \{0\} \cup A\}$ დაყოფიდან.

თუ $x = y$, მაშინ $x \leq y$ და $y \leq x$. ვთქვათ, $x \neq y$

ა) თუ $x, y \in \mathbb{N}$, მაშინ $\mathbb{Z}$-ში დალაგება ისეთივეა, როგორც $\mathbb{N}$-ში.

ბ) თუ $x, y \in A$, მაშინ $x \leq y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $-y \leq -x$ $\mathbb{N}$-ში (მაგ., $-7 \leq -5$, რადგან $5 \leq 7$).

გ) თუ $x = 0$ და $y \in \mathbb{N}$, მაშინ $x \leq y$;

დ) თუ $x \in A$, $y = 0$, მაშინ $x \leq y$;

ე) თუ $x \in A$, $y \in \mathbb{N}$, მაშინ $x \leq y$.

$\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე დალაგებვისა და მთელ ღერძზე ჩვეულებრივი არითმეტიკული ოპერაციების საფუძველზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ დალაგება რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეზე: $a/b \leq c/d$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cdot d \leq b \cdot c$. ამ მტკიცებულებების შემოწმებას დავტოვებთ სავარჯიშოს სახით.

ბოლოს, განვსაზღვროთ დალაგების მიმართება ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე. განვიხილოთ ორი დადებითი რიცხვის ათობით წარმოდგენა

$$D = \cdots o d_n \cdots d_2 d_1 d_0 \delta_1 \delta_2 \cdots \ ,$$
$$C = \cdots o c_m \cdots c_2 c_1 c_0 \gamma_1 \gamma_2 \cdots \ .$$

თუ $d_i = c_i$ და $\delta_i = \gamma_i$ ყველა i-თვის, მაშინ $D = C$ და, მაშასადამე, $D \leq C$ და $C \leq D$. წინააღმდეგ შემთხვევაში

ა) თუ $d_n \neq 0$, $c_n \neq 0$ და $n \neq m$, მაშინ

$$D \leq C, \ \text{თუ} \ n < m \ \text{და} \ C \leq D, \ \text{თუ} \ m < n;$$

ბ) თუ $n = m$ და $d_i \neq c_i$, მაგრამ $d_j = c_j$ ყველა ისეთი j-თვის, რომ $i < j \leq n$, მაშინ

$$D \leq C, \ \text{თუ} \ d_i < c_i \ \text{და} \ C \leq D, \ \text{თუ} \ c_i < d_i;$$

გ) თუ $m = n$ და $d_i = c_i$ ყველა i-თვის, მაგრამ $\delta_k \neq \gamma_k$ რომელიმე k-თვის და $\delta_j = \gamma_j$ ყველა j-თვის, რომლისთვისაც $0 < j < k$, მაშინ

$$C \leq D, \ \text{ თუ } \ \gamma_k < \delta_k \ \text{ და } \ D \leq C, \ \text{ თუ } \ \delta_k < \gamma_k.$$

მკითხველს შეუძლია ეს შეამოწმოს დამოუკიდებლად. უარყოფითი რიცხვები ისევე შეიძლება გამოვიკვლიოთ, როგორც $\mathbb{Z}$-ში.

X სიმრავლის $\leq$ დალაგების მიმართებასთან ერთად ეწოდება **ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე** (აღინიშნება $(X, \leq)$-ით) ნებისმიერ $u \in (X, \leq)$ ელემენტს ეწოდება x და y ელემენტების **ზედა საზღვარი**, თუ სრულდება $x \leq u$ და $y \leq v$. ანალოგიურად, $v \in X$ ელემენტს ეწოდება x და y ელემენტების **ქვედა საზღვარი**, თუ სრულდება $v \leq x$ და $v \leq y$. x და y ელემენტების ყველა ზედა საზღვრის სიმრავლე წარმოადგენს X სიმრავლის ქვესიმრავლეს და დალაგებულია $\leq$ მიმართებით. თუ არსებობს ამ სიმრავლის ერთადერთი უმცირესი ელემენტი, ე. ი. თუ არსებობს ისეთი $\mu \in (X, \leq)$, რომლისთვისაც სრულდება: $x \leq \mu$, $y \leq \mu$, $\mu \leq u$ ნებისმიერი u ზედა საზღვრისთვის, მაშინ μ-ს უწოდებენ x და y ელემენტების **ზუსტ ზედა საზღვარს** (sup). ანალოგიურად განიმარტება x და y ელემენტების **ზუსტი ქვედა საზღვარი** (inf) (ე. ი. უდიდესი ქვედა საზღვარი).

შევნიშნოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე ბუნებრივი დალაგება განსაზღვრავს ახალ სიმრავლეებს. მათ უწოდებენ ინტერვალებს:

$$[a, b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x \leq b\}.$$

ეს არის ჩაკეტილი ინტერვალი (მონაკვეთი, სეგმენტი) a-დან b-მდე.

$$]a, b[= \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x < b\}$$

არის ღია ინტერვალი a-დან b-მდე. ორივე შემთხვევაში a-ს და b-ს ეწოდება **ბოლო წერტილები**.

ჩაკეტილი ინტერვალი თავისთავში შეიცავს ბოლო წერტილებს, ხოლო ღია ინტერვალი არ შეიცავს. ნახევრადღია ინტერვალები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$[a, b[\ = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x < b\},$$
$$]a, b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x \leq \}.$$

განვიხილოთ შემდეგი ინტერვალები:

$$]-\infty, a] = \{x : \ x \leq a\},$$
$$]-\infty, a[\ = \{x : \ x < a\},$$
$$[a, +\infty[\ = \{x : \ a \leq x\},$$
$$]a, +\infty[\ = \{x : \ a < x\},$$
$$]-\infty, +\infty[\ = \mathbb{R}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 5.1.

1. ვთქვათ, A ნებისმიერი სიმრავლეა, $\mathcal{P}(A)$ მისი ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, $\rho - \mathcal{P}() \times \mathcal{P}(A)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ბინარული მიმართებაა,

$(P,Q)\rho(X,Y)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(P\triangle Q) \subseteq (X\triangle Y)$. არის თუ არა ρ დალაგება მიმართება $(P\triangle Q = (P\cup Q)\setminus(\cap Q))$?

2. ვთქვათ, A ნებისმიერი სიმრავლეა, ხოლო σ – $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$ სიმრავლეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართება: $(P,Q)\sigma(X,Y)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P \leq X$ და $Q \leq Y$. არის თუ არა σ დალაგების მიმართება? (და თუ არის დალაგების მიმართება, არის თუ არა სრული?)

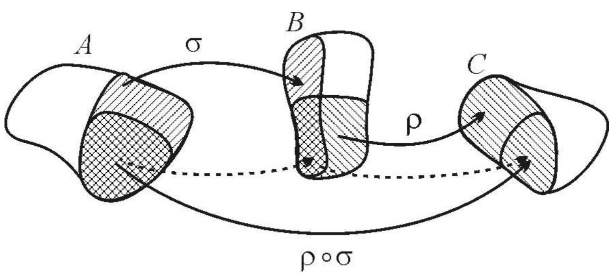
3.ვთქვათ, τ და π $\mathbb{N}^2$ სიმრავლეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართებებია: $(a,b)\tau(c,d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a\leq c$ და $b\leq d$; $(a,b)\pi(c,d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a\leq c$ და $b\geq d$. არის თუ არა τ და π ბინარული მიმართებები?

4. ვთქვათ, π არის $\mathbb{Q}$-ს დადებით რიცხვებზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართება: $(a/b)\pi(c/d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a\cdot d\leq b\cdot c$. აჩვენეთ, რომ π არის სრული დალაგების მიმართება.

§ 6. შედგენილი მიმართებები

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია A, B და C სიმრავლეები, σ მიმართება განსაზღვრული A და B სიმრავლეებს შორის, ხოლო ρ მიმართება – B და C სიმრავლეებს შორის. A და C სიმრავლეებს შორის განვსაზღვროთ მიმართება, რომელიც A-დან B-ში იმოქმედებს σ-ს საშუალებით, ხოლო B-დან C-ში ρ-ს საშუალებით. ასეთი გზით აგებულ მიმართებას ეწოდება შედგენილი და აღინიშნება $(\rho\circ\sigma)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$(\rho\circ\sigma)(a) = \rho(\sigma(a)).$$



ნახ. 6.6

ამრიგად, $(x,y)\in\rho\circ\sigma$, თუ B სიმრავლეში არსებობს ისეთი z ელემენტი, რომლისთვისაც შესრულდება $(x,z)\in\sigma$, $(z,y)\in\rho$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\rho\circ\sigma$ მიმართების განსაზღვრის არეა

$$D_{\rho\circ\sigma} = \sigma^{-1}D_\rho.$$

სიტუაციის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ნახ. 6.6. σ მიმართების $\mathcal{D}_\sigma$ განსაზღვრის არე და $\mathcal{R}_\sigma$ მნიშვნელობათა სიმრავლე დაშტრიხულია ერთი მიმართულებით, ხოლო ρ მიმართულების $\mathcal{D}_\rho$ და $\mathcal{R}_\rho$ – სხვა მიმართულებით, მაშასადამე, A,

B და C სიმრავლეებზე ორმაგად დაშტრიხული სეგმენტები წარმოადგენს $D_{\rho\circ\sigma}$, $\mathcal{D}_\rho \cap \mathcal{R}_\sigma$ და $\mathcal{R}_{\rho\circ\sigma}$ არეებს, შესაბამისად.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . σ და ρ მიმართებების ჩაწერიდან გამომდინარეობს, რომ ისინი გამოიყენება მარჯვნიდან მარცხნივ. მაშასადამე, $(\rho\circ\sigma)(a)$ ნიშნავს, რომ დასაწყისში აიღება a და σ-ს საშუალებით გარდაიქმნება, ხოლო შემდეგ გარდაიქმნება ρ-ს საშუალებით. ალგებრაში, ზოგჯერ, ეს ჩაიწერება $a\sigma\rho$-ს სახით. სხვა მათემატიკური წიგნების წაკითხვის ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას, თუ მიმართებების ჩაწერის როგორი წესია მიღებული ამ წიგნში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6.1. ვთქვათ, ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია σ და ρ ბინარული მიმართებები:

$$\sigma = \big\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{N},\ y=x+1\big\},$$
$$\rho = \big\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{N},\ x=y^2\big\},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} D_\sigma &= \{x:\ x,x+1\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N},\\ D_\rho &= \{x^2 : x\in\mathbb{N}\},\\ D_{\rho\circ\sigma} &= \sigma^{-1}D_\rho = \big\{x^2-1 : x, x^2-1\in\mathbb{N}\big\} = \{3,8,15,24,35,\ldots\}. \end{aligned}$$

ვთქვათ, A სიმრავლეზე განსაზღვრულია σ მიმართება, შეიძლება ავაგოთ შედგენილი $\sigma\circ\sigma$ მიმართება. მაგალითად, თუ

$$\begin{aligned} \sigma &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ y=x+1\big\},\\ \sigma\circ\sigma &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ y=x+2\big\},\\ \rho &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ x=y^2\big\},\\ \rho\circ\rho &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ x=y^4\big\}. \end{aligned}$$

ეს მიმართებები შეიძლება ჩაიწეროს σ^2 და ρ^2 სახით (საზოგადოდ, ეს აღნიშვნა სიმრავლისთვის მთლად კანონიერი არ არის, თუმცა, შეგვიძლია ადვილად დავამკვიდროთ, რადგან, თუ $(x,y)\in\sigma\circ\sigma$, მაშინ $((x,z),(z,y))\in\sigma\times\sigma$ რაიმე z-თვის. ამ დროს არავითარი გაუგებრობა არ წარმოიქმნება.

თუ გამოვიყენებთ ამ აღნიშვნებს, შევძლებთ ნებისმიერი $n\in\mathbb{N}$-თვის განვსაზღვროთ σ^n შემდეგნაირად:

$$\sigma^n = \Big\{(x,y):\ x\sigma z \text{ და } z\sigma^{n-1}y \text{ რომელიმე } z\text{-თვის}\Big\}.$$

წინა მაგალითზე

$$\begin{aligned} \sigma^n &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ y=x+n\big\},\\ \rho^n &= \big\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ x=y^{2^n}\big\}. \end{aligned}$$

საინტერესოა, ამ შემთხვევაში, რამდენად მისაღებია ანალოგია გამრავლებასთან. ვთქვათ, A არის სიმრავლე, ხოლო R – მიმართება მასზე. $J_A\circ R$, R და $R\circ J_A$ ეკვივალენტურია. ამიტომ J_A არის A-ზე განსაზღვრული იგივური მიმართება, რომელსაც 1-ის ანალოგიური თვისება აქვს, ე. ი. ნატურალურია გამრავლების ოპერაციის დროს. შევნიშნოთ, რომ $R^{-1}\circ R = J_A = R\circ R^{-1}$ ტოლობის

დაწერა, საზოგადოდ, ყოველთვის არ შეიძლება. ამისთვის საჭიროა დამატებითი პირობების მოთხოვნა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 6.1.

1. ვთქვათ, R და S მიმართებები განსაზღვრული მთელ ხალხთა P სიმრავლეზე:

$$R = \{(x,y):\ x,y \in P \text{ და } x \text{ არის } y\text{-ის მამა}\},$$
$$S = \{(x,y):\ x,y \in P \text{ და } x \text{ არის } y\text{-ის ქალიშვილი}\}.$$

აღწერეთ შემდეგი მიმართებები: ა) R^2; ბ) S^2; გ) $R \circ S$; დ) $S \circ R$; ე) $S \circ R^{-1}$; ვ) $R^{-1} \circ S$; ზ) $R^{-1} \circ S^{-1}$; თ) $S^{-1} \circ R$, ი) $S^{-1} \circ S^{-1}$, კ) $S^{-1} \circ R^{-1}$.

2. $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე მოცემულია ბინარული მიმართებები, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\sigma = \{(x,y):\ x,y \in \mathbb{Z} \text{ და } y = 2x\},$$
$$\rho = \{(x,y):\ x,y \in \mathbb{Z} \text{ და } x = 2y+1\}.$$

აღწერეთ შემდეგი მიმართებები (თუ არსებობს) ა) $\sigma \circ \rho$; ბ) $\rho \circ \sigma$; გ) $\sigma \circ \rho^{-1}$; დ) $\sigma^{-1} \circ \rho$; ე) $\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$; ვ) ρ^2; ზ) σ^2.

§ 7. მიმართებების ჩაკეტვა

ჩაკეტვის ცნება წარმოადგენს ფუნდამენტურ მათემატიკურ ცნებას და გამოიყენება მათემატიკის უმრავლეს დარგში. ამ ცნების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

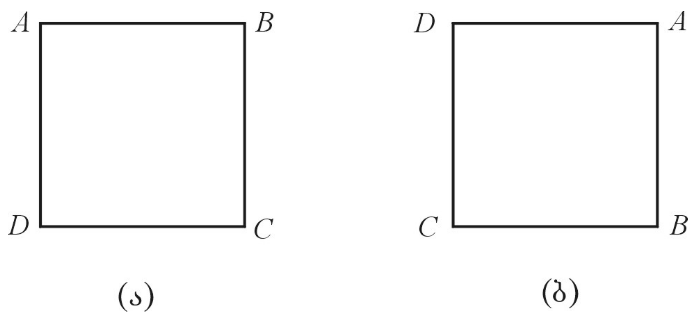
ავიღოთ x_0 ობიექტი და p პროცესი, რომელიც წარმოქმნის სიმრავლეს და განსაზღვრავს $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობას, სადაც

$$\begin{aligned} & x_1 \in p(x_0) \\ & x_2 \in p(x_1) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_n \in p(x_{n-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ყველა მიმდევრობის ყველა ელემენტს, რომელიც შეიძლება გამოყვანილი იყოს p პროცესის საშუალებით, დაწყებული x_0-დან, ეწოდება p **პროცესის ჩაკეტვა** x_0-ის მიმართ. ამიტომ პროცესის შედეგი შედის $p^n(x_0)$-ში რომელიღაც n-თვის. მაგრამ ჩვენ არ ვიცით წინასწარ n-ის მნიშვნელობა. უფრო მეტიც, თუ ავიღებთ ნებისმიერ y ელემენტს ამ ჩაკეტვიდან და შევასრულებთ p პროცესს y-დან დაწყებული, არაფერს ახალს არ მივიღებთ. შედეგს უკვე თვით ჩაკეტვა შეიცავს. სიმრავლე არ შეიძლება გაფართოვდეს ასეთი გზით (იგი ჩაკეტილია).

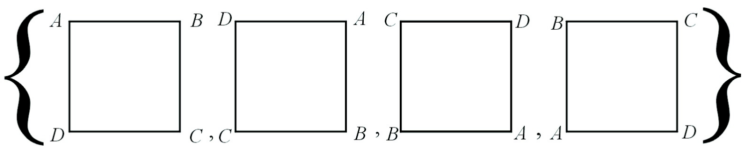
მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.1. ავიღოთ s კვადრატი, რომელიც მონიშნულია ისე, როგორც 7.1(ა) ნახაზზე ნაჩვენები და განვსაზღვროთ r პროცესი შემდეგნაირად:

S-ის მოცემული მდებარეობიდან r პროცესი წარმოქმნის ყველა მდებარეობის სიმრავლეს, რომელიც მიიღება საათის ისრის მიმართულებით მართი კუთხით მობრუნების შედეგად.



ნახ. 7.1

ამგვარად, $r(s)$ გვაძლევს სურ. 7.1(ბ)-ზე გამოსახულ კონფიგურაციას. r-ის ოთხჯერ გამოყენების შედეგად ჩვენ დავუბრუნდებით საწყის მდგომარეობას. მაშასადამე, ჩაკეტვა მოცემულ შემთხვევაში არის ოთხი პოზიციის სიმრავლე (იხ. ნახ. 7.2).



ნახ. 7.2

ახლა განვიხილოთ რა მოხდება, თუ პროცესს განვსაზღვრავთ მიმართებების საშუალებით (ეს ყოველთვისაა შესაძლებელი, იმიტომ რომ შესაფერისი მიმართება შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\{(x, y) :\ y \in p(x),$ სადაც p შესასწავლი პროცესია$\}$ სიმრავლეების საშუალებით. ჩაკეტვის ასაგებად საკმარისია A მიმართებას ჰქონდეს $A, A^2, \ldots, A^n, \ldots$ შედგენილი მიმართებები, რომლებიც შემდეგ კომბინირდება ჩვეულებრივი თეორიულ-სიმრავლური გზით.

განსაზღვრება. სიმრავლეზე განსაზღვრული A მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტვა (ან უბრალოდ ჩაკეტვა) ეწოდება უსასრულო გაერთიანებას

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots .$$

A მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტვა აღინიშნება A^+ სიმბოლოთი.

მაგალითი 7.2.

1. ვთქვათ, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულია R მიმართება $R=\{(x,y):\ y=x+1\}$ ტოლობით, მაშინ $R^+=\{(x,y):x<y\}$.

2. ვთქვათ, რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია $\sigma = \{(x,y):\ x<y\}$ მიმართება, მაშინ $\sigma^+=\sigma$.

3. ρ მიმართება განსაზღვრულია $\mathbb{Q}$-ზე:

$$\rho=\{(x,y):\ x\cdot y=1\},$$

მაშინ

$$\rho^+=\{(x,x):\ x\neq 0\}\cup\rho.$$

4. ვთქვათ L არის ერთ ქალაქში მეტროს სადგურთა სიმრავლე, ხოლო a, b და c მომდევნო სადგურებია. თუ $\mathcal{N}$ მიმართება L სიმრავლეზე განსაზღვრულია, როგორც:

$$\mathcal{N}=\{(x,y):\ x \text{ არის } y\text{-ის მომდევნო სადგური}\},$$

მაშინ $(a,b),(b,c)\in\mathcal{N}$, $(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\in\mathcal{N}^2$. მაშასადამე,

$$\mathcal{N}^+=U_L=L\times L.$$

5. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე მოცემულია მიმართება

$$\tau=\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{Z},\ y=x+2\},$$

მაშინ

$$\tau^+=(\mathbb{Z}^{(1)}\times\mathbb{Z}^{(1)})\cup(\mathbb{Z}^{(2)}\times\mathbb{Z}^{(2)})\setminus\{(x,x):\ x\in\mathbb{Z}\},$$

სადაც $\mathbb{Z}^{(1)}$-ით არის აღნიშნული კენტ რიცხვთა სიმრავლე, $\mathbb{Z}^{(2)}$-ით – ლუწ რიცხვთა სიმრავლე.

ამ მაგალითებიდან ადვილად დავინახავთ, რომ მიმართების ჩაკეტვა, საზოგადოდ, არ არის რეფლექსური. მაგრამ, ზოგჯერ საჭიროა გავხადოთ რეფლექსური. ეს ადვილად შეიძლება გავაკეთოთ. შემოვიღოთ დაშვება, რომ X სიმრავლეზე იგივური მიმართება $J_X=\{(x,x):\ x\in X\}$ არის ამ სიმრავლეზე მოცემული ნებისმიერი A მიმართების ნულოვან ხარისხი.

განსაზღვრება. A მიმართების რეფლექსური ჩაკეტვა A^* ეწოდება სიმრავლეს:

$$A^*=A^0\cup A\cup A^2\cup\cdots\cup A^n\cup\cdots=\bigcup_{n=0}^{\infty}A^n.$$

ამრიგად, მიმართებების ტრანზიტული და რეფლექსური ჩაკეტვები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი თანაფარდობით:

$$A^*=A^+\cup J_A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.3. წინა მაგალითებში განსაზღვრული მიმართებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
R^* &= \big\{(x,y):\ x \le y,\ x,y \in \mathbb{N}\big\},\\
\sigma^* &= \big\{(x,y):\ x \le y,\ x,y \in \mathbb{Q}\big\},\\
\rho^* &= \rho^+ \cup \{0,0\},\\
\mathcal{N}^* &= \mathcal{N}^+,\\
\tau^* &= (\mathbb{Z}^{(1)} \times \mathbb{Z}^{(1)}) \cup (\mathbb{Z}^{(2)} \times \mathbb{Z}^{(2)}).
\end{aligned}
$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 7.1.

1. გამოიყენეთ 6.1(1) სავარჯიშოში მოცემული R და S მიმართებები და აღწერეთ შემდეგი ჩაკეტვები: ა) R^+; ბ) S^+; გ) R^*; დ) S^*; ე) $(S \circ S^{-1})^+$; ვ) $(R^{-1} \circ R)^*$; ზ) $(S^2 \circ R^2)^+$.

2. 6.1(2) სავარჯიშოში მოცემული σ, ρ მიმართებებისათვის აღწერეთ ჩაკეტვები: ა) σ^+; ბ) σ^*; გ) $(\rho^{-1})^+$; დ) $(\rho^{-1})^*$.

არითმეტიკის ძირითადი ცნებები

§ 1. “მცირე” სასრული არითმეტიკა

არითმეტიკა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სიმრავლე ორი ოპერაციით, რომლებიც შეკრებისა და გამრავლების მსგავსად მოქმედებს. ის შეიძლება შევისწავლოთ მრავალი ხერხით. რომ გავარკვიოთ არითმეტიკული სისტემის მოთხოვნები, მივიღოთ კონსტრქუციული მიახლოება, და მთელი რიცხვები $(0, 1, 2, \ldots)$ განვიხილოთ, როგორც სიმბოლოები შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ სასრულ არითმეტიკას, რომელშიც გამოიყენება მხოლოდ რიცხვთა სასრული სიმრავლე. ვიგულისხმოთ, რომ თუ $A \sim \mathbb{N}_m$, მაშინ მოგვეთხოვება m სხვადასხვა სიმბოლო. ამასთან, სიმბოლოების არავითარი კომბინაციის უფლება არ გვაქვს. თუ მხოლოდ ათობითი რიცხვები გამოიყენება, მაშინ $m \leq 10$. რადგან მოცემული ზომის ყველა სიმრავლე ბიექციურია, შეგვიძლია განვიხილოთ მხოლოდ $\mathbb{N}_m$ სიმრავლე.

უფრო მეტი თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ $\mathbb{N}_6$ სიმრავლე. ამისთვის აუცილებელია ავაგოთ შეკრების და გამრავლების ოპერაციათა ცხრილები.

შეკრების ოპერაცია შეიცავს ნეიტრალურ ელემენტს, რომელიც ჩვეულებრივ, 0 სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგრამ $0 \notin \mathbb{N}_6$. ამიტომ გამოვიყენოთ $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ სიმრავლე. ცხადია, $\mathbb{Z}_6 \sim \mathbb{N}_6$. ამასთან, არცერთი თვისება არ დაგვეკარგება. ამრიგად, თუ ვისარგებლებთ ნულოვანი ელემენტის თვისებით, გვექნება 1.1 ცხრილი.

ცხრილი 1.1.

+	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

რადგან შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია, ცხრილი სიმეტრიული უნდა იყოს. თუ მოვითხოვთ, რომ ყოველი ელემენტისათვის არსებობდეს მოპირდაპირე ელემენტი, მაშინ ნებისმიერი ელემენტი თითოეულ სტრიქონსა და თითოეულ სვეტში უნდა შევიდეს ზუსტად ერთხელ. მართლაც, თუ

$$a + b = a + c,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} -a + (a + b) &= -a + (a + c), \\ (-a + a) + b &= (-a + a) + c, \\ 0 + b &= 0 + c, \\ b &= c. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ აქ გამოვიყენეთ, ასევე, შეკრების ოპერაციის ასოციაციურობა.

განვიხილოთ 1.2 ცხრილით განსაზღვრული შეკრების სამი ოპერაცია: A, B და C. A ოპერაცია არაკომუტაციურია, რადგან ხრილი არ არის სიმეტრიული, B ოპერაციაში დარღვეულია "შედეგის ერთადერთობის" კრიტერიუმები. C აკმაყოფილებს ყველა პირობას.

ცხრილი 1.2.

A	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	0	4	5	3
2	2	0	1	5	3	4
3	3	5	4	0	2	1
4	4	3	5	1	0	2
5	5	4	3	2	1	0

B	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	1	2	3	4	5
2	2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5	5

C	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	5	3	4	2	0
2	2	3	1	5	0	4
3	3	4	5	0	1	2
4	4	2	0	1	5	3
5	5	0	4	2	3	1

როგორ ავაგოთ ოპერაცია, რომელიც დააკმაყოფილებს ზემოთ განხილულ ყველა თვისებას? ყველაზე რთულად შესასრულებელია ასოციაციურობა. ქვემოთ შემოთავაზებულ პროცედურაში ასოციაციურობას გამოვიყენებთ, როგორც აგების ძირითად ნაბიჯს და, მაშასადამე, ეს თვისება შესრულდება ავტომატურად.

ნაბიჯი 1. შეკრების ოპერაციისთვის *0* არის ნულოვანი ელემენტი, ამიტომ ვღებულობთ 1.3 ცხრილს

ცხრილი 1.3.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

ნაბიჯი 2. განვსაზღვროთ ცხრილის შემდეგი სტრიქონი, რომელიც აკმაყოფილებს "შედეგის ერთადერთობის" პირობას. ხაზი რომ გავუსვათ გამოყენებულ ტექნიკას, სპეციალურად ვირჩევთ შედეგს, რომელიც განსხვავდება ჩვეულებრივისგან. ავიღოთ:

+	0	1	2	3	4	5
1	1	3	0	5	2	4

რადგან ოპერაცია კომუტაციური უნდა იყოს, შევავსოთ 1.4 ცხრილის შესაბამისი სვეტი

ცხრილი 1.4.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	0	5	2	4
2	2	0				
3	3	5				
4	4	2				
5	5	4				

ნაბიჯი 3. შევავსოთ ცხრილის დანარჩენი უჯრები ასოციაციურობის გამოყენებით. თითოეულ დეტალს დავაკვირდეთ დაწვრილებით

$$2+2=2+(1+4)=2+1=0+4=4,$$
$$2+3=2+(1+1)=(2+1)+1=0+1=1,$$
$$2+4=2+(1+5)=(2+1)+5=0+5=5,$$
$$2+5=2+(1+3)=(2+1)+3=0+3=3.$$

აქ გამოვიყენეთ $2+1=0$ და $0+x=x$ თანაფარდობები. შემდეგ

$$3+3=3+(1+1)=(3+1)+1=5+1=4,$$
$$3+4=(1+1)+4=1+(1+4)=1+2=0,$$
$$3+5=(1+1)+5=1+(1+5)=1+4=2$$

და ა. შ. ამგვარად, $(1+x)$-ის მნიშვნელობების საფიძველზე $+$ ოპერაციისთვის ვღებულობთ ცხრილს:

ცხრილი 1.5.

+	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	1	3	0	5	2	4
2	2	0	4	1	5	3
3	3	5	1	4	0	2
4	4	2	5	0	3	1
5	5	4	3	2	1	0

გადავიდეთ გამრავლების ოპერაციაზე. გამრავლებისთვის ნეიტრალური ელემენტია ერთეულოვანი ელემენტი. შევთანხმდეთ, რომ ერთეულოვანი ელემენტი განსხვავდება 0-გან, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ნებისმიერი x და y-თვის გვექნებოდა

$$x=0\cdot x=x\cdot 0,\quad y=0+y=y+0,$$

ამიტომ

$$x\cdot y=x\cdot(0+y)=(x\cdot 0)+(x\cdot y)=x+(x\cdot y),$$

ე. ი. x ნულოვანი ელემენტია: $x=0$ ეს არ არის სწორი, ამიტომ, 0 არ არის გამრავლებისთვის ნეიტრალური ელემენტი. ერთეულოვან ელემენტად ავიღოთ 1.

1.6 ცხრილის საფუძველზე შეგვიძლია ანალოგიურად განვსაზღვროთ გამრავლების ოპერაცია. ამასთან, ამ შემთხვევაში არ უნდა მოვითხოვოთ "შედეგის ერთადერთობის" კრიტერიუმის შესრულება. გამოვიყენოთ გამრავლების ოპერაციის დისტრიბუციულობა შეკრების მიმართ.

ცხრილი 1.6.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0		0				
1	0	1	2	3	4	5
2		2				
3		3				
4		4				
5		5				

შევნიშნოთ, რომ $1+1=3$. ამიტომ დისტრიბუციულობის გამო მივიღებთ

$$\begin{aligned}
3\cdot 0 &= (1+1)\cdot 0 = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0+0 = 0,\\
3\cdot 2 &= (1+1)\cdot 2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 2 = 2+2 = 4,\\
3\cdot 3 &= (1+1)\cdot 3 = 1\cdot 3 + 1\cdot 3 = 3+3 = 4,\\
3\cdot 4 &= (1+1)\cdot 4 = 1\cdot 4 + 1\cdot 4 = 4+4 = 3,\\
3\cdot 5 &= (1+1)\cdot 5 = 1\cdot 5 + 1\cdot 5 = 5+5 = 0.
\end{aligned}$$

ახლა შეიძლება ვისარგებლოთ $3+3=4$, $3+1=5$, $1+4=2$, $1+2=0$ თანაფარდობებით. თუ ისე ვიმოქმედებთ, როგორც წინათ, მივიღებთ შემდეგ ოპერაციას

ცხრილი 1.7.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	1	4	3	5
3	0	3	4	4	3	0
4	0	4	3	3	4	0
5	0	5	5	0	0	5

მაშასადამე, ცხრილში სტრიქონის თითქმის ნებისმიერი შერჩევით დაწყებული და რიგი მარტივი შეზღუდვების დადებით მისაღები არითმეტიკული სისტემაა. ახლა საკმარისია დავადგინოთ, რომ მიღებული სისტემა არ ეწინააღმდეგება წინათ გამოთქმულ მოსაზრებებს. თუ ნორმალურ არითმეტიკაში $a+b=c$ და $c\in\mathbb{Z}_6$, მაშინ სასურველია ჩვენს არითმეტიკაშიც $(a+b)$-ს პასუხი იყოს c. მაშასადამე, მივედით არჩევნამდე

$+$	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	?

ელემენტი, რომელიც აკლია, უნდა იყოს 0, რადგან $6\notin\mathbb{Z}_6$ და 0 არის $\mathbb{Z}_6$-ის ერთადერთი ელემენტი, რომელიც არ არის ამ სტრიქონში. ასეთი შერჩევის შედეგად ვღებულობთ 1.8 ცხრილს. იგი განსაზღვრავს ე. წ. არითმეტიკას მოდულით

6. (ეს არითმეტიკა ზუსტად ისე მოქმედებს, როგორც ჩვეულებრივი მთელრიცხვებიანი არითმეტიკა, იმ გამონაკლისით, რომ ყველა მთელი რიცხვი შეცვლილია მათი 6-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთით.)

ცხრილი 1.8.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.1.

1. $\mathbb{Z}_6$-თვის მიღებული "ბუნებრივი" არითმეტიკის მსგავსად ავაგოთ ანალოგიური არითმეტიკა $\mathbb{Z}_{16}$-თვის $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, \ldots, F\}$ სიმბოლოების გამოყენებით.

2. ავაგოთ არითმეტიკა $\mathbb{Z}_6$-თვის, რომელიც შეესაბამება შემდეგ სტრიქონს:

+	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	0	5	1

3. $(1+3)$-ის განხილვით ვაჩვენოთ, რომ შემდეგ ცხრილს მივყავართ წინააღმდეგობამდე:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	4	5	2

§ 2. "დიდი" სასრული არითმეტიკა

ჩვენ უკვე ავაგეთ არითმეტიკა $\mathbb{Z}_6$-თვის. გავაფართოვოთ ეს სისტემა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ დალაგებული სამეული $\mathbb{Z}_6$-დან, ანუ $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ სიმრავლის ელემენტები. თუ $\mathbb{Z}_6$ დალდაგებულია ჩვეულებრივი ხერხით, ე. ი. $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5$, მაშინ $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$-ზე განვსაზღვროთ დალაგება შემდეგი წესით:

$$(a, b, c) < (x, y, z), \text{ თუ } a < x,$$

ან

$$\text{თუ } a = x, \; b < y,$$

ან

$$\text{თუ } a = x, \; b = y, \; c < z.$$

ამ შემთხვევაში $\mathbb{Z}_6^3 = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$-ის ელემენტები დალაგებული იქნება შემდეგნაირად

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), \ldots, (0, 0, 5)$$

$$\begin{array}{l}(0,1,0),(0,1,1),\dots,(0,1,5)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (0,5,0),\dots\dots\dots\dots,(0,5,5)\\ (1,0,0),\dots\dots\dots\dots,(1,0,5)\\ (5,5,0),(5,5,1),\dots,(5,5,5)\end{array}$$

ამრიგად, არსებობს $6^3 = 216$ სხვადასხვა სამეული. ზემოთ მოყვანილი $\mathbb{Z}_6^3$ ელემენტების დალაგებისას (0,0,5) უშუალოდ (0,1,0)-ის წინ არის, (0,1,5) უშუალოდ წინ უსწრებს (0,2,0)-ს და ა. შ. (0,5,5) უშუალოდ წინ უსწრებს (1,0,0)-ს. მაშასადამე, სასურველი იქნებოდა სრულდებოდეს

$$(0,0,5)+1=(0,1,0).$$

ამასთან, აქამდე არ იყო 1-ის წარმოდგენა $\mathbb{Z}_6^3$-ში. მიუხედავად იმისა, რომ ეს დალაგება ბუნებრივია, უნდა ვიზრუნოთ იმაზე, რომ არ გამოვიყენოთ არცერთი ცნება, რომლის განსაზღვრებაც არ შემოგვიტანია. აღწერის გასაადვილებლად $\mathbb{Z}_6^3$ წარმოვადგინოთ, როგორც $A_2 \times A_1 \times A_0$ და განვიხილოთ (a_2, a_1, a_0)-ის და (b_2, b_1, b_0)-ის ჯამი. კომპონენტებად შეკრება გვაძლევს $(a_2+b_2, a_1+b_1, a_0+b_0)$, სადაც შეკრება ხდება $\mathbb{Z}_6$.

განვიხილოთ მაგალითი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. განვიხილოთ ჯამი

$$(0,1,3)+(4,2,1)=(4,3,4),$$

რომელიც უფრო თვალსაჩინო იქნება, თუ მას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$\begin{array}{cc} + & \begin{array}{c}0,1,3\\ 4,2,1\end{array}\\ \hline = & 4,3,4\end{array}$$

თუმცა

$$\begin{array}{cc} + & \begin{array}{c}1,2,5\\ 2,2,1\end{array}\\ \hline = & 3,5,0\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} + & \begin{array}{c}0,0,5\\ 0,0,1\end{array} & \begin{array}{c}\\ (=1?)\end{array}\\ \hline = & 0,0,0 & (=0?)\end{array}$$

შეკრების ოპერაციის შედეგად A_0 სიმრავლე გადადის თავის თავში. მაგრამ იმისათვის, რომ საკმაოდ დიდი რიცხვების ჯამს (ისეთს, როგორიც $5+1$-ია) შეეძლოს გამოვიდეს A_0-ის საზღვრებიდან, საჭიროა ვაწარმოოთ რაღაც მოქმედება A_1-ში და, ასევე, შესაძლებელია A_2-ში (ეს ნაჩვენებია 2.1 ცხრილში).

ცხრილი 2.1.

$+_s$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$+_c$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1	1

$+_s$-ით აღნიშნულია შეკრების ოპერაცია $\mathbb{Z}_6$-ში (ე. ი. ნაშთი, რომელიც მიიღება ჯამის 6-ზე გაყოფისას), ხოლო $+_c$ ცხრილში მოცემულია განაყოფი, რომელიც მიირება ჯამის 6-ზე გაყოფისას). ავიღოთ ნებისმიერი a და b რიცხვები $\mathbb{Z}_6$-დან. მაშინ მათი ჯამი ($\mathbb{Z}$-ში) იქნება

$$a + b = 6 \cdot (a +_c b) + (a +_s b).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. $4 + 4 = 6 \cdot (4 +_c 4) + (4 +_s +4) = 6 \cdot 1 + 2 = 8$. თუ $0 \leq x \leq n - 1$ და $0 \leq x \leq n - 1$, ამიტომ

$$0 \leq x + y \leq 2n - 2 < 2n - 1 \ \ (n = 6 \ \ \mathbb{Z}_6 - \text{ში}).$$

თუ დავუბრუნდებით (a_2, a_1, a_0)-ისა და (b_2, b_1, b_0)-ის შეკრებას და პასუხს აღვნიშნავთ (d_2, d_1, d_0)-ით, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&d_0 = a_0 +_s b_0,\\
&x_0 = a_0 +_c b_0,\\
&d_1 = a_1 +_s b_1 +_s x_0,\\
&x_1 = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \ a_1 +_c b_1 = 1\\ (a_1 +_s b_1) +_c x_0, & \text{თუ } \ a_1 +_c b_1 \neq 1 \end{cases}\\
&d_1 = (a_2 +_s b_2) +_s x_1,\\
&x_2 = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \ a_2 +_c b_2 = 1\\ (a_2 +_s b_2) +_c x_1, & \text{თუ } \ a_2 +_c b_2 \neq 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

რადგან $0 \leq a_i + b_i < 2n - 1$ და $x_0 = 0$ ან $x_i = 1$, ამიტომ გადასატანი შედეგი $(a_i + b_i + x_{i-1})$-დან 1-ზე მეტი არასოდეს იქნება. იმ შემთხვევას, როცა $x_2 > 0$, მოგვიანებით განვიხილავთ.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{Z}_6^3$-ის ნულოვანი ელემენტია (0,0,0), ხოლო ერთეულოვანი ელემენტი – (0,0,1).

ანალოგიურად განისაზღვრება გამრავლების ოპერაცია.

ცხრილი 2.2.

$\cdot_p$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\cdot_c$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	2	2
4	0	0	1	2	2	3
5	0	0	1	2	3	4

$\cdot_p$ ცხრილში მოცემულია ნაშთი, რომელიც მიიღება $\mathbb{Z}_6$-ის ელემენტების ნამრავლის 6-ზე გაყოფისას (ე. ი. $+_p$ არის $\mathbb{Z}_6$-ში განსაზღვრული ნამრავლის ოპერაცია), ხოლო $+_c$ ცხრილში მოცემულია განაყოფი, რომელიც მიიღება $\mathbb{Z}_6$-ის ელემენტების ნამრავლის 6-ზე გაყოფისას.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ იმ სიმბოლოებს, რომლებსაც აქვს დადებითი რიცხვების სახე. ცხადია, $0, 1, 2, \ldots$ სიმბოლოებს მოვექცეთ "ბუნებრივად"

და, მაშასადამე, მათი ინტერპრეტაცია შეიძლება მოვახდინოთ, როგორც არაუარყოფითი რიცხვები. $\mathbb{Z}_6^3$-ზე განსაზღვრული არითმეტიკა მოქმედებს რიცხვებზე $0 = (0, 0, 0)$-დან $215 = (5, 5, 5)$-მდე, რომლებიც მიღებულია (0-დან 5-მდე) მიმდევრობიდან $\mathbb{Z}_6$-ში. თუ $\mathbb{Z}_6$-ის ნაცვლად ავიღებთ $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ სიმრავლეს, მივიღებთ უარყოფით რიცხვებს, ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{Z}_6^-$-ით. განვიხილოთ $\mathbb{Z}_6^- \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ სიმრავლე. მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ არითმეტიკა რიცხვებზე -108-დან 107-მდე. სინამდვილეში არითმეტიკა იგივეა, რაც $\mathbb{Z}_6^3$-ში, მხოლოდ A_2 სიმრავლის 3, 4 და 5 რიცხვები შესაბამისად იცვლება -3, -2 და -1-ით. ამიტომ, მაგალითად, $(-2, 4, 2)$ $\mathbb{Z}$-ში გამოითვლება, როგორც

$$(-2 \cdot 36) + (4 \cdot 6) + 2 = -46.$$

$\mathbb{Z}_6$-სა და $\mathbb{Z}_6^{-1}$ სისტემებს შორის ბიექცია განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} 3 &\longmapsto -3 \\ 4 &\longmapsto -2 \\ 5 &\longmapsto -1 \\ x &\longmapsto x \ \text{ დანარჩენ შემთხვევებში.} \end{aligned}$$

გამოთვლები, რომლებიც შეიცავს შეკრებას და გამოკლებას. ახალ არითმეტიკაში საკმაოდ მარტივია და დამოკიდებულია ორ იგივეობაზე:

$$(5, 5, 5) + (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

და

$$(a_2, a_1, a_0) + (b_2, b_1, b_0) = (5, 5, 5).$$

მათ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$a_2 + b_2 = 5, \ \ a_1 + b_1 = 5, \ \ a_0 + b_0 = 5.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ (a_2, a_1, a_0) რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი (b_1, b_1, b_0), ჯერ უნდა ვიპოვოთ მოცემული რიცხვის **დამატება (5,5,5)-ზე** შემდეგ მივუმატოთ $1 = (0, 0, 1)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.3. ვიპოვოთ (3,4,1)-ის მოპირდაპირე რიცხვი.

$$\begin{array}{cr} & 3,\ 4,\ 1 \\ + & 2,\ 1,\ 4 \\ & 1 \\ \hline = & 0,\ 0,\ 0 \end{array} \qquad \text{(5-მდე დამატება)} \quad ,$$

ე. ი. (2,1,5) არის (3,4,1)-ის მოპირდაპირე:

$$\begin{array}{cr} & 3,\ 4,\ 1 \\ + & 2,\ 1,\ 5 \\ \hline = & 0,\ 0,\ 0 \end{array}$$

ე. ი. $-(3, 4, 1) = (2, 1, 5)$, ასევე $-(-3, 4, 1) = (2, 1, 5)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.4. გამოვთვალოთ $(1,3,4)-(2,1,5)$. ვიპოვოთ $-(2,1,5)$.

$$\begin{array}{cr} + & 2,\,1,\,5 \\ & 3,\,4,\,0 \\ & 1 \\ \hline = & 3,\,4,\,1 \end{array},$$

ე. ი. $-(2,1,5)=(3,4,1)$.

შემდეგ მივუმატოთ (1,3,4)-ს:

$$\begin{array}{cr} + & 1,\,3,\,4 \\ & 3,\,4,\,1 \\ \hline = & 5,\,1,\,5 \end{array}.$$

ასევე $(5.1.5)=(-1,1,5)$ $\mathbb{Z}_6^-$-ში.

შევამოწმოთ მიღებული შედეგი $\mathbb{Z}$-ში. გვაქვს: $(1,3,4)=1{\cdot}6^2{+}3{\cdot}6{+}4=58$, $(2,1,5)=2\cdot 6^2+1\cdot 6+5=83$, $(5,1,5)=(-1,1,5)=-6^2+6+5=-25$, $58-83=-25$.

საზოგადოდ, თუ გამოთვლები წარმოებს $\mathbb{N}_m$-ში ($\mathbb{Z}_m$), უნდა გამოვიყენოთ დამატება $(m-1)$-მდე და m-მდე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . $\mathbb{Z}_m^n$-ის რიცხვის ჩაწერისას, ჩვეულებრივ, გამოიტოვება მძიმეები და ყველა ნული, რომელიც დგას პირველი არანულოვანი ციფრის მარცხნივ. მაშასადამე, (1,3,4) ჩაიწერება, როგორც 134; (0,0,6) როგორც 6, (0,0,0) როგორც 0.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 8.1. $\mathbb{Z}_m^- \times \mathbb{Z}_m^{n-1}$ აღვნიშნოთ, როგორც $\mathbb{Z}_m^{n-}$, სადაც

$$\mathbb{Z}_m^-=\Big\{-\frac{m}{2},-\frac{m}{2}+1,\dots,0,1,\dots,\frac{m}{2}-1\Big\},\ \text{თუ } m \text{ ლუწია}$$

და

$$\mathbb{Z}=\Big\{-\frac{m-1}{2},\dots,0,1,\dots,\frac{m-1}{2}\Big\},\ \text{თუ } m \text{ კენტია.}$$

გამოთვალეთ: ა) $10-7$; ბ) $(-8)+(-21)$ შემდეგ სისტემებში

$$\mathbb{Z}_7^{4-},\mathbb{Z}_{10}^{3-},\mathbb{Z}_5^{5-},\dots,\mathbb{Z}_{12}^{2-}.$$

(**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა .** რიცხვები მაგალითში მოცემულია $\mathbb{Z}$-ზე. ამიტომ თავიდან უნდა გადავიყვანოთ შესაბამის სისტემაში, ხოლო შემდეგ გამოვთვალოთ).

§ 3. ორობითი არითმეტიკა

$\mathbb{Z}_m^n$ და $\mathbb{Z}_m^{n-}$ სიმრავლეებზე უკვე აგებული არითმეტიკიდან ადვილად შეგვიძლია გამოვყოთ ორობითი არითმეტიკის საფუძვლები. არსებობს ორი, ე. წ. ორობითი არითმეტიკა. პირველი ესაა ნიშნიანი და მოდულიანი ფორმა, რომელიც განსაზღვრულია $\{-,+\}\times' bZ_2^n$-ზე. ე. ი. $\mathbb{Z}_2^n$-ზე დამატებული ნიშნით, ნიშნის კოდირება, ჩვეულებრივ, ხდება ბინარული ფორმით: 0 "+"-თვის და 1 "−"-თვის. მეორე არითმეტიკა (დამატების ორობითი არითმეტიკა) არის $\mathbb{Z}_2^{n-}$,

$\{0, 1\}$ ელემენტებით ყველა პოზიციაში. ორობითი არითმეტიკის ეს სახე გამოიყენება კომპიუტერების უმრავლესობაში. ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ $\mathbb{Z}_2^{n-}$-ს. მსჯელობა უფრო კონკრეტული რომ გავხადოთ, განვიხილოთ $\mathbb{Z}_2^{5-}$ სიმრავლე, იგი შეიცავს $2^5 = 32$ ელემენტს, რომლებიც მოთავსებულია -16-და და $+15$-ს შორის (-16 ამ სისტემაში წარმოდგება, როოგრც $(10000) = -2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, ხოლო 15, როგორც $(01111) = 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$). რიცხვი -1 წარმოდგება, როგორც $11111 : \ -2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, რიცხვი 1 წარმოდგება, როგორც ვიცით, $00001 : \ 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. ორობით ციფრს ბიტი ეწოდება. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რაიმე რიცხვთა მოპირდაპირე რიცხვი $\mathbb{Z}_2^5$-ში (ანუ დამატება 2-მდე), ჯერ უნდა ვიპოვოთ დამატება 11111-მდე. შემდეგ 1-ის მიმატებით მივიღებთ დამატებას 2-მდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. ვიპოვოთ – (01011)

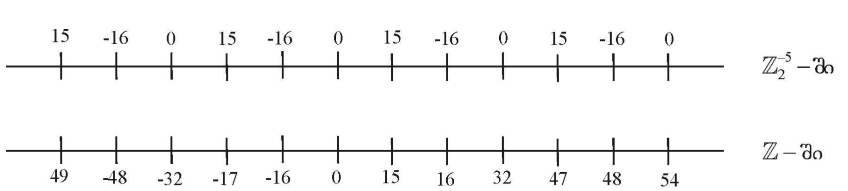
$$\begin{array}{cr} & 0\,1\,0\,1\,1 \\ & 1\,0\,1\,0\,0 \qquad - \text{(დამატება 11111-მდე)} \\ + & 1 \\ \hline = & 1\,0\,1\,0\,1 \end{array},$$

(01001) aris $2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$, xolo $10101 = -2^4 + 2^2 + 2^0 = -11$

$$\begin{array}{cr} & \text{-}(1\,0\,1\,1\,0) \\ & 0\,1\,0\,0\,1 \\ + & 1 \\ \hline = & 0\,1\,0\,1\,0 \end{array}$$

(10110 არის $-2^4 + 2^2 + 2^1 = -10$, ხოლო 01010 – $2^3 + 2^1 = 10$).

ცხადია, რიცხვთა შემოსაზღვრულობამ შეიძლება გამოიწვიოს პრობლემები, რომელთა აცილებას ვერ შევძლებთ, მაგრამ უნდა ვიცოდეთ, როდის არის შესაძლებელი "შეცდომა". დამატების ფორმა გადავსების პირობის შემოწმებას გარკვეულად აადვილებს, მხოლოდ უფროსი ნიშნადი ბიტის გამოყენების გამო $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში არ რაიოს ბიტი 2^4 ნომრით). ეს ბიტი აღნიშნავს წარმოდგენილი რიცხვის ნიშანს და ეწოდება ნიშანის ბიტი ან ნიშნის თანრიგი. ვიდრე შევამოწმებდეთ, თუ როგორი მნიშვნელობა აქვს ნიშნის ბიტს, გავიხსენოთ, რომ $\mathbb{Z}_m^n$-ში მაქსიმალურ დადებით რიცხვზე 1-ის მიმატება გვაძლევს მაქსიმალურ უარყოფით რიცხვს (უდიდესი უარყოფითი რიცხვი არის ნულისაგან ყველაზე დაშორებული რიცხვი). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რიცხვები მეორედება ციკლურად. $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში გვაქვს 3.1 სურათზე გამოსახული სიტუაცია.



ნახ. 3.1

რა მოხდება, თუ შევკრებთ ორ x და y რიცხვს, სადაც $-a \leq x < a$ და $-a \leq y < a$ ($\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში $a = 16$). $x + y$ ჯამი იქნება შემოსაზღვრული:

$$-2a \leq x + y \leq 2a - 2 < 2a - 1.$$

განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა:

(I) თუ $-a \leq x < 0$ და $-a \leq y < 0$, მაშინ $-2a$;

(II) თუ $0 \leq x < a$ და $0 \leq y < a$ (ანუ $0 \leq x \leq a - 1$, $0 \leq y \leq a - 1$), მაშინ $0 \leq x + y \leq 2a - 2 < 2a - 1$;

(III) თუ $-a \leq x < 0$ და $0 \leq y < a$, მაშინ $-a \leq x + y < a$.

შევნიშნოთ, რომ (III) შემთხვევაში შედეგი არის მოთხოვნილ საზღვრებში და, მაშასადამე, ყოველთვის "სწორია". გავიხსენოთ, რომ თუ $z \in \mathbb{Z}$ და $-2a \leq z < -a$, მაშინ z რიცხვი სასრულ არითმეტიკაში წარმოდგება, როგორც $z' = z + 2a$, $0 \leq z' < a$. ანალოგიურად, თუ $a \leq z < 2a - 1$, მაშინ z წარმოიდგინება, როგორც $z'' = z - 2a$ და $-a \leq z'' < 0$ (ე. ი., შესაბამისად, $2a$-ს დამატებიდან გამოკლებით რიცხვი მოთავსდება მოთხოვნილ საზღვრებში). ამრიგად, პასუხი "არასწორი" იქნება თუ ის (I) შემთხვევაში დადებითია ან (II) შემთხვევაში უარყოფითი.

ეს დასკვნები რომ განვმარტოთ ნიშნის თანრიგის თვისებების ტერმინებში, განვიხილოთ ორი რიცხვის სხვადასხვა შესაძლებლობა:

ა) ორივე რიცხვი უარყოფითია;

ბ) ორივე რიცხვი დადებითია;

გ) რიცხვებს აქვს სხვადასხვა ნიშანი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2.

1. $$+\begin{array}{c c} & 1\,0\,1\,0\,1 \\ & 1\,1\,0\,1\,0 \\ \hline 1 & 0\,1\,1\,1\,1 \end{array}$$ $-11+(-6) = -17$ $\mathbb{Z}$–ში, $-17 < -16$, ამიტომ $-17 + 2 \cdot 16 = 15 = 01111$ $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში;

2. $$+\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$ $-4 + (-19) = -13$ ანუ 10011 $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში;

3. $$+\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$ $-3 + 6 = 3 < 16$ ანუ 00011 $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში;

4. $$+\begin{array}{c} 0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,1\,1\,0\,0 \end{array}$$ $5 + 7 = 12 < 16$, 01100 $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში.

5. $$\begin{array}{r} 0\,1\,1\,0\,0 \\ +\quad 0\,1\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,1\,1\,0 \end{array}$$ $12 + 10 = 22 > 16$, იმისათვის, რომ მოთხოვნილ საზღვრებზე მოთავსდეს საჭიროა გამოვაკლოთ $2 \cdot 16$, $22 - 2 \cdot 16 = -10$, ანუ 10110 $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში.

ამ შემთხვევების გაანალიზებით ვხედავთ, რომ “გადავსება” (გადავსების შეცდომა) გვხვდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხდება გადატანა თანრიგში ან გადატანა ნიშნიანი თანრიგიდან, მაგრამ არა ორივე ერთად.

ახლა დავუბრუნდეთ გამრავლებას და გაყოფას. განვიხილოთ გამრავლება. გავიხსენოთ, რომ $\mathbb{Z}$-ში (ათობით სისტემას) რიცხვის 10-ზე გამრავლება ხდება ყველა ციფრის ერთი პოზიციით მარცხნივ “გადაწევით” და ნულოვან პოზიციაში 0 ციფრის ჩაწერით. ზოგადად, $\mathbb{Z}_m^n$-ში m-ზე გამრავლება შეიძლება მოვახდინოთ მარცხნივ გადაწევით.

ამრიგად, $\mathbb{Z}_2^n$-ში 2-ის დადებით ხარისხზე გამრავლება ხდება თითოეული ციფრის მარცხნივ გადაწევით პოზიციათა შესაბამის რიცხვზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. გამოთვლებს ვატარებთ $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში.

1. $00011 \cdot 2 = 00110$, $00110 \cdot 2 = 01100$, ანუ $\mathbb{Z}$-ში $3 \cdot 2^2 = 12$;

2. $11110 \cdot 2 = 11100$, $11100 \cdot 2 = 1100$ ანუ $\mathbb{Z}$-ში $-1 \cdot 2 = -4$, $-4 \cdot 2 = -8$;

3. $00101 \cdot 2 = 01010$, $01010 \cdot 2 = 10100$, $10100 \cdot 2 = 01000$ ანუ $\mathbb{Z}$-ში $5 \cdot 2 = 10$, $10 \cdot 2 = 20$, $20 \cdot 2 = 40$, $40 - 2 \cdot 16 = 8$.

ნებისმიერ მთელ რიცხვზე გამრავლებისას გამოვიყენოთ შეკრების ოპერაციის მიმართ გამრავლების ოპერაციის დისტრიბუციულობის თვისება და მამრავლი წარმოვადგინოთ, როგორც 2-ის ხარისხის ჯამი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.

1. გამოვთვალოთ $3 \cdot 5$, 5 წარმოვადგინოთ, როგორც $2^2 + 2^0$, მაშინ $3 \cdot 5 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^0$, რადგან 2-ის ხარისხებზე გამრავლება უკვე ვიცით როგორც ხდება:

$$\begin{array}{rl} & 0\,0\,0\,1\,1 \;\; - \; 3 \cdot 2^0 \\ + & 0\,1\,1\,0\,0 \;\; - 3 \cdot 2^2 \\ \hline & 0\,1\,1\,1\,1 \;\; - 15 \end{array}$$

2. გამოვთვალოთ $(-5) \cdot 3$, ამიტომ წარმოვადგინოთ: $3 = 2^1 + 2^0$,

$$\begin{array}{rl} & 1\,1\,0\,1\,1 \;\; - (-5) \\ + & 1\,0\,1\,1\,0 \;\; - (-5 \cdot 2) \\ \hline 1 & 1\,0\,0\,0\,1 \;\; \text{ანუ } 10001 - (\text{-}15). \end{array}$$

ზუსტად ასევე, როგორც გამრავლებას ვახდენდით “მარჯვნივ გადაწევით”, 2-ის დადებით ხარისხზე გაყოფა ხდება “მარჯვნივ გადაწევით”.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5. $\mathbb{Z}_2^5$-ში გამოვთვალოთ

1. $\dfrac{12}{4} = 3$, გვაქვს:

$$\begin{array}{lll} 0\,1\,1\,0\,0 & & (12) \\ 0\,0\,0\,1\,1 & 0\,0 & \left(3 = \dfrac{12}{4}\right) \end{array}$$ – ორი პოზიციით მარჯვნივ გადაიწია;

2. $\dfrac{(-6)}{2}$, $\begin{array}{lll} 1\,1\,0\,1\,0 & & \text{(-6)} \\ 0\,1\,1\,0\,1 & 0\,13 & \left(13 \neq \dfrac{(-6)}{2}\right) \end{array}$;

3. $\dfrac{7}{4}$, $\begin{array}{lll} 0\,0\,1\,1\,1 & & (7) \\ 0\,0\,0\,0\,1 & 1\,1 & \left(1 \approx \dfrac{7}{4}\right) \end{array}$.

ერთ პოზიციაზე მარჯვნივ გადაწევა ავტომატურად იწვევს ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვის დადებითად გადაწევას $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში. მარჯვნივ გადაწევა -16-ს გადაიყვანს $+8$-ში. ეს რომ გამოვასწოროთ საჭიროა, შედეგს გამოვაკლოთ 16, რაც მოგვცემს -8-ს (ე. ი. $-\frac{16}{2}$). იგივე შეიძლება მივიღოთ, თუ ნიშნიშ თანრიგად 0-ის ნაცვლად 1-ს დავწერთ. ამრიგად, $\frac{(-6)}{2}$ მივყავართ $11101 = -3$-მდე. მოხდება უკანასკნელი დაკარგული ბიტის რიცხვზე მიმატებით. ეს შეესაბამება დამრგვალების ჩვეულებრივ არითმეტიკულ წესს, რადგან ნაშთის (ანუ დაგარგული ციფრების) პირველ ბიტში 1 წარმოადგენს 0,5-ს. ამგვარი დამრგვალებით მივიღებთ $\frac{7}{4} \approx 2$ (რაც უფრო ახლოს არის რიცხვის ზუსტ მნიშვნელობასთან).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.1.

1. $\mathbb{Z}_2^{n-}$-ის რომელიმე მოპირდაპირე რიცხვის (2-მდე დამატების) მოძებნის სწრაფი ხერხი მდგომარეობს შემდეგში: მარჯვენა ბოლოდან დაწყებული ყველა ნულიდა პირველი შემხვედრი ერთიანი გადაგვაქვს უცვლელად, ხოლო ყველა დანარჩენი ბიტი იცვლება. აჩვენეთ, რომ უმ რავლეს შემთხვევაში ეს ხერხი გამოსაყენებელია და განიხილეთ შემთხვევა, როცა ეს არ მოქმედებს.

2. ვთქვათ, $\mathbb{Z}_2^{5-}$-ში წარმოებს შემდეგი გამოთვლები. იკრიბება ორი x და y რიცხვი (მათი ჯამი აღვნიშნოთ z-ით). თუ z-ს გამოვაკლებთ y-ს, მივიღებთ რაღაც c შედეგს, ხოლო, თუ z-ს გამოვაკლებთ c-ს, მაშინ მივიღებთ რაღაც d რიცხვს. რა შეილება ითქვას c და d რიცხვებზე? როგორც განსხვავდება შედეგები, თუ გამოთვლები წარმოებს $\mathbb{Z}_2^{n-}$-ში?

§ 4. ლოგიკური არითმეტიკა

ბულის არითმეტიკა მოქმედებს $\mathbb{Z}_2$ და $\mathbb{Z}_2^n$ სიმრავლეებზე და, მაშასადამე, შეიცავს მხოლოდ 0 და 1 რიცხვებს. იმისათვის, რომ უკეთ გავერკვიოთ, დავიწყოთ ლოგიკური არითმეტიკის "შედარებით დიდ" $\mathbb{Z}_5$ სიმრავლეზე განხილვით.

ავიღოთ $\mathbb{Z}_5 = \{01, 2, 3, 4, 5\}$ სიმრავლე და $\vee$ და $\wedge$ ოპერაციები, რომლებიც განსაზღვრულია 4.1 ცხრილში.

თუ $\mathbb{Z}_5$-ს დავალაგებთ ბუნებრივი დალაგებით, დავინახავთ, რომ

$$a \vee b = \max\{a, b\},$$
$$a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

ცხრილი 4.1.

$\vee$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	2	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$\wedge$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

.

ორივე ოპერაცია კომუტაციურია და ასოციაციურია. $\vee$-თვის ნეიტრალური ელემენტია 0 $(0 \vee x = x)$, ხოლო $\wedge$-თვის – 4-იანი $(4 \wedge x = x)$. ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ უფრო ზოგადი $\mathbb{Z}_m$ სიმრავლე; ბუნებრივად დალაგებული და მასზე განვსაზღვროთ აღნიშნული $\vee$ და $\wedge$ ოპერაციები. ვაჩვენოთ, რომ $\wedge$ ოპერაცია დისტრიბუციულია $\vee$-ის მიმართ და, ასევე, $\vee$ ოპერაცია დისტრიბუციულია $\wedge$-ის მიმართ. ავიღოთ $\mathbb{Z}_m$ სიმრავლის ნებისმიერი სამი a, b და c ელემენტი და განვიხილოთ ექვსი შესაძლო შემთხვევა:

(I) $a \leq b \leq c$;

(II) $a \leq c \leq b$;

(III) $b \leq a \leq c$;

(IV) $b \leq c \leq a$;

(V) $c \leq a \leq b$;

(VI) $c \leq b \leq a$.

შევნიშნოთ, რომ $\leq$ დალაგება შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგნაირადაც:

$a \leq b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $v \vee b = b$. შევამოწმოთ თითოეული შემთხვევისთვის, სრულდება თუ არა დისტრიბუციულობის პირობა:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

(I) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a$;

(II) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge \; = a$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a$;

(III) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a$, $(a \wedge b) \vee (a \vee c) = b \vee a = a$;

(IV) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = c$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c = c$;

(V) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b = a$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee c = a$;

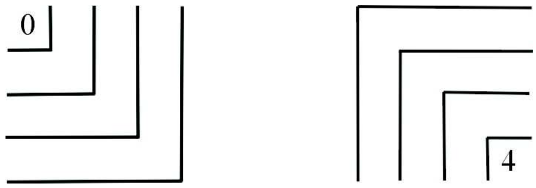
(VI) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b = b$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c = b$.

ამრიგად, დისტრიბუციულობის პირობის გამომსახველი ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილი ერთმანეთს ემთხვევა. ამით ნაჩვენებია, რომ $\wedge$ ოპერაცია დისტრიბუციულია $\vee$-ის მიმართ.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\vee$ ოპერაცია დისტრიბუციულია $\wedge$-ის მიმართ:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

დავუბრუნდეთ 4.1 ცხრილს, რომელიც განსაზღვრავს $\vee$ და $\wedge$ ოპერაციებს. ცხრილში ერთნაირი მნიშვნელობების მქონე ელემენტები ნეიტრალური ელემენტების მიმართ განლაგებულია ისე, როგორც 4.1 ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 4.1

ამ სურათზე კარგად ჩანს, რომ ეს ოპერაციები ერთმანეთის სიმეტრიულია, რაც საშუალებას გვაძლევს რაიმე ტოლობაში ერთი ოპერაცია შევცვალოთ მეორეთი. ეს არის **ორადობის პრინციპი**.

განვიხილოთ $\mathbb{Z}_2$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $\wedge$ და $\vee$ ოპერაციები:

$$\begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

$\mathbb{Z}_2$-ში, ჩვეულებრივ, $\vee$ ოპერაციის ინტერპრეტირება ხდება, როგორც "ან", ხოლო $\wedge$ ოპერაციის, როგორც "და". 0 არის ნეიტრალური ელემენტი "ან"-ის მიმართ, ხოლო 1 – "და"-ს მიმართ. ეს შედეგები შეიძლება განვავრცოთ უფრო მაღალ განზომილებებზე. მაგალითად, $\mathbb{Z}_2^n$-ზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1.

$$\begin{array}{cc} \wedge & \begin{array}{c} 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \end{array} \\ \hline & 0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1 \end{array},$$

$$\begin{array}{cc} \vee & \begin{array}{c} 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \end{array} \\ \hline & 1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \end{array}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4.2. $\mathbb{Z}_n$ სიმრავლეზე $\wedge$ და $\vee$ ოპერაციები განვსაზღვროთ, როგორც მინიმუმი და მაქსიმუმი:

$$a \vee b = \max\{a, b\} \text{ და } a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

აჩვენეთ, რომ სრულდება დისტრიბუციულობის პირობა:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

გრაფთა თეორია (საწყისი ცნებები)

§ 1. საწყისი ცნებები

ვთქვათ, V სასრულ ისიმრავლეა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$I_V = \big\{(v,v):\ v \in V\big\}, \quad V_-^2 = V^2 \setminus I_V = \big\{(v_1, v_)\ :\ v_1 \neq v_2\big\}.$$

V_-^2 სიმრავლეზე განვსაზღვროთ მიმართება შემდეგნაირად:

$$(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2), \ \text{ თუ } \ (v_1, v_2) = (w_1, w_2) \ \text{ ან } \ (v_1, v_2) \sim (w_2, w_1).$$

$\sim$ მიმართების მნიშვნელოვანი თვისება ჩამოყალიბებულია შემდეგ წინადადებაში:

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $\sim$ მიმართება ეკვივალენტობის მიმართებაა V_-^2 სიმრავლეზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . $\sim$ მიმართება არის:

ა) რეფლექსური: ნებისმიერი $(v_1, v_2) \in V_-^2$ წყვილისთვის $(v_1, v_2) \sim (v_1, v_2)$;

ბ) სიმეტრიული: თუ $(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2)$, მაშინ $(w_1, w_2) \sim (v_1, v_2)$.

გ) ტრანზიტული: თუ $(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2)$ და $(w_1, w_2) \sim (u_1, u_2)$, მაშინ $(v_1, v_2) \sim (u_1, u_2)$.

ამგვარად, განსაზღვრული ეკვივალენტობის კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $V_-^2/\sim$ სიმბოლოთი. ეკვივალენტობის თითოეულიკლასი შეიცავს ზუსტად ორ ელემენტს, რადგან, თუ $(v_1, v_2) \in V_-^2$, მაშინ $[(v_1, v_2)]$ არის ეკვივალენტობის კლასი, რომელიც შეიცავს (v_1, v_2) ელემენტს, მაშინ

$$[(v_1, v_2)] = \big[(v_1, v_2), (v_2, v_1)\big].$$

ახალ შემოვიტანოთ გრაფის ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . გრაფი ეწოდება $G = (V, E)$ წყვილს, სადაც V წვეროთა არაცარიელი სასრული სიმრავლეა, ხოლო E არის $V_-^2/\sim$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

სხვა სიტყვებით შეიძლება ვთქვათ, რომ E სხვადასხვა წვეროთა არადალაგებულ წყვილთა სიმრავლეა.

E სიმრავლეს ეწოდება გრაფის წიბოთა სიმრავლე, $|V|$ აღნიშნავს G გრაფის წვეროთა რაოდენობას, ხოლო $|E|$ – წიბოთა რაოდენობას.

შემდეგი წინადადება სასრულ სიმრავლეზე განსაზღვრულ მიმართებებსა და გრაფებს შორის კავშირს გამოხატავს.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა .

ა) $G = (V, E)$ გრაფი V სიმრავლეზე განსაზღვრავს არარეფლექსურ სიმეტრიულ მიმართებას;

ბ) V სასრულ სიმრავლეზე მოცემული არარეფლექსური სიმეტრიული მიმართება განსაზღვრავს გრაფს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ა) ვთქვათ, $G = (V, E)$ გრაფია. V სიმრავლეზე განვსაზღვროთ $R(E)$ მიმართება შემდეგნაირად: $v_1 R(E) v_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $[v_1, v_2] \in E$. $R(E)$ მიმართება არარეფლექსურია, რადგან $vR(E)v$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $[(v, v)] \in E$, მაგრამ $[(v, v)] \notin E$, რამდენადაც $(v, v) \notin V_-^2$. $R(E)$ მიმართება სიმეტრიულია, რადგან $v_1 R(E) v_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $[(v_1, v_2)] \in E$, მაგრამ

$$[(v_1, v_2)] = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} = [(v_2, v_1)].$$

მაშასადამე, $v_1 R(E) v_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $v_2 R(E) v_1$.

ბ) ვთქვათ, R არის V სიმრავლეზე განსაზღვრული არარეფლექსური, სიმეტრიული მიმართება.

R-ის არარეფლექსურობა ნიშნავს, რომ $(v, v) \notin R$ ნებისმიერი $v \in V$ ელემენტისთვის. ამიტომ $R \subset V_-^2$. სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ $v_1 R v_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $v_2 R v_1$.

თუ E სიმრავლეს განვსაზღვრავთ, როგორც $R/\sim$ ეკვივალენტობის კლასების სიმრავლეს, მაშინ $G(V, E)$ იქნება საძიებელი გრაფი.

გრაფები შეიძლება წარმოვადგინოთ ბულის ელემენტებიანი ($B = \{0, 1\}$) მატრიცების საშუალებით. გრაფების თვისებებიდან ბევრი შეიძლება განვსაზღვროთ მათი მატრიცული წარმოდგენებით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . $G(V, E)$ გრაფის $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n, B)$ მოსაზღვრე მატრიცი, სადაც $n = |V|$, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

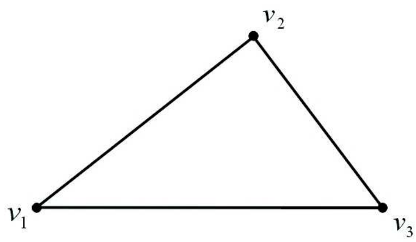
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } [v_1, v_2] \in E, \\ 0, & \text{თუ } [v_1, v_2] \notin E. \end{cases}$$

ამბობენ, რომ v_i და v_j წვეროები არის მოსაზღვრე, თუ $a_{ij} = 1$. ცხადია, რომ $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ და $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$, $\mathcal{A}$ სიმეტრიულია.

$G(V, E)$ გრაფი შეიძლება გამოვსახოთ R^2 სიბრტყეზე შემდეგნაირად: თითოეული $v \in V$ წვეროსთვის სიბრტყეზე აღვნიშნოთ წერტილი. ამასთან, თუ $[(v, w)] \in E$, მაშინ v და w წვეროები ხაზით შევაერთოთ.

განვიხილოთ მოცემული გრაფის გამოსახულება და მოსაზღვრეობის მატრიცა (ნახ. 1.1)

$$\mathcal{A} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \right].$$



ნახ. 1.1

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1.

1) ვთქვათ,

$$V=\{v_1,v_2,v_3\},\quad E=\big\{[v_1,v_2],[v_1,v_3],[v_2,v_3]\big\},$$
$$|V|=3,\quad |E|=3\,[\oplus]\,.$$

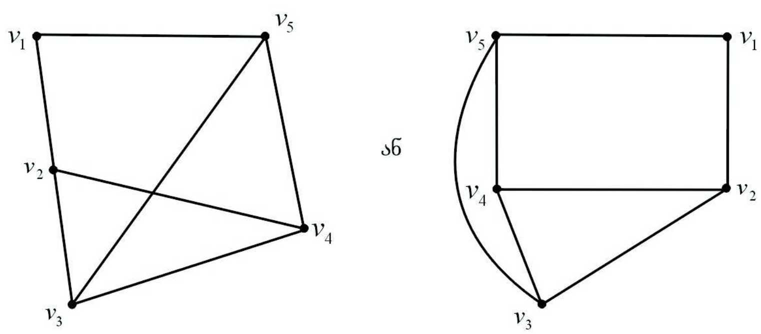
2) $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,

$$E=\big\{[v_1,v_2],[v_1,v_5],[v_2,v_3],[v_2,v_4],[v_3,v_5],[v_3,v_4],[v_4,v_5]\big\},$$

$|V|=5$, $|E|=7$.

განვიხილოთ მოცემული გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცა და გამოსახულება

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}.$$



ნახ. 1.2

შევნიშნოთ, რომ გრაფები წარმოადგენს უფრო “ტოპოლოგიურ”, ვიდრე “გეომეტრიულ” ობიექტებს, ანუ გრაფები გამოხატავს უფრო წვეროებს შორის

მიმართებას, ვიდრე სივრცეში წვეროებისა და წიბოების განლაგებას. ამგვარად, გრაფი შეიძლება გამოვსახოთ უსასრულო რაოდენობის სხვადასხვა, მაგრა, "ეკვივალეტური" ხერხით. ამასთან, ნახაზზე ორი წიბოს გადაკვეთიდან არ გამომდინარეობს, რომ გადაკვეთის წერტილი არის წვერო. ცხადია, რომ მომიჯნავეობის მატრიცის ქვედა (ან ზედა) სამკუთხა ნაწილი საკმარისია იმისათვის, რომ გრაფი განისაზღვროს

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

დიაგონალის ქვედა ნაწილი განსაზღვრავს G გრაფს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვიტყვით, რომ $H = (V_1, E_1)$ გრაფი არის $G = (V, E)$ გრაფის **ქვეგრაფი**, თუ $V_1 \subseteq V$ და $E_1 \subseteq E$. თუ $V_1 = V$, მაშინ ვიტყვით, რომ H არის G გრაფის **остовной ქვეგრაფი**. თუ V_1 არის $G = (V, E)$ გრაფის წვეროთა არაცარიელი ქვესიმრავლე, მაშინ V_1 **წარმოქმნილი** (V_1, E_1) **ქვეგრაფი** განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$[v_+, w] \in E_1 \Longleftrightarrow v, w \in V_1 \text{ და } [v, w] \in E.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა .

ა) ვთქვათ, მოცემულია $G_1 = (V_1, E_1)$ და $G_2 = (V_2, E_2)$ გრაფები. ვიტყვით, რომ G_1 და G_2 ეკვივალენტურია, თუ არსებობს ისეთი $f : V_1 \to V_2$ ბიექცია, რომ

$$vR(E)w \Longrightarrow f(v)R(E_2)f(w).$$

ბ) ვთქვათ, $G = (V, E)$ ნებისმიერი გრაფია. განვსაზღვროთ

$$\delta : V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ასახვა შემდეგნაირად: $\delta(v)$ სიდიდე უდრის იმ წიბოთა რაოდენობას, რომელიც შეიცავს $v \in E$ წვეროს. $\delta(v)$-ს ვუწოდოთ v წვეროს ხარისხი.

შემდეგი წინადადება გამოხატავს ორ მარტივ, მაგრამ მნიშვნელოვან ფაქტს გრაფების თვისებების შესახებ.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა .

ა) $\sum\limits_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$;

ბ) ნებისმიერ გრაფში კენტი ხარისხის წვეროთა რაოდენობა ლუწია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ა) თითოეული წიბო ორჯერ შედის ჯამში, საიდანაც გამომდინარეობს მტკიცება.

ბ) ვთქვათ, $V_e \subseteq V$ ლუწი ხარისხის წვეროთა სიმრავლეა, ხოლო $V_0 \subseteq V$ – კენტი ხარისხის წვეროთა სიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ

$$V = V_e \cup V_0 \text{ და } V_e \cap V_0 = \varnothing.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{v\in V}\delta(v)=\sum_{v\in V_e}\delta(v)+\sum_{v\in V_0}\delta(v).$$

ვიცით, რომ $\sum\limits_{v\in V}\delta(v)=2|E|$, ე. ი. ლუწი რიცხვია, $\sum\limits_{v\in V_e}\delta(v)$ ჯამში თითოეული შესაკრები ლუწია, ამიტომ ჯამიც ლუწია: $\sum\limits_{v\in V_e}\delta(v)=2k$ (k მთელი რიცხვია). ამრიგად,

$$\sum_{v\in V_0}\delta(v)=2|E|-2k=2(|E|-k).$$

მაგრამ ამ უკანასკნელ ჯამში თითოეული $\delta(v)$ შესაკრები კენტია, ამიტომ $|V_0|$ უნდა იყოს ლუწი.

განსაზღვრება.

1. ვთქვათ, S_V და S_E ნიშნების სიმრავლეებია. $G=(V,E)$ გრაფის მონიშვნა ანუ ნიშნების განაწილება ეწოდება ფუნქციათა წყვილს:
$f: V\to S_V$ წვეროების ნიშნების განაწილებაა;
$g: E\to S_E$ წიბოების ნიშნების განაწილებაა.

2. ვთქვათ, $G_1=(V_1,E_1)$ გრაფი მონიშნულია f_1 და g_1 ფუნქციებით, ხოლო $G_2=(V_2,E_2)$ – f_2 და g_2 ფუნქციებით.

G_1 და G_2 გრაფებს ეწოდება ეკვივალენტურად ნიშანდებული (მონიშნული), თუ არსებობს ისეთი $h: V_1\to V_2$ ბიექცია, რომ

ა) G_1 და G_2 ეკვივალენტურია, როგორც არანიშანდებული (თუ არამონიშნული) გრაფები;

ბ) შესაბამის წვეროებს აქვს ერთი და იგივე ნიშანი:

$$f1(v)=f_2(h(v))\ \text{ ნებისმიერი } v\in V_1\text{-თვის;}$$

გ) შესაბამის წიბოებს აქვს ერთი და იგივე ნიშანი:

$$g_1([v,w])=g_2\big([h(v),h(w)]\big)\ \text{ ყოველი } v,w\in V_1\text{-თვის.}$$

იმ შემთხვევაში, როცა მონიშნულია მხოლოდ წვეორები, გვექნება:

$$\begin{cases} f: V\to S_V,\\ g=\mathrm{const}\,.\end{cases}$$

თუ მონიშნულია მხოლოდ წვეროები, მაშინ გვექნება

$$\begin{cases} f=\mathrm{const},\\ g: E\to S_E.\end{cases}$$

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1.2.

1) ვთქვათ,

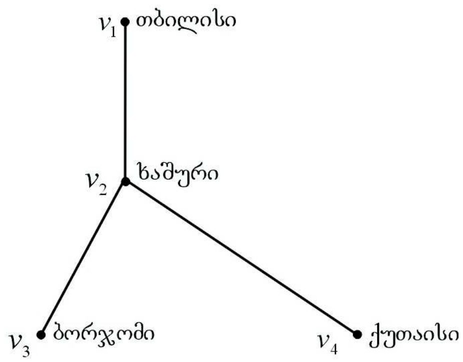
$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\quad E=\big\{[v_1,v_2],[v_2,v_3],[v_2,v_4]\big\},$$
$$f: V\to \text{საქართველოს ქალაქები},\quad g: E\to\mathbb{N},$$

$f(v_1)$ – თბილისი, $g([v_1, v_2])$=მანძილი თბილისსა და ხაშურს შორის,

$f(v_2)$ – ხაშური, $g([v_2, v_3])$=მანძილი ხაშურსა და ბორჯომს შორის,
$f(v_3)$ – ბორჯომი,

$f(v_4)$ – ქუთაისი $g([v_2, v_4])$=მანძილი ხაშურსა და ქუთაისს შორის.

ამ გრაფის გამოსახულება მოცემულია 1.3 ნახაზზე.



ნახ. 1.3

2) მოცემულია $G_1 = (V_1, E_1)$, სადაც

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$
$$E_1 = \big\{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_3, v_5], [v_2, v_4], [v_4, v_5]\big\}.$$

$G_2 = (V_2, E_2)$, სადაც

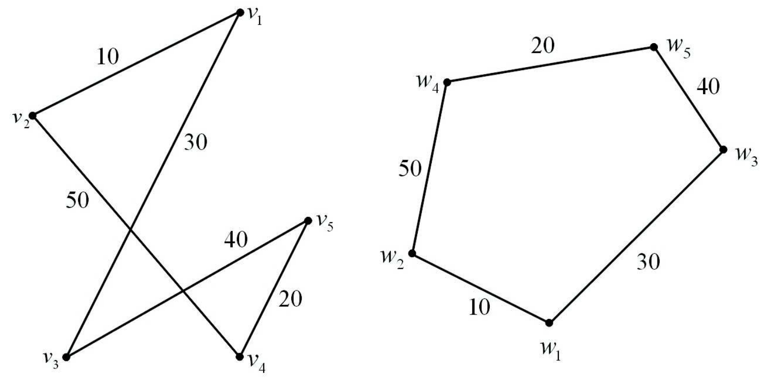
$$V_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\},$$
$$E_2 = \big\{[w_1, w_2], [w_1, w_3], [w_3, w_5], [w_2, w_4], [w_4, w_5]\big\}.$$

G_1 და G_2 გრაფები ეკვივალენტურად მონიშნულია.

განსაზღვრება.

ა) $G = (V, E)$ გრაფს ეწოდება **სრული**, თუ ნებისმიერი v_1, $v_2 \in V$ წვეროებისთვის გვაქვს $[v_1, v_2] \in E$. სრული გრაფი, რომელსაც აქვს n წვერო, აღინიშნება K_n სიმბოლოთი.

ბ) $G = (V, E)$ გრაფს ეწოდება **ორწილიანი**, თუ არსებობს ისეთი $V = \{V_1, V_2\}$ დაყოფა, რომ არცერთი ორი წვერო V_1, ასევე V_2-დან, არ არის მოსაზღვრე. ორწილიან გრაფს ეწოდება **სრული**, თუ ნებისმიერი $v_1 \in V_1$ და $v_2 \in V_2$ წყვილისთვის გვაქვს $[v_1, v_2] \in E$. თუ $|V_1| = m$ და $|V_2| = n$, მაშინ სრული ორწილიანი $G = (V, E)$ გრაფი აღინიშნება $K_{m,n}$ სიმბოლოთი.



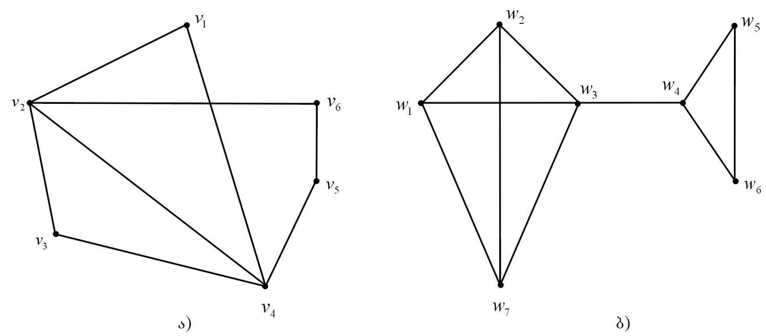
ნახ. 1.4

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.1.

1. გამოსახეთ ქვემოთ მოყვანილი მომიჯნავეობის მატრიცებით წარმოდგენილი გრაფები:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. შეადგინეთ 1.5 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების მომიჯნავეობის მატრიცები:



ნახ. 1.5

3. დახაზეთ 1.5(ა) ნახაზზე მოცემული გრაფის ქვეგრაფი, წარმოქმნილი $\{v_2, v_3, v_4, v_6\}$ წვეროებით.

4. ვთქვათ, $G = (V, E)$ არის გრაფი და $|V| = n$ როგორი შეიძლება იყოს $|E|$-ს მაქსიმალურად შესაძლო მნიშვნელობა.

5. რამდენი სხვადასხვა გრაფი არსებობს, რომლებსაც აქვს n წვერო.

6. გამოსახეთ K_3, K_4, K_5 გრაფები.

7. ააგეთ ორწილიანი გრაფის მაგალითი.

8. გამოსახეთ $K_{3,3}$ გრაფი.

9. რამდენი წიბო აქვს $K_{m,n}$ ორწილიან სრულ გრაფს.

§ 2. მარშრუტები, ციკლები და ბმულობა

გრაფების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება გამომდინარეობს შემდეგი განსაზღვრებიდან.

განსაზღვრება.

ა) ვთქვათ, $G = (V, E)$ არის გრაფი. G გრაფში k სიგრძის **მარშრუტი** v წვეროდან w-ში ეწოდება წვეროების (არა აუცილებლად სხვადასხვა) ისეთ $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ მიმდევრობას, სადაც $v_0 = v$, $v_k = w$, $[v_{i-1}, v_i] \in E$ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, k$. მარშრუტს ეწოდება **ჩაკეტილი**, თუ $v_0 = v_k$. მარშრუტს ეწოდება **ჯაჭვი**, თუ მისი ყველა წვერო განსხვავებულია. ჩაკეტილ ჯაჭვს ეწოდება **ციკლი**. ციკლს ეწოდება მარტივი, თუ მხოლოდ $v_0 = v_k$, ხოლო ყველა დანარჩენი წვერო განსხვავებულია.

ბ) თუ არსებობს მარშრუტი v-დან w-ში, $v, w \in V$, მაშინ ამბობენ, რომ w მიღწევადია v-დან.

გ) გრაფს, რომელიც არ შეიცავს ცილებს, აციკლური ეწოდება.

განსაზღვრება.

ა) $G = (V, E)$ გრაფს ეწოდება **ბმული**, თუ მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული წვეროსთვის არსებობს ამ წვეროების შემაერთებელი მარშრუტი.

ბ) აციკლურ ბმულ გრაფს **ხე** ეწოდება.

გ) Остовным деревом ეწოდება $G = (V, E)$ გრაფის მთავარ ქვეგრაფს, რომელიც ხეს წარმოადგენს.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, გამოთვლები მომიჯნავეობის მატრიცებზე შეიცავს მნიშვნელოვანი ინფორმაციას გრაფის ბუნების შესახებ.

შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ მოყვანილ თეორემას და მის შედეგებში მატრიცის $\mathcal{A}^k$ ხარისხი გამოითვლება $\mathcal{M}(n, \mathbb{Z})$-ში და არა $\mathcal{M}(n, \mathbb{B})$-ში, ამიტომ $\mathcal{A}^k$ მატრიცის ელემენტი შეიძლება 1-ზე მეტი რიცხვი იყოს.

თეორემა. ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის $G = (V, E)$ გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცა და $|V| = n$. $\mathcal{A}^k$ მატრიცის c_{ij} ელემენტი უდრის v_i-დან v_j-მდე k სიგრძის მარშრუტების რიცხვს.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქცია k-ს მიმართ. როცა $k = 1$, 1 სიგრძის მარშრუტი არის ზუსტად G გრაფის წიბო. ამ შემთხვევაში თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს $\mathcal{A}$ მატრიცის განსაზღვრებიდან. ვთქვათ,

$$\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad \mathcal{A}^{k-1} = (b_{ij}), \quad \mathcal{A}^k = (c_{ij}),$$

მაშინ

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \cdot \mathcal{A} = (c_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj}.$$

დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია $(k-1)$-თვის, ანუ b_{il} არის v_i-დან v_l-მდე $(k-1)$-სიგრძის მარშრუტების რიცხვი, ხოლო a_{lj}, განსაზღვრების თანახმად, არის v_l-დან v_j-მდე 1 სიგრძის მარშრუტების რიცხვი, მაშასადამე, $b_{il} \cdot a_{lj}$ ნამრავლი იქნება v_i-დან v_j-მდე k სიგრძის იმ მარშრუტების რაოდენობა, სადაც ბოლოს წინა წვეროა v_l. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\sum\limits_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj}$ იქნება v_i-დან v_j-მდე k სიგრძის ყველა შესაძლო მარშრუტის რაოდენობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი.

ა) $G = (V, E)$ გრაფში მარშრუტი v_i წვეროდან v_j-მდე $(i \neq j)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n რიგის კვადრატული

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^{n-1}$$

მატრიცის (i, j)-ური ელემენტი არ უდრის ნულს.

ბ) თუ არ გამოვიყენებთ $i \neq j$ პირობას, მაშინ მოთხოვნილ მატრიცას ექნება $\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^n$ სახე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\langle v_i, v_1, \ldots, v_j \rangle$ არის მარშრუტი v_i წვეროდან v_j-მდე. ვთქვათ, მოცემულ მიმდევრობაში წვეროები არ მეორდება. მაშინ, რადგან $|V| = n$, მარშრუტი შეიცავს არაუმეტეს $n - 1$ წიბოს. თეორემის ძალით, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^{n-1}$ შესაკრებებს შორის არსებობს ერთი მატრიცა მაინც, რომლის (i, j)-ური ელემენტი არ უდრის 0-ს. ამით აუცილებელი პირობა დამტკიცებულია.

თუ მოცემულ მარშრუტში მეორდება წვეროები, მაშინ მას ექნება

$$\langle v_i, \ldots, \underbrace{v_r, \ldots, v_r}_{\text{ჩაკეტილი მარშრუტი}}, \ldots, v_j \rangle,$$

თუ ჩვენ ამოვაგდებთ ყველა ასეთ ჩაკეტილ მარშრუტს, მაშინ ამოცანა დაიყვანება წინა შემთხვევამდე.

ახლა პირიქით, ვთქვათ, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^{n-1}$ მატრიცის (i, j)-ური ელემენტი არ უდრის 0-ს. ეს მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა შესაკრები მატრიცების (i, j)-ური ელემენტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება 0-გან. ეს უკვე ნიშნავს, რომ არსებობს მარშრუტი v_i-დან v_j-მდე.

ბ) თუ დასაშვებია $i = j$, მაშინ vi-დან v_j-ში მარშრუტის არსებობა ნიშნავს, რომ არსებობს წვეროთა $\langle v_i, v_1, \ldots, v_j \rangle$ მიმდევრობა. თუ ამ მიმდევრობაში ყველა წვერო განსხვავებულია (გარდა შესაძლო $v_i = v_j$ შემთხვევისა), მაშინ მარშრუტები შედგება არაუმეტეს $n + 1$ წვეროსგან (არაუმეტეს n წიბოსგან). მაშასადამე, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{A}^k$ მატრიცის (i, j)-ური ელემენტი არ უდრის 0-ს,

$$A(R^+(E)) = A(R(E)) \vee A(R^2(E)) \vee \cdots \vee A(R^n(E)) = \bigvee_{k=1}^{n} A(R^k(E)),$$

$$A(R^*(E)) = I \vee A(R(E)) \vee \cdots \vee A(R^{n-1}(E)) = \bigvee_{k=0}^{n-1} A(R^k(E)).$$

გავიხსენოთ, რომ ნებისმიერი R ბინარული მიმართებისთვის R^+ სიდიდე განისაზღვრება, როგორც

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

და, თუ $R \subset V \times V$, $|V| = n$, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$A(R^+) = A^+(R) = \bigvee_{k=1}^{n} A(R^k),$$

ანალოგიურად

$$A(R^*) = A^*(R) = \bigvee_{k=0}^{n-1} A(R^k).$$

აღნიშვნების გამარტივების მიზნით $A(R^k(E))$ აღვნიშნოთ $A(R^k)$-ით, $A(R^+(E))$ აღვნიშნოთ $A(R^+)$-ით, $A(R^*(E))$ კი – $A(R^*)$-ით.

$\mathcal{C} = \mathcal{A}(R^*)$ მატრიცას ეწოდება $G = (V, E)$ გრაფის **ბმულობის** მატრიცა. G გრაფში მარშრუტი v_i წვეროდან v_j-მდე $(i \neq j)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{C}$ მატრიცის (i, j)-ური ელემენტი უდრის 1-ს. G გრაფი ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{C}$ მატრიცის ყველა (i, j)-ური ელემენტი უდრის 1-ს, $1 \leq i, j \leq n$.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . R^* არის V-ზე ეკვივალენტობის მიმართება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . რადგან R^* არის R-ის რეფლექსური ჩაკეტვა, ამიტომ საჭიროა შევამოწმოთ მხოლოდ სიმეტრიულობა და ტრანზიტულობა. vR^*w მიმართებიდან გამომდინარეობს v-დან w-მდე $\langle v, v_1, \ldots, v_k, w\rangle$ მარშრუტის არსებობა. ე. ი.

$$[v, v_1] \in E, [v_1, v_2] \in E, \ldots, [v_k, w] \in E,$$

ანუ

$$[w, v_k] \in E, [v_k, v_{k-1}] \in E, \ldots, [v_2, v_1] \in E, [v_1, v] \in E.$$

ეს ნიშნავს, რომ $\langle w, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_1, v\rangle$ არის w-დან v-მდე მარშრუტი G გრაფში. ე. ი. wR^*v.

ვთქვათ, vR^*w და wR^*v, ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ არსებობს $\langle w, w_1, \ldots, w_m, u\rangle$ მარშრუტი w-დან u-მდე G გრაფში, სადაც

$$[w, w_1] \in E, [w_1, w_2] \in E, \ldots, [w_m, u] \in E.$$

თუ განვიხილავთ მიმდევრობას $\langle v, v_1, \ldots, v_k, w, w_1, \ldots, w_m, u\rangle$, ეს იქნება მარშრუტი v-დან u-მდე G გრაფში. ამრიგად, გვექნება, რომ vR^*u. R^* არის ეკვივალენტობის მიმართება.

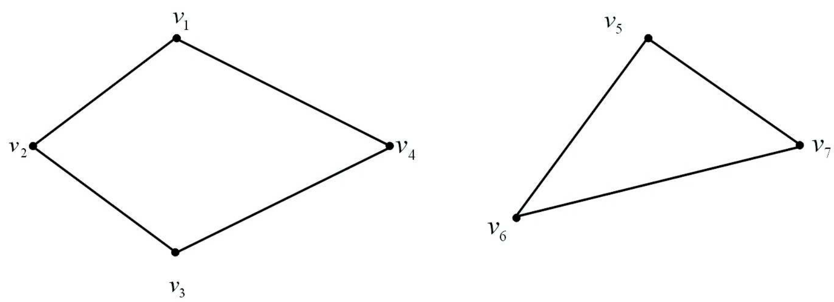
R^* განსაზღვრავს ქვეგრაფების მნიშვნელოვან კლასს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, $\{V_i : \ 1 \leq i \leq p\}$ არის G გრაფის R^* მიმართებით განსაზღვრული დაყოფა, მაშინ ამბობენ, რომ p არის G გრაფის

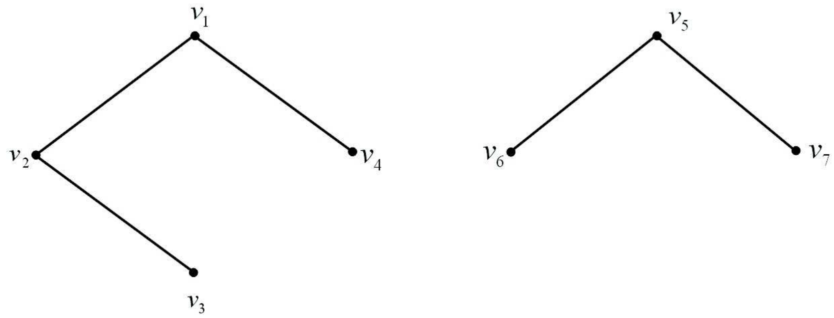
ბმულობის რიცხვი. ეკვივალენტობის კლასებით წარმოქმნილ (V_i, E_i) ქვეგრაფებს ეწოდება G გრაფის **ბმულობის კომპონენტები**.

ტყე ეწოდება გრაფს, რომელშიც ყოველი ბმული კომპონენტი არის ხე. $G = (V, E)$ გრაფის остовной ტყე არის ისეთი განცალკევებული $T_i = (V_i, E_i)$ ხეების წვეროების ერთობლიობა, რომ $V = \bigcup\limits_i V_i$ და $E_i \subset E$ ყველა i-თვის (წვეროების განცალკევება ნიშნავს, რომ $V_i \cap V_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$).

1.2 ნახაზზე ნაჩვენებია გრაფი, რომლისთვისაც $p = 2$ ბმულობის რიცხვია.



G გრაფი



G გრაფის остовной ტყე

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2.1.

1. ვთქვათ, $G = (V, E)$, სადაც

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$
$$E = \big\{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4]\big\}.$$

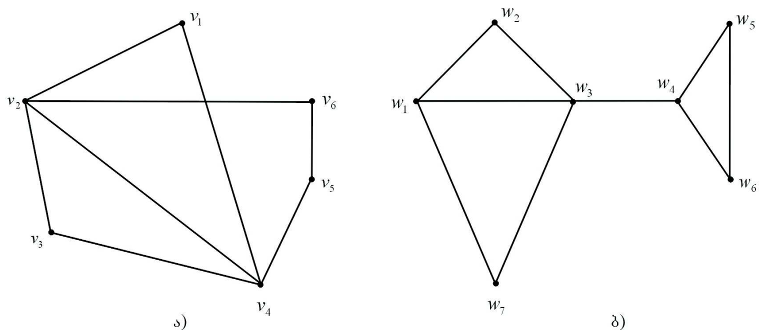
G გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცის გამოყენებით განვსაზღვროთ

ა) 2 სიგრძის მარშრუტების რიცხვი v_3 წვეროდან v_2-ში;

ბ) 3 სიგრძის მარშრუტების რიცხვი v_1-დან v_2-ში;

გ) არის თუ არა G გრაფი ბმულია.

2. დახაზეთ შემდეგი გრაფებისთვის остовные ხეები.



ნახ. 2.1

პლანარული გრაფები

§ 1. პლანარული გრაფები

გრაფთა თეორიის ბევრ ნაშრომში განიხილავენ გრაფების სპეციალურ კლასს, რომლებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ ნახაზით $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეზე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა .

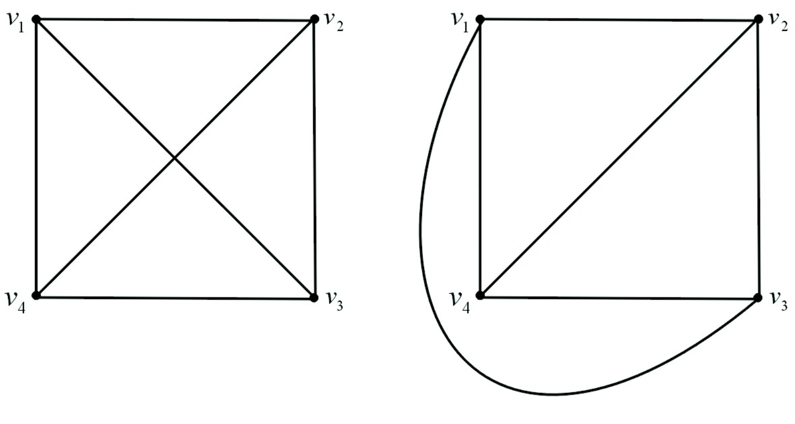
ა) G გრაფს **პლანარული** ეწოდება, თუ შეიძლება ის სიბრტყეზე ისე გამოისახოს, რომ მისი წიბოები არ იკვეთებოდეს (ორი წიბოს თანაკვეთა შეიძლება იყოს მხოლოდ წვერო). ასეთ ნახაზს G გრაფის **რუკა** ეწოდება (სიბრტყეზე გამოსახულ ასეთ გრაფს **ბრტყელ გრაფსაც** უწოდებენ).

ბ) G გრაფის რუკას ეწოდება ბმული, თუ G ბმულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$$E = \big\{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], [v_2, v_3]\big\}.$$

ამ გრაფის გამოსახულება და რუკა მოცემულია 1.1 ნახაზზე.

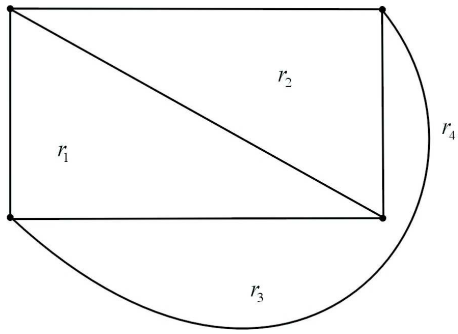


გამოსახულება G-ს რუკა

ნახ. 1.1

რუკა $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეს ჰყოფს არეებად.

მაგალითი 1.2. განვიხილოთ ნახაზზე გამოსახული რუკა. ის $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეს ჰყოფს ოთხ ნაწილად: r_1, r_2, r_3 და r_4



ნახ. 1.2

(რუკის არეს წახნაგებსაც უწოდებენ).

არეების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathcal{R}$ ასოთი.

ეილერის თეორემა. ნებისმიერი ბმული რუკისთვის სრულდება
$$|V|-|E|+\mathcal{R}|=2.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $|V|=1$, მაშინ, ცხადია, $|E|=1$ და $|\mathcal{R}|=1$. ამ შემთხვევაში თეორემა სამართლიანია. ვთქვათ, მოცემულია რუკა, რომლისთვისაც სრულდება $|V_1|-|E_1|+|\mathcal{R}_1|=2$, სადაც $|V_1|$ მოცემული რუკის წვეროთა რიცხვია, $|E_1|$ წიბოთა რიცხვი, $|\mathcal{R}_1|$ – არეების რიცხვი.

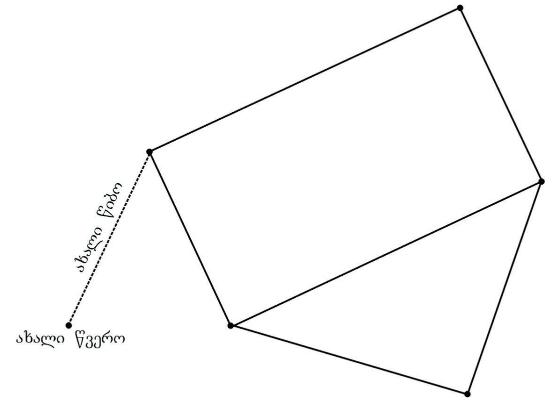
განვიხილოთ მოცემული რუკის გაფართოების ორი შესაძლო ხერხი.

ა) დავუმატოთ ერთი წვერო და მივუერთოთ მოცემულ რუკას წიბო. ამ შემთხვევაში (იხ. ნახ. 1.2) 1-ით იზრდება $|V_1|$ წვეროთა რაოდენობა და $|E_1|$ წიბოთა რაოდენობა, ხოლო $|\mathcal{R}_1|$ რჩება უცვლელი, $|V|=|V_1|+1$, $|E|=|E_1|+1$, $|\mathcal{R}|=|\mathcal{R}_1|$, რის შედეგადაც $|V|-|E|+|\mathcal{R}|$ გამოსახულების მნიშვნელობა არ იცვლება,
$$|V|-|E|+|\mathcal{R}|=$$
$$=(|V_1|+1)-(|E_1|+1)+|\mathcal{R}_1|=|V_1|-|E_1|+|\mathcal{R}_1|=2.$$

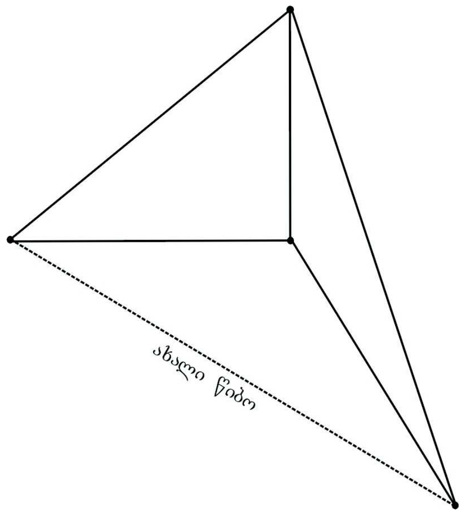
ბ) შევაერთოთ ახალი წიბოთი რუკაზე არსებული ორი წვერო (იხ. ნახ. 1.3). ამ შემთხვევაში წვეროთა რიცხვი დარჩება უცვლელი, ხოლო წიბოთა რიცხვი და არეთა რიცხვი 1-ით გაიზრდება: $|V|=|V_1|$, $|E|=|E_1|+1$, $|\mathcal{R}|=|\mathcal{R}_1|+1$,
$$|V|-|E|+|\mathcal{R}|=$$
$$=|V_1|-(|E_1|+1)+(|\mathcal{R}_1|+1)=|V_1|-|E_1|+|\mathcal{R}_1|=2.$$

შედეგად $|V|-|E|+|\mathcal{R}|$ მნიშვნელობა ისევ უცვლელი რჩება.

ნებისმიერი რუკა მიიღება $|V|=1$ შემთხვევიდან ა) და ბ) ხერხის საშუალებით. თუ საჭიროა, პროცედურა მეორდება. ამრიგად, რადგან $|V|-|E|+|\mathcal{R}|=2$,



ნახ. 1.3



ნახ. 1.4

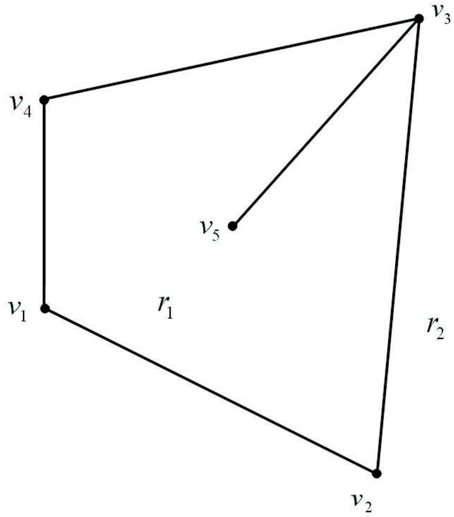
როცა $|V| = 1$, და $|V| - |E| + |\mathcal{R}|$ გამოსახულების მნიშვნელობა ინვარიანტული რჩება ა) და ბ) ხერხის შესრულებით, ამიტომ ნებისმიერი ბმული რუკისთვის გვაქვს

$$|V| - |E| + |\mathcal{R}| = 2.$$

ცხადია, რომ რუკის თითოეული არე შემოსაზღვრულია შეკრული მარშრუტით.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $G = (V, E)$ პლანარული გრაფია. G გრაფის რუკისთვის r არის Δ_r **ხარისხი** ვუწოდოთ ამ არის შემომსაზღვრელი შეკრული მარშრუტის სიგრძეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. ნახაზზე გამოსახული რუკისთვის r_1 არის შემომსაზღვრელი შეკრული მარშრუტია $\langle v_1, v_2, v_3, v_5, v_3, v_4, v_1\rangle$, ხოლო r_2-ის – $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\rangle$, ამიტომ $\Delta_{r_1} = 6$, $\Delta_{r_2} = 4$.



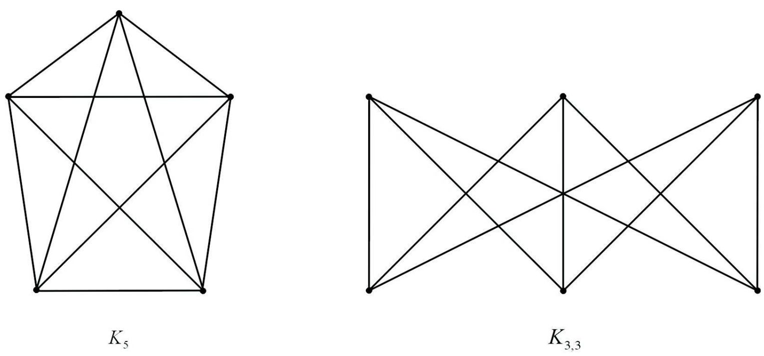
ნახ. 1.5

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ვთქვათ, $G = (V, E)$ არის პლანარული გრაფიკი, მაშინ

ა) $\sum\limits_{r\in\mathcal{R}} \Delta_r = 2E$ ნებისმიერი G რუკისთვის;

ბ) თუ $|V| \geq 3$, მაშინ $|E| \leq 3|V| - 6$.

განვიხილოთ K_5 სრული გრაფი და $K_{3,3}$ ორწილიანი სრული გრაფი



ნახ. 1.6

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . K_5 და $K_{3,3}$ არ არის პლანარული გრაფები.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . თუ K_5 პლანარულია, მაშინ წინა შედეგიდან გვექნება, რომ $|E| \leq 3|V| - 6$, მაგრამ, რადგან K_5-თვის $|V| = 5$, $|E| = 10$, მივიღებთ $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$, რაც არასწორია. ამრიგად, იმის დაშვება, რომ K_5 პლანარულია, არ არის სწორი.

ახლა დავუშვათ, რომ $K_{3,3}$ პლანარულია. გვექნება $\sum\limits_{r \in \mathcal{R}} \Delta_r = 2|E|$. $K_{3,3}$-ში არც ერთი სამი წვერი არ არის ერთმანეთთან შეერთებული, მაშასადამე, $\Delta_r \geq 4$, ნებისმიერი $r \in \mathcal{R}$-თვის. ეილერის ფორმულიდან $|\mathcal{R}| = 2 + |E| - |V| = 2 + 9 - 3 = 5$. მაშასადამე, $\sum\limits_{r \in \mathcal{R}} \Delta_r \geq 5 \cdot 4 = 20$, აქედან, $2|E| \geq 20$, $|E| \geq 10$, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამრიგად, დაშვება იმისა, რომ $K_{3,3}$ პლანარულია არასწორია.

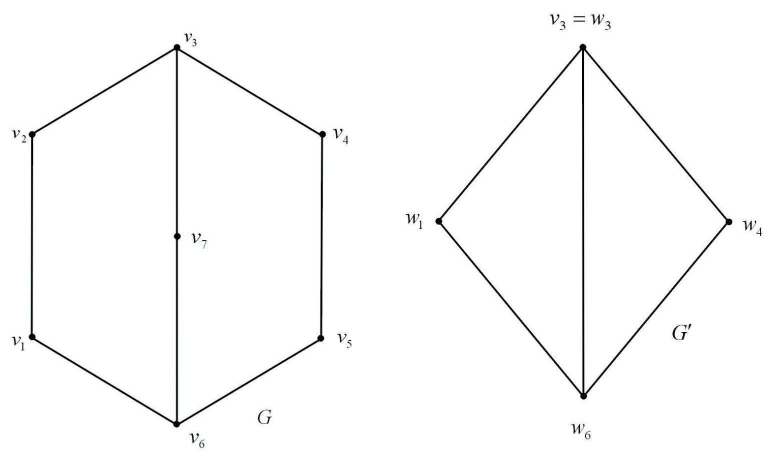
K_5 და $K_{3,3}$ გრაფები იმით არის საინტერესო, რომ ისინი არსებითად "ერთადერთი" არაპლანარული გრაფებია. ყველა სხვა არაპლანარულ გრაფებს აქვთ K_5 ან $K_{3,3}$-ის "მსგავსი" ქვეგრაფები.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა .

ა) $G = (V, E)$ გრაფის **ელემენტარული მოჭიმვა** ხდება მისი რომელიმე $[v_i, v_j]$ წიბოს ამოგდებით და v_i და v_j წვეროების გაიგივებით.

ბ) G გრაფს ეწოდება მიჭიმვადი G' გრაფზე, თუ G' მიიღება G-გან ელემენტარული მოჭიმვების მიმდევრობით შესრულებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.4. 1.7 ნახაზზე გამოსახულია G და G' გრაფები. ამასთან, G გრაფი მოჭიმვადია G'-ზე.



ნახ. 1.7

G გრაფიდან ამოგდებულია $[v_1, v_2]$ წიბო (v_1 და v_2 წვერო შეცვლილია ერთი w_1 წვეროთი). $[v_4, v_5]$ წიბო (v_4 და v_5 წვერო შეცვლილია ერთი w_4 წვეროთი), $[v_6, v_7]$ წიბო (v_6 და v_7 შეცვლილია w_6 წვეროთი).

თეორემა (კურატოვსკი). გრაფი პლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შეიცავს K_5 და $K_{3,3}$ გრაფებზე მოჭიმვად ქვეგრაფებს.

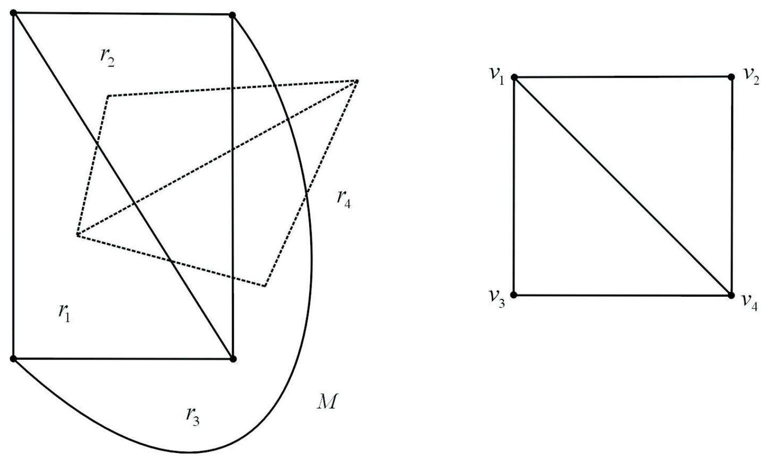
განსაზღვრება.

ა) $G=(V,E)$ გრაფის **გაფერადება** ეწოდება G-ს წვეროებისთვის ფერის მიცემას ისე, რომ თუ $[v,w]\in E$, მაშინ v და w წვეროებს სხვადასხვა ფერი უნდა ჰქონდეს.

ბ) G გრაფის $\chi(G)$ **ქრომატული რიცხვი** ეწოდება იმ ფერების მინიმალურ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა G გრაფის გასაფერადებლად.

განსაზღვრება. ვთქვათ, M რუკაა, განვსაზღვროთ M'-ის მიმართ **ორადული** M' რუკა შემდეგნაირად: M-ის თითოეულ არეში ავირჩიოთ შიგა წერტილი; თუ ორ არეს აქვს საერთო წიბო, მაშინ გავატაროთ ამ არეებში არჩეული შიგა წერტილებისთვის დამაკავშირებელი რკალი. ეს პროცესი განსაზღვრავს M' რუკას.

მაგალითი 1.5. 1.8 ნახაზზე გამოსახულია M რუკა და მისი ორადული M' რუკა



ნახ. 1.8

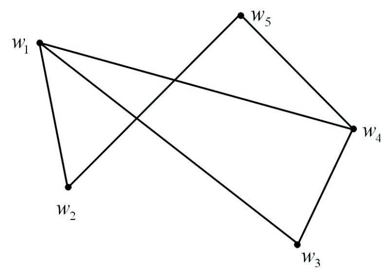
M'-ის გაფერადება შეესაბამება M-ის არეების ისეთ გაფერადებას, როცა საერთო წიბოს მქონე არეებს აქვს სხვადასხვა ფერი. მაშასადამე, თეორემა გაფერადების შესახებ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

თეორემა. M რუკის არეების ისეთნაირი გაფერადებისთვის, როცა მომიჯნავე არეებს სხვადასხვა ფერი აქვს, საჭიროა არაუმეტეს ოთხი ფერისა.

სავარჯიშო 1.3.

1. ვთქვათ, $T=(V,E)$ არის ხე, $|V|=n$. დაამტკიცეთ, რომ $|E|=n-1$.

2. შეამოწმეთ ეილერის ფორმულის მართებულობა შემდეგი გრაფისთვის



3. ვთქვათ, $G = (V, E)$ პლანარული გრაფია, Δ_r კი – r არის ხარისხი. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} \Delta_r = 2|E|.$$

4. ვთქვათ, $G = (V, E)$ ბმული პლანარული გრაფია და $|V| \geq 3$. დაამტკიცეთ, რომ $|E| \leq 3|V| - 6$.

5. მოიყვანეთ იმის მაგალითი, რომ ამ სავარჯიშოს წინა ამოცანაში მოცემული უტოლობა არასწორია, როცა $|V| \leq 3$.

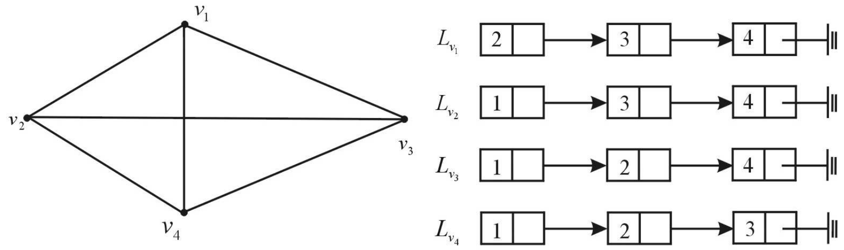
6. განსაზღვრეთ გრაფი, რომლისთვისაც $\chi(G) = 4$.

7. ვთქვათ, T არის ხე. რა იქნება $\chi(T)$-ს მნიშვნელობა.

§ 2. მონაცემთა სტრუქტურული გრაფის წარმოსადგენად

L_v-ით აღვნიშნოთ $v \in V$ წვეროს მოსაზღვრე წვეროთა ნუსხა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. 2.1 ნახაზზე მოცემულია გრაფი და ნუსხები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ გრაფის წარმოსადგენად.



ნახ. 2.1

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ წვეროთა სიმრავლეს წვეროების დალაგებულ წყვილთა $\{L_{v_1}, L_{v_2}, \ldots, L_{v_n}\}$ დალაგებულ “ნუსხათა” სიმრავლესთან ერთად დალაგებული გრაფი ეწოდება.

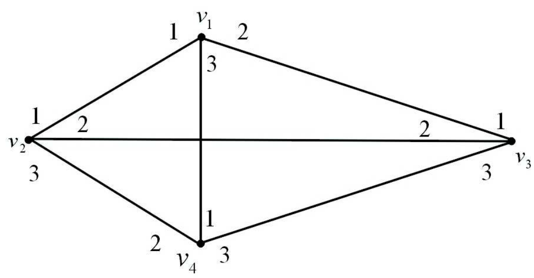
საჭიროა L_v ნუსხებს მოვთხოვოთ გარკვეული პირობები იმისათვის, რომ განხილული სტრუქტურები იყოს გრაფები:

ა) $(v, v) \notin L_v$ ყოველი $v \in V$-თვის;

ბ) $(w, u) \in L_w \Longrightarrow (u, w) \in L_u$.

2.2 ნახაზზე გამოსახული გრაფი შეიძლება დალაგებული გრაფის ტერმინებში შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\Big(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \Big\{\big((v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\big), \big((v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\big), \big((v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_4)\big), \big((v_4, v_1), (v_4, v_2), (v_4, v_3)\big)\Big\}\Big).$$



ნახ. 2.2

დალაგებული გრაფი განსაზღვრავს ერთადერთ არადალაგებულ გრაფს. შებრუნებული მტკიცება მცდარია, რადგან, საზოგადოდ, შესაძლებელია გრაფის დალაგება სხვადასხვა ხერხით.

განსაზღვრება. G_1 და G_2 დალაგებულ გრაფს ეკვივალენტური ეწოდება, თუ არსებობს $f : V_1 \to V_2$ ბიექცია წვეროთა სიმრავლეებს შორის, რომელიც ინარჩუნებს "ნუსხათა" სტრუქტურას. სხვა სიტყვებით, თუ

$$L_v = \Big((v, w_1), (v, w_2), \ldots, (v, w_k)\Big)$$

არის G_1-ს წიბოთა "ნუსხა", მაშინ

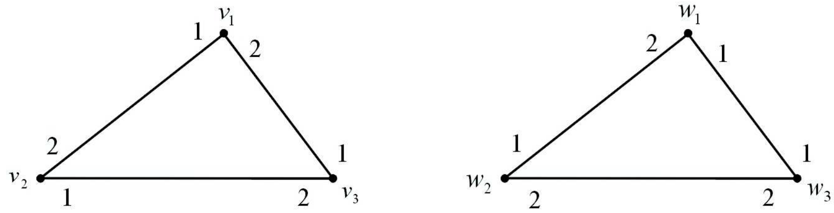
$$L_{f(v)} = \Big(\big(f(v), f(w_1)\big), \big(f(v), f(w_2)\big), \ldots, \big(f(v), f(w_k)\big)\Big)$$

არის G_2-ს წიბოთა "ნუსხა".

მაგალითი 2.2. 2.3 ნახაზზე გამოსახული გრაფები ეკვივალენტურია, მაგრამ ისინი, როგორც დალაგებული გრაფები, არ არის ეკვივალენტური

§ 3. გრაფის შემოვლა

3.1. შესავალი. გრაფებთან დაკავშირებულ მრავალ ამოცანაში მოითხოვება გრაფების შემოვლა, რაც ნიშნავს, რომ გრაფის თითოეულ წვეროსთან "მისვლა" უნდა მოხდეს მხოლოდ ერთხელ. ამგვარად, გრაფის შემოვლა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წვეროების გარკვეული მიმდევრობის სახით.



ნახ. 2.3

თუ $G = \big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E\big)$ გრაფის და $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ გადანაცვლება, მაშინ

$$t = v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}$$

მიმდევრობა განსაზღვრავს G გრაფის შემოვლას. რადგან არსებობს $\mathbb{N}_n$-ის $n!$ სხვადასხვა გადანაცვლება, შესაბამისად, უნდა არსებობდეს n წვეროიანი გრაფის შემოვლის $n!$ განსხვავებული ხერხი, ანუ არსებობს გრაფის წვეროთა დალაგების $n!$ ხერხი. $v_{\sigma(1)}$ წვეროს ეწოდება σ-თი განსაზღვრული შემოვლის საწყისი წვერო.

აქ მოვიყვანთ გრაფების შემოვლის მხოლოდ ორ მეთოდს.

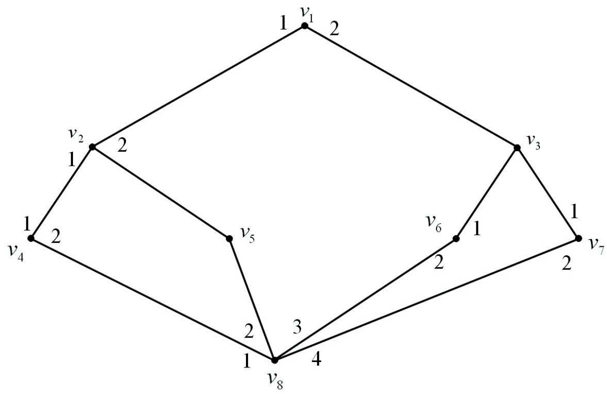
3.2. გრაფის შემოვლა სიღრმით. ვთქვათ,

$$G = \Big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{L_{v_1}, L_{v_2}, \ldots, L_{v_n}\}\Big)$$

დალაგებული გრაფია. ავირჩიოთ რომელიღაც v_s $(1 \le s \le n)$ საწყისი წვერო და დავუშვათ $\sigma(1) = s$. შემდეგ t მიმდევრობის წვეროები განისაზღვრება შემდეგნაირად: $v_{\sigma(2)}$ არის პირველი წვერო $L_{v_{\delta(1)}}$ მომიჯნავეობის ნუსხიდან, (ე. ი. v_s-ის მოსაზღვრე), $v_{\delta(3)}$ არის პირველი წვერო $L_{v_{\sigma(2)}}$-დან, რომელიც ჯერ არ არის t მიმდევრობაში და ა. შ. $v_{\delta(k)}$ არის პირველი წვერო $L_{v_{\sigma(k-1)}}$-დან, რომელიც ჯერ არ არის t-ში. ამასთან, თუ შეგვხვდება ისეთი u წვერო, რომ ყველა წვერო L_u-დან უკვე შესულია t-ში, მაში პროცესი განმეორდება $w \in t$ წვეროდან, სადაც w არის ისეთი უკანასკნელი წვერო t მიმდევრობაში, რომ L_w შეიცავს წვეროებს, რომლებიც არ არის t-ში. შემოვლა მთავრდება მაშინ, როცა არცერთი წვერო $V \setminus t$-დან არ შეიძლება მიღწეული იქნეს t მიმდევრობის წვეროებიდან.

თუ გრაფი ბმულია, მაშინ ზემოთ აღწერილი პროცესი განსაზღვრავს G-ს შემოვლას, წინააღმდეგ შემთხვევაში G გრაფის მხოლოდ ერთ კომპონენტს (რომელიც შეიცავს $v_{\sigma(1)}$-ს). თუ გრაფი არ არის ბმული, მაშინ G-ს სრული შემოვლის მისაღებად პროცესი უნდა დავიწყოთ G გრაფის თითოეულ ბმულ კომპონენტში. ამ მეთოდის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ გრაფის ბმული კომპონენტების რაოდენობა. ბმულ გრაფში საწყისი წვეროს თითოეული შერჩევის დროს მივიღებთ ერთადერთ შემოვლას. ამრიგად, შესაძლებელია დალაგებული ბმული გრაფის n შემოვლა (სიღრმით). თუ G-ს აქვს V_i $(1 \le i \le p)$ ბმული კომპონენტები, სადაც $|V_i| = n_i$, მაშინ გვექნება $n_1 \cdot n_2 \cdot n_p$ სიღრმით შემოვლა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. განვიხილოთ 3.1 ნახაზზე გამოსახული დალაგებული გრაფი. v_1 საწყისი წვეროდან სიღრმით შემოვლა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $v_1, v_2, v_4, v_8, v_5, v_6, v_3, v_7$.



ნახ. 3.1

3.3. განივი შემოვლა. ვთქვათ,

$$G = \Big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{L_{v_1}, L_{v_2}, \ldots, L_{v_n}\}\Big)$$

არის დალაგებული გრაფი. ავირჩიოთ საწყისი v_s წვერო და დავუშვათ, რომ $L_{v_s} = \big((v_s, w_1), (v_s, w_2), \ldots, (v_s, w_k)\big)$.

t მიმდევრობის პირველი $k+1$ წევრი განისაზღვრება შემდეგნაირად: $v_{\sigma(1)} = v_s, v_{\sigma(2)} = w_1, \ldots, v_{\sigma(k+1)} = w_k$, ხოლო $v_{\sigma(k+1+i)}$ არის L_{w_1}-ში i-ური წვერი, რომელიც არ არის t-ში. ამით ამოიწურება L_{w_1}, პროცესი დაიწყება L_{w_2}-დან და ა. შ. შემოვლა შეწყდება, როცვა ყველა წვერო, რომლებიც $v_{\sigma(1)}$-დან მიღწევადია, შევა t-ში. თუ გრაფი ბმულია, მაშინ ამ პროცესით $v_{\sigma(1)}$-დან მიიღწევა ყველა წვერო. ე. ი. ხდება გრაფის სრული შემოვლა. თუ არ არის ბმული, მაშინ თითოეული კომპონენტისთვის უნდა შეირჩეს საწყისი წერტილი. ბმული გრაფისთვის საწყისი $v_{\sigma(1)}$ წერტილის შერჩევა განსაზღვრავს ერთადერთ შემოვლას. ამრიგად, თუ გრაფი n წვეროს შეიცავს, არსებობს G განივი შემოვლა (როგორც სიღრმის შემოვლის დროს). თუ G არ არის ბმულის და მისი კომპონენტებია V_i $(1 \le i \le p)$, $|V_i| = n_i$, მაშინ არსებობს $n_1 \cdot n_2 \cdots n_p$ განივი შემოვლა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2. 3.1 ნახაზზე გრაფის განივი შემოვლა საწყისი v_1 წერტილიდან შესრულდება შემდეგნაირად:

$$t = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8).$$

3.4. სიღრმით და განივი შემოვლების остовные ტყეები. ვთქვათ, $G = \big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E\big)$ არის გრაფი, ხოლო $t = v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}$ არის G-ს შემოვლა. მაშინ t შემოვლა განსაზღვრავს E წიბოთა სიმრავლეს E^t ქვესიმრავლეს შემდეგნაირად: $[v, w] \in E^t$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $[v, w]$ წიბო

გამოიყენება შემოვლის ასაგებად. ანალოგიურად, განისაზღვრება დალაგებული გარფების L_v სიმრავლეებისთვის L_v^t ქვესიმრავლეები.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ვთქვათ,

$$G = \big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, [L_{v_1}, L_{v_2}, \ldots, L_{v_n}]\big)$$

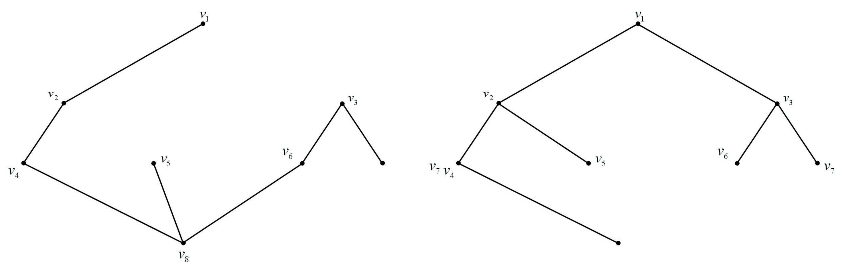
დალაგებული ბმული გრაფი, ხოლო t შემოვლაა, მაშინ

$$G^t = \big(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{L_{v_1}^t, L_{v_2}^t, \ldots, L_{v_n}^t\}\big)$$

იქნება G-ს დალაგებული остовное ხე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . რადგან G არის ბმული გრაფი, ამიტომ G^t-ც აგრეთვე ბმულია და წარმოადგენს G-ს ჩონჩხს (остов) (რადგან G^t შეიცავს G-ს ყველა წვეროს). თუ G^t შეიცავს ჩაკეტილ მარშრუტს, მაშინ ზოგიერთი წვერო t-ში გამოჩნდება ერთზე მეტჯერ. მაგრამ, რადგან t არის შემოვლა ეს შეუძლებელია, ამიტომ G^t არის აციკლური. მაშასადამე, G^t არის ხე.

შ ე დ ე გ ი . ყველა ბმულ გრაფს აქვს остовное ხე.



ნახ. 3.2

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. 3.1 ნახაზზე გამოსახული გრაფისთვის v_1 საწყისი წვეროდან სიღრმით და განივი შემოვლებით განსაზღვრული остовные ხეები იქნება, შესაბამისად, 3.2(ა) და 3.2(ბ) ნახაზებზე გამოსახული ხეები.

არაბმული გრაფებისთვის სრული შემოვლა განსაზღვრავს остовной ტყეს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.1.

1. ვთქვათ, $G = \big(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{L_{v_1}, L_{v_2}, L_{v_3}, L_{v_4}, L_{v_5}, L_{v_6}\}\big)$ დალაგებული გრაფია, სადაც

$$L_{v_1} = \big((v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\big),$$
$$L_{v_2} = \big((v_2, v_1), (v_2, v_5)\big),$$
$$L_{v_3} = \big((v_3, v_1), (v_3, v_6)\big),$$
$$L_{v_4} = \big((v_4, v_1), (v_4, v_6), (v_4, v_5)\big),$$
$$L_{v_5} = \big((v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_5, v_4)\big),$$
$$L_{v_6} = \big((v_6, v_3), (v_6, v_4), (v_6, v_5)\big).$$

განსაზღვრეთ

ა) სიღრმით შემოვლა v_2 საწყისი წვერტილიდან;

ბ) განივი შემოვლა v_6 საწყისი წვერტილიდან.

2. დახაზეთ წინა ამოცანაში მოყვანილი G გრაფის შემოვლებით განსაზღვრული остовное ხეები.

3. ვთქვათ, G გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცას აქვს ბლოკური სტრუქტურა,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

სადაც თითოეული $\mathcal{A}_i$ არის ბულის ელემენტებიანი კვადრატული მატრიცა, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი 0-ის ტოლია. რა შეიძლება ითქვას G გრაფის თვისებებზე? მოიყვანეთ ერთი მაგალითი და ააგეთ შესაბამისი ნახაზი.

ორიენტირებული გრაფები

§ 1. ორიენტირებული გრაფები

1.1. შესავალი. გრაფთა თეორიის გამოყენებისას ხშირად მოითხოვება, რომ გრაფის წიბოებს ჰქონდეს მიმართულება.

განსაზღვრება. ორიენტირებული გრაფი არის $G = (V, E)$ წყვილი, სადაც V არის წვეროების სასრული სიმრავლე, ხოლო E კი – $V \times V$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე.

წინადადება. ა) ორიენტირებული $G = (V, E)$ გრაფი განსაზღვრავს მიმართებას V სიმრავლეზე;

ბ) ვთქვათ, V სასრული სიმარვლეა. მაშინ V სიმრავლეზე ბინარული მიმართება განსაზღვრავს ორიენტირებულ გრაფს, რომლის წვეროთა სიმრავლეა V.

დამტკიცება. ა) $R(E)$ მიმართება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $vR(E)w$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(v, w) \in E$. ცხადია, $R(E)$ იქნება ბინარული მიმართება.

ბ) ვთქვათ, R არის ბინარული მიმართება $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე, მაშინ წიბოთა სიმრავლე ავაგოთ შემდეგნაირად: $(v, w) \in E$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა vRw. ამგვარად აგებული $G = (V, E)$ იქნება ორიენტირებული გრაფი.

წიბოს მიმართულება განისაზღვრება წყვილის დალაგებით. მაგალითად, თუ $(v, w) \in E$, ვიტყვით, რომ წიბო გამოდის v-დან და შედის w-ში. დიაგრამაზე მიმართულების მისათითებლად ისრებს იყენებენ.

მაგალითი 1.1.

ა) ვთქვათ,

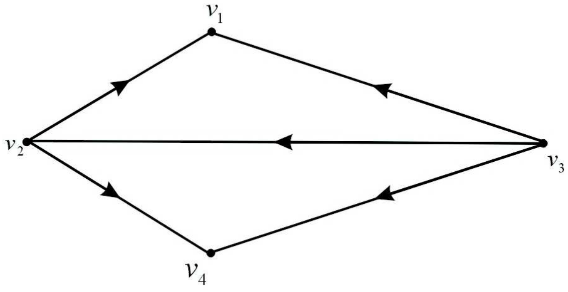
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$
$$E_1 = \Big\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4)\Big\}.$$

ნახაზზე მოცემულია ამ გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცა და გამოსახულება

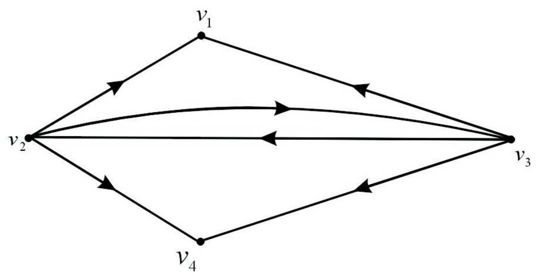
ბ) ვთქვათ,

$$E_2 = \Big\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_4)\Big\},$$

$G = (V, E_2)$ ორიენტირებული გრაფის მომიჯნავეობის $\mathcal{A}_2$ მატრიცა და გამოსახულება მოცემულია 1.2 ნახაზზე:



ნახ. 1.1



ნახ. 1.2

შევნიშნოთ, რომ ორიენტირებული გრაფით განსაზღვრული ბინარული მიმართება, საზოგადოდ, არ არის სიმეტრიული, არარეფლექსური. შესაბამისად, მომიჯნავეობის მატრიცისთვის შეიძლება $A \neq A'$ და $a_{ii} \neq 0$. (v,v) სახის წიბოებს **მარყუჟს** უწოდებენ. $v \in V$ წვეროს $\delta(v)$ ხარისხი შეიძლება ჩაიწეროს $\delta(v) = \delta^-(v) + \delta^+(v)$ ჯამის სახით, სადაც $\delta^-(v)$ არის v-ში შემავალი წიბოების რაოდენობა, ხოლო $\delta^+(v)$ არის v-დან გამომავალ წიბოთა რაოდენობა. $\{w : (w,v) \in E\}$ და $\{w : (v,w) \in E\}$ სიმრავლეებს უწოდებენ v წვეროს **შემავალ** და **გამომავალ** კვანძებს, შესაბამისად.

ეკვივალენტობისა და მონიშვნის ცნებები ორიენტირებულ გრაფებზე ბუნებრივად განზოგადება.

1.2. მარშრუტები და ბმულობა ორიენტირებულ გრაფებში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . k სიგრძის მარშრუტი v წვეროდან w-ში ორიენტირებულ $G = (V,E)$ გრაფში ეწოდება წიბოები შემდეგი სახის მიმდევრობას:

$$(v, w_1), (w_1, w_2), \ldots, (w_{k-2}, w_{k-1}), (w_{k-1}, w).$$

ე. ი. თითოეული წიბოს მეორე წვერო ემთხვევა შემდეგი წიბოს პირველ წვეროს.

ხშირად მოხერხებულია მარშრუტი წარმოვადგინოთ წვეროების იმ

$$v, w, w_2, \ldots, w_{k-2}, w_{k-1}, w$$

მიმდევრობით, რომლებიც მას განსაზღვრავს. თუ $v = w$, მარშრუტს ეწოდება ჩაკეტილი. მარშრუტი ანუ **ციკლი**. ორიენტირებულ გრაფს, რომელიც ციკლს არ შეიცავს, აციკლური ეწოდება.

ვთქვათ, D აღნიშნავს ყველა ორიენტირებული გრაფის სიმრავლეს, ხოლო $\mathcal{G}$ – ყველა გრაფის სიმრავლეს. შეგვიძლია განვსაზღვროთ $F : D \to \mathcal{G}$ ასახვა შემდეგნაირად.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, $G = (V, E) \in D$ ორიენტირებული გრაფია. მაშინ $F(G) \in \mathcal{G}$ გრაფის წვეროთა სიმრავლე ემთხვევა V-ს, ხოლო $F(G)$-ის წიბოთა სიმრავლე განისაზღვრებას E-ზე ჩატარებული შემდეგი ოპერაციებით:

ა) E-დან მოვაშოროთ ყველა მარყუჟი;

ბ) (v, w) შევცვალოთ $[v, w]$-ით ყველა $(v, w) \in E$-თვის. მაშინ $F(G)$ გრაფი იქნება G ორიენტირებულ გრაფთან დაკავშირებული გრაფი.

ორიენტირებული გრაფებისთვის ბმის ცნება უფრო მეტად შინაარსობრივია, ვიდრე გრაფებისთვის. განვსაზღვროთ ორიენტირებული გრაფების ბმის სამი ტიპი:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, $G = (V, E)$ არის ორიენტირებული გრაფი. ვიტყვით, რომ

ა) G **სუსტად ბმულია**, თუ $F(G)$ გრაფი არის ბმული.

ბ) G **ცალმხრივად ბმულია**, თუ $v, w \in V$ სხვადასხვა წვეროს ყოველი წყვილისთვის არსებობს მარშრუტი v-დან w-ში ან w-დან v-ში.

გ) G **ძლიერად ბმულია**, თუ $v, w \in V$ სხვადასხვა წვეროს ყოველი წყვილისთვის არსებობს მარშრუტი v-დან w-ში და w-დან v-ში.

ცხადია, რომ

$$G \text{ ძლიერად მბულია} \Longrightarrow G \text{ ცალმხრივად ბმულია} \Longrightarrow \text{G ბმულია.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.2. 1.3 ნახაზზე გამოსახულია ორიენტირებული გრაფი

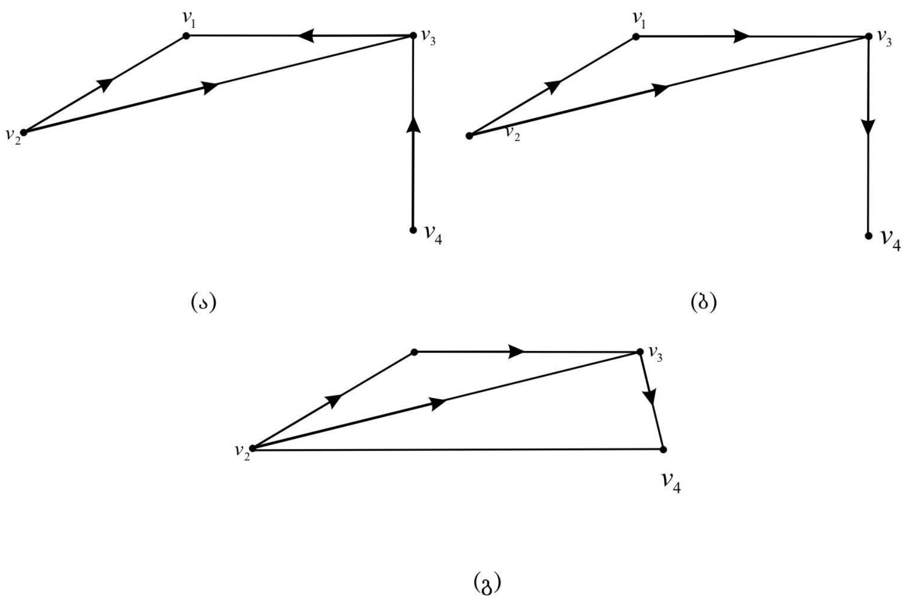
ა) მხოლოდ სუსტად ბმული (იხ. ნახ. 1.3(ა));

ბ) ცალმხრივად ბმულია (იხ. ნახ. 1.3(ბ));

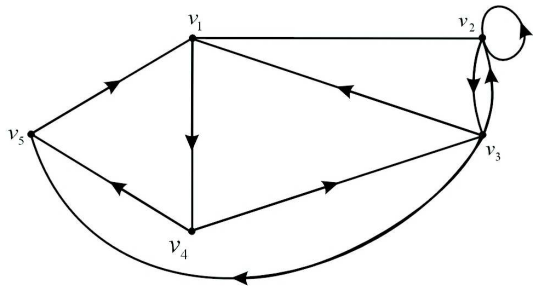
გ) ძლიერად ბმულია (იხ. ნახ. 1.3(გ));

$\mathcal{C} = A(R^*)$ ბმულობის მატრიცის ტერმინებში ორიენტირებული G გრაფი ძლიერად ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $c_{ij} = 1$, ყოველი $1 \le i, j \le n$-თვის; G ცალმხრივად ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $c_{ij} \vee c_{ji} = 1$, ყოველი $1 \le i, j \le n$-თვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. განვიხილოთ 1.4 ნახაზზე დიაგრამით წარმოდგენილი ორიენტირებული გრაფი



ნახ. 1.3



ნახ. 1.4

ამ გრაფისთვის გვაქვს:

$$A(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(R^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(R^4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ამიტომ

$$\mathcal{C} = \bigvee_{k=0}^{4} A(R^4) = I \vee A(R) \vee A(R^2) \vee A(R^3) \vee A(R^4)$$

მატრიცისთვის $c_{ij} = 1$ ყველა $1 \leq i, j \leq 5$-თვის, ამრიგად, მოცემული გრაფი არის ძლიერად ბმული.

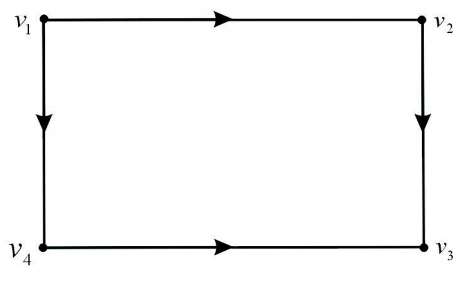
თუ $G = (V, E)$ არის ორიენტირებული გრაფია, მაშინ ეკვივალენტობის ρ მიმართებით V წვეროთა სიმრავლე შეიძლება დავყოთ კლასებად შემდეგნაირად: $v\rho w$, თუ $v = w$ ან არსებობს მარშრუტი v-დან w-ში და პირიქით. თუ $\{V_i L\ 1 \leq i \leq p\}$ არის V-ს დაყოფა და $\{E_i :\ 1 \leq i \leq p\}$, სადაც $E_i = (V_i \times V_i) \cap E$ არის წიბოთა შესაბამისი სიმრავლე, მაშინ $G_i = (V_i, E_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ ქვეგრაფებს ეწოდება G გრაფის ძლიერად ბმული კოეფიციენტები.

ცხადია, რომ $\rho \subseteq R^*$ და $A(\rho)$ შეიძლება განისაზღვროს $A(R^*)$-დან, როგორც $A(\rho)_{ij} = A(R^*)_{ij} \wedge A(R^*)_{ji}$.

G გრაფი ძლიერად ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G-ს აქვს მხოლოდ ერთი ძლიერად ბმული კომპონენტი, ე. ი. თუ $p = 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.4. განვიხილოთ 1.5 ნახაზზე გამოსახული ორიენტირებული გრაფი. გვექნება

$$A(R^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



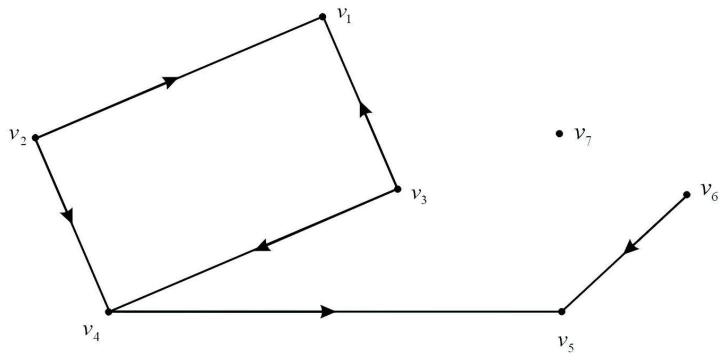
ნახ. 1.5

ამრიგად, $G_i = (\{v_i\}, \varnothing)$ $(1 \leq i \leq 4)$ არის G გრაფის ძლიერად ბმული კომპონენტები.

ვთქვათ, $G=(V,E)$ აციკლური გრაფია. $v \in V$ წვეროს ეწოდება **ფოთოლი**, თუ $\delta^+(v)=0$. თუ $(v,w) \in E$, მაშინ v არის **w-ს უშუალო წინაპარი**, ხოლო w კი – **v-ს უშუალო შთამომავალი**. თუ არსებობს მარშრუტი v-დან w-ში, მაშინ ამბობენ, რომ v არის **w-ს წინაპარი**, ხოლო w კი – **v-ს შთამომავალი**.

ამ ცნებებს აზრი არ აქვს ციკლის შემცველი გრაფებისთვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.5. 1.6 ნახაზზე გამოსახულია ორიენტირებული აციკლური გრაფი.



ნახ. 1.6

v_3 არის v_5-ის წინაპარი.

v_4 არის v_5-ის უშუალო წინაპარი.

v_5 არის v_3-ის უშუალო შთამომავალი.

მჭიდრო კავშირი არსებობს აციკლური ორიენტირებულ გრაფებსა და ნაწილობრივ დალაგებულ მიმართებებს შორის.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ა) ვთქვათ, “$<$” არის ნაწილობრივ დალაგების მიმართება სასრულ V სიმრავლეზე, მაშინ თუ

$$E=\big\{(v,w):\ v<w\big\},$$

$G=(V,E)$ იქნება აციკლური გრაფი.

ბ) ვთქვათ, $G=(V,E)$ არის აციკლური ორიენტირებული გრაფით. “$<$” მიმართება V-ზე განისაზღვრება შემდეგნაირად: $v<w$, თუ v არის w-ს წინაპარი. მაშინ $<$ იქნება ნაწილობრივი დალაგების მიმართება v-ზე.

ორიენტირებული ხე $T=(V,E)$ არის აციკლური ორიენტირებული გრაფი, რომელიც ერთ $v_r \in V$ წვეროს არ აქვს წინაპარი, ხოლო ყველა დანარჩენ სხვა წვეროს აქვს მხოლოდ ერთი უშუალო წინაპარი. v_r-ს ეწოდება **ხის ფესვი**. **ბინარული ხე** ეწოდება ორიენტირებულ ხეს, რომელშიც თითოეულ წვეროს აქვს არაუმეტეს ორი უშუალო შთამომავალი, ე. ი. $\delta^+(v) \le 2$ ყოველი $v \in V$-თვის.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ვთქვათ, $G=(V,E)$ ორიენტირებული გრაფია. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

ა) G არის ხე.

ბ) $F(G)$ გრაფი არის ბმული და არსებობს v_r წვერო, რომელსაც არ აქვს წინაპარი, ხოლო ყველა დანარჩენ წვეროს აქვს მხოლოდ ერთი უშუალო წინაპარი.

გ) G-ს აქვს v_r წვერო, რომელიც ნებისმიერ სხვა წვეროს უერთდება ერთადერთი მარშრუტით.

დ) G-ს აქვს v_r წვერო, რომელსაც არ აქვს წინაპარი; ყვ ელა სხვა წვეროს აქვს მხოლოდ ერთი უშუალო წინაპარი; არსებობს მარშრუტი v_r-დან თითოეულ წვერომდე.

1.3. დალაგებული ორიენტირებული გრაფები და შემოვლები. მომიჯნავეობის ნუსხები მომიჯნავეობის მატრიცების მიმართ ორიენტირებული გრაფების წარმოდგენის ალტერნატიული ფორმაა.

განსაზღვრება. დალაგებული ორიენტირებული გრაფი ეწოდება $G=(V,E)$ წყვილს, სადაც V წვეროების სასრული სიმრავლეა, ხოლო E ორიენტირებული წიბოები დალდაგებულ ნუსხათა სიმრავლეა. E-ს ელემენტებს აქვს შემდეგი სახე:

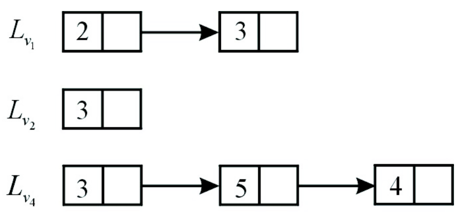
$$L_v = \Big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\Big),$$

სადაც v, $w_k \in V$.

მაგალითი 1.6. განვიხილოთ დალაგებული ორიენტირებული გრაფი

$$G = \Big((v_1,v_2,v_3,v_4,v_5),$$
$$\Big\{\big((v_1,v_2),(v_1,v_3)\big),\big((v_2,v_3)\big),\big((v_4,v_3),(v_4,v_5),(v_4,v_4)\big)\Big\}\Big).$$

G გრაფი შეიძლება წარმოვადგინოთ მომიჯნავეობის ნუსხებით:

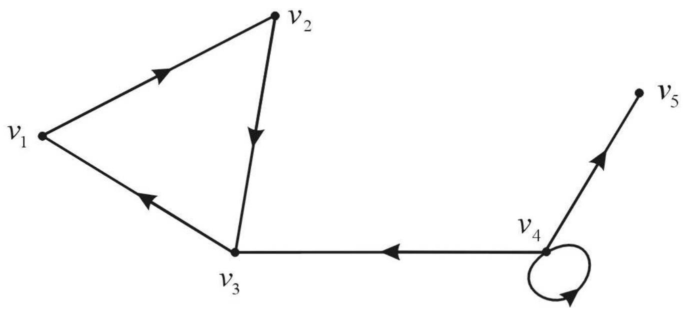


ნახ. 1.7

და შეიძლება წარმოვადგინოთ დიაგრამით (ნახ. 1.9)

დალაგებული G ორიენტირებული გრაფი განსაზღვრავს ერთადერთ არადალაგებულ ორიენტირებულ გრაფს: თითოეული დალაგებული

$$\big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\big)$$

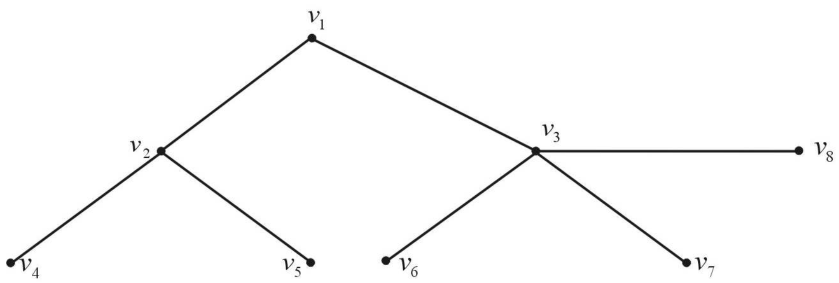


ნახ. 1.8

ნუსხა უნდა შევცვალოთ $\{(v, w_1), (v, w_2), \ldots, (v, w_k)\}$ სიმრავლით. ასეთნაირად განსაზღვრულ ორიენტირებულ გრაფს ეწოდება G-ს დაქვემდებარებული ორიენტირებული გრაფი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.7. T არის დალაგებული ორიენტირებული ხე

$$T = \Big(\big\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\big\},$$
$$\Big\{\big((v_1, v_2), (v_2, v_3)\big), \big((v_2, v_4), (v_2, v_5)\big), \big((v_3, v_6), (v_3, v_7), (v_3, v_8)\big)\Big\}\Big).$$



ნახ. 1.9

v_1 არის T ხის ფესვი (იხ. ნახ. 1.10).

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ა) ვთქვათ, S_V და S_E სიმრავლეებია. $G = (V, E)$ დალაგებული ორიენტირებული გრაფის пометка (ნიშანი, მონიშვნა) ეწოდება (f, g), სადაც

$$f : V \longrightarrow S_V \text{ არის წვეროთა ნიშანი,}$$

$$g : E \longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} S_E^k \text{ არის წიბოთა ნიშანი.}$$

g ასახვას აქვს შემდეგი სახე:

$$g\Big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\Big)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)\in S_E^k.$$

2) ამბობენ, რომ ორი $G_1=(V_1,E_1)$ და $G_2=(V_2,E_2)$ **ნიშნიანი** გრაფი (f_1,g_1) და (f_2,g_2) მონიშვნების ფუნქციებით, ეკვივალენტურია, თუ არსებობს ისეთი $h:V_1\to V_2$ ბიექცია, რომ

ა) $\big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\big)\in E_1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Big(\big(h(v),h(w_1)\big),\dots,\big(h(v),h(w_k)\big)\Big)\in E_2$ (ეკვივალენტურია როგორც დალაგებული გრაფები);

ბ) $f_1(v)=f_2(h(v))$ ყველა $v\in V$ წვეროსთვის (წვეროთა ნიშნები ემთხვევა);

გ) ყველა $\big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\big)\in E_1$ წიბოსთვის გვაქვს

$$g_1\Big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\Big)=g_2\Big(\big(h(v),h(w_1)\big),\dots,\big(h(v),h(w_k)\big)\Big)$$

(ე. ი. წიბოთა ნიშნები ემთხვევა).

განვსაზღვროთ ორიენტირებული გრაფების შემოვლა. დალაგებული ორიენტირებული გრაფების შემოვლა ზუსტად ისევე განისაზღვრება, როგორც არაორიენტირებული გრაფებისთვის. დალაგებული ორიენტირებული ხეებისთვის ხშირად მოსახერხებელია სხვა შემოვლები.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $T=\big(\{v_1,v_2,\dots,v_n\},E\big)$ არის დალაგებული ორინეტირებული ხე და

$$L_v=\big((v,w_1),(v,w_2),\dots,(v,w_k)\big)\in E.$$

$\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ $<$ მიმართება შემდეგნაირად: $w_i<w_j$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $i<j$. ასეთნაირად განვსაზღვროთ $<$ მიმართება E-ს თითოეული ნუსხისთვის.

წინადადება. $<$ მიმართება არის ნაწილობრივ დალაგების მიმართება V სიმრავლეზე.

დამტკიცება. $v<v$ მიმართებისთვის საჭიროა არსებობდეს

$$\Big((q,w_1),\dots,(q,v),\dots,(q,v),\dots,(q,w_k)\Big)$$

სახის ნუსხა, მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან T ხეს არ აქვს ციკლები. ამრიგად, $v\not<v$ ნებისმიერი $v\in V$-თვის.

$v<w$ და $w<u$ მიმართებებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი $x,\,y\in V$, რომელთათვისაც

$$L_x=\Big((x,w_1),\dots,(x,v),\dots,(x,w),\dots,(x,w_k)\Big),$$
$$L_y=\Big((y,u_1),\dots,(y,w),\dots,(y,u),\dots,(y,u_l)\Big).$$

თუ $x \neq y$, მაშინ გვექნება $\delta^-(w) = 2$ $((x,w)$ და $(y,w))$, რაც შეუძლებელია, რადგან T არის ხე. ამრიგად, $x = y$ და

$$L_x = \Big((x,w_1),\dots,(x,v),\dots,(x,w),\dots,(x,u),\dots,(x,w_k)\Big).$$

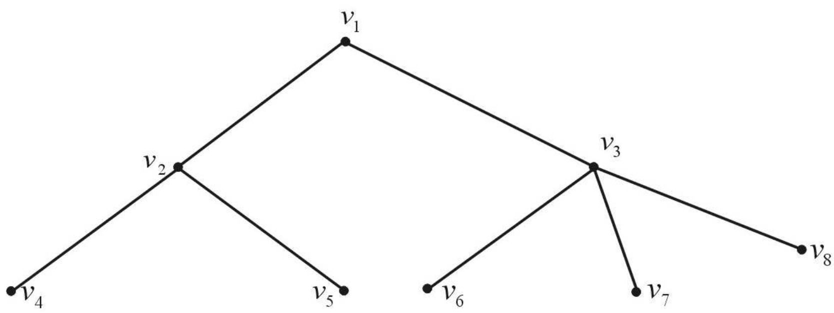
ე. ი. $v < u$.

ამრიგად, $<$ მიმართება არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება V-ზე.

$<$ მიმართება ადარებს მხოლოდ ერთი წვეროდან გამოსულ წვეროებს.

მაგალითი 1.8. დალაგებული ორიენტირებული T ხისთვის (იხ. ნახ. 1.11) გვაქვს:

$$v_2 < v_3, \;\; v_4 < v_5, \;\; v_6 < v_7, \;\; v_7 < v_8, \;\; v_6 < v_8.$$



ნახ. 1.10

შენიშვნა. $v \in V$, $\Gamma^+(v)$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ წვეროთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც v არის "წინაპარი". ანალოგიურად, $\Gamma^-(v)$-ით აღვნიშნოთ იმ წვეროთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც v არის "შთამომავალი".

განსაზღვრება. $<$ მიმართებას უწოდებენ დალაგებული ორიენტირებული $T = (V,E)$ ხის წვეროების **ტრანსვერსალურ დალაგებას**.

ვთქვათ, $<$ მიმართება განსაზღვრავს $<_l$ მიმართებას V-ზე შემდეგნაირად: თუ $w_i < w_j$, მაშინ $w'_i <_l w'_j$ ყველა $w'_i \in \Gamma^+(w_i) \cup \{w_i\}$ და ყველა $w'_j \in \Gamma^+(w_j) \cup \{w_j\}$-თვის.

წინადადება.

1) $< \subseteq <_l$;

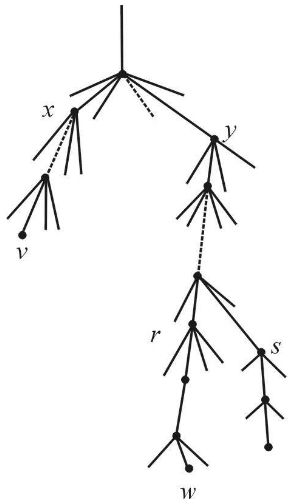
2) $<_l$ ნაწილობრივ დალაგების მიმართებაა V-ზე.

დამტკიცება. 1) ცხადია. $(w'_i = w_i,\, w'_j = w_j)$.

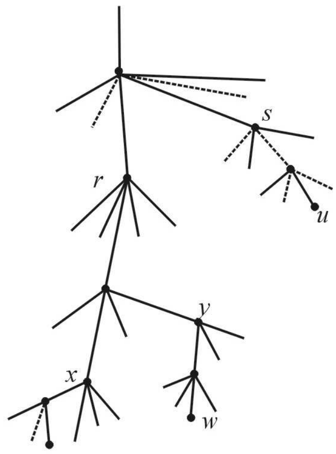
2) ა) $v <_l v$ მიმართებიდან გამომდინარეობს, რომ ან $v < v$ ან არსებობს ისეთი x, $my \in V$, რომ $x < y$ და $v \in \Gamma^+(x) \cup \{x\}$, $v \in \Gamma^+(y) \cup \{y\}$. ამასთან, $v \nless V$, რადგან $<$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართებაა. ანალოგიურად, $x < y$ მიმართებიდან გამომდინარეობს $x \neq y$ და $v \in \Gamma^+(x) \cup \{x\}$, $v \in \Gamma^+(y) \cup \{y\}$.

ეს ნიშნავს, რომ $\delta^-(v) = 2$ ან $\delta^-(w) = 2$ რომელიღაც $w \in \Gamma^-(v)$-თვის. ეს შეუძლებელია, რადგან T არის ხე. ამრიგად, $v \not<_l v_l$ ყველა $v \in V$-თვის.

ბ) ვთქვათ, გვაქვს $v <_l w$ და $w <_l u$. $v <_l w$ ნიშნავს, რომ $v < w$ ან არსებობს ისეთი x, $y \in V$, რომ $x < y$ და $v \in \Gamma^+(x) \cup \{x\}$, $w \in \Gamma^+(y) \cup \{y\}$. $w <_l u$ ნიშნავს, რომ $w < u$ ან არსებობს ისეთი r, $s \in V$ წვეროები, რომ $r < s$ და $w \in \Gamma^+(r) \cup \{r\}$, $u \in \Gamma^+(s) \cup \{s\}$. $w \in \Gamma^+(r) \cup \{r\}$ და $w \in \Gamma^+(y) \cup \{y\}$ გვაძლევს, რომ ან $r \in \Gamma^+(y)$, ან $y \in \Gamma^+(r)$. მაშასადამე, ხეს აქვს 1.12 ნახაზზე გამოსახული ერთ-ერთი ფორმა.



ან



ნახ. 1.11

თუ $r \in \Gamma^+(y)$, მაშინ $s \in \Gamma^+(y)$ და $x < y$ გვაძლევს $x <_l s$. მაგრამ $u \in \Gamma^+(s)$, შესაბამისად, $x <_l u$ და, რადგან $v \in \Gamma^+(z)$ გვაქვს $v <_l u$. თუ $y \in \Gamma^+(r)$, მაშინ $x \in \Gamma^+(r)$ და $r < s$ გვაძლევს $x < e_l s$. მაგრამ, $u \in \Gamma^+(s) \cup \{s\}$, მაშასადამე, $x <_l u$, ხოლო $v \in \Gamma^+(x)$, მივიღებთ $v <_l u$.

ამრიგად, $<_l$ არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება V-ზე.

ზოგჯერ $v <_l w$-ს კითხულობენ, როგორც "v იმყოფება w-ზე მარცხნივ".

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ვთქვათ, $T = (V, E)$ არის დალაგებული ორიენტირებული ხე. მაშინ v_i, $v_j \in V$ $(i \neq j)$ ან $v_i <_l v_j$, ან $v_j <_l v_i$, ან v_i და v_j ერთ მარშრუტზეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, v_i, $v_j \in V$ და $v_i \neq v_j$. მაშინ არსებობს ისეთი v_0 წვერო, რომ $v_i \in \Gamma^+(u_\alpha) \cup \{u_\alpha\}$ და $v_j \in \Gamma^+(u_\alpha) \cup \{u_\alpha\}$. თუ $v_i = a_\alpha$ ან $v_j = v_\alpha$, მაშინ v_i და v_j ერთ მარშრუტზეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილოთ $v_a l$-დან პირდაპირ გამომავალი $w_1, w_2, \ldots, w_k$ წვეროები. მაშინ ან

$$v_i \in \Gamma^+(w_l) \text{ და } v_j \in \Gamma^+(w_m), \;\; w_l \neq w_m,$$

ან

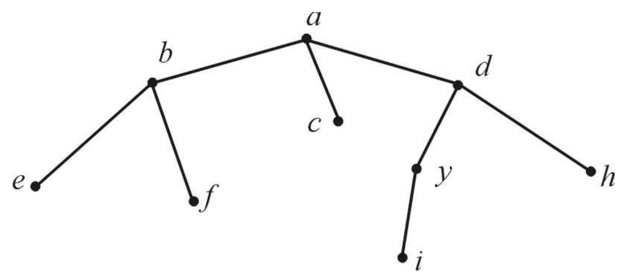
$$v_i,\, v_j \in \Gamma^+(w_k).$$

პირველ შემთხვევაში გვაქვს: $v_i <_l v_j$ ან $v_j <_l v_i$ იმის მიხედვით $w_l < w_m$, თუ $w_m < w_l$. მეორე შემთხვევაში პროცესი მეორდება w_k-დან, სანამ არ შესრულდება პირველი შემთხვევის პირობები, ან მივიღებთ $v_i = a_a$ ან $v_j = v_a$. ამ შემთხვევაში v_i და v_j ერთ მარშრუტზეა.

გავაფართოვოთ $<_l$ ნაწილობრივი დალაგება V-ს სრულ დალაგებამდე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, $T = (V, E)$ დალაგებული ორიენტირებული ხეა. განვსაზღვროთ $<_1$ სრული დალაგება V-ზე შემდეგნაირად: v_j გამოდის v_i-დან, მაშინ $v_i <_1 v_j$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $v_i < v_j$, თუ $v_i <_l v_j$. $<_1$ მიმართებას უწოდებენ **წინადალაგებას** V-ზე.

ცხადია, $<_l \subseteq <_1$.



ნახ. 1.12

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.9. ვთქვათ, $T = (V, E)$ არის **??** ნახაზზე გამოსახული დალაგებული ორიენტირებული ხე. მაშინ $V\{a, b, c, d, ef, g, h, i\}$ სიმრავლეზე $<_1$ წინადადება შეიძლება ჩავწეროთ, როგორც

$$a <_1 b <_1 e <_1 f <_1 c <_1 d <_1 g <_1 i <_1 h.$$

შესაბამისად, წვეროთა შემოვლას ექნება სახე

$$a,\ b,\ w,\ f,\ c,\ d,\ g,\ i,\ h.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა . ვთქვათ, $T = (V, E)$ დალაგებული ორიენტირებული ხეა. V-ზე განვსაზღვროთ $<_2$ სრული დალაგება შემდეგნაირად: თუ v_i გამოდის v_j-დან, მაშინ $v_i <_2 v_j$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $v_i <_2 v_j$, თუ $v_i <_l v_j$. $<_2$ დალაგებას უწოდებენ “ постпорядко” V-ზე.

ცხადია, $<_l \subseteq V_2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.10. ვთქვათ, $T = (V, E)$ არის **??** ნახაზზე მოცემული ხე. მაშინ постпорядок V-ზე ექნება შემდეგი სახე:

$$e <_2 f <_2 b <_2 c <_2 i <_2 g <_2 h <_2 d <_2 a,$$

ხოლო T-ს შემოვლა იქნება:

$$e,\ f,\ b,\ c,\ i,\ g,\ h,\ d,\ a.$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, $T = (V, E)$ არის სრული ბინარული ხე. V-ზე განვსაზღვროთ $<_s$ სიმეტრიული დალაგება შემდეგნაირად: თითოეული წვეროსთვის, რომელიც ფოთოლს არ წარმოადგენს და აქვს w_1 და w_2 $(w_1 < w_2)$ პირდაპირ გამომავალი წვეროები. დავუშვათ:

$$w'_1 <_3 v, \quad \text{ყველა } w'_1 \in \Gamma^+(w_1) \cup \{w_1\}\text{-თვის},$$
$$v < w'_2, \quad \text{ყველა } w'_2 \in \Gamma^+(w_2) \cup \{w_1\}\text{-თვის}.$$

$<_s$ დალაგება იქნება $<_l$ დალაგების გაფართოება.

algebruli struqturebi

Cven gamoviyenebT Semdeg aRniSvnebs:

$\mathbb{N}$ _ naturaluri ricxvebisaTvis;

$\mathbb{Z}$ _ mTeli ricxvebisaTvis;

$\mathbb{Q}$ _ racionaluri ricxvebisaTvis;

$\mathbb{R}$ _ namdvili ricxvebisaTvis;

$\mathbb{C}$ _ kompleqsuri ricxvebisaTvis;

$\mathbb{Q}^+$ _ dadebiTi racionaluri ricxvebisaTvis;

$\mathbb{R}^+$ _ dadebiTi namdvili ricxvebisaTvis.

binaruli operaciebi

maTematikaSi xSirad vxvdebiT situaciebs, rodesac mocemulia raime simravle da am simravlis nebismieri ori elementisagan amave simravlis axali elementis miRebis wesi. aseTi situaciebis magaliTebia:

magaliTi 1. Tu mocemulia namdvil ricxvTa simravle $\mathbb{R}$ da misi raime ori elementi (e. i. ori namdvili ricxvi), Cven SegviZlia es ricxvebi SevkriboT an gavamravloT erTmaneTze, raTa miviRoT axali elementi (e. i. axali namdvili ricxvi).

magaliTi 2. Tu mocemulia $n \times n$ zomis matricebis simravle, maSin ori aseTi matricis SekrebiT an maTi erTmaneTze gamravlebiT miiReba axali $n \times n$ zomis matrici.

magaliTi 3. ganvixiloT raime X simravle da misi Tavis TavSi yvela asaxvis simravle $E(X)$. nebismieri ori aseTi asaxvis kompozicia aris isev X simravlis Tavis TavSi asaxva, anu $E(X)$ simravlis elementi.

magaliTi 4. ganvixiloT raime X simravle da $E(X)$ simravlis is qvesimravle, romelic Sesdgeba mxolod bieqciuri asaxvebisgan. es simravle aRvniSnoT $\Im(X)$ simboloTi. radgan nebismieri ori bieqciis kompozicia isev bieqciaa, amitom $\Im(X)$ simravlis nebismieri ori elementis (anu X simravlis nebismieri ori Tavis Tavze bieqciuri asaxvis) kompozicia aris isev am simravlis elementi.

Tanamedrove algebra Seiswavlis iseT simravleebs, romelbic aRWurvilia misi nebismieri ori elementisagan axali elementis miRebis erTi an ramdenime wesiT, romelTac **binaruli operaciebi** ewodeba.

ganmarteba 1. mocemul X simravleze gansazRvruli **binaruli operacia** ewodeba asaxvas $X\times X$ dekartuli namravlidan X simravleSi.

magaliTad, namdvili ricxvebis Sekrebis da gamravlebis Cveulebrivi operaciebi, romlebic ganxiluli iyo **magaliTi 1**-Si, aris asaxvebi $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ simravlidan $\mathbb{R}$ simravleSi, romlebic namdvil ricxvTa (x,y) wyvils uTanadebs $x+y$ da $x\cdot y$ ricxvebs, Sesabamisad.

rodesac mocemulia raime zogadi operacia $f: X\times X\to X$, namdvil ricxvebze gansazRvruli Sekrebisa da gamravlebis cnobili binaruli operaciebis analogiurad, f asaxvis mniSvnelobas (x,y) wyvilze (anu X simravlis $f(x,y)$ elements) $x*y$ simboloTi aRniSnaven. maSasadame, Tu $(x,y)\in X\times X$, maSin $f(x,y)=x*y$.

magaliTi 5. ganvsazRvroT mTel ricxvTa simravleze binaruli operacia Semdegnairad:

$$n*m=nm+2.$$

maSin, magaliTad,

$$2*3=2\cdot 3+2=6+2=8 \quad \text{da} \quad (-4)*5=(-4)\cdot 5+2=-18.$$

magaliTi 6. vTqvaT, X raime simravlea, $\wp($ $)$ki misi yvela qvesimravlis simravle. Tu , $\in\wp$) (e. i. Tu A da B

aris X simravlis qvesimravleebi), maSin $A\cup B$ da $A\cap B$ aris agreTve $\wp(\ )$ simravlis elementi (anu simravlis qvesimravle). es niSnavs, rom simravlis ori qvesiravlis gaerTianeba da TanakveTa $\wp(\ )$ simravleze gansazRvravs binarul operaciebs. ori qvesimravlis $A\backslash B$ sxvaoba ki gansazRvravs mesame binarul operacias $\wp(\ )$-ze.

magaliTi 7. Cven SegviZlia ganvsazRvroT binaruli opracia sibrtyis yvela wertilTa simravleze Semdegnairad: Tu P da Q aris sibtryis nebismieri ori wertili, maSin $P*Q$ iyos PQ monakveTis Suawertili.

magaliTi 8. ganvixiloT gamoklebis operacia naturalur ricxvTa simravleze. igi araa binaruli operacia, radgan rodesac erT naturalur ricxvs akldeba sxva naturaluri ricxvi, sxvaoba SeiZleba aRar iyos isev naturaluri ricxvi. magaliTad, $9-10=-1$ da $-1\notin\mathbb{N}$.

rodesac X simravle sasrulia, maSin masze mocemuli binaruli operacia SeiZleba warmodgindes am binaruli operaciis Sesabamisi cxriliT. qvemoT moyvanili cxrili warmoadgens $X=\{x,y,z\}$ simravleze gansazRvruli binaruli operaciis gamravlebis cxrils, romlis drosac $x*x=y$, $x*y=z$, $x*z=y$, $y*x=y$ da a. S.

$*$	x	y	z
x	y	z	y
y	y	x	z
z	x	z	z

komutaciuri da asociuri binaruli operaciebi

Cven axla ganvixilavT im zogierT kerZo saxis binarul operaciebs, romlebic saWiroa monoidisa da jgufis cnebebis gansasazRvravad.

ganmarteba 2. raime X simravleze gansazRvrul binarul operacis ewodeba **komutaciuri**, Tu

$$x*y=y*x \text{ yvela } x,y\in X \text{ elementisTvis}$$

da ewodeba **asociuri**, Tu

$$(x*y)*z = x*(y*z) \text{ yvela } x, y \in X \text{ elementisTvis.}$$

magaliTi 9. namdvil ricxvebze gansazRvruli Sekrebisa da gamravlebis cnobili operaciebi aris komutaciuric da asociuric.

magaliTi 10. mocemuli simravlis qvesimravleebis Tanakve-Tisa da gaerTianebis binaruli operaciebi (ix. **magaliTi 6**) aseve aris komutaciuric da asociuric.

magaliTi 11. nebismieri naturaluri n ricxvisTvis, gam-ravlebisa da Sekrebis operaciebi $\mathbb{Z}_n$ simravleze aris agreTve ko-mutaciuric da asociuric.

magaliTi 12. Tu X raime simravlea, maSin kompoziciiT gansazRvruli operacia $E(X)$-ze (ix. **magaliTi 4**) aris asociuri, magram araa komutaciuri (ratom?); e. i. arsebobs iseTi binaruli operacia, romelic asociuria, magram araa komutaciuri.

magaliTi 13. **magaliTi 7**-Si ganxiluli sibrtyis wertilTa simravleze gansazRvruli binaruli operacia aris komutaciuri, magram araa asociuri (ratom?). e. i. arsebobs iseTi binaruli operacia, romelic komutaciuria, magram araa asociuri.

magaliTi 14. gamoklebis operacia namdvil ricxvebze arc komutaciuria da arc asociuri. marTlac, komutaciuroba niSnavs, rom $x-y=y-x$ nebismieri x, y namdvili ricxvebisTvis, xolo asociuroba ki, rom $(x-y)-z=x-(y-z)$ yvela x, y, z namdvi-li ricxvebisTvis. cxadia, rom am ori tolobidan arc erTi araa igiveoba. magaliTad, $5-3\neq 3-5$ da $-2=(5-3)-4\neq 5-(3-4)=6$.

vTqvaT, X raime simravlea, xolo $*$ ki masze gansazRvruli raime binaruli operacia. Tu $x, y, w, z \in X$, maSin gamosaxulebebi

$$(x*y)*(w*z), \quad x*((y*w)*z) \text{ da } x*(y*(w*z))$$

sazogadod, erTmaneTisgan gansxvavebulia, magram Tu $*$ aris asoci-uri binaruli operacia, maSin asociurobis ZaliT gvaqvs:

$$(x*y)*(w*z) = x*(y*(w*z)) = x*((y*w)*z).$$

amis gamo, Cven SegviZlia es sami gamosaxuleba ubralod ase Cavwe-roT:

$$x * y * w * z.$$

zogadad, rodesac binaruli operacia asociuri, maSin nebismie-ri rTuli gamosaxuleba, romelic Sedgenilia X simravlis ele-mentebis, $*$ operaciisa da frCxilebis gamoyenebiT,. SegviZlia gava-TavisufloT frCxilebisagan im pirobiT, rom elementebis Tanamim-devroba ucvleli rCeba. amitom nebismieri $x \in X$ elementisa da nebismieri naturaluri n ricxvisaTvis azri aqvs gamosaxulebas

$$\overbrace{x * x * \cdots * x}^{n\text{-jer}}$$

romelsac mokled ase CavwerT: x^n (aq cxadia igulisxmeba, rom $*$ aris asociuri binaruli operacia). maSin advili sanaxavia, rom ne-bismieri $n, m \in \mathbb{N}$ ricxvebisTvis, $x^{n+m} = x^n * x^m$.

SevniSnoT, rom Tu $*$ asociuri araa, maSin x^n gamosaxulebas azri ara aqvs. marTlac, ganvixiloT **magaliTi 8**-Si gansazRvruli binaruli operacia. x^3 xarisxis gansasazRvravad gvaqvs mxolod ori SesaZlebloba:

$$x * (x * x) \quad \text{da} \quad (x * x) * x$$

magram, radgan

$$x * (x * x) = x * y = z$$

da

$$(x * x) * x = y * x = y,$$

amitom $x * (x * x)$ da $(x * x) * x$ gamosaxulebebi erTmaneTis toli araa da amitom gaugebaria, Tu ra unda vigulisxmoT x^3 gamosaxu-lebis qveS.

neitraluri elementi

vTqvaT, raime simravle, xolo $*$ ki masze gansazRvruli bina-ruli operacia.

ganmarteba 3. $e \in X$ elements ewodeba neitrauli ($*$ ope-raciis mimarT), Tu nebismieri $\in$ elementisaTvis gvaqvs tolo-bebi:

$$x * e = e * x = x.$$

magaliTi 15. ganvixiloT namdvil ricxvTa simravleze gamravlebis operaciiT gansazRvruli binaruli operacia. radgan nebismieri $x \in \mathbb{R}$ namdvili ricxvisaTvis, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, amitom $1 \in \mathbb{R}$ aris neitraluri elementi Cveulebrivi gamravlebiT $\mathbb{R}$-ze gansazRvruli binaruli operaciis mimarT.

magaliTi 16. Tu wina magaliTSi, gamravlebis operacias SevcvliT Sekrebis operaciiT, miRebul binarul operaciasac eqneba neitraluri elementi, kerZod, 0 (ratom?).

magaliTi 17. analogiurad, Tu $n \in \mathbb{N}$ raime naturaluri ricxvia, maSin gamravlebis (Sekrebis) operacias $\mathbb{Z}_n$-ze aqvs neitraluri elementi 1 (0).

magaliTi 18. ganvixiloT gamoklebiT gansazRvruli binaruli operacia $\mathbb{R}$ simravleze. mas ara aqvs neitraluri elementi. marTlac, Tu $e \in \mathbb{R}$ aris neitraluri elementi gamoklebis mimarT, maSin nebismieri $x \in \mathbb{R}$ namdvili ricxvisaTvis gveqneboda tolobebi

$$e - x = x - e = x,$$

rac cxadia, SeuZlebelia (Tu $x = 0$, miviRebT, rom $e = -e = 0$ da maSin $5 - 0 = 5$ da $0 - 5 = -5$ toli ricxvebi unda yofiliyo).

rogorc vnaxeT, binarul operacias SeiZleba neitraluri elementi ar gaaCndes.

winadadeba 1. Tu raime simravleze gansazRvrul binarul operacias gaaCnia neitraluri elementi, maSin is erTaderTia.

damtkiceba. vTqvaT, $*$ aris X simravleze gansazRvruli binaruli operacia. Tu e da e' orive aris am operaciis mimarT neitraluri elementi, maSin $x * e = e * x = x$ tolobaSi $x = e'$ mniSvnelobis CasmiT miviRebT, rom $e' * e = e'$. magram, radgan e' aria agreTve neitraluri elementi, amitom $e' * x = x$ nebismieri $x \in X$ elementisaTvis. kerZod, $e' * e = e$ da amitom $e = e' * e = e'$.

naxevarjgufebi

ganmarteba 4. **naxevarjgufi** aris $(X, *)$ wyvili, sadac X raime simravlea, xolo $*$ ki masze gansazRvruli asociuri binaruli operacia.

magaliTi 19. $(\mathbb{R},+)$ da $(\mathbb{R},\cdot)$ orive aris naxevarjgufi, xolo $(\mathbb{R},-)$ ki ara.

magaliTi 20. nebismieri $n\in\mathbb{N}$ ricxvisTvis, $(\mathbb{Z}_n,+)$ da $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ orive naxevarjgufia.

magaliTi 21. Tu X raime simravlea, maSin $(\wp(\ ),\cup)$ da $(\wp(\ ),\cap)$ orive naxevarjgufia.

rogorc zemoT moyvanili magaliTebidan Cans, erTi da igive simravleze SeiZleba gansazRvruli iyos ramodenime gansxvavebuli naxevarjgufis struqtura.

magaliTi 22. vTqvaT, X aris erTelementiani simravle, e. i. $X=\{x\}$. ganvsazRvroT masze $*$ binaruli operacia formuliT: $x*x=x$, maSin $(X,*)$ aris naxevarjgufi.

magaliTi 23. vTqvaT, X aracarieli simravlea. ganvsazRvroT masze binaruli operacia Semdegnairad:

$$x*y=y \quad \text{nebismieri } x,y\in X \text{ elementebisTvis.}$$

maSin $(X,*)$ aris naxevarjgufi. marTlac, Tu $x,y,z\in X$, maSin

$$(x*y)*z=y*z=z \quad ; \quad x*(y*z)=x*z=z.$$

amitom $*$ aris asociuri binaruli operacia da, maSasadame, $(X,*)$ ki naxevarjgufi.

monoidebi

ganmarteba 5. monoidi aris naxevarjgufi, romlis binarul operacias gaaCnia neitraluri elementi.

magaliTi 24. $(\mathbb{R},+,0)$ aris monoidi, radgan $(\mathbb{R},+)$ naxevarjgufia, xolo 0 ki neitraluri elementi Sekrebis mimarT (ix. **magaliTi 19**). analogiurad, $(\mathbb{R},\cdot,1)$ monoidia.

magaliTi 25. nebismieri $n\in\mathbb{N}$ ricxvisTvis, $(\mathbb{Z}_n,+,0)$ da $(\mathbb{Z}_n,\cdot,1)$ orive monoidia.

magaliTi 26. Tu X raime simravlea, maSin $(\wp(\ ), \cup)$ da $(\wp(\ ), \cap)$ agreTve monoidebia.

magaliTi 27. mTel ricxvTa $\mathbb{Z}$ simravleze ganvsazRvroT binaruli operacia Semdegnairad:

$$a * b = a + b + ab,$$

maSin $(\mathbb{Z}, *)$ monoidia. marTlac, Tu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maSin gvaqvs:

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+(a+b+ab)c = \\ &= a+b+ab+c+ac+bc+abc = \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a*(b+c+bc) = a+b+c+a(b+c+bc) = \\ &= a+b+c+bc+ab+ac+abc = \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc.\end{aligned}$$

maSasadame, $(a*b)*c = a*(b*c)$, rac niSnavs, rom $*$ aris asociuri. Semdeg, radgan nebismieri $a \in \mathbb{Z}$ mTeli ricxvisTvis,

$$0 * a = 0 + a + 0 \cdot a = 0 + a = a$$

da

$$a * 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a,$$

amitom 0 aris neitraluri elementi $*$ operaciis mimarT. sabolood, $*$ aris asociuri binaruli operacia $\mathbb{Z}$ simravleze, romelsac gaaCnia neitraluri elementi, saxeldobr, 0. amitom $(\mathbb{Z}, *, 0)$ aris monoidi.

jgufebi

ganmarteba 6. jgufi ewodeba iseT $(X, *, e)$ monoids, romlis nebismieri $x \in X$ elementisTvis arsebobs iseTi $\overline{x} \in X$ elementi, rom $x * \overline{x} = \overline{x} * x = e$.

$\overline{x}$ elements ewodeba x elementis **Sebrunebuli**, amitom jgufi SeiZleba, ganisazRvros rogorc monoidi, romlis yvela elements gaaCnia Sebrunebuli.

jgufis ganmartebaSi ar moiTxoveba, rom misi ganmsazRvreli binaruli operacia iyos komutaciuri. magram, rodesac es piroba srulდeba, maSin jgufs ewodeba **komutaciuri** an **abeluri**.

magaliTi 28. $(\mathbb{Z},+,0)$ aris abeluri jgufi. marTlac, Cven viciT, rom $(\mathbb{Z},+,0)$ aris monoidi. amitom sakmarisia vaCvenoT, rom yovel elements gaaCnia Sebrunebuli. magram, Tu $\overline{x}$-is rolSi avirebT $(-x)$-s, advili sanaxavia, rom $-x$ aris x-is Sebrunebuli SekrebiT gansazRvruli operaciis mimarT.

magaliTi 29. $(\mathbb{R},\cdot,1)$ monoidia, magram is araa jgufi. marTlac, ar arsebobs 0-is Sebrunebuli gamravlebiT gansazRvruli binaruli operaciis mimarT, radgan Tu aseTi $\overline{0}$ elementi iarsebebda, maSin gveqneboda toloba

$$0\cdot\overline{0}=\overline{0}\cdot 0=1.$$

magram $0\cdot\overline{0}=0$ da $\overline{0}\cdot 0=0$, saidanac miviRebdiT, rom $0=1$, rac SeuZlebelia.

magaliTi 30. wina magaliTSi vnaxeT, rom $(\mathbb{R},\cdot,1)$ araa jgufi. magram $(\mathbb{R}\setminus\emptyset,\cdot,1)$ ki aris abeluri jgufi: nebismieri $x\in\mathbb{R}$ elementis Sebrunebuli $\overline{x}$ aris x^{-1}, xolo abeluroba gamomdinareobs namdvili ricxvebis gamravlebis komutaciurobidan.

magaliTi 31. nebismieri $n\in\mathbb{N}$ ricxvisTvis, $(\mathbb{Z}_n,+,0)$ abeluri jgufia, xolo $(\mathbb{Z}_n,\cdot,1)$ ki ara.

magaliTi 32. Tu $(X,*,e)$ jgufia, romelic mxolod erT elements Seicavs, maSin is elementi unda iyos e. amitom $X=\{e\}$. maSin X jgufis binaruli operacia srulad gansazRvrulia $e*e=e$ tolobiT. piriqiT, Tu $X=\{x\}$ erTelementiani simravlea da Tu masze ganvsazRvravT binarul operacias $x*x=x$ tolobiT, maSin $(X,*,x)$ aris jgufi (Seadare **magaliTi 22**-s).

jgufs ewodeba **sasruli**, Tu misi elementebis raodenoba sasrulia, da ewodeba **usasrulo**, Tu misi elementebis raodenoba usasruloa.

Tu $(X,*,e)$ jgufi sasrulia, misi elementebis raodenoba $|X|$ simboloTi aRiniSneba. $|X|$-s ewodeba X simravlis **rigi**.

magaliTi 33. Tu $(X,*,e)$ monoidia, maSin $^{\times}$aRvniSnoT X simravlis im elementebis simravle, romelTac gaaCnia Sebrunebuli. maSin $(X^{\times},*,e)$ aris jgufi.

magaliTi 34. $(\mathbb{Z}_n,+,0)$ aris sasruli (abeluri) jgufi nebismieri $n\in\mathbb{N}$ ricxvisTvis, xolo $(\mathbb{Z},\cdot,1)$ ki usasrulo.

magaliTi 35. nebismieri $n\in\mathbb{N}$ ricxvisTvis, $(\mathbb{Z}_n^{\times},\cdot,1)$ aris jgufi.

mocemuli X simravlis gadaadgileba ewodeba am simravlis bieqcias Tavis Tavze. maSasadame, X-is gadaadgileba aris $f:X\to X$ asaxva, romelic erTdroulad ineqciacaa da sureqciac. magaliTad, X simravlis igivuri asaxva $1_X:X\to X$ Tavis Tavze aris gadaadgileba. Tu f da g X simravlis gadaadgilebebia, maSin maTi gf kompozicia isev X-is gadaadgilebaa, radganac ori bieqciuri asaxvis kompozicia isev bieqciuri asaxvaa. X simravlis yvela gadaadgilebebs simravle $S(X)$ simboloTi aRiniSneba.

magaliTi 36. ganvixiloT $\mathbb{Z}$ da davafiqsiroT misi raime $a\in\mathbb{Z}$ elementi. maSin asaxva $f_a:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, romelic gansazRvrulia formuliT

$$f_a(x)=a+x,\ x\in\mathbb{Z}$$

aris $\mathbb{Z}$ simravlis gadaadgileba; e. i. nebismieri $a\in\mathbb{Z}$ elementisTvis, $f_a\in S(\mathbb{Z})$.

magaliTi 37. vTqvaT, X raime simravlea da ganvixiloT misi gadaadgilebebis simravle $S(X)$. maSin $S(X)$ aris araabeluri jgufi masze asaxvebis kompoziciiT gansazRvruli binaruli operaciis mimarT, romlis neitraluri elementia 1_X, xolo $f:X\to X$ gadaadgilebis Sebrunebuli $\overline{f}$ gadaadgileba ki f

asaxvis Seqceuli funqcia f^{-1}. radgan kompoziciis operacia arakomutaciuria, amitom $S(X)$ araa abeluri jgufi.

jgufTa TeoriaSi miRebulia, rom binaruli operaciebi Caiweros kargad cnobili Sekrebis `+~ da gamravlebis ` ·~ niSnebis gamoyenebiT. maSasadame, $x*y$ gamosaxulebis nacvlad xSirad weren $x+y$ an $x\cdot y$ gamosaxulebebs. magaliTad, Sekrebisa da gamravlebis niSnebis gamoyenebiT komutaciuroba, Sesabamisad, Caiwereba ase:

$$x+y=y+x \quad \text{da} \quad x\cdot y=y\cdot x.$$

SevniSnoT, rom Sekrebis niSani ZiriTadad abeluri jgufebis binaruli operaciebis Casawerad gamoiyeneba. am dros miRebulia, rom $+$ gamosaxulebas ewodeba x da y elementis jami, 0-iT aRiniSneba neitraluri elementi, xolo x elementis Sebrunebuli elementi ki $-x$ simboloTi aRiniSneba. magaliTad, $x*\bar{y}$ Caiwereba $x-y$ saxiT, xolo $\overbrace{x*x*\cdots*x}^{n\text{-jer}}$ ki nx saxiT. analogiurad:

xy aRniSnavs $x*y$-s;

1 _ neitralur elements;

x^{-1} _ x elementis $\bar{x}$ Sebrunebuls;

x^n ki $\overbrace{x*x*\cdots*x}^{n\text{-jer}}$ gamosaxulebas.

nx da x^n xarisxebi SeiZleba ganmartebul iqnas agreTve yvela mTeli ricxvisaTvis Semdegnairad:

$$0x=x \quad \text{da} \quad (-n)x=-(nx);$$

$$x^0=1 \quad \text{da} \quad x^{-n}=\left(x^{-1}\right)^n=\left(x^n\right)^{-1}.$$

SevniSnoT, rom bolo tolobis misaRebad Cven gamoviyeneT **winadadeba 6**.

jgufebis elementaruli Tvisebebi

vTqvaT, G jgufia (e. i. G aris raime simravle, romelzedac gansazRvrulia gamravlebis operacia, romelsac gaaCnia neitraluri elementi 1). rogorc viciT, neitraluri elementi aris erTaderTi. axla vaCvenoT, rom nebismieri x elementis x^{-1} Sebrunebulic erTaderTia. amisaTvis jer davamtkicoT Semdegi

winadadeba 2. G jgufis nebismieri ori $x, y \in G$ elementebisaTvis arsebobs erTaderTi iseTi elementi $a \in G$, rom $ax = y$ da es elementia yx^{-1}. analogiurad, arsebobs erTaderTi iseTi b elementi, rom $xb = y$ da es elementia $x^{-1}y$.

damtkiceba. Tu $ax = y$, maSin am tolobis orive mxaris x^{-1}-ze gamravlebiT miiReba, rom $(ax)x^{-1} = yx^{-1}$. magram asociurobis da Sebrunebuli elementis ganmartebis ZaliT $(ax)x^{-1} = a\left(xx^{-1}\right) = a \cdot 1 = a$. amitom, Tu $ax = y$, maSin $a = yx^{-1}$. piriqiT, Tu $a = yx^{-1}$, maSin $ax = \left(yx^{-1}\right)x = y\left(xx^{-1}\right) = y \cdot 1 = y$.

winadadebis meore nawili mtkicdeba analogiurad.

Tu am winadadebaSi $y = 1$, maSin gveqneba:

winadadeba 3. Tu $x \in G$ da arsebobs iseTi $a \in G$, rom $ax = 1$, maSin $x = a^{-1}$. analogiurad, Tu arsebobs iseTi $b \in G$, rom $bx = 1$, maSin $b = x^{-1}$.

radgan $xx^{-1} = 1$, amitom Tu **winadadeba 3**-Si a-s SevcvliT x-iT, xolo x-s ki x^{-1}-iT, miviRebT:

winadadeba 4. Tu $x \in G$, maSin $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

winadadeba 5. Tu $x, y \in G$, maSin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

damtkiceba. radgan

$$(xy)\left(y^{-1}x^{-1}\right) = x\left(y\left(y^{-1}x^{-1}\right)\right) = x\left(\left(yy^{-1}\right)x^{-1}\right) = x\left(1 \cdot x^{-1}\right) = xx^{-1} = 1,$$

amitom $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ toloba gamomdinareobs **winadadeba 3**-dan.

am winadadebis samarTlianoba advilad zogaddeba n cali elementis SemTxvevaSi da gvaqvs:

$$\left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n\right)^{-1} = x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}.$$

axla, Tu $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, miviRebT:

winadadeba 6. Tu $x \in G$, maSin nebismieri naturaluri n ricxvisTvis, $\left(x^n\right)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n$.

SeniSvna 1. adiciuri Caweris gamoyenebisas, **winadadeba 2** ase Camoyalibdeboda: Tu $x, y \in G$, maSin arsebobs erTaderTi iseTi $a \in G$ elementi, rom $a + x = y$ da es elementia $y + (-x) = y - x$. analogiurad, arsebobs erTaderTi iseTi $b \in G$ elementi, rom $x + b = y$ da es elementia $(-x) + y = y - x$. **winadadeba 4** da **winadadeba 5**-dan miiReba, rom

$$-(-x) = x \quad \text{da} \quad -(x + y) = -x + (-y) = -x - y.$$

magaliTi 38. neitraluri elementis Sebrunebuli isev neitraluri elementia (ratom?).

qvejgufebi

vTqvaT, G raime jgufia.

ganmarteba 7. G simravlis raime aracarieli H qvesimravles ewodeba G jgufis qvejgufi, Tu sruldeba Semdegi ori piroba:

1. Tu $x, y \in H$, maSin $xy \in H$.
2. Tu $x \in H$, maSin $\in$.

maSasadame, $H \subseteq G$ aris G jgufis qvejgufi, Tu is Caketilia gamravlebis da Sebrunebulis povnis operaciebis mimarT.

adiciuri Cawerisas, qvejgufeobis piroba ase gamoiyureba:

1. Tu $x, y \in H$, maSin $x + y \in H$.
2. Tu $x \in H$, maSin $-x \in H$.

winadadeba7. Tu H aris G jgufis qvejgufi, maSin H aris jgufi.

damtkiceba. 1. pirobis gamo, sakmarisia vaCvenoT, rom $1 \in H$. amisaTvis ganvixiloT H simravlis nebismieri $x \in H$ elementi (aseTi elementi yovelTvis arsebobs, radgan ganmartebiT H

aris G simravlis aracarieli qvesimravle). maSin 2. pirobis ZaliT, $xx^{-1}\in H$. magram $xx^{-1}=1$. amitom $1\in H$.

winadadeba 8. $H\subseteq G$ aracarieli qvesimravle aris G jgufis qvejgufi maSin da mxolod maSin, rodesac sruldeba Semdegi piroba:

$$\text{Tu} \quad x,y\in H, \quad \text{maSin} \quad xy^{-1}\in H.$$

damtkiceba. davuSvaT, rom H aris G-s qvejgufi da rom $x,y\in H$. radgan $y\in H$, amitom 2. pirobis ZaliT $y^{-1}\in H$ da Semdeg 1. pirobis ZaliT, $xy^{-1}\in H$.

piriqiT, davuSvaT, rom Tu $x,y\in H$, maSin $xy^{-1}\in H$. maSin, radgan $x\in H$, amitom $1=xx^{-1}\in H$. garda amisa, radgan $1,x\in H$, amitom $x^{-1}=1\cdot x^{-1}\in H$. maSasadame, imisaTvis, rom vaCvenoT H-is qvejgufoba, saWiroa vaCvenoT, rom Tu $x,y\in H$, maSin $xy\in H$. magram, radgan $y\in H$, amitom $y^{-1}\in H$ da axla, radgan $x,y^{-1}\in H$, amitom $x\left(y^{-1}\right)^{-1}\in H$. magram **winadadeba 4**-is ZaliT, $\left(y^{-1}\right)^{-1}=y$. amitom $xy\in H$.

SeniSvna 2. adiciuri Cawerisas, wina piroba ase Caiwereboda:

$$\text{Tu} \quad x,y\in H, \quad \text{maSin} \quad x-y\in H.$$

magaliTi 39. Tu H aris G jgufis qvejgufi da Tu $x\in H$, maSin $x^n\in H$, sadac $n\in\mathbb{Z}$ nebismieri mTeli ricxvia.

magaliTi 40. nebismier G jgufs gaaCnia sul mcire ori qvejgufi: TviTon G da $\{1\}$. $\{1\}$ qvejgufs G jgufis **trivialuri** qvejgufi ewodeba.

magaliTi 41. $(\mathbb{Z},+)$ aris $(\mathbb{Q},+)$ jgufis qvejgufi, xolo $(\mathbb{Q},+)$ ki $(\mathbb{R},+)$ jgufis qvejgufi.

magaliTi 42. vTqvaT, n raime naturaluri ricxvia. maSin simravle

$$\{\ldots,-2n,-n,0,n,2n,\ldots\}$$

aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis qvejgufi.

magaliTi 43. simravle $\{0,2,4\}$ aris $(\mathbb{Z}_6,+)$ jgufis qvejgufi. misi qvejgufia agreTve $\{0,3\}$ simravle.

winadadeba 9. Tu H da H' aris G jgufis ori qvejgufi, maSin $H \cap H'$ aris agreTve G-s qvejgufi.

damtkiceba. vTqvaT, $x, y \in H \cap H'$, maSin $x, y \in H$ da amitom **winadadeba 8**-is ZaliT, $xy^{-1} \in H$. analogiurad, $xy^{-1} \in H'$, amitom $xy^{-1} \in H \cap H'$ da maSin isev **winadadeba 8**-is ZaliT, $H \cap H'$ aris G jgufis qvejgufi.

vTqvaT, G raime jgufi da g ki misi raime elementi. ganvixiloT simravle

$$H = \left\{ x \in G : \; x = g^n, \; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

winadadeba 10. H aris G jgufis qvejgufi.

damtkiceba. Tu $x = g^n \in H$ da $x = g^m \in H$, maSin $xy = g^n \cdot g^m = g^{n+m} \in H$ da $x^{-1} = \left(g^n\right)^{-1} = g^{-n} \in H$ (ixile **winadadeba 6**). amitom H aris G jgufis qvejgufi.

ganmarteba 8. vTqvaT, G jgufia da g ki misi raime elementi. maSin $H = \left\{ g^n, \; n \in \mathbb{Z} \right\}$ qvejgufs ewodeba g elementiT warmoqmnili G jgufis qvejgufi da $\langle g \rangle$ simboloTi aRiniSneba.

G jgufis H qvejgufs ewodeba **cikluri**, Tu arsebobs iseTi $g \in G$ elementi, rom $H = \langle g \rangle$. TviTon g elements ki H qvejgufis **warmomqmneli** ewodeba. kerZod, Tu raime $g \in G$ elementisTvis, $G = \langle g \rangle$, maSin G-s ewodeba **cikluri** jgufi, da g-s misi warmomqmneli.

Tu $G=\langle g\rangle$, maSin $G=\{\ldots,g^{-2},g^{-1},g^{0}=1,g^{1},g^{2},\ldots\}$ da radgan $g^{n}\cdot g^{m}=g^{n+m}=g^{m+n}=g^{m}\cdot g^{n}$, amitom G aris abeluri jgufi. maSasadame, gvaqvs:

winadadeba 11. nebismieri cikluri jgufi abeluria.

SeniSvna 3. Tu gamoviyenebdiT adiciur Caweras, cikluri G jgufis elementebi ase warmodgindeboda

$$\ldots,-2a,-a,0\cdot a=0,a,2a,\ldots$$

magaliTi 44. $(\mathbb{Z},+)$ aris cikluri jgufi. marTlac, radgan nebismieri mTeli ricxvi n warmoidgineba $n\cdot 1$ saxiT, amitom $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$.

magaliTi 45. Tu n raime naturaluri ricxvia, maSin n-is jeradi mTeli ricxvebis $n\mathbb{Z}$ simravle aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis cikluri qvejgufi da es qvejgufi warmoqmnilia n ricxviT.

SevniSnoT, rom zogadad ciklur jgufs SeiZleba erTze meti warmomqmneli hqondes. magaliTad, $(\mathbb{Z},+)=\langle 1\rangle$ da $(\mathbb{Z},+)=\langle -1\rangle$.

magaliTi 46. mTeli luwi ricxvebis E simravle aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis cikluri qvejgufi da $E=\langle 2\rangle$.

imisda mixedviT, cikluri jgufis warmomqmnelis yvela xarisxebi gansxvavdeba Tu ara erTmaneTisgan, arsebobs ori saxis cikluri jgufi: sasruli da usasrulo. Tu $G=\langle g\rangle$ da $\{\ldots,g^{-2},g^{-1},g^{0}=e,g^{1},g^{2},\ldots\}$ simravlis yvela elementi erTmane-Tisgan gansxvavdeba, e. i. $g^{n}\neq g^{m}$, Tu $n\neq m$, maSin amboben, rom $g\in G$ elementis rigi aris usasrulo, an rom g elements aqvs usasrulo rigi. am faqts simbolurad ase Caweren: $|g|=\infty$. Tu ar-sebobs iseTi mTeli $n>m$ ricxvebi, rom $g^{n}=g^{m}$, maSin

$$g^{n-m}=g^{n}\cdot g^{-m}=g^{n}\cdot\left(g^{-1}\right)^{m}=g^{n}\cdot\left(g^{m}\right)^{-1}=g^{n}\cdot\left(g^{n}\right)^{-1}=e$$

da amitom arsebobs iseTi dadebiTi mTeli ricxvi k (magaliTad, $k=n-m$), rom $g^{k}=e$. aseTi Tvisebis umciresi ricxvs g

elementis **rigi** ewodeba. im faqts rom g elementis rigi aris k, ase Caweren: $|g| = k$.

winadadeba 12. vTqvaT, $g \in G$ elementis rigiaÀk. Tu $m, n \in \mathbb{Z}$ mTeli ricxvebia, maSin $g^m = g^n$, maSin da mxolod maSin, rodesac $m - n$ iyofa k-ze.

damtkiceba. Tu $m - n = kl$, $l \in \mathbb{N}$, maSin $m = n + kl$ da amitom $g^m = g^{n+kl} = g^n \cdot g^{kl} = g^n \cdot \left(g^k\right)^l = g^n \cdot e^k = g^n \cdot e = g^n$ (aq gamoviyeneT is faqti, rom $|g| = k$).

piriqiT, vTqvaT, $g^m = g^n$ da $m - n = lk + r$, sadac $0 \le r < k$. maSin

$$e = g^n \cdot \left(g^n\right)^{-1} = g^m \cdot \left(g^n\right)^{-1} = g^m \cdot g^{-n} = g^{m-n} = g^{lk+r} =$$
$$= g^{lk} \cdot g^r = \left(g^k\right)^l \cdot g^r = 1^l \cdot g^r = g^r.$$

magram, radgan $|g| = k$ da radgan $r < k$, amitom $r = 0$, anu $m - n$ iyofa k-ze.

Tu $|g| = k$, maSin nebismieri $n \in \mathbb{Z}$ SeiZleba ase Caiweros: $n = mk + s$, sadac $0 \le s < k$. amitom gvqeneba:

$$g^n = g^{mk+s} = g^{mk} \cdot g^s = \left(g^k\right)^m \cdot g^s = 1^m \cdot g^s = g^s$$

maSasadame, $\langle g \rangle$ ciklur jgufs aqvs zustad k elementi:

$$\langle g \rangle = g^0 = \left\{1, g^1, g^2, \ldots, g^{k-1}\right\}.$$

wina winadadebaSi $n = 0$ mniSvnelobis CasmiT miviRebT

winadadeba 13. Tu $|g| = k$, maSin $g^m = 1$ maSin da mxolod maSin, rodesac m iyofa k-ze.

magaliTi 47. nebismier jgufSi misi neitraluri elementis rigia 1.

magaliTi 48. $(\mathbb{Z}, +)$ jgufis nebismieri elementis rigi usasruloa, radgan Tu $ng = 0$, maSin aucileblad $g = 0$.

magaliTi 49. $(\mathbb{Q}^{\times},\cdot,1)$ jgufs aqvs 1-gan gansxvavebuli mxolod erTi sasruli rigis mqone elementi. es elementia -1 da misi rigia 2, radgan $(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=1$. igive SeiZleba iTqvas $(\mathbb{R}^{\times},\cdot,1)$ jgufis Sesaxeb.

winadadeba 14. cikluri jgufis nebismieri qvejgufi isev cikluria.

damtkiceba. vTqvaT, G aris cikluri jgufi, xolo H ki misi raime qvejgufi. Tu $G=\langle g\rangle$, $g\in G$, maSin n-iT aRvniSnoT is umciresi naturaluri ricxvi, romlisTvisac $g^n\in H$. Tu $g^m\in H$, maSin $n\le m$ da amitom $m=nl+s$, sadac $0\le s<n$. maSin $g^m=g^{nl+s}=g^{nl}\cdot g^s=\left(g^n\right)^l\cdot g^s$ da radgan $g^n\in H$, amitom $g^{nl}=\left(g^n\right)^l\in H$ da radgan $g^s=\left(g^{nl}\right)^{-1}\cdot g^m$, amitom qvejgufis ganmartebis gamo, $g^s\in H$. radgan $0\le s<n$, amitom $s=0$, rac niSnavs, rom $g^m=\left(g^n\right)^l$. e. i. H qvejgufis nebismieri elementi aris g^n elementis raime xarisxi, amitom $H=\langle g^n\rangle$.

lagranJis Teorema

vTqvaT, G jgufia, $x\in G$ misi raime elementi, xolo H ki G simravlis raime qvesimravle. ganvixiloT Semdegi simravle

$$Hx=\{hx,\ h\in H\}.$$

Hx kvlav G simravlis qvesimravlea da Tu H aris sasruli simravle $\{x_1,\dots,x_n\}$, maSin $Hx=\{x_1x,x_2x,\dots,x_nx\}$.

analogiurad ganimarteba xH simravle. SevniSnoT, rom arakomutaciurobis gamo, zogadad, $Hx\neq xH$.

Tu $x,y\in H$, maSin asociurobis gamo

$$(Hx)y=H(xy),\quad x(yH)=(xy)H \quad \text{da} \quad (xH)y=x(Hy).$$

cxadia, Tu G komutaciuria, maSin $Hx=xH$.

ganmarteba 8. vTqvaT, H aris G jgufis qvesimravle. Hx saxis simravles, sadac $x\in G,$ ewodeba H qvesimravlis **marjvena mosazRvre klasi** da G/H simboloTi aRiniSneba. analogiurad, xH saxis simravles ewodeba H qvesimravlis **marcxena mosazRvre klasi** da $G\backslash H$ simboloTi aRiniSneba.

winadadeba15. vTqvaT, G aris raime jgufi, $x,y\in G$ misi ori nebismieri elementi da H ki G simravlis qvejgufi, maSin an $Hx=Hy$ an $Hx\cap Hy=\varnothing$. garda amisa, $Hx=Hy$ maSin da mxolod maSin, rodesac $yx^{-1}\in H$.

damtkiceba. Tu $Hx\cap Hy\neq\varnothing$, maSin arsebobs iseTi $g\in G$ elementi, rom $g\in Hx$ da $g\in Hy$. es niSnavs, rom arsebobs iseTi $h_1,h_2\in H$ ori elementi, rom $h_1x=h_2y$. aqedan $x=h_1^{-1}\left(h_2y\right)$. axla Tu $z\in Hx$, maSin arsebobs iseTi $h\in H$ elementi, rom $z=hx$, da amitom $z=h\left(h_1^{-1}\left(h_2y\right)\right)=\left(hh_1^{-1}h_2\right)y$. magram, radgan H aris G jgufis qvejgufi, amitom $hh_1^{-1}h_2\in H$ da, maSasadame, $z=\left(hh_1^{-1}h_2\right)y\in Hy$. miviReT, rom $Hx\subseteq Hy$. simetriulad, $Hy\subseteq Hx$ da, maSasadame, $Hx=Hy$.

Tu $yx^{-1}\in H$, maSin $yx^{-1}=h$ raime $h\in H$ elementisaTvis, da amitom $y=hx$, rac niSnavs, rom $y\in Hx$. radgan $y\cdot 1=y$ da, radgan $1\in H$, amitom $y\in Hy$ da miviReT, rom $y\in Hx\cap Hy$, rac zemoT damtkicebulis Tanaxmad niSnavs $Hx=Hy$ tolobas.

piriqiT, Tu $Hx=Hy$, maSin $y=hx$ raime $h\in H$ elementisaTvis, radgan $y\in Hy$. amitom $yx^{-1}=h\in H$. amiT Teorema damtkicebulia.

aqedan miiReba Semdegi

winadadeba16. Tu H aris G jgufis qvejgufi, maSin $G/H=\left\{Hx,\ x\in G\right\}$ aris G simravlis dayofa (e.i. G simravle warmoidgineba rogorc wyvil-wyvilad Tanaukveti $\left|G/H\right|$ raodenobis Hx saxis simravleebs gaerTianebad).

analogiurad miiReba, rom $G\backslash H$ aris agreTve G simravlis dayofa.

SevniSnoT, rom, radgan $eH = He = H$, amitom H aris rogorc marcxena, ise marjvena mosazRvreobis klasi.

magaliTi 50. ganvixiloT $(\mathbb{Z}_6, +)$ da misi qvejgufi $H = \{[0],[2],[4]\}$. maSin

$$
\begin{aligned}
&[0]+H = H,\\
&[2]+H = H\\
&[3]+H = \{[1],[3],[5]\},\\
&[4]+H = H,\\
&[5]+H = \{[2],[3],[5]\}.
\end{aligned}
$$

SevniSnoT, rom radgan $(\mathbb{Z}_6, +)$ abeluri jgufia, Cven viyenebT adiciur Caweras.

lagranJis Teorema. Tu G sasruli jgufia, xolo H ki misi qvejgufi, maSin H-is rigi aris G-s rigis gamyofi da

$$|G| = |H| \cdot |G/H|.$$

damtkiceba. jer vaCvenoT, rom nebismieri $x \in G$ elementisaTvis, H da Hx Sedgeba erTi da igive raodenobis elementisagan. amisaTvis ganvixiloT asaxva $f : H \to Hx$, romelic gansazRvruli formuliT $f(h) = hx$, da vaCvenoT, rom f aris bieqciuri. Tu $f(h_1) = f(h_2)$, $h_1, h_2 \in H$, maSin $h_1x = h_2x$ da am tolobas orive mxaris x^{-1}-ze gamravlebiT miviRebT, rom $h_1 = h_2$. e. i. f aris ineqciuri.

imisaTvis, rom vaCvenoT, rom f aris agreTve sureqciuli, ganvixiloT nebismieri $y \in Hx$ elementi. maSin $yx^{-1} \in H$ da gvaqvs

$$f\left(yx^{-1}\right) = \left(yx^{-1}\right)x = y\left(x^{-1}x\right) = y \cdot 1 = y.$$

es niSnavs, rom f yofila sureqciulic da, maSasadame, is aris bieqciuri.

axla, radgan G simravle warmoidgineba rogorc wyvil-wyvilad TanaukveTi $|G/H|$ raodenobis Hx saxis simravleebs gaerTianebad da, radgan TiToeuli aseTi simravlis elementebis raodenobaa $|H|$, amitom

$$|G| = |G/H| \cdot |H|.$$

simetriulad miiReba, rom

$$|G| = |G \setminus H| \cdot |H|.$$

amitom $|G \setminus H| = |G/H|$, rac niSnavs, rom H-s marcxena da marjvena mosazRvre klasebis raodenobebi tolia.

Sedegi 1. Tu G raime sasruli jgufia da $x \in G$, maSin $|\langle x \rangle|$ aris $|G|$-s gamyofi.

Sedegi 2. yvela sasruli jgufi, romlis rigic martivia, aris cikluri.

damtkiceba. vTqvaT, G aris iseTi sasruli jgufi, rom $|G|$ aris martivi da ganvixiloT misi neitraluri elementisagan gansxvavebuli nebismieri $x \in G$ elementi da misgan warmoqmnili cikluri $\langle x \rangle$ qvejgufi. maSin lagranJis Teoremis Tanaxmad, $|\langle x \rangle|$ aris $|G|$-s gamyofi da radgan $x \neq e$, amitom $|\langle x \rangle| > 1$, saidanac davaskvniT, rom $|\langle x \rangle| = |G|$. es ki niSnavs, rom $G = \langle x \rangle$.

fermis Teorema. Tu $a \in \mathbb{Z}$ da p martivi, ricxvia, maSin $a^p - a$ iyofa p-ze.

normaluri jgufebi

ganmarteba 9. vTqvaT, G jgufia da H misi raime qvejgufi. amboben, rom H aris G jgufis **normaluri qvejgufi** an, rom H aris **normaluri G jgufSi**, Tu nebismieri $x \in G$ elementisaTvis, $Hx = xH$.

maSasadame, H aris normaluri G-Si, Tu H-is marcxena da marjvena mosazRvre klasebi erTmaneTs emTxveva. SevniSnoT, rom Tu G abeluria, maSin misi nebismieri qvejgufi aris normaluri.

Tu $Hx = xH$ tolobis orive mxares gavamravlebT x^{-1}-ze marcxnidan, miviRebT, rom H aris normaluri G-Si maSin da mxolod maSin, rodesac $x^{-1}Hx = H$ nebismieri $x \in G$ elementisaTvis.

nebismieri jgufisaTvis, TviT es jgufi da trivialuri qvejgufi aris normaluri. Tu erTze meti rigis mqone jgufs mxolod es ori normaluri qvejgufi aqvs, mas **martivi** ewodeba.

Sedegi 1-is Tanaxmad, Tu sasruli jgufis rigi martivi ricxvia, maSin es jgufi martivia.

winadadeba 17. H aris normaluri G-Si maSin da mxolod maSin, rodesac nebismieri $x \in G$ elementisaTvis, $x^{-1}Hx \subseteq H$.

damtkiceba. erTi mxare zeviT SevamowmeT ukve, amitom davuSvaT, rom $x^{-1}Hx \subseteq H$ CarTva sruldeba nebismieri $x \in G$ elementisaTvis, maSin

$$x\left(x^{-1}Hx\right)x^{-1} \subseteq xHx^{-1}$$

da amitom,

$$H = 1 \cdot H \cdot 1 = \left(xx^{-1}\right)H\left(xx^{-1}\right) \subseteq xHx^{-1}.$$

aqedan miiReba, rom $H \subseteq x^{-1}Hx$ da radgan pirobiT $x^{-1}Hx \subseteq H$ miviRebT, rom $x^{-1}Hx = H$ nebismieri x elementisaTvis, anu rom H aris normaluri G-Si.

winadadeba18. Tu H da K aris G jgufis ori normaluri qvejgufi, maSin $H \cap K$ aris agreTve G-s normaluri qvejgufi.

damtkiceba. **winadadeba 9**-is ZaliT, rom $H \cap K$ aris G jgufis qvejgufi. ganvixiloT axla G jgufis nebismieri x elementi. maSin $H \cap K \subseteq H$ CarTvis ZaliT, $x^{-1}\left(H \cap K\right)x \subseteq x^{-1}Hx = H$. analogiurad, $x^{-1}\left(H \cap K\right)x \subseteq K$. maSasadame, $x^{-1}\left(H \cap K\right)x \subseteq H \cap K$ da sasurveli Sedegi axla miiReba wina winadadebidan.

faqtor-jgufi

vTqvaT, G jgufia da H ki misi raime normaluri qvejgufi. $G\backslash H$ simravleze ganvsazRvroT binaruli operacia Semdegnairad: Tu Hx da Hy aris H qvejgufis ori nebismieri marjvena mosazRvre klasi, maSin $Hx*Hy=H(xy)$. SevamowmoT, rom es ganmarteba koreqtuli, e. i. rom Tu $Hx'=Hx$ da $Hy'=Hy$, maSin $*$ $=$ $*$ anu rom $Hx'y'=Hxy$. radgan H normaluria G-Si, amitom nebismieri $z\in G$ elementisaTvis, $zH=Hz$. amitom gvaqvs:

$$\begin{aligned} H(xy) &= H(x'y) && (\text{radgan } Hx=Hx') \\ &= x'Hy && (\text{radgan } x'H=Hx') \\ &= x'Hy' && (\text{radgan } Hy=Hy') \\ &= Hx'y' && (\text{radgan } x'H=Hx'). \end{aligned}$$

winadadeba 19. $(G/H,*,H)$ aris jgufi.

damtkiceba. Tu $x,y,z\in G$, maSin gvaqvs

$$(Hx*Hy)*Hz=H(xy)*Hz=$$
$$=H((xy)z)=H(x(yz))=Hx*H(yz)=Hx*(Hy*Hz).$$

maSasadame, $*$ aris asociuri binaruli operacia. radgan nebismieri $x\in G$ elementisaTvis

$$Hx*H=Hx*H1=H(x\cdot 1)=Hx$$

da

$$H*Hx=H1*Hx=H(1\cdot x)=Hx,$$

amitom H aris neitraluri elementi $*$ operaciis mimarT. garda amisa, Tu $x\in G$, maSin Hx^{-1} da Hx klasis Sebrunebuli, radgan

$$Hx*Hx^{-1}=H(xx^{-1})=H\cdot 1=H$$

da

$$Hx^{-1}*Hx=H(x^{-1}x)=H\cdot 1=H.$$

maSasadame, $(G/H,*,H)$ aris jgufi.

magaliTi 51. $(m\mathbb{Z},+)$ aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis qvejgufi. radgan $(\mathbb{Z},+)$ aris abeluri jgufi, amitom $(m\mathbb{Z},+)$ aris misi normaluri qvejgufi. maSin $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ simravleze Sekrebis operacia ase ganimarteba

$$(m\mathbb{Z}+x)+(m\mathbb{Z}+y)=m\mathbb{Z}+(x+y).$$

advili saCvenebelia, rom $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)=(\mathbb{Z}_m,+)$.

jgufTa homomorfizmi

ori jgufis Sesadareblad gamoiyeneba iseTi asaxvebi erTi jgufidan meoreSi, romlebic inaxavs jgufis operaciebs. aseT asaxvebs **homomorfizmebi** ewodeba.

ganmarteba 10. homorfizmi $(G,*)$ jgufidan $(G',*')$ jgufSi aris iseTi asaxva $f:G\to G'$, rom nebismieri $x,y\in G$ elementebisaTvis $f(x*y)=f(x)*'f(y)$.

sxva sityvebiT rom vTqvaT, homomorfizmi ori elementis namravls maTi anasaxebis namravlSi asaxavs.

magaliTi 52. nebismieri jgufidan nebismier sxva jgufSi yovelTvis arsebobs erTi mainc homomorfizmi. es aris e. w. **trivialuri** homomorfizmi, romelsac yvela elements uTanadebs neitralur elements. radgan $1\cdot 1=1$ nebismier jgufSi, amitom advili sanaxavia, rom aseTi asaxva namdvilad homomorfizmia.

$f:G\to G'$ homomorfizms ewodeba:

a) **monomorfizmi**, Tu f asaxva ineqciuria;

b) **epimorfizmi**, Tu f asaxva sureqciulia;

g) **izomorfizmi**, Tu f asaxva aris bieqcia, e. i. erTdroulad sureqciac da ineqciac.

Tu $G=G'$, maSin f homomorfizms ewodeba **endomorfizmi** da ewodeba **avtomorfizmi**, Tu f aris izomorfizmi.

magaliTi 53. vTqvaT, H aris G jgufis normaluri qvejgufi da ganvixiloT asaxva $p:G\to G/H$, romelic $x\in G$ elements uTanadebs misi mosazRvreobis Hx klass. maSin es asaxva aris homomorfizmi, radgan Tu $x, y \in G$, maSin $p(xy) = H(xy) = Hx \cdot Hy = p(x)p(y)$. radgan cxadia, rom p aris sureqciuli asaxva, amitom p aris epimorfizmi.

magaliTi 54. Tu G nebismieri jgufia, maSin G-s Tavis Tavze igivuri asaxva $1_G : G \to G$ aris homomorfizmi. radgan 1_G aris bieqcia, amitom 1_G faqtiurad aris avtomorfizmi.

magaliTi 55. vTqvaT, n raime naturaluri ricxvia da ganvixiloT asaxva $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, romelic gansazRvrulia Semdegnairad: $f_n(m) = nm$. radgan

$$f_n(m + m') = n(m + m') = nm + nm' = f_n(n) + f_n(m'),$$

amitom f_n aris homomorfizmi $(\mathbb{Z}, +)$ jgufidan Tavis TavSi, anu is aris $(\mathbb{Z}, +)$ jgufi endomorfizmi.

magaliTi 56. vTqvaT, G jgufia, x ki misi raime elementi. ganvixiloT asaxva $f : \mathbb{Z} \to G$, romelic gansazRvrulia Semdegnairad: $f(n) = x^n$. maSin f aris homomorfizmi $(\mathbb{Z}, +)$ jgufidan G jgufSi. marTlac, $f(n + n') = x^{n+n'} = x^n \cdot x^{n'} = f(n)f(n')$.

SevniSnoT, rom wina magaliTi aris am magaliTis kerZo SemTxveva.

magaliTi 57. vTqvaT, $n > 1$. ganvixiloT asaxva $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, romelic gansazRvrulia Semdegnairad: $p(m) = [m]$, sadac $[m]$ aris m-is ekvivalentobis klasi moduliT n, maSin p aris epimorfizmi.

magaliTi 58. vTqvaT, G jgufia da x ki misi raime elementi. ganvixiloT asaxva $f_x : G \to G$ gansazRvrul Semdegnairad: $f_x(y) = x^{-1}yx$. f_x aris homomorfizmi. marTlac, Tu $y, y' \in G$, maSin

$$f_x(yy') = x^{-1}(yy')x = (x^{-1}yx)(x^{-1}y'x) = f_x(y)f_x(y').$$

rodesac G da G' jgufebis binaruli operaciebi mutiplikaciuradaa Cawerili, maSin $f:G\to G'$ asaxvis homomorfulobis piroba Semdegnairad Caiwereba:

$f(xy)=f(x)f(y)$ yvela $x,y\in G$ elementebisaTvis.

winadadeba20. Tu $f:G\to G'$ homomorfizmi da $x,y\in G$, maSin

$$f\left(xy^{-1}\right)=f(x)f(y)^{-1}.$$

damtkiceba. radgan f homomorfizmia, amitom gvaqvs

$$f\left(xy^{-1}\right)f(y)=f\left(xy^{-1}y\right)=f(x).$$

aqedan miviRebT, rom $f\left(xy^{-1}\right)=f(x)f(y)^{-1}$.

Tu am winadadebaSi vigulisxmebT, rom $x=y=1$, xolo Semdeg ki, rom $x=1$, miviRebT:

winadadeba 21. Tu $f:G\to G'$ jgufebis homomorfizmia, maSin $f(1)=1$ da $f\left(y^{-1}\right)=f(y)^{-1}$ nebismieri $y\in G$ elementisaTvis.

magaliTi 59. asaxva $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^{+}$, romelic gansazRvrulia $z\to|z|$ TanadobiT, aris homomorfizmi, radgan

$$f(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1||z_2|=f(z_1)f(z_2).$$

cxadia, rom f aris sureqcia: Tu $x\in\mathbb{R}^{+}$, maSin $f(x)=x$. magram f araa ineqcia. marTlac $f(z)=f(-z)$, radgan $|z|=|-z|$.

winadadeba 22. Tu $f:G\to G'$ da $f:G'\to G''$ orive homomorfizmia, maSin maTi kompozicia $gf:G\to G'$ aris agreTve homomorfizmi.

damtkiceba. Tu $x,y\in G$, maSin gvaqvs:

$$(gf)(xy)=g\left(f(xy)\right)=$$
$$=g\left(f(x)f(y)\right)=g\left(f(x)\right)g\left(f(y)\right)=(gf)(x)(gf)(y).$$

winadadeba 23. Tu $f: G \to G'$ izomorfizmia, maSin $f^{-1}: G' \to G$ aris agreTve izomorfizmi.

rodesac G da G' jgufebis binaruli operaciebi adiciuri saxiTaa warmodgenili, maSin **winadadeba 20** da **winadadeba 21**-da miviRebT, rom $f(x-y)=f(x)-f(y)$ da $f(0)=0$.

izomorfuli jgufebi

ganmarteba 11. or G da G' jgufs ewodeba izomorfuli (da amis simbolurad ase Caweren $G \approx G'$), Tu arsebobs izomorfizmi $f: G \to G'$.

magaliTi 60. ganvixiloT asaxva $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\times}$, romelic asea ganmartebuli: $f(x)=e^x$. radgan

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x e^y=f(x)f(y),$$

amitom f aris homomorfizmi $(\mathbb{R},+,0)$ jgufidan $(\mathbb{R}^{\times},\cdot,1)$ jgufSi. rogorc cnobilia, $f(x)=e^x$ funqcia aris bieqciuri. maSasadame, f aris jgufebis izomorfizmi da amitom $(\mathbb{R},+,0)$ da $(\mathbb{R}^{\times},\cdot,1)$ jgufebi izomorfulia.

magaliTi 61. radgan e^x funqciis Seqceuli funqciaa $g(x)=\ln x$ funqcia, amitom **winadadeba 23**-is ZaliT asaxva

$$f(x): \mathbb{R}^{\times} \to \mathbb{R}, \quad x \to \ln x$$

aris jgufebis izomorfizmi.

magaliTi 62. vTqvaT, C_3 mesame rigis cikluri jgufia. Tu $x \in C_3$ iseTi elementia, rom $C_3=\langle x \rangle$, maSin $C_3=\{1,x,x^2\}$. axla vTqvaT, $f: C_3 \to C_3$ aris nebismieri endomorfizmi, maSin viciT, rom $f(1)=1$. radgan $f(x^2)=f(x)^2$, amitom f srulad gansazRvrulia $f(x)$-is mniSvnelobis codniT. amitom gvaqvs sami SemTxveva:

1. $f(x)=1$. maSin $f(x^2)=f(x)f(x)=1\cdot 1=1$ da amitom f aris trivialuri homomorfizmi.

2. $f(x)=x$. maSin $f(x^2)=f(x)f(x)=x^2$ da am SemTxvevaSi f aris C_3-is igivuri homomorfizmi.

3. $f(x)=x^2$. maSin $f(x^2)=f(x)f(x)=x^4=x^1x^3=x\cdot 1=x$.

pirvel SemTxvevaSi cxadia, rom f araa izomorfizmi. meore da mesame SemTxvevaSi ki es asea. maSasadame, C_3 aris Tavisi Tavis izomorfuli sul mcire ori gansxvavebuli izomorfizmis saSualebiT.

jgufebis raime Tvisebas ewodeba **sakuTrivi**, Tu nebismieri ori izomorfuli G da G' jgufebisaTvis, G jgufs aqvs es Tviseba maSin da mxolod maSin, rodesac G' jgufs aqvs igive Tviseba. magaliTad, sasruli jgufis rigi aris sakuTrivi Tviseba. marTlac, Tu sasruli G da G' jgufebi izomorfulia, maSin arsebobs raime izomorfizmi $f:G\to G'$. radgan yoveli izomorfizmi bieqciaa, amitom f asaxva aris bieqciuri. e. i. G da G' simravleebs aqvT erTi da igive raodenobis elementebi.

magaliTi 63. jgufis Tviseba iyos abeluri, aris sakuTrivi. marTlac, Tu $f:G\to G'$ izomorfizmia da Tu G abeluria, maSin G' jgufis nebismieri ori $x',y'\in G'$ elementebisaTvis, gvaqvs:

$$x'y'=f\left(f^{-1}(x'y')\right)=f\left(f^{-1}(x')f^{-1}(y')\right)=$$
$$=f\left(f^{-1}(y')f^{-1}(x')\right)=ff^{-1}(y')ff^{-1}(x')=y'x',$$

rac niSnavs, rom G' jgufic abeluria. aq gamoviyeneT is faqti, rom izomorfizmis Sebrunebuli asaxva isev izomorfizmia (ix. **winadadeba 23**).

magaliTi 64. samelementiani simravlis gadaadgilebebs S_3 jgufs da $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$ jgufs aqvT erTi da igive raodenobis elementebi anu maTi rigi erTi da igivea da, kerZod, aris 6, magram isini izomorfuli jgufebi ar aris.

magaliTi 65. Tu $f:G\to G'$ izomorfizmia da $f(x)=x'$, maSin $x^n=1$ maSin da mxolod maSin, rodesac $(x')^n=1$. marTlac, Tu $x^n=1$, maSin

$$(x')^n=\left(f(x)\right)^n=f\left(x^n\right)=f(1)=1.$$

piriqiT, Tu $(x')^n=1$, maSin

$$x^n=\left(f^{-1}(x')\right)^n=f^{-1}\left((x')^n\right)=f^{-1}(1)=1,$$

radgan f^{-1} aris agreTve homomorfizmi. maSasadame, izomorfuli jgufebis Sesabamis elementebs aqvT erTi da igive rigi.

magaliTi 66. ganvixiloT jgufi G, romelic Sedgeba oTxi e, t, u da v elementebisagan da romlis gamravlebis operaciis cxrili gamoiyureba Semdegnairad

	e	t	u	v
e	e	t	u	v
t	t	e	v	u
u	u	u	e	t
v	v	u	t	e

am jgufis neitraluri elementia e da misi rigi cxadia, aris 4. miuxedavad imisa, rom $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ jgufis rigic 4-ia da rom es orive jgufi abeluria, isini araizomorfuli jgufebia. marTlac, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ jgufSi arsebobs elementi, romlis rigia 4 (kerZod, $[1]$), maSin, rodesac G jgufSi neitraluri elementis garda yvela sxva elementis rigi aris 2.

homomorfizmis birTvi da anasaxi

nebismieri homomorfizmi or jgufs Soris gamoxatavs raime kavSirs am jgufebis struqturebs Soris. magaliTad, jgufebis izomorfizmis SemTxvevaSi, erTi jgufis struqtura SeiZleba srulad aRdges meore jgufis struqturis saSualebiT. rodesac homomorfizmi izomorfizmi araa, amdenis gakeTebis saSualeba aRara gvaqvs, magram nebismieri homomorfizmis dros yovelTvis gvaqvs izomorfizmi am homomorfizmiT dakavSirebuli jgufebis faqtor-jgufsa da qvejgufs Soris.

ganmarteba 12. vTqvaT, $f: G \to G'$ jgufebis homomorfizmia. simravles

$$Ker(f) = \{x \in G:\ f(x) = e'\}$$

ewodeba f homomorfizmis **birTvi**, xolo simravles

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x):\ x \in G\}$$

ki misi **anasaxi**.

winadadeba 24. Tu $f: G \to G'$ jgufTa homomorfizmia, maSin misi birTvi aris G jgufis normaluri qvejgufi, xolo misi anasaxi ki G' jgufis (ara aucileblad normaluri) qvejgufi.

damtkiceba. Tu $x, y \in Ker(f)$, maSin $f(x) = f(y) = e'$. amitom **winadadeba 20**-is ZaliT, $f(xy^{-1}) = e'$, e. i. $xy^{-1} \in Ker(f)$, rac niSnavs, rom $Ker(f)$ aris G jgufis qvejgufi. rom vaCvenoT misi normaluroba G-Si, ganvixiloT nebismieri $x \in Ker(f)$ da nebismieri $y \in G$. maSin, radgan

$$f(yxy^{-1}) = f(y)f(x)f(y)^{-1} = f(y)e'f(y^{-1}) = f(y)f(y)^{-1} = e',$$

amitom $yxy^{-1} \in Ker(f)$, rac niSnavs, rom $Ker(f)$ aris normaluri G-Si.

winadadeba 24-is ZaliT, $\mathrm{Im}(f)$ aris G' jgufis qvejgufi, Tu nebismieri $x', y' \in \mathrm{Im}(f)$ elementebsaTvis, $x'(y')^{-1}$ aris agreTve $\mathrm{Im}(f)$-is elementi. magram anasaxis ganmartebis ZaliT, arsebobs iseTi $x, y \in G$, rom $f(x) = x'$ da $f(y) = y'$. maSin

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = x'(y')^{-1},$$

rac niSnavs, rom $x'(y')^{-1} \in \mathrm{Im}(f)$, e. i. $\mathrm{Im}(f)$ aris G' jgufis qvejgufi.

lema. vTqvaT, G da G' jgufebi, $f:G \to G'$ ki maTi homomorfizmia. Tu $x, y \in G$ aris G jgufis nebismieri ori elementi, maSin $f(x) = f(y)$ maSin da mxolod maSin, rodesac $Kx = Ky$, sadac $K = Ker(f)$.

damtkiceba. Tu $f(x) = f(y)$, maSin gvaqvs:

$$f(xy^{-1}) = f(x) f(y^{-1}) = f(x) f(y)^{-1} = f(x) f(x)^{-1} = e'$$

amitom $xy^{-1} \in K = Ker(f)$ da, maSasadame, $Kx = Ky$ **winadadeba 15-**is ZaliT. piriqiT, Tu $Kx = Ky$, maSin arsebobs iseTi $k \in K$, rom $y = kx$ da amitom

$$f(y) = f(kx) = f(k) f(x) = e' f(x) = f(x).$$

homomorfizmis Teorema. vTqvaT, $f:G \to G'$ jgufTa homomorfizmia da $K = \ker(f)$. maSin asaxva

$$f^*: G/K \to \mathrm{Im}(f),$$

$$f^*(kx) = f(x)$$

aris izomorfizmi.

damtkiceba. Tu $kx = ky$, maSin $f(x) = f(y)$ wina lemis Tanaxmad da amitom f^* gansazRvrulia koreqtulad.

axla, Tu $f(x) = f(y)$, maSin $Kx = Ky$ isev wina lemis Tanaxmad, amitom f^* aris ineqciuri asaxva. misi gansazRvrebidan gamomdinare, f^* aris agreTve sureqciuli. e. i. f^* asaxva aris bi-eqciuri. amitom sakmarisia, vaCvenoT, rom f^* aris homomorfizmi. amisaTvis ganvixiloT G jgufis ori nebismieri x da y elementi. gveqneba:

$$f^*(KxKy) = f^*(K(xy)) = f(xy) = F(x) f(y) = f^*(Kx) f^*(Ky),$$

rac niSnavs, rom f^* aris homomorfizmi.

advili sanaxavia, rom kanonikuri CadgmiT inducirebuli asaxva $i: \mathrm{Im}(f) \to G'$ aris monomorfizmi.

Teorema. vTqvaT, $f:G\to G'$ aris jgufebis homomorfizmi. Tu $K=\ker(f)$, maSin diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \\ G/K \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Im} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd},$$

sadac $p:G\to G/K$ aris kanonikuri proqcia (ix. **magaliTi 53**), aris komutaciuri. sxva sityvebiT rom vTqvaT, $f=if^*p$.

damtkiceba. radgan nebismieri $x\in G$ elementisaTvis $p(x)=Kx,\ \ f^*(Kx)=f(x)$ da $i\big(f(x)\big)=f(x)$, amitom

$$(if^*p)(x)=(if^*)(p(x))=(if^*)(Kx)=i(f^*(Kx))=i(f(x))=f(x).$$

maSasadame, jgufebis nebismieri homomorfizmi SeiZleba warmodgenili iqnas rogorc sami homomorfizmis kompozicia, romelTagan pirveli epimorfizmia, meore _ izomorfizmi, xolo mesame ki monomorfizmi.

magaliTi 67. radgan $p:G\to G/K$ epimorfizmia (ix. **magaliTi53**), xolo $f^*:G/K\to\mathrm{Im}(f)$ ki izomorfizmi (da, kerZod, epimorfizmi), da radgan ori epimorfizmis kompozicia kvlav epimorfizmia, homomorfizmebis Teoremidan gamomdinareobs, rom f aris epimorfizmi maSin da mxolod maSin, rodesac $i:\mathrm{Im}(f)\to G'$ aris izomorfizmi, anu rodesac $\mathrm{Im}(f)=G'$.

magaliTi 68. ganvixiloT jgufebis homomorfizmi $f:G\to G'$. Tu f aris monomorfizmi, maSin $Ker(f)=\{e\}$ (radgan viciT, rom $f(e)=e'$). piriqiT, Tu $Ker(f)=\{e\}$, maSin lema 1-is ZaliT, Tu $f(x)=f(y)$, maSin $x=ex=ey=y$, anu f aris monomorfizmi.

Tu homomorfizmebis TeoremaSi f aris G jgufis igivuri endomorfizmi, maSin $Ker(f)=\{e\}$ da $\mathrm{Im}(f)=G$, amitom $G/\{e\}\approx G$.

magaliTi 69. vTqvaT, G cikluri jgufia, xolo x kimisi iseTi elementi, rom $G=\langle x\rangle$. ganvixiloT homomorfizmi

$$f:\mathbb{Z}\to G,\quad f(n)=x^n$$

(ix. **magaliTi 56**). cxadia, rom $\operatorname{Im}(f)=\{x^n : n\in\mathbb{Z}\}$. magram jgufi $\{x^n : n\in\mathbb{Z}\}$ aris zustad $\langle x\rangle$, amitom $im(f)=<x>=H$. ganvixiloT axla f-is birTvis. cxadia, rom

$$Ker(f)=\{n\in\mathbb{Z}:\ x^n=e\}.$$

amitom, Tu H usasruloa, maSin $Ker(f)=\{0\}$ (ix. **magaliTi 67**). amitom homomorfizmis Teoremis Tanaxmad, $\mathbb{Z}\approx\mathbb{Z}/\{0\}\approx G$. e. i. H da $\mathbb{Z}$ aris izomorfuli jgufebi.

Tu H sasrulia da misi rigia m, maSin $Ker(f)$ aris m-is yvela jeradebis qvejgufi $m\mathbb{Z}$, amitom $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\approx G$. miviReT, rom nebismieri cikluri jgufi izomorfulia Semdegi cikluri jgufi izomorfulia Semdegi cikluri jgufebidan erT-erTis:

$$\mathbb{Z},\mathbb{Z}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ldots,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ldots \qquad (*)$$

am jgufebidan arcerTi ori izomorfuli araa, radgan maTi rigebi gansxvavdeba. amitom (*) aris cikluri jgufebis sruli sia.

rgolebi

Cven aqamde ganvixilavdiT simravleebs maTze gansazRvruli erTi binaruli operaciiT. axla ganvixiloT simravleebi, romlebzedac erTdroulad gansazRvrulia ori binaruli operacia, romlebic erTmaneTTanaa SeTanxmebuli garkveuli azriT.

ganmarteba 13. **rgoli** aris simravle R da masze ganmartebuli Sekrebis `+~ da gamravlebis `·~ ori binaruli operacia ise, rom $(R,+)$ aris abeluri jgufi, $(R,\cdot)$ aris monoidi da sruldeba Semdegi **distribuciulobis** kanonebi:

1) $r(s+t)=rs+rt$,
2) $(r+s)t=st+st$, $\qquad r,s,t\in R$.

magaliTi 70. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ simravleebi Cveulebrivi Sekrebisa da gamravlebis binaruli operaciebis mimarT aris rgoli.

magaliTi 71. $n\times n$ zomis matricaTa simravle matricebis Sekrebisa da gamravlebis cnobili operaciebis mimarT aris rgoli.

magaliTi 72. orelementiani simravle $\{a,b\}$ masze ganmartebuli Sekrebisa da gamravlebis Semdegi operaciebis mimarT aris rgoli:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot$	a	b
b	a	a
b	a	b

ganmarteba 14. R rgolis ewodeba **komutaciuri**, Tu $(R,\cdot)$ aris komutaciuri monoidi.

magaliTi 73. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ komutaciuri rgolebia.

magaliTi 74. magaliTi 70-Si moyvanili yvela rgoli aris komutaciuri, magram magaliTi 71-Si moyvanili ki ara, radgan viciT, rom matricebis gamravleba araa komutaciuri.

magaliTi 75. ganvixiloT raime $(R,+)$ abeluri jgufi da masze ganvsazRvroT gamravlebis operacia Semdegnairad: $r\cdot s=0$ yvela $r,s\in R$ elementebisaTvis. advili Sesamowmebelia, rom es gansazRvravs komutaciuri rgolis struqturas R-ze.

R rgols ewodeba rgoli gayofiT, Tu $\left(R\setminus\{0\},\cdot\right)$ aris jgufi, anu Tu R rgolis nulisagan gansxvavebul yovel elements gaaCnia Sebrunebuli gamravlebis mimarT. Tu rgoli gayofiT komutaciuria, maSin mas **veli** ewodeba.

magaliTi 76. $\mathbb{Z}$ araa rgoli gayofiT, radgan magaliTad 2-s ar gaaCnia Sebrunebuli.

magaliTi 77. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ samive velia.

magaliTi 78. qvaternionebis algebra $\mathbb{H}$ aris rgoli gayofiT, magram araa veli.

winadadeba 25. vTqvaT, R rgolia. maSin

1) nebismieri $r \in R$ elementisaTvis sruldeba toloba $r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$;
2) $r \cdot (-1) = -r = (-1) \cdot r$.

damtkiceba. 1) gvaqvs: $r \cdot 0 = r \cdot (0+0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$.

Tu am tolobas orive mxares gamovaklebT $r \cdot 0$-s, miviRebT, rom $r \cdot 0 = 0$. analogiurad, $0 \cdot r = 0$.

3) radgan $r \cdot 0 = 0$, amitom gvaqvs

$$0 = r \cdot 0 = r\left(1+(-1)\right) = r \cdot 1 + r \cdot (-1) = r + r \cdot (-1).$$

am tolobis orive mxridan r-is gamoklebiT miviRebT, rom $r \cdot (-1) = -r$.

Sedegi 3. Tu R rgolia. maSin

$$(-r) \cdot s = -(rs) \quad \text{da} \quad (-r) \cdot (-s) = rs, \quad r, s \in R.$$

SevniSnoT, rom rgolis ganmartebidan ar gamomdinareobs, rom 0 da 1 gansxvavebuli elementebia. Tu $0 = 1$, maSin nebismieri $r \in R$ elementisaTvis, gveqneba:

$$r = r \cdot 1 = r \cdot 0 = 0,$$

amitom mocemul R rgols gaCnia erTaderTi elementi, saxeldobr 0. aseT rgols **trivialuri** an **nulovani** rgoli ewodeba.

winadadeba 26. vTqvaT, R rgolia. Semdegi ori winadadeba eqvivalenturia:

1) nebismieri $r, s, t \in R$ elementebisavis, Tu $r \neq 0$ da $rs = rt$, maSin $s = t$.
2) nebismieri $r, s \in R$ elementebisavis, Tu $rs = 0$, maSin $r = 0$ an $s = 0$.

damtkiceba. 1)-Si $t = 0$ mniSvnelobis CasmiT miiReba 2).

piriqiT, Tu $rs = rt$, maSin $r(s-t) = 0$ da amitom 2)-is ZaliT, $s - t = 0$, e. i. $s = t$.

ganmarteba 15. R rgolis nulisagan gansxvavebul r elements ewodeba **nulis gamyofi**, Tu arsebobs iseTi $s \in R$ elementi, rom $rs = 0$.

ganmarteba 16. rgols, romelic **winadadeba 26**-is erT-erT (da, maSasadame, orive) pirobas akmayofilebs, **are** ewodeba. komutaciur ares **mTelobis are** ewodeba.

magaliTi 79. $\mathbb{Z}$ aris mTelobis are (da saxelwodebac am magaliTidan modis).

magaliTi 80. nebismieri rgoli gayofiT aris are da nebismieri veli aris mTelobis are.

winadadeba 27. Tu raime R rgoli sasrulia (e. i. Tu mas aqvs sasruli raodenobis elementebi) da aris mTelobis are, maSin is aris veli.

damtkiceba. vTqvaT, R aris sasruli mTelobis are da $r \in R$ aris misi aranulovani raime elementi. ganvixiloT simravle $\{rs, s \in R\}$. Tu $2s_1 = 2s_2$ raime $s_1, s_2 \in S$ elementebisaTvis, maSin $s_1 = s_2$ **winadadeba 26**-is ZaliT. amitom yvela rs aris gansxvavebuli. es ki niSnavs, rom R-is nebismier elements aqvs aseTi saxe. kerZod, $1 = rs'$, $s' \in R$. es ki niSnavs, rom r aris Sebrunebuli da, maSasadame, R aris veli.

ganmarteba 17. vTqvaT, R rgolia. R simravlis aracariel $S \subseteq R$ simravles ewodeba R rgolis **qvergoli**, Tu S aris rgoli R-is binaruli operaciebis mimarT.

SevniSnoT, rom Tu $S \subseteq R$ aris R rgolis qvergoli, maSin $(S,+)$ aris $(R,+)$ abeluri jgufis qvejgufi, xolo $(S,\cdot)$ ki $(R,\cdot)$ monoidis qvemonoidi.

magaliTi 81. $\mathbb{Z}$ rgolis nebismieri qvergoli emTxveva $\mathbb{Z}$-s. marTlac, Tu $S \subseteq \mathbb{Z}$ aris raime qvergoli, maSin $1 \in S$ da radgan S TviTon aris rgoli, amitom $\overbrace{1+1+\cdots 1}^{n\text{-jer}} = n \cdot 1 \in S$ nebismieri mTeli $n \in \mathbb{Z}$ elementisaTvis. amitom $S = \mathbb{Z}$.

magaliTi 82. $\mathbb{Z}$ aris $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ da $\mathbb{C}$ rgolebis qvergoli, $\mathbb{Q}$ aris $\mathbb{R}$ da $\mathbb{C}$ rgolebis qvergoli, xolo $\mathbb{R}$ aris $\mathbb{C}$ rgolis qvergoli.

winadadeba 28. vTqvaT, R rgolia, xolo S ki misi sakuTrivi qvesimravle. S aris R rgolis qvergoli maSin da mxolod maSin, rodesac

1. S Caketilia R rgolis Sekrebisa da gamravlebis operaciebis mimarT, e. i. Tu $r,s \in S$, maSin $r+s, rs \in S$.
2. nebismieri $s \in S$ elementisaTvis, $-s \in S$.

ganmarteba 18. vTqvaT, R rgolia. R rgolis Sebrunebadi elementebis jgufi aris $(R,\cdot)$ monoidis Sebrunebadi elementebis jgufi. is R^* simboloTi aRiniSneba.

magaliTi 83. $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ da $\mathbb{Z}_n = \{[n] \in \mathbb{Z}_n$, u.s.g. $(m,n)=1\}$.

magaliTi 84. Tu R rgolia gayofiT, maSin $R^* = R \setminus \{0\}$.

idealebi

jgufebis SemTxvevis msgavsad, faqtor-rgoli rom ganvixiloT, gvWirdeba Semdegi

ganmarteba 19. vTqvaT, R rgolia. $I \subseteq R$ qvesimravles ewodeba R rgolis **marcxena ideali**, Tu I aris $(R,+)$ jgufis qvejgufi da nebismieri $r \in R$ da $x \in I$ elementebisaTvis, . analogiurad, $(R,+)$ jgufis raime qvejgufs ewodeba R rgolis marjvena ideali, Tu nebismieri $r \in R$ da $x \in I$ elementebisaTvis, $xr \in I$. $I \subseteq R$ qvesimravles ewodeba R rgolis **(ormxrivi) ideali**, Tu is erTdroulad marcxena idealicaa da marjvenac.

SevniSnoT, rom Tu R rgoli komutaciuria, maSin misi marcxena da marjvena da ormxrivi idealebi erTmaneTs emTxveva da amitom Cven maT movixseniebT ubralod rogorc idealebs.

magaliTi 85. Tu R nebismieri rgolia, maSin $\{0\} \subseteq R$ da $R \subseteq R$ orive aris R rgolis ormxirivi ideali. maT R rgols arasakuTrivi idealebi ewodeba, yvela sxva ideals ki sakuTrivi. rgols, romelsac mxolod arasakuTrivi idealebi aqvs, **martivi** ewodeba.

magaliTi 86. luwi ricxvebis simravle aris $\mathbb{Z}$ rgolis (ormxrivi) ideali.

magaliTi 87. radgan ori kenti ricxvis jami luwi ricxvia, amitom kenti ricxvebis simravle araa $\mathbb{Z}$ rgolis ideali.

ganmarteba 20. komutaciuri R rgolis I ideals ewodeba martivi, Tu nebismieri $r, s \in R$ elementebisaTvis, Tu $rs \in I$, maSin an $r \in I$, an $s \in I$.

magaliTi 88. Tu R rgolia da $r \in R$, maSin simravle $Rr = \{sr,\ s \in R\}$ aris R rgolis marcxena ideali. faqtiurad, Rr aris r elementis Semcveli minimaluri ideali. am ideals r **elementiT warmoqmnili mTavari marcxena ideali** ewodeba. analogiurad, $rR = \{rs,\ s \in R\}$ simravle aris R rgolis r **elementiT warmoqmnili marjvena mTavari ideali**.

SevniSnoT, rom rodesac R komutaciuria, maSin $Rr = rR$. am SemTxvevaSi, es ideali (r) simboloTi aRiniSneba.

magaliTi 89. $\mathbb{Z}$ rgolis nebismieri ideli aris mTavari, anu aqvs (n) saxe, sadac n raime mTeli ricxvi (radgan $\mathbb{Z}$ komutaciuria, amitom marcxena da marjvena idealebi erTmaneTs emTxveva).

winadadeba 29. nebismier rgols gayofiT aqvs mxolod arasakuTrivi idealebi.

damtkiceba. vTqvaT, R rgolia gayofiT da $I \subseteq R$ ki misi raime (vTqvaT) marcxena ideali. Tu $I \neq \{0\}$, maSin arseobos iseTi elementi $s \in I$, rom $s \neq 0$. radgan s aranulovania da radgan daSvebiT R aris rgoli gayofiT, amitom arsebobs s elementis Sebrunebulis $s^{-1} \in R$ elementi. maSin, radgan I aris marcxena ideali, amitom $s^{-1}s \in I$. magram $s^{-1}s = 1$, e. i. $1 \in I$. maSin isev I-is marcxena idealobidan miiReba, rom nebismieri $r \in R$

elementisaTvis $r=r\cdot 1\in I$, rac niSnavs, rom $I=R$. damtkiceba analogiuria marjvena I idealis SemTxvevaSic.

magaliTi 90. $\mathbb{Z}$ rgolSi

1) ideali $(7)=\{7n:n\in\mathbb{Z}\}$ aris martivi imitom, rom Tu $mn\in(7)$, maSin $mn=7k$, $k\in\mathbb{Z}$, da radgan 7 martivi ricxvia, amitom an m iyofa 7-ze (e. i. an $m\in(7)$), an n iyofa 7-ze (e. i. $n\in(7)$).
2) $\mathbb{Z}$ rgolis ideali $(14)=\{14n:n\in\mathbb{Z}\}$ araa martivi, radgan, magaliTad, $28=4\cdot 7\in(14)$, magram arc $4\in(14)$ da arc $7\in(14)$.

am magaliTis 1) nawilSi moyvanili msjelobis analogiuri msjelobiT mtkicdeba Semdegi

winadadeba 30. $\mathbb{Z}$ rgolis (n) ideali martivia maSin da mxolod maSin, rodesac n martivi ricxvia.

ganmarteba21. R rgolis I ideals ewodeba maqsimaluri, Tu ar arsebobs R rgolis iseTi sakuTrivi ideali, romelic Seicavs I-s da ar emTxveva mas.

magaliTi91. Cven viciT, rom $\mathbb{Z}$ rgolis nebismieri ideali aris (n) saxis. radgan $(n)\le(m)$ maSin da mxolod maSin, rodesac m yofs n-s, amitom (n) aris maqsimaluri ideali maSin da mxolod maSin, rodesac $n\neq 1$ da n-s ara aqvs sakuTrivi gamyofebi, e. i. rodesac n aris martivi.

maxasiaTebeli

ganmarteba22. R rgolis maxasiaTebeli $char(R)$ aris is umciresi naturaluri ricxvi, romlisTvisac sruldeba toloba

$$n\cdot 1=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{-jer}}=0.$$

Tu aseTi naturaluri ricxvi ar arsebobs, maSin vambobT, rom $char(R)=0$.

magaliTi 92. $char(\mathbb{Z})=char(\mathbb{Q})=char(\mathbb{R})=char(\mathbb{C})=0$.

magaliTi 93. $char(\mathbb{Z}_n)=n$.

winadadeba 31. Tu R mTelobis area, maSin $char(R)=0$ an $char(R)$ martivia.

damtkiceba. davuSvaT, rom $char(R)=n\neq 0$. Tu n Sedgenilia, maSin $n=kl$, sadac $1<k<n$ da $1<l<n$. maSin maxasiaTeblis gansazRvris Tanaxmad, $k\cdot 1\neq 0$ da $l\cdot 1\neq 0$. magram maSin $(k\cdot 1)\cdot(l\cdot 1)=(k\cdot l)\cdot 1=n\cdot 1=0$, rac niSnavs, rom R rgols gaaCnia nulis gamyofebi, rac pirobas ewinaaRmdegeba. maSasadame, n unda iyos martivi.

rgolTa homomorfizmi

ganmarteba 23. vTqvaT, R da R' ori rgolia. asaxvas $f:R\to R'$ ewodeba homomorfizmi R rgolidan R' rgolSi, Tu f erTdroulad aris $(R,+)$ da $(R',+)$ jgufebisa da $(R,\cdot)$ da $(R',\cdot)$ monoidebis homomorfizmi. ufro konkretulad es niSnavs, rom

$$\begin{aligned} f(r+s)&=f(r)+f(s)\\ f(rs)&=f(r)f(s)\end{aligned}\qquad \text{nebismieri } r,s\in R \text{ elementebisTvis.}$$

gansazRvrebidan gamomdinareobs, rom $f(1)=1$ da $f(0)=0$. garda amisa, $f(-r)=-r$ nebismieri $r\in R$ elementisaTvis.

$f:R\to R'$ homomorfizms ewodeba:

- *endomorfizmi*, Tu $R=R'$.
- *epimorfizmi*, Tu f asaxva sureqciulia.
- *monomorfizmi*, Tu f asaxva ineqciuria.
- *avtomorfizmi*, Tu $R=R'$ da f aris izmorfizmi.

or R da R' rgols ewodeba izomorfuli, Tu arsebobs raime izomorfizmi $f:R\to R'$.

ganmarteba 24. vTqvaT, $f:R\to R'$ rgolTa raime homomorfizmi. f-is birTvi, $\ker(f)$, ewodeba $f:(R,+)\to(R',+)$ jgufTa homomorfizmis birTvs, e. i.

$$\ker(f)=\{r\in R:\ f(r)=0\}.$$

winadadeba 32. Tu $f:R\to R'$ rgolTa homomorfizmia, maSin $\ker(f)$ aris R rgolis ormxrivi ideali.

damtkiceba. radgan $\ker(f)$ aris $f:(R,+)\to(R',+)$ jgufTa homomorfizmis birTvic, amitom $\ker(f)$ aris R rgolis adiciuri jgufis qvejgufi. Tu axla $r\in\ker(f)$, maSin nebismieri $s\in R$ elementisaTvis gveqneba:

$$f(sr)=f(s)f(r)=f(s)\cdot 0=0$$

da

$$f(rs)=f(r)f(s)=0\cdot f(s)=0,$$

rac niSnavs, rom $sr,rs\in\ker(f)$, e. i. $\ker(f)$ aris R rgolis ormxrivi ideali.

winadadeba 33. Tu $f:R\to R'$ rgolTa homomorfizmia, maSin f asaxvis anasaxi $\mathrm{Im}(f)$ aris R' rgolis qvergoli.

damtkiceba. Tu $r',s'\in\mathrm{Im}(f)$, maSin $f(r)=r'$ da $f(s)=s'$ raime $r,s\in R$ elementebisaTvis. maSin $f(r-s)=f(r)-f(s)=r'-s'$ da $f(rs)=f(r)f(s)=r's'$, amtiom $r'-s'\in\mathrm{Im}(f)$ da $r's'\in\mathrm{Im}(f)$, rac **winadadeba 28**-is ZaliT niSnavs, rom $\mathrm{Im}(f)$ aris R' rgolis qvergoli.

magaliTi 93. nebismieri R rgolisTvis, igivuri asaxva $1:R\to R$ aris rgolTa homomorfizmi.

magaliTi 94. vTqvaT, $n \in \mathbb{Z}$ da ganvixiloT asaxva $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \to nm$. Cven viciT (ix. **winadadeba 55**), rom es asaxva aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis endomorfizmi. magram, sazogadod, is araa rgolTa homomorfizmi. marTlac, $f_n(m_1m_2) = nm_1m_2$, xolo $f_n(m_1) = nm_1$ da $f_n(m_2) = nm_2$, amitom $f_n(m_1)f_n(m_2) = n^2m_1m_2$. maSasadame, $f_n(m_1m_2) = f_n(m_1)f_n(m_2)$ yvela $m_1m_2 \in \mathbb{Z}$ elementisaTvis maSin da mxolod maSin, rodesac $n^2 = n$, e. i. rodesac $n = 0$ an $n = 1$.

winadadeba 34. Tu R rgolia gayofiT, maSin nebismieri $f : R \to R'$ homomorfizmisaTvis, an f asaxvaa ineqciuri, an $R' = \{0\}$.

damtkiceba. radgan $\ker(f)$ aris R-is ormxrivi ideali **winadadeba 32**-is ZaliT, amitom is aris an $\{0\}$ an R (ix. **winadadeba 29**). pirvel SemTxvevaSi f aris ineqciuri asaxva (ix. magaliTi 68), xolo meore SemTxvevaSi, radgan $0 = f(1) = 1$, amitom $R' = \{0\}$.

vTqvaT, R rgolia, xolo $I \subseteq R$ misi raime ormxrivi ideali. maSin, kerZod, I aris $(R,+)$ jgufis normaluri qvejgufi (ratom?) da amitom SegviZlia ganvixiloT R/I faqtor-jgufi. viciT, rom am faqtor-jgufSi Sekreba ganimarteba Semdegnairad:

$$(r+I)+(s+I)=(r+s)+I.$$

ganvsazRvroT axla R/I simravleze gamravlebis operacia ase:

$$(r+I)(s+I)=rs+I.$$

winadadeba 35. Sekrebisa da gamravlebis zemoT moyvanili operaciebi R/I simravleze gansazRvravs rgolis struqturas. garda amisa, asaxva $p : R \to R/I$, $r \to r+I$ aris rgolTa homomorfizmi, romlis birTvia I.

damtkiceba. sakmarisia vaCvenoT, rom gamravlebis operacia gansazRvrulia koreqtulad, e. i. rom gamravlebis operacia araa damoukidebeli eqvivalentobis klsasebidan warmomadgenlebis arCevaze. amitom davuSvaT, rom

$$r+I=r'+I \quad \text{da} \quad s+I=s'+I.$$

maSin $r'=r+x$ da $s'=s+y$, sadac $x,y\in I$. amitom gveqneba:

$$r's'=(r+x)(s+y)=rs+z,$$

sadac $z=xs+ry+xy$. radgan I ormxrivi idealia, amitom $z\in I$ da, maSasadame,

$$rs+I=r's'+I.$$

SevniSnoT, rom Tu R komutaciuria, maSin R/I agreTve komutaciuria. R/I rgols ewodeba R rgolis **faqtor-rgoli** I idealiT.

winadadeba 36. vTqvaT, $f:R\to R'$ rgolTa homomorfizmia.

1) Tu $I\subset R$ aris R rgolis marcxena (marjvena, ormxrivi) ideali da f aris sureqciuli asaxva, maSin $f(I)\subset R'$ aris R' rgolis marcxena (marjvena, ormxrivi) ideali.
2) Tu $I'\subset R'$ aris R' rgolis marcxena (marjvena, ormxrivi) ideali, maSin $f^{-1}(I')$ aris R' rgolis marcxena (marjvena, ormxrivi) ideali.
3) Tu $S\subset R$ aris R rgolis marcxena qvergoli, maSin $f(S)$ aris R' rgolis qvergoli. kerZod, f asaxvis anasaxi aris R' rgolis qvergoli.
4) Tu $S'\subset R'$ aris R' rgolis qvergoli, maSin $f^{-1}(R')$ aris R rgolis qvergoli.
5) Tu $g:R'\to R''$ rgolTa homomorfizmia, maSin $gf:R\to R''$ aseve rgolTa homomorfizmia.

winadadeba 37. vTqvaT, $f:R\to R'$ rgolTa homomorfizmia da $I=\ker(f)$. maSin asaxva $f^{*}:R/I\to R'$, $r+I\to f(r)$ aris rgolTa homomorfizmi, romelic aris izomorfizmi maSin da mxolod maSin, rodesac f aris sureqciuli asaxva.

damtkiceba. sakmarisia aRvniSnoT, rom f^* homomorfizmis birTvia 0 da amitom f^* aris ineqciuri asaxva.

magaliTi 95. asaxva $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$, $m\to m(\operatorname{mod} n)$ aris rgolTa sureqciuli asaxva, romlis birTvia (n). amitom $\mathbb{Z}_n\approx\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

rgolTa lokalizacia

vTqvaT, F velia da R ki misi qvergoli. maSin R aris mTelobis are da advili Sesamowmebelia, rom F-is is umciresi qveveli, romelic moicavs R-s, aris simravle

$$Q(R)=\left\{ab^{-1}\in F,\ a,b\in R \text{ da } b\neq 0\right\}$$

cxadia, Tu $c\neq 0$, maSin $ab^{-1}=(ac)(bc)^{-1}$. amitom, Tu ab^{-1} namravls aRvniSnavT $\dfrac{a}{b}$ simboloTi, maSin

$$Q(R)=\left\{\frac{a}{b},\ a,b\in R \text{ da } b\neq 0\right\}.$$

garda amisa, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$, Tu $c\neq 0$. rogorc vxedavT, R rgolidan $Q(R)$ veli aigeba igivenairad, rogorc mTeli ricxvebis rgolebidan igeba racionalur ricxvTa veli. ganvixiloT axla Sebrunebuli amocana: vTqvaT, mocemulia mTelobis are R. SegviZlia vipovoT iseTi veli, romlis qvergolic iqneboda R? am kiTxvaze pasuxi dadebiTia.

ganvixiloT raime mTelobis are R. vTqvaT, (a,b) da (c,d) aris R elementebis iseTi wyvilebi, rom $b\neq 0$ da $d\neq 0$. vuwodoT am wyvilebs **eqvivalenturi** (da es ase CavweroT $(a,b)\sim(c,d)$), Tu $ad=bc$. R mTelobis aris elementebisgan Sedgenil wyvilebs Soris ganmartebuli es mimarTeba aris eqvivalentobis mimarTeba.

marTlac, refleqsuroba da simetriuloba advili saCvenebelia, amitom davuSvaT, rom $(a,b)\sim(c,d)$ da $(c,d)\sim(e,f)$. gansazRvrebiT maSin $ad = bc$ da $cf = de$. Tu pirvel tolobas gavamravlebT f-ze, meores ki b-ze, miviRebT:

$$adf = bcf \text{ da } bcf = bde$$

saidanac $adf = bde$. maSin $adf - bde = 0$ da amitom $d\left(af - be\right) = 0$. radgan R mTelobis area, mas nulebis gamyofebi ara aqvs da radgan $d \neq 0$ Cveni daSvebiT, amitom $af - be = 0$, e. i. $af = be$. rac niSnavs, rom $\left(a,b\right) \sim \left(e, f\right)$. maSasadame, `~~ aris eqvivalentobis mimarTeba.

$\left(a,b\right)$ wyvilis eqvivalentobis klasi aRvniSnoT $\frac{a}{b}$ simboloTi. axla ganvsazRvroT, Tu rogor SevkriboT da rogor gavamravloT es ekvivalentobis klasebi: Tu $\frac{a}{b}$ da $\frac{c}{d}$ ekvivalentobis nebismieri ori klasia, maTi jami ganvsazRvroT ase:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

xolo namravli ki ase:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

vaCvenoT, rom Sekrebis da gamravlebis es operaciebi koreqtuladaa gansazRvruli, e. i. rom am operaciebis gansazRvra araa damokidebuli $\frac{a}{b}$ da $\frac{c}{d}$ ekvivalentobis klasebidan maTi warmomadgenlebis amorCevaze. vTqvaT, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ da $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. unda vaCvenoT, rom maSin

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'},$$

magram es toloba sworia maSin da mxolod maSin, rodesac

$$b'd'\left(ad + bc\right) = bd\left(a'd' + b'c'\right)$$

anu

$$b'd'ad + b'd'bc = bda'd' + bdb'c'.$$

es toloba ki samarTliania, radgan

$$ab' = a'b \text{ da } cd' = dc'. \tag{1}$$

analogiurad, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}$ maSin da mxolod maSin, rodesac $\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$. es toloba ki sruldeba maSin da mxolod maSin, rodesac $acb'd'=bda'c'$ anu, rodesac $ab'cd'=a'bdc'$, es ki sruldeba (1)-is ZaliT.

axla advili Sesamowmebelia, rom Sekrebisa da gamravlebis zemoT gansazRvruli operaciebi $\frac{a}{b}$ eqvivalentobis klasebis simravleze, romelsac Cven $Q(R)$ simboloTi aRvniSnavT, gansazRvravs rgolis sturquras. am rgolis erTeulia $\frac{1}{1}$ klasi, xolo 0 ki _ $\frac{0}{1}$. sinamdvileSi $Q(R)$ aris veli. amis dasamtkiceblad, sakmarisia vaCvenoT, rom nebismieri aranulovan elements gaaCnia Sebrunebuli elementi. radgan nulovani elementia $\frac{0}{1}$, amitom Tu $\frac{a}{b}=\frac{0}{1}$, maSin $a=a\cdot1=b\cdot0=0$. amitom $\frac{a}{b}$ klasi aranulovania maSin da mxolod maSin, rodesac $a\neq0$ (da aseve $b\neq0$). maSin misi Sebrunebuli elementi iqneba $\frac{b}{a}$, radgan $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{ab}{ab}=\frac{1}{1}$ (radgan R rgoli komutaciuria, amitom $ab=ba$).

SevniSnoT, rom asaxva

$$q:R\to Q(R),\ a\to\frac{a}{1}$$

aris rgolTa ineqciuri homomorfizmi.

$Q(R)$ vels ewodeba R mTelobis aris **wiladTa veli**. rodesac $R=\mathbb{Z}$, maSin $Q(R)=\mathbb{Q}$.

winadadeba 38. vTqvaT, R mTelobis area, K raime veli, xolo $f:R\to K$ ki ineqciuri homomorfizmi. maSin arsebobs erTaderTi rgolTa homomorfizmi $f^*:Q(R)\to K$, romlisTvisac Semdegi diagrama aris komutaciuri (anu $f=f^*p$):

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K \\ & Q(R) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

damtkiceba. pirdapiri Semowmeba aCvenebs, rom $f^*\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{f(a)}{f(b)}$ formuliT gansazRvruli asaxva akmayofilebs winadadebis pirobas.

sasruli rgolebi da velebi

rgols ewodeba sasruli, Tu misi elementebis raodenoba sasrulia. sasruli rgolebis SemTxvevaSi, maTi gamravlebisa da Sekrebis operaciebi cxrilis saSualebiT moicema. magaliTad, $\{0,1\}$ simravleze Semdegi operaciebi

$+$	0	1		$\cdot$	0	1
0	0	1		0	0	0
1	1	0		1	0	1

gansazRvravs rgolis struqturas. SevniSnoT, rom rgolis es struqtura aris ubralod $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ rgoli.

rogorc viciT, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ aris rgoli nebismieri $n\in\mathbb{Z}$ ricxvisaTvis, romelsac gaaCnia sasruli raodenobis elementebi. magram yvela sasruli rgoli aseTi saxis araa.

magaliTi 96. ganvixiloT simravle $\{0,1,a,b\}$ da ganvsazRvroT maTze Sekrebisa da gamravlebis operaciebi Semdegnairad:

$+$	0	1	a	b		$\cdot$	0	1	a	b
0	0	1	a	b		0	0	0	0	0
1	1	0	b	a		1	0	1	a	b
a	a	b	0	1		a	0	a	a	0
b	b	a	1	0		b	0	b	0	b

advili Sesamowmebelia, rom $\{0,1,a,b\}$ simravle masze gansazRvruli aseTi operaciebiT aris rgoli da rom is araa $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ rgolis izomorfuli (ratom?).

vTqvaT, R aris rgoli. ganvixiloT asaxva

$$f:\mathbb{Z}\to R,\quad f(n)=n\cdot 1=\begin{cases}\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{-jer}}, & \text{Tu } n>0\\ 0, & \text{Tu } n=0\\ -\left(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{-jer}}\right), & \text{Tu } n<0\end{cases}.$$

rogorc viciT, f aris $(\mathbb{Z},+)$ jgufis homomorfizmi $(R,+)$ jgufSi. vaCvenoT, rom faqtobrivad f aris rgolTa homomorfizmi. marTlac, nebismieri $n,m\in\mathbb{Z}$ dadebiTi ricxvebisaTvis

$$f(nm)=(nm)\cdot 1=n(m\cdot 1)=(n\cdot 1)\cdot(m\cdot 1)=f(n)f(m).$$

radgan $f(-k)=-f(k)$, wina toloba samarTliania im SemTxvevaSic, rodesac an n, an m aris uaryofiTi. amitom f aris rgolTa homomorfizmi.

ganvixiloT axla nebismieri rgolTa homomorfizmi $f:\mathbb{Z}\to R$. rgolTa homomorfizmis ganmartebis ZaliT, $f(1)=1$ da amitom nebismieri $n>0$ mTeli ricxvisTvis gvaqvs:

$$f(n)=f\left(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{-jer}}\right)=\overbrace{f(1)+\cdots+f(1)}^{n\text{-jer}}=n\cdot f(1)=n\cdot 1.$$

amitom, roca $n\le 0$, maSin

$$f(m)=f(-(-m))=-f(-m)=-((-m)\cdot 1)=(-(-m))\cdot 1=m\cdot 1.$$

amrigad, arsebobs erTaderTi rgolTa homomorfizmi $f:\mathbb{Z}\to R$ da is moicema formuliT: $f(n)=n\cdot 1$.

davuSvaT axla, rom $R\neq\{0\}$ (e. i. R aratrivialuri rgolia). maSin $f:\mathbb{Z}\to R$ homomorfizmis birTvi ver iqneba mTeli $\mathbb{Z}$ (winaaRmdeg SemTxvevaSi, $1=f(1)=0$ da maSin $R=\{0\}$) da, amitom aris $n\mathbb{Z}$ saxis ideali, sadac n raime naturaluri ricxvia. amitom homomorfizmis Teoremis Tanaxmad, asaxva

$$[m]\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to m\cdot 1\in R$$

aris ineqciuri homomorfizmi. amitom $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ SegviZlia gavaigivoT R rgolis qvergolidan.

winadadeba 39. zemoT aRweril situaciaSi, $char(R)=n$.

damtkiceba. Tu $n=0$, maSin dasamtkicebeli araferia (radgan ar arsebobs iseTi naturaluri ricxvi m, rom $m\cdot 1=0$). Tu $n\neq 0$ da arsebobs iseTi naturaluri k ricxvi, rom $k\cdot 1=0$, maSin $k\in n\mathbb{Z}$, anu $k=nm$, $m\in \mathbb{Z}$. amitom $k\geq n$, rac niSnavs, rom n aris is umciresi naturaluri ricxvi, rodesac sruldeba toloba $n\cdot 1=0$, anu sxva sityvebiT rom vTqvaT $char(R)=n$.

Tu $n\mathbb{Z}$ aris $\mathbb{Z}$ rgolis martivi ideali, maSin $n=0$ an n aris martivi ricxvi. rogorc viciT, pirvel SemTxvevaSi, $char(R)=0$ da amitom f aris ineqciuri asaxva, anu R rgoli Seicavs $\mathbb{Z}$ rgolis izomorful qvergols. meore SemTxvevaSi, n aris martivi da R rgoli Seicavs $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vels izomorful qvevels.

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ veli aRiniSneba F_p simboloTi da mis **martiv vels** uwodeben.

winadadeba 40. sasrul rgols maxasiaTebeli aris am rgolis elementebis raodenobas gamyofi.

damtkiceba. vTqvaT, $n=char(R)$ da R rgolis elementebis raodenobaa m. maSin m aris $(R,+)$ adiciuri jgufis rigi da lagranJis Teoremis Tanaxmad, $mr=0$ nebismieri $r\in R$ elementisaTvis. axla, Tu $m=qn+k$, sadac $0\leq k<n$, maSin

$$kr=(m-qn)r=mr-q(nr)=0-0=0.$$

magram, radgan $k<n$ da $char(R)=n$, amitom $k=0$. e. i. n aris m-is gamyofi.

winadadeba 31-is ZaliT, rodesac R aris mTelobis are, misi maxasiaTebeli an 0-ia, an martivi ricxvi. pirvel SemTxvevaSi $\mathbb{Z}$ rgoli Caidgmeba R rgolSi da amitom winadadeba 38-is ZaliT, es Cadgma gagrZeldeba $\mathbb{Q}$ velis R mTelobis areSi Cadgmamde. anu R iqneba $\mathbb{Q}$-algebra (gavixsenoT, rom Tu K raime komutaciuri rgolia, maSin K-algebra ewodeba (A,i) wyvils, sadac A aris raime komutaciuri rgoli, xolo i ki homoorfizmi K rgolidan A rgolSi).

winadadeba 41. Tu F sasruli velia, maSin F simravlis elementebis raodenoba $|F| = p^n$, sadac p martivi ricxvia, n ki naturaluri ricxvi.

damtkiceba. Tu $char(F) = 0$, maSin zemoT moyvanili SeniSnvnis ZaliT, F Seicavs $\mathbb{Q}$ vels, rac SeuZlebelia. amitom arsebobs iseTi martivi p ricxvi, rom $char(F) = p$. maSin F aris F_p-algebra da amitom igi SeiZleba ganxiluli iqnas rogorc sasrulganzomilebiani veqtoruli sivrce F_p-velze. Tu es ganzomileba aris n, maSin cxadia, rom $|F| = p^n$.

winadadeba 42. Tu F sasruli velia da $char(F) = p$, maSin asaxva $a \to a^p$ aris F velis avtomorfizmi (e. i. bieqciuri homomorfizmi F velidan Tavis TavSi).

damtkiceba. ganvixiloT asaxva

$$f : F \to F, \quad f(a) = a^p.$$

maSin cxadia, $f(1) = 1^p = 1$. xolo Tu $a, b \in F$ nebismieri elementebia, maSin gveqneba

$$f(ab) = (ab)^p = a^p b^p = f(a) f(b)$$

axla ganvixiloT $f(a+b)$, gveqneba:

$$f(a+b) = (a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} c_p^k a^k b^{p-k} .$$

radgan $k \neq 0, p$ mniSvnelobebisaTvis TiToeuli c_p^k koeficienti iyofa p-ze, amitom isini yvela aris 0. amitom $f(a+b) = c_p^0 a^0 b^p + c_p^p a^p b^0 = b^p + a^p = f(a) + f(b)$. amitom f aris F velis endomorfizmi. ganvixiloT axla misi birTvi:

$$\ker(f) = \{a \in F : \ a^p = 0\} = \{0\}.$$

amitom f aris ineqciuri endomorfizmi da, radgan F velis elementebis raodenoba sasrulia, f unda iyos agreTve sureqciuli. amitom f aris bieqciuri da, maSasadame, f aris F velis avtomorfizmi.

winadadeba 43. nebismieri martivi p da naturaluri n ricxvebisaTvis arsebobs sasruli veli F_{p^n}, romelic zustad p^n elements Seicavs. nebismieri ori aseTi veli izomorfulia.

winadadeba 44. nebismieri veli Seicavs umcires qvevels.

damtkiceba. cxadia, rom mocemuli velis qvevelebs nebismieri TanakveTa isev qvevelia. kerZod, yvela qvevelis TanakveTa aris veli, romelic aris nebismieri sxva qvevelis qveveli.

ganmarteba 25.velis umcires qvevels, am velis **martiv** qvevels uwodeben.

winadadeba 45. Tu F sasruli velia da $char(F) = p$, maSin F-is martivi qveveli izomorfulia F_p velis. garda amisa, es izomorfizmi erTaderTia.

damtkiceba. cxadia, rom $f : \mathbb{Z} \to F$, $n \to n \cdot 1$ homomorfizmis anasaxi $\mathrm{Im}(f)$ aris F_p velis izomorfuli. axla, F velis nebismieri qveveli Seicavs 1-s da amitom $n \cdot 1$-sac, $n \in \mathbb{Z}$, anu $\mathrm{Im}(f)$ qvevelia F velis nebismier qveveli, da amitom unda iyos martivi.

Sedegi 4. Tu p martivi ricvia, maSin F_p izomorfizmamde sizustiT erTaderTi sasruli velia, romelic Seicavs p elements.

analogiuri msjelobiT miiReba Semdegi

winadadeba 46. Tu $char(F)=0$, maSin F velis martivi qvevelia $\mathbb{Q}$.

Tu F velia da $E \subseteq F$ misi qvevelia, maSin F SeiZleba ganxilul iqnas rogorc veqtoruli sivrce E velze.

winadadeba 47. Tu F sasruli velia, xolo E ki misi qveveli, maSin E-s aqvs q^n elementi, sadac $q=|E|$ da $n=\dim[F:E]$.

damtkiceba. radgan F aris veqtoruli sivrce E-ze da radgan F aris sasruli, F aris sasrulganzomilebiani E-veqtoruli sivrce. Tu $n=\dim[F:E]$, maSin F-s aqvs n elementisagan Semdgari bazisi. vTqvaT, es bazisia $a_1,\ldots,a_n$. maSin F-is nebismieri elementi erTaderTi formiT warmodgenilia rogoc jami $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i$, sadac $x_i \in E$. radgan TiToeuli x_i-s SeuZlia miiRos zustad q gansxvavebuli mniSvneloba, amitom F-s aqvs zustad q^n cali elementi.

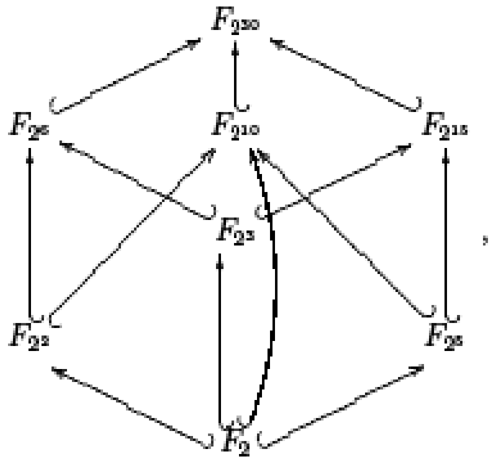
winadadeba 48. vTqvaT, F sasruli velia. maSin mas aqvs p^n cali elementi, sadac $p=char(F)$, xolo n ki aris F-is ganzomileba mis martiv qvevelze.

damtkiceba. radgan $char(F)=p$ martivia, amitom F-is martivi qveveli izomorfulia F_p velis. radgan $|F_p|=p$, amitom Sedegi gamomdinareobs wina winadadebidan.

winadadeba 49. vTqvaT, F sasruli velia da $|F|=p^k$. maSin mis nebismier qvevels aqvs p^m elementi, sadac m aris n-is gamyofi. piriqiT, n-is nebismieri m gamyofisaTvis arsebobs F-is erTaderTi qveveli, romelsac aqvs zustad p^m elementi.

winadadeba 50. nebismieri velis aranulovanis elementebis simravle aris cikluri jgufi gamravlebis mimarT.

magaliTi 97. $F_{2^{30}}$ velis yvela qvevelis sapovnelad saWiroa 30-is yvela gamyofis povna. radgan es gamyofebia 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, amitom $F_{2^{30}}$ velis qvevelebs Soris damokidebuleba gamosaxulia Semdeg diagramaze:



sadac $\hookrightarrow$ aRniSnavs qvevelis CarTvas.

bulis algebrebi

vTqvaT, A raime simravlea. **nawilobrivi dalagebis mimarTeba** A simravleze aris binaruli mimarTeba `$\leq$~ A-ze, romelic aris

1) refleqsuri, e. i., $a \leq a$ nebismieri $a \in A$ elementisaTvis;

2) antisimetriuli, e. i., Tu $a \leq b$ da $b \leq a$, maSin $a = b$;

3) tranzituli, e. i., Tu $a \leq b$ da $a \leq c$, maSin $a \leq c$.

vTqvaT, $(A, \leq)$ nawilobriv dalagebuli simravlea (e. i. A aris raime simravle, xolo $\leq$ ki masze gansazRvruli raime nawilobrivi dalagebis mimarTeba). amboben, rom $a \in A$ elementi aris $S \subseteq A$ qvesimravlis **zeda sazRvari** (da amas ase weren $a = \vee S$), Tu

1. $s \leq a$ nebismieri $s \in S$ elementisaTvis;

2. Tu $s \leq b$ yvela $s \in S$ elementisaTvis, maSin $a \leq b$.

antisimetriulobis gamo S simravlis umciresi zeda sazRvari, rodesac is arsebobs, erTaderTia. rodesac S aris orelementiani simravle $\{s,t\}$, maSin $\vee\{s,t\}$ aRniSvnis navclad $s \vee t$ aRniSvna gamoiyeneba. rodesac $S \neq \varnothing$, maSin $\vee S$ aRiniSneba 0 simboloTi. cxadia, rom 0 aris A simravlis umciresi elementi (ratom?).

ganvixiloT nawilobriv dalagebuli simravle $(A,\leq)$ iseTi, rom mis nebismier sasrul qvesimravles gaaCnia zusti zeda sazRvari. advili sanaxavia, rom maSin binaruli operacia $\vee$ da elementi 0 akmayofilebs Semdeg pirobebs:

(i) $a \vee a = a$;

(ii) $a \vee b = b \vee a$;

(iii) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

(iv) $a \vee 0 = a$,

sadac a, b, c aris A simravlis nebismieri elementebi. amitom $(A,\vee,0)$ aris komutaciuri monoidi, romlis nebismieri elementi aris *idempotenti* (Tu $(A,*)$ naxevarjgufia, maSin $a \in A$ elementi aris idempotenti, Tu $a * a = a$).

piriqiT, gvaqvs Semdegi

winadadeba 51. vTqvaT, $(A,\vee,0)$ iseTi komutaciuri monoidia, romlis yvela elementi aris idempotenti. maSin A simravleze arsebobs erTaderTi nawilobriv dalagebis mimarTeba iseTi, rom $a \vee b$ aris $\{a,b\}$ simravlis zusti zeda sazRvari, xolo 0 ki carieli simravlis zusti zeda sazRvari (anu A-s umciresi elementi).

damtkiceba. davuSvaT, $\leq$ aris nawilobrivi dalagebis mimarTeba A-ze, romelic akayofilebs winadadebis pirobebs. maSin cxadia, rom nebismieri $a \in A$ elementebisaTvis, $a \leq b$ maSin da mxolod maSin, rodesac $a \vee b = b$. piriqiT, Tu $a \vee b = b$ pirobiT ganvsazRvreT $a \leq b$ mimarTebas, maSin $\leq$ aris refleqsuri (i) pirobis ZaliT, xolo misi antisimetriuloba gamomdinareobs ganmartebidan: Tu $a \le b$ (e. i. Tu $a \vee b = b$) da $b \le a$ (e. i. Tu $b \vee a = a$), maSin $b = a \vee b = b \vee a = a$. tranzitulobis saCveneblad davuSvaT, rom $a \le b$ da $b \le c$ (e. i. rom $a \vee b = b$ da $b \vee c = c$). maSin gvaqvs:

$$
\begin{aligned}
a \vee c &= a \vee (b \vee c), && \text{radgan } b \vee c = c \\
&= (a \vee b) \vee c && \text{(iii) pirobis ZaliT} \\
&= b \vee c && \text{radgan } a \vee b = b \\
&= c && \text{radgan } b \vee c = c.
\end{aligned}
$$

amitom $a \le c$.

axla piriqiT, vTqvaT $a, b \in A$ aris A simravlis nebismieri ori elmenti. maSin $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ (radgan $a \vee a = a$ (i) pirobiT), amitom $a \le a \vee b$. analogiurad miviRebT, rom $b \le a \vee b$. Tu $a \le c$ da $b \le c$, maSin

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), && \text{radgan } b \le c \ (\text{e. i. } b \vee c = c) \\
= a \vee c && \\
= c && \text{radgan } a \le c \ (\text{e. i. } a \vee c = c).
\end{aligned}
$$

amitom $a \vee b \le c$. e. i. $a \vee b$ aris $\{a, b\}$ simravlis zusti zeda sazRvari, da bolos, (iv) tolobis ZaliT, 0 aris $(A, \le)$ nawilobriv dalagebuli simravlis umciresi elementi.

wina winadadebaSi gansazRvrul struqturas ewodeba **naxevarmeseri**.

oradulad, zusti zeda sazRvris ganmartebaSi monawile utolobebis SebrunebiT miiReba **zusti qveda sazRvris** cneba. $\vee S$, $a \vee b$ da 0 aRniSvnebis Sesabamisi aRniSvnebi axla iqneba $\wedge S$, $a \wedge b$ da 1.

meseri ewodeba nawilobriv dalagebul simravles, romlis nebismier sasrul qvesimravles gaaCnia zusti zeda da qveda sazRvrebi.

winadadeba 51 da misi oradulidan gamomdinareobs, rom meseri aris simravle masze gansazRvruli ori komutaciuri monoidis struqturiT ise, rom

- am simravlis nebismieri elementi aris idempotenturi orive binaruli operaciis mimarT, da

- am simravleze inducirebuli ori nawilobrivi dalagebis mimarTeba erTmaneTis oradulia.

winadadeba 52. vTqvaT, $(A,\vee,0)$ da $(A,\wedge,1)$ naxevarmeserebi. maSin $(A,\vee,0,\wedge,1)$ aris meseri maSin da mxolod maSin, rodesac nebismieri $a,b\in A$ elementebisaTvis sruldeba Semdegi ori toloba:

$(*)$ $a\wedge(a\vee b)=a$;

$(**)$ $a\vee(a\wedge b)=a$.

damtkiceba. Tu es ori toloba sruldeba, maSin $a\vee b=b$ tolobidan gamomdinareobs, rom $a\wedge b=a\wedge(a\vee b)=a$ da piriqiT. amitom A simravleze inducirebuli orive nawilobrivi dalagebis mimarTeba aris oraduli.

im meserebSi, romlebic praqtikaSi xSirad gvxvdeba, sruldeba Semdegi e. w. **distribuciulobis** kanoni:

(1) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),\ \ a,b,c\in A.$

winadadeba 53. Tu meserSi sruldeba distribuciulobis kanoni, maSin sruldeba agreTve misi oraduli kanoni:

(2) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),\ \ a,b,c\in A$

damtkiceba. gvaqvs:

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c)&=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)=\\&=a\vee((a\vee b)\wedge c)=\\&=a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))=\\&=(a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c)=\\&=a\vee(b\wedge c).\end{aligned}$$

aq pirvel tolobaSi gamoviyeneT (1), meoreSi _ $(*)$, mesameSi isev (1), meoTxeSi $\vee$-is asociuroba, xolo mexuTeSi ki $(**)$.

winadadeba 54. vTqvaT, A aris distribuciuli meseri da $a,b,c\in A$. maSin arsebobs erTaderTi iseTi elementi $x\in A$, rom

$$x \wedge a = b \text{ da } x \vee a = c.$$

damtkiceba. Tu x da y iseTi elementebia, romlebic orive akmayofilebs am pirobebs, maSin
$$x = x \wedge (x \vee a) = x \wedge c = x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) = (x \wedge y) \vee b = x \wedge y,$$
radgan $b = x \wedge y = y \wedge a$ aris $\{x, y\}$ simravlis zusti qveda zRvari. analogiurad, $y = x \wedge y$ da amitom $x = y$.

ganmarteba 26. vTqvaT, A meseria. $x \in A$ elements ewodeba $a \in A$ elements **damateba**, Tu $x \wedge a = 0$ da $x \vee a = 1$.

wina winadadebis Zalit, elementis damateba erTaderTia, roca is arsebobs. a elementis damateba $\bar{a}$ simboloTi aRiniSneba.

ganmarteba 27. distribuciul mesers ewodeba **bulis algebra**, Tu mis nebismier elements gaaCnia damateba.

magaliTi 98. $\{0,1\}$ simravle aris bulis algebra.

magaliTi 99. Tu X raime simravlea, maSin $\wp(\ )$ aris meseri, sadac $\leq$ mimarTeba qvesimravleebis CarTviTaa gansazRvruli; e. i. Tu , $(\wp)$, maSin $A \leq B$ maSin da mxolod maSin, rodesac A aris B-s qvesimravle. maSin $\vee$ Seesabameba ori simravlis gaerTianebas, xolo $\wedge$ ki maT TanakveTas. 0 Seesabameba $\varnothing$ simravles, da 1 Seesabameba X simravles. cnobilia, rom $\wp(\ )$ aris distribuciuli meseri. ufro metic, $\wp(\ )$ aris bulis algebra: Tu $\wp$), e. i. Tu A aris X simravlis qvesimravle, maSin misi damateba $\bar{X}$ aris $X \setminus A$ sxvaoba.

magaliTi 100. vTqvaT, L aris klasikur gamonaTqvamTa logikis yvela gamonaTqvamTa klasi. SemoviRoT am klasze mimarTeba `$\equiv$~ Semdegnairad: $p \equiv q$ maSin da mxolod maSin, rodesac $p \to q$ da $q \to p$ (sadac $\to$ aRniSnavs implikaciis logikur operacias). advili sanaxavia, rom `$\equiv$~ aris ekvivalentobis mimarTeba L-ze. ekvivalentobis klasebis erToblioba aRvniSnoT $\bar{L}$-iT. axla $\bar{L}$-ze ganvsazRvroT $\vee$, $\wedge$ da $^{-}$ operaciebi Semdegnairad:

$$[p]\vee[q]=[p\vee q],$$
$$[p]\wedge[q]=[p\wedge q],$$
$$\overline{[p]}=[\overline{p}].$$

amis Semdeg, $[p\vee\overline{p}]$ aRvniSnoT 1-iT da $[p\wedge\overline{p}]$ ki 0-iT (aq p aris nebismieri gamonaTqvami). radgan nebismieri sxva q gamonaTqvamebs, $(p\vee\overline{p})\equiv(q\vee\overline{q})$ da $(p\wedge\overline{p})\equiv(q\wedge\overline{q})$, amitom 1 da 0 ganzogadebulia koreqtulad. pirdapiri Semowmeba gviCvenebs, rom $\left(\overline{L},\vee,\wedge,\overline{},0,1\right)$ aris bulis algebra.

magaliTi 101. ganvixiloT elementaruli xdomilobaTa raime sivrce Ω da ganvsazRvroT masze $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ operaciebi Semdegnairad:

- Tu $A,B\in\Omega$ (e. i. Tu A da B aris ori nebismieri xdomiloba Ω sivrcidan), maSin A ∨ aris xdomileba, romelic Sesdgeba im elementaruli xdomilobebidan, romlebic an A-s ekuTvnis, an B-s.
- Tu $A,B\in\Omega$, maSin $A\wedge B$ aris xdomiloba, romelic Sedgeba im elementaruli xdomilobebisgan, romlebic erTdroulad ekuTvnis A-sac da B-sac.
- Tu $A\in\Omega$, maSin $\overline{A}$ aris misi sawinaaRmdego xdomiloba.
- 1 aris aucilebeli xdomiloba (e. i. Ω).
- 0 aris SeuZlebeli xdomiloba $\varnothing$.

maSin $\left(\Omega,\vee,\wedge,\overline{},1,0\right)$ aris bulis algebra.

radgan elementis damateba erTaderTia, amitom gvaqvs Semdegi

winadadeba 55. Tu A bulis algebraa da $a\in A$, maSin $\overline{(\overline{a})}=a$.

winadadeba 56. Tu A bulis algebraa da $a,b\in A$, maSin
∧ = ∨ da ∨ = ∧.

damtkiceba. gvaqvs:

$$\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)\vee\left(a\wedge b\right)=\left(\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)\vee a\right)\wedge\left(\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)\vee b\right)=$$
$$=\left(\left(\bar{a}\vee a\right)\vee\bar{b}\right)\wedge\left(\bar{a}\vee\left(\bar{b}\vee b\right)\right)=$$
$$=\left(1\vee\bar{b}\right)\wedge\left(\bar{a}\vee 1\right)=1\wedge 1=1.$$

meores mxriv gvaqvs:

$$\left(a\wedge b\right)\wedge\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)=\left(\left(a\wedge b\right)\wedge\bar{a}\right)\vee\left(\left(a\wedge b\right)\wedge\bar{b}\right)=$$
$$=\left(\left(a\wedge\bar{a}\right)\wedge b\right)\vee\left(a\wedge\left(b\wedge\bar{b}\right)\right)=$$
$$=\left(a\wedge b\right)\vee\left(a\wedge 0\right)=0\vee 0=0.$$

e. i. $\bar{a}\vee\bar{b}$ aris $a\wedge b$ elementis damateba.

SeniSvna 4. wina winadadebaSi damtkicebul tolobebs **de morganis kanonebi** ewodeba.

SeniSvna 5. Tu gavaanalizebT wina winadadebis meore tolobis damtkicebas, davinaxavT, rom igi miiReba pirveli tolobis damtkicebidan masSi $\wedge$ da $\vee$ da agreTve 1 da 0 simboloebis urTierTSenacvlebiT. es aris kerZo SemTxveva e. w. **oradulobis principisa bulis algebrebisaTvis**, romelic SemdgomSi mdebareobs: Tu bulis algebrebis raime klasSi damtkicebulia raime debulebis samarTlianoba, samarTliani iqneba agreTve misi oraduli debulebac, romelic miiReba sawyisi debulebidan masSi $\wedge$ da $\vee$ da agreTve 1 da 0 simboloebis urTierTSenacvlebiT.

vTqvaT, A aris bulis algebra. A simravleze ganvsazRvroT Sekrebis operacia Semdegnairad:

$$a+b=\left(a\wedge\bar{b}\right)\vee\left(\bar{b}\wedge a\right).$$

winadadeba 57. sruldeba Semdegi distribuciulobis kanoni:

$$a\wedge\left(b+c\right)=\left(a\wedge b\right)+\left(a\wedge c\right),\quad a,b,c\in A.$$

damtkiceba. gvaqvs:

$$a \wedge (b+c) = a \wedge \left((b \wedge \overline{c}) \vee \left(c \wedge \overline{b} \right) \right) =$$
$$= (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee \left(a \wedge c \wedge \overline{b} \right) =$$
$$= \left(0 \vee (a \wedge b \wedge \overline{c}) \right) \vee \left(0 \vee \left(a \wedge c \wedge \overline{b} \right) \right) =$$
$$= \left((a \wedge b \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c}) \right) \vee \left((a \wedge c \wedge \overline{a}) \vee \left(a \wedge c \wedge \overline{b} \right) \right) =$$
$$= \left(a \wedge b \wedge (\overline{a} \vee \overline{c}) \right) \vee \left(a \wedge c \wedge \left(\overline{a} \vee \overline{b} \right) \right) =$$
$$= \left(a \wedge b \wedge \left(\overline{a \wedge c} \right) \right) \vee \left(a \wedge c \wedge \left(\overline{a \vee b} \right) \right) =$$
$$= (a \wedge b) + (a \wedge c).$$

SevniSnoT, rom bolos wina tolobaSi gamoviyeneT de morganis kanoni.

advili sanaxavia, rom asociurobis kanoni

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

agreTve sruldeba. garda amisa, nebismieri $a \in A$ elementisaTvis gvaqvs:

$$a + a = (a \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge \overline{a}) = 0 \vee 0 = 0$$

da

$$a + 0 = \left(a \wedge \overline{0} \right) \vee (0 \wedge \overline{a}) = (a \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) = a \vee 0 = a .$$

sabolood miviReT, rom $(A,+,0)$ aris jgufi (komutaciuri `+~ operaciis ganmartebis Tanaxmad) da, maSasadame, $A^* = (A,+,\wedge,0,1)$ aris komutaciuri rgoli.

piriqiT, vTqvaT, A iseTi rgolia, romlis yvela elementi aris idempotenti (e. i. $a^2 = a$ nebismieri $a \in A$ elementisaTvis). aseT rgols **bulis rgols** uwodeben.

winadadeba 58. Tu A bulis rgolia, maSin

(i) A aris komutaciuri.

(ii) nebismieri $a \in A$ elementisaTvis, $a + a = 0$.

damtkiceba. vTqvaT, $a,b \in A$ nebismieri elementebia. maSin gvaqvs

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + a^2 = a + ab + ba + b .$$

amitom $ab+ba=0$. Tu $a=b$ maSin miviRebT, rom $a^2+a^2=0$, anu $a+a=0$, maSin $ab=-ba$ da amitom $ab=ba$.

am winadadebis (ii)-dan gamomdinareobs, rom nebismieri bulis rgolis maxasiaTebeli aris 2.

Tu A bulis rgolia, maSin $(A,\cdot,1)$ aris naxevarmeseri, romelSic nawilobrivi dalagebis mimarTeba ganimarteba Semdegnairad: $a\le b$ maSin da mxolod maSin, rodesac $ab=a$ (ix. **winadadeba 51**-is damtkiceba).

ganvixiloT axla $a+b+ab$ gamosaxuleba. gveqneba:

$$a(a+b+ab)=a^2+ab+a^2b=a+ab+ab=a+2ab=a,$$

da, amgvarad,

$$b(a+b+ab)=b.$$

amitom $a+b+ab$ aris $\{a,b\}$ simravlis zeda sazRvari. Tu c aris agreTve am simravlis zeda sazRvari, maSin

$$(a+b+ab)c=ac+bc+abc=a+b+ab,$$

amitom $a+b+ab\le c$ da, maSasadame, $a+b+ab$ aris $\{a,b\}$ simravlis zusti zeda sazRvari. aRvniSnoT igi $a\vee b$ simboloTi.

pirdapiri Semowmeba gviCvenebs, rom `$\cdot$~ aris distribuciuli `$\vee$~ operaciis mimarT da rom $1+a$ aris a-s damateba. amitom $A^{\#}=(A,+,\cdot,1+\bar{c},0,1)$ aris bulis algebra.

sainteresoa, ra iqneba $A^{\#}$ bulis algebraze gansazRvruli Sekrebis operacia (ix. ganmarteba **winadadeba 57**-is win). gvaqvs:

$$\begin{aligned}(a\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{a})&=(a\wedge(1+b))\vee(b\wedge(1+a))=(a+ab)\vee(b+ba)=\\&=a+ab+b+ab+(a+ab)+(a+ab)=\\&=a+b+ab+ab+ab+ab+ab+ab=\\&=a+b+6ab=a+b.\end{aligned}$$

es niSnavs, rom Tu gvaqvs bulis algebra A da misgan avagebT A^* bulis rgols, xolo misgan ki $(A^*)^{\#}$ bulis algebras, miviRebT isev sawyis bulis A algebras. e. i. $(A^*)^{\#}=A$. analogiurad, $(A^*)^{\#}=A$. am faqts **s t o u n i s o r a d o b a s** uwodeben bulis algebrebsa da bulis rgolebs Soris. kategoriaTa Teoriis enaze es niSnavs, rom bulis algebrebisa da bulis rgolebs kategoriebi izomorfulia.

savarjiSoebi

1. aCveneT, rom n elementian simravleze arsebobs n^{n^2} gansxvavebuli binaruli operacia. ipoveT $A=\{a,b\}$ simravleze gansazRvruli 16-ve operacia. maTgan ramdenia komutaciuri? asociuri? maTgan ramdens gaaCnia neitraluri elementi?
2. $\mathbb{R}$ simravleze ganvsazRvroT binaruli operacia $*$ Semdegnairad: $x*y=xy+1$. aCveneT, rom $*$ aris komutaciuri, magram araasociuri binaruli operacia.
3. ganvsazRvroT $\mathbb{Z}$-ze binaruli operacia $*$ Semdegnairad:
$$n*m=n-m.$$
aris es operacia komutaciuri? asociuri? aaqvs am operacias neitraluri elementi?
4. aris **magaliTi 7**-Si gansazRvruli binaruli operacia komutaciuri? asociuri? aaqvs am operacias neitraluri elementi?
5. ganvixiloT ori asaxva $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, romlebic gansazRvrulia Semdegnairad: $f(n)=2n$ da $g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & \text{Tu } n \text{ luwia}\\ 0, & \text{Tu } n \text{ kentia}\end{cases}$.
daamtkiceT, rom $gf=1$, magram $fg\neq 1$.
6. daamtkiceT, rom Tu $(G,*,e)$ naxevarjgufia, maSin misi ori nebismieri x da y elementisaTvis, Tu $x*y=e$, maSin $(b*a)^2=b*a$.
7. $\mathbb{R}$ simravleze ganvsazRvroT binaruli operacia $*$ Semdegnairad:
$$x*y=x+y+xy$$
daamtkiceT, rom $(\mathbb{R},*)$ aris naxevarjgufi, romelsac gaaCnia neitraluri elementi.

8. daamtkiceT, rom G jgufis neitraluri elementi aris is erTaderTi elementi, romlisTvisac sruldeba $x^2 = x$ toloba.

9. daamtkiceT, rom $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ saxis matricebis simravle, sadac $a,b \in \mathbb{R}$ da $a^2 + b^2 \neq 0$, aris jgufi matricebis Cveulebrivi gamravlebis mimarT.

10. daamtkiceT, rom Tu sasrul jgufSi aris luwi raodenobis elementi, maSin arsebobs neitraluri elementisagan gansxvavebuli iseTi elementi, romelic aris Tavisi Tavis Sebrunebuli.

11. daamtkiceT, rom Tu jgufi Seicavs xuTze nakleb elements, maSin es jgufi abeluria.

12. daamtkiceT, rom Tu G jgufia da $g \in G$, maSin $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.

13. ipoveT $[5]$-is rigi $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z},+)$ jgufSi.

14. ipoveT $[2]$-is rigi $\left((\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*,\cdot\right)$ jgufSi.

15. qvemoT CamoTvlili qvesimravleebdan, romeli warmoadgens qvejgufs?

   a) $\{[1],[3]\} \subset (\mathbb{Z}_8,\cdot)$;

   b) $\{[1],[2],[3],[4]\} \subset (\mathbb{Z}_5,\cdot)$;

   g) $\{[0],[2],[4],[6]\} \subset (\mathbb{Z}_8,+)$;

   d) $\{[0],[2],[4],[6],[8]\} \subset (\mathbb{Z}_{10},+)$.

16. vTqvaT, X raime simravlea. $\wp(\ )$ simravleze ganvixiloT Semdegi binaruli operacia:

$$X * Y = \left(X \cup Y\right) \setminus \left(X \cap Y\right)$$

daamtkiceT, rom $(\wp(\ ),*)$ aris abeluri jgufi.

17. vTqvaT, $A = \{a,b,c\}$. aris $\wp(\ )$ simravle jgufi gaerTianebis binaruli operaciis mimarT? TanakveTis binaruli operaciis mimarT?

18. daamtkiceT, rom G jgufi aris abeluri maSin da mxolod maSin, rodesac misi nebismieri ori x da y elementisaTvis, sruldeba toloba $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$.

19. ganvixiloT jgufi $(\mathbb{Z}_{16},+)$. CamoTvaleT $\langle[16]\rangle$ qvejgufis yvela elementi. ra rigi aqvs am elements?

20. vTqvaT, $x\in G$ elementis rigia 8. ipoveT Semdegi elementebis rigebi:

a) x^2; b) x^3; g) x^4; d) x^5; e) x^6.

21. ipoveT Semdegi cikluri jgufebis yvela gansxvavebuli warmomadgeneli:

a) $\mathbb{Z}_8$; b) $\mathbb{Z}_{15}$; g) $\mathbb{Z}_{16}$; d) $\mathbb{Z}_{18}$.

22. daamtkiceT, rom G jgufi aris abeluri maSin da mxolod maSin, rodesac asaxva $f:G\to G$, $x\to x^{-1}$ aris G jgufis endomorfizmi.

23. ganvixiloT asaxva $f:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$, romelic gansazRvrulia formuliT $f([n])=[3n]$. daamtkiceT, rom f aris jgufebis endomorfizmi da ipoveT misi birTvi. aris f epimorfizmi? monomorfizmi?

24. Tu G jgufia, maSin ra iqneba $\{e\}\subseteq G$ qvejgufis mosazRvre-obis klasebi G-Si? analogiuri kiTxva $G\subseteq G$ qvejgufisaTvis.

25. daamtkiceT, rom Tu H da K aris G jgufis ori qvejgufi, maSin nebismieri $x\in G$ elementisaTvis sruldeba toloba $Hx\cap Kx=(H\cap K)x$.

26. ganvixiloT $(\mathbb{R},+)$ jgufis normaluri qvejgufi $(\mathbb{Z},+)$ (normaluroba gamomdinareobs $(\mathbb{R},+)$ jgufis abelurobidan) da Sesabamisi faqtor-jgufi $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. daamtkiceT, rom $x+\mathbb{Z}\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ elements, sadac $x\in\mathbb{R}$, aqvs sasruli rigi maSin da mxolod maSin, rodesac x aris racionaluri, e. i. rodesac $x=\dfrac{m}{n}$ raime mTeli m da naturaluri n ricxvebisaTvis.

27. daamtkiceT, rom G da G' qvejgufebi, maSin asaxva $f:G\to G'$, romelic mocemulia formuliT $f(x)=e'$, aris homomorfizmi.

28. daamtkiceT, rom nebismieri mTeli n ricxvisaTvis, $(\mathbb{Z},+)$ da $(n\mathbb{Z},+)$ jgufebi izomorfulia.

29. daamtkiceT, rom $(\mathbb{R}^*,+)$ da $(\mathbb{R},+)$ jgufebi araa izomorfuli.

30. ramdeni gansxvavebuli warmomqmneli SeiZleba hqondes me-6 rigis ciklur jgufs?

31. daamtkiceT, rom Tu raime abeluri jgufi Seicavs me-3 rigis elements, maSin es jgufi cikluria.

32. Tu cikluri jgufis warmomqmnelia x elementi, romlis rigia m, maSin x^k aris amave jgufis warmomqmneli maSin da mxolod maSin, rodesac k da m urTierTmartivi ricxvebia.

33. aCveneT, rom Tu K aris H jgufis qvejgufi, xolo H ki G jgufis qvejgufi, maSin K aris G jgufis qvejgufi.

34. daamtkiceT, rom nebismieri abeluri jgufis sasruli rigis mqone elementebis qvesimravle aris qvejgufi.

35. daamtkiceT, rom jgufi, romlis rigia p^m (p martivia, m ki naturaluri), Seicavs p rigis qvejgufs.

36. qvemoT CamoTvlili asaxvebidan romelia $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ jgufis endomorfizmi?

a) $x\to|x|$; b) $x\to 2x$; g) $x\to x^2$; d) $x\to\dfrac{1}{x}$; e) $x\to -x$;

v) $x\to x^3$; z) $x\to -\dfrac{1}{x}$; T) $x\to\sqrt{x}$.

37. daamtkiceT, rom Tu jgufis rigia 3 an 4, maSin is cikluria.

38. daamtkiceT, rom Tu G jgufia, xolo x ki misi nebismieri elementi, maSin $\langle x\rangle=\langle x^{-1}\rangle$.

39. vTqvaT, R aris komutaciuri rgoli. ganvixiloT misi yvela idempotentebis simravle $B(R)$. SemoviRoT am simravleze $\wedge$ da $\vee$ operaciebi Semdegnairad:

$$a \wedge b = ab,$$

$$a \vee b = a + b - 2ab.$$

daamtkiceT, rom $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ aris bulis algebra.

40. daamtkiceT, rom orze meti elementis mqone bulis rgols yovelTvis gaaCnia nulis gamyofebi.

ჯგუფი, რგოლი, ველი

§ 1. ალგებრული სტრუქტურები და ქვესტრუქტურები

განმარტება. სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ჩაკეტილი ოპერაციებით, ეწოდება ალგებრული სტრუქტურა.

როგორც წესი ოპერაციებს გააჩნიათ რაიმე მახასიათებელი თვისებები, რომლებიც შესაძლებელია ჩამოყალიბდეს თეორემების სახით და, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება გამოთვლებში (სტრუქტურებს თავისი თეორემებით, გამოთვლის წესებით და შედეგებით ხანდახან უწოდებენ ალგებრულ სისტემებს).

ყოველი სტრუქტურისთვის არსებობს ქვესტრუქტურის ცნება. მაგალითად, განვიხილოთ ჰიპოთეტური სტრუქტურა, ე. წ. მაჩვენებელი. ვთქვათ, A მაჩვენებელია. დავუშვათ, რომ A-ზე განსაზღვრულია მხოლოდ ერთი $\circledast$ ოპერაცია. მაშასადამე, უფრო ზუსტად ეს შეიძლება ჩაიწეროს $(A, \circledast)$ სახით, ანუ მიმთითებელი შეიცავს A სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული $\circledast$ ოპერაციით. თუ $B \subseteq A$ და $(B, \circledast)$ აგრეთვე მაჩვენებელია (კერძოდ, $\circledast$ ოპერაცია შესაძლებელია ჩაკეტილი იყოს B-ზე), მაშინ $(B, \circledast)$-ს ეწოდება ქვემაჩვენებელი.

განვიხილოთ სხვა სტრუქტურა, $(C, \oplus)$ ($\oplus$ და $\circledast$ ოპერაციები უნდა იყოს ერთი და იგივე რიგის; მაგალითად, თუ ერთ-ერთი მათგანი ბინარულია, ასეთივე უნდა იყოს მეორეც. C-ზე შესაძლებელია განვსაზღვროთ სხვა ოპერაციებიც, თუმცა ახლა მათ არ განვიხილავთ). თუ არსებობს $\varphi : A \to C$ ასახვა ისეთი, რომ $\varphi(x \circledast y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$ ნებისმიერი x და y-თვის A-დან, მაშინ φ-ს ეწოდება ჰომომორფიზმი. თუ არსებობს A-სა და C-ს შორის ჰომომორფიზმი, მაშინ გარკვეული აზრით $(A, \circledast)$ სტრუქტურის $(\varphi(A), \oplus)$ ჰომომორფული ანასახი იწვევს წინარე სახეს, რადგანაც ჩვენ შეგვიძლია შევასრულოთ $\circledast$ ოპერაცია A-ზე და შემდეგ ავსახოთ C-ში (φ-ს საშუალებით), ან ჯერ ავსახოთ C-ში, შემდეგ შევასრულოთ $\oplus$ ოპერაცია. ორივე შემთხვევაში შედეგი ერთი და იგივეა. ამიტომ მოვიქცევით ისე როგორც მოსახერხებელია ჩვენთვის. ამ სიტუაციაში უკეთ გარკვევაში დაგვეხმარება 1.1 სურათზე მოცემული კომუტაციური დიაგრამა. 1.1(ა)-ზე მოცემულია სიმრავლეები და სტრუქტურები, ხოლო 1.1(ბ)-ზე განხილულია ცალკეული ელემენტებისათვის. 1.1(ბ)-ზე მარჯვნიდან გამოსახულია ერთი და იგივე შედეგის ორი განსხვავებული ფორმა. დიაგრამის კომუტაციურობა $\Longrightarrow$ ოპერაციის განმარტებიდან.

კერძოდ, მივიღებთ, რომ $\varphi \circ \circledast = \oplus \circ \varphi$, რაც არ ნიშნავს კომუტაციურობას მკაცრი აზრით, რადგან $\circledast$ და $\oplus$ განსხვავებული ოპერაციებია. ტოლობის ორივე მხარე აღნიშნავს ერთი და იგივე რიგის ოპერაციების კომბინაციას და,

შესაბამისად, მივდივართ ზუსტად განმარტებამდე:

$$\text{ასახვა} \circ \text{ოპერაცია} = \text{ოპერაცია} \circ \text{ასახვა},$$

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\circledast"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ C \times C \arrow[r, "\oplus"'] & C \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r] \arrow[d] & x \circledast y \arrow[d, "\varphi"] \\ (\varphi(x),\varphi(y)) \arrow[r, "\oplus"'] & \varphi(x) \oplus \varphi(y) = \varphi(x \circledast y) \end{tikzcd}.$$

ნახ. 1.1(ა)　　　　　　　ნახ. 1.1(ბ)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. ვთქვათ, $\theta : Z \to Z_{10}$ არის ასახვა მთელ რიცხვთა სიმრავლის ნაშთთა კლასებზე მოდულით 10, მაშინ $\theta(20) = 0$, $\theta(17) = 7$.

განვიხილოთ $(Z, +)$ და $(Z_{10}, +)$, ჩვეულებრივი $+$ ოპერაციით Z-თვის და Z_{10}-თვის. ცხადია, θ არის ჰომომორფიზმი, რადგან

$$\theta(24 + 38) = \theta(62) = 2,$$
$$\theta(24) + \theta(38) = 4 + 8 = 2 \ \ (Z_{10}\text{-ში}).$$

ამ შემთხვევაში დიაგრამა გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\begin{tikzcd} (Z,+)^2 \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & (Z,+) \arrow[d, "\theta"] \\ (Z_{10},+)^2 \arrow[r] & (Z_{10},+) \end{tikzcd},$$

ნახ. 1.1(გ)

ამრიგად, სტრუქტურებს შორის ჰომომორფიზმი ინახავს სტრუქტურას.

სურექციული ან ინექციური ასახვების მისაღებად შესაძლებელია შემოვიტანოთ შეზღუდვა ასახვის რანგზე, ამიტომ, თუ ასახვა ჰომომორფიზმია, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ის უზრუნველყოფს სტრუქტურიდან სტრუქტურაზე გადასვლის მექანიზმს (პირიქითაც!). ყოველგვარი ინფორმაციის დაკარგვის გარეშე.

განმარტება. ინექციურ ჰომომორფიზმს ეწოდება მონომორფიზმი, სურექციულ მონომორფიზმს ეწოდება ეპიმორფიზმი, ბიექციურ ჰომომორფიზმს კი – იზომორფიზმი. თუ არსებობს იზმომორფიზმი სტრუქტურებს შორის, ამობობენ, რომ ისინი იზომორფულნი არიან.

სიტყვა "იზომორფულია" ნიშნავს "იგივე ფორმისაა" და, ამიტომ გონივრულია ვიფიქროთ, რომ იზომორფიზმი გამოიწვევს ალგებრული სტრუქტურების სიმრავლის ეკვივალენტობის კლასებად დაყოფას (იხ. სავარჯიშო 1.1.2).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.2. $(\{\varnothing, \mathcal{E}\}, \cap, \cup)$ და $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ (იხ. § 4, თავი 4) იზომორფულებია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, $\phi(\varnothing)=0$ და $\varphi(\mathcal{E})=1$. ცხადია, ϕ არის ბიექცია, მაშინ

$$\begin{gathered}
\varphi(\varnothing\cap\varnothing)=\varphi(\varnothing)=0=0\wedge 0=\varphi(\varnothing)\wedge\varphi(\varnothing),\\
\varphi(\varnothing\cap\mathcal{E})=\varphi(\varnothing)=0=0\wedge 1=\varphi(\varnothing)\wedge\varphi(\mathcal{E}),\\
\varphi(\mathcal{E}\cap\varnothing)=\varphi(\varnothing)=0=1\wedge 0=\varphi(\mathcal{E})\wedge\varphi(\varnothing),\\
\varphi(\mathcal{E}\cap\mathcal{E})=\varphi(\mathcal{E})=1=1\wedge 1=\varphi(\mathcal{E})\wedge\varphi(\mathcal{E}),\\
\varphi(\varnothing\cap\varnothing)=\varphi(\varnothing)=0=0\vee 0=\varphi(\varnothing)\vee\varphi(\varnothing),\\
\varphi(\varnothing\cap\mathcal{E})=\varphi(\mathcal{E})=1=0\vee 1=\varphi(\varnothing)\vee\varphi(\mathcal{E}),\\
\varphi(\mathcal{E}\cap\mathcal{E})=\varphi(\mathcal{E})=1=1\vee 0=\varphi(\mathcal{E})\vee\varphi(\varnothing),\\
\varphi(\mathcal{E}\cap\mathcal{E})=\varphi(\mathcal{E})=1=1\vee 1=\varphi(\mathcal{E})\vee\varphi(\mathcal{E}).
\end{gathered}$$

ამრიგად, φ არის ჰომომორფიზმი და, მაშასადამე, იზომორფულიც. დაბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ სტრუქტურა შესაძლებელია იზომორფული იყოს თავისი თავის (იგულისხმება არატრივიალური იზომორფიზმი) და ასევე, შესაძლებელია იზომორფული იყოს თავისი ქვესტრუქტურის (ეს შესაძლებელია მხოლოდ უსასრულო სიმრავლეებში).

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . თუ ასახვის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები ერთმანეთს ემთხვევა, ჰომომორფიზმს ეწოდება ენდომორფიზმი, ხოლო იზომორფიზმს – ავტომორფიზმი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. მოცემულია A სიმრავლისთვის $(\mathcal{P}(A),\cap,\cup)$ და $(\mathcal{P}(A),\cup,\cap)$ იზომორფულია $\varphi: X\to X'$ ასახვის მიმართ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ცხადია, φ არის ინექციაა და სურექციაც, თუ B, $C\in\mathcal{P}(A)$, მაშინ

$$\begin{gathered}
\varphi(B\cap C)=(B\cap C)'=B'\cup C'=\varphi(B)\cup\varphi(C),\\
\varphi(B\cup C)=(B\cup C)'=B'\cap C'=\varphi(B)\cap\varphi(C).
\end{gathered}$$

მოგვიანებით, შევნიშნავთ, რომ ეს თანაფარდობები ნათლად გვიჩვენებს ბულის ალგებრათა სიმრავლის ორადულობას და φ არის ავტომორფიზმი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.1.

1. ვაჩვენოთ, რომ ორი $(Z_6,*)$ სტრუქტურა განხილულ 4.1.2 მაგალითში იზომორფულია.

2. ვთქვათ, $(A,\circledast)$, $(B,\circledast)$ და $(C,\odot)$ მაჩვენებლებია, ხოლო $\varphi: A\to B$ და $\theta: B\to C$ იზომორფიზმებია. ვაჩვენოთ, რომ $\theta\circ\varphi: A\to C$, $\varphi^{-1}: B\to A$ ასევე იზომორფიზმებია.

§ 2. უმარტივესი ოპერაციული სტრუქტურები

განვიხილოთ ალგებრული სტრუქტურები, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ერთ ბინარულ ოპერაციას, სადაც შესაძლებელია ამ და მომდევნო პარაგრაფებში სტრუქტურები დალაგებულ იქნეს "სიძლიერის" მიხედვით. (ამბობენ, რომ A უფრო სუსტია, ვიდრე B, თუ A შეიძლება განვიხილოთ, როგორც B "ნარჩენი" სტრუქტურით.)

მოგვიანებით ვნახავთ, რომ ზოგიერთი სტრუქტურა მოიცემა ორი უფრო სუსტი სტრუქტურის "შერწყმის" შედეგად. და, მაშასადამე, მკაცრი დალაგება აქ შეუძლებელია. თითოეული სტრუქტურა შეიძლება განვმარტოთ არა მარტო ძირითადი სტრუქტურული ტერმინებით, არამედ ძირითადი თვისებებითაც.

განმარტება. S სიმრავლეს $\circledast$ ბინარული ოპერაციით, ეწოდება ნახევარჯგუფი, თუ სრულდება ასოციაციურობა:

$$x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) \circledast z, \ \ \forall\, x,\, y,\, z \in S.$$

განმარტება. M სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციით, ეწოდება მონოიდი, თუ:

I) $\circledast$ ასოციაციურია;

II) არსებობს $u \in M$ ისეთი, რომ

$$u \circledast x = x = x \circledast u, \ \ \text{ნებისმიერი } x \in M\text{-თვის}$$

(u-ს ეწოდება ერთეულოვანი ელემენტი $\circledast$-ის მიმართ).

ნახევარჯგუფები და მონოიდები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ სიმბოლოთა სტრიქონებისა და ენათა თეორიების დამუშავებისას.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, $A = \{x, y, z\}$. განვიხილოთ x, y, z, როგორც სიმბოლოები და არა როგორც ობიექტების ან 'უცნობთა" სახელები, მივიღებთ, რომ A არის ანბანი. A^* განვსაზღვროთ, როგორც სიმრავლე, A-ს სიმბოლოთა სტრიქონებისა. მაშინ A^* შეიცავს x, y, z, xx, xy, yx, $xxyz$, zyx და ა. შ. A^*-ზე განვმარტოთ $\odot$ ოპერაცია შემდეგი წესით:

თუ α, $\beta \in A^*$, მაშინ $\alpha \odot \beta = \alpha\beta$, ე. ი. სტრიქონების მიწერა მიყოლებით, ანუ $xyz \odot z = xyzz$, $xz \odot yz = xzyz$ და ა. შ.

თითოეული α სტრიქონს აქვს გარკვეული სიგრძე, რომელიც არის მასში სიმბოლოების რაოდენობა და აღინიშნება $|\alpha|$-ით (გამეორება შედის რაოდენობაში). მაგალითად,

$$|x| = 1, \quad |xy| = 2, \quad |xxxzy| = 5.$$

ეს რაღაც აზრით ჰგავს სიმრავლის სიმძლავრეების აღნიშვნას. კერძოდ,

$$\begin{aligned} |x| = 1, &\quad |\{x\}| = 1, \\ |xy| = 2, &\quad |\{x, y\}| = 2, \\ |yx| = 2, &\quad |\{y, x\}| = 2. \end{aligned}$$

მაგრამ

$$|xyx| = 3, \quad |\{x, y, x\}| = |\{x, y\}| = 2.$$

ამიტომ სრული ანალოგია არ არის. ცარიელი სიმრავლის ანალოგიურად ცარიელი სტრიქონი აღინიშნება Λ-ით, $\Lambda \in A^\alpha$ და $|\Lambda| = 0$, $\Lambda \odot \alpha = \alpha \odot \Lambda = \alpha$ ნებისმიერი α სტრიქონისთვის.

მაშასადამე, ნებისმიერი A ანბანისთვის A სტრუქტურა $(A^*, \odot)$ არის მონოიდი, Λ კი – ერთეულოვანი ელემენტია $\odot$-ის მიმართ.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითი ძალიან მნიშვნელოვანია. საკმაოდ დიდი A ანბანისთვის, რომელიც შეიცავს კომპიუტერის პერიფერიული მოწყობილობისთვის მისაწვდომ ყველა სიმრავლეს, კომპიუტერულ სისტემებში გამოყენებული ენები არის A^*-ის ქვესიმრავლე. ეს ცნება ძირითადია ენების ფორმალური შესწავლის დროს.

მესამე (და უკანასკნელი) ოპერაციული სტრუქტურა არის მონოიდის უშუალო და ბუნებრივი გაფართოება.

განმარტება. G სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული $\circledast$ ბინარული ოპერაციით ჯგუფი ეწოდება, თუ სრულდება:

ა) $\circledast$ ასოციაციურია;

ბ) არსებობს $u \in G$ (ერთეულოვანი ელემენტი $\circledast$-ის მიმართ) ისეთი, რომ $u \circledast x = x = x \circledast u$, $\forall\, x \in G$.

გ) ყოველი $x \in G$-თვის არსებობს $y \in G$ ისეთი, რომ $x \circledast y = u = y \circledast x$ (y-ს ეწოდება x-ის შებრუნებული $\circledast$-ის მიმართ).

თუ ჯგუფური ოპერაცია აღინიშნება $\circledast$ სიმბოლოთი, მაშინ $u = 1$ და $y = x^{-1}$, ხოლო, თუ ოპერაცია აღინიშნება $\oplus$ სიმბოლოთი, მაშინ $u = 0$ და $y = -x$.

ჯგუფები ყველაზე მნიშვნელოვანია ამ სამ სტრუქტურას შორის, რადგან მასში შეიძლება ამოვხსნათ $a \circledast x = b$ განტოლება. მართლაც, თუ $a \circledast x = b$, მაშინ

$$\begin{aligned} a^{-1} \circledast (a \circledast x) &= a^{-1} \circledast b \quad (a \in G \Longrightarrow a^{-1} \in G), \\ (a^{-1} \circledast a) \circledast x &= a^{-1} \circledast b \quad (\circledast \text{ ასოციაციურობის გამო}), \\ 1 \circledast x &= a^{-1} \circledast b \quad (\text{შებრუნებულის თვისება}), \\ x &= a^{-1} \circledast b \quad \text{ერთეულოვნის თვისება}). \end{aligned}$$

“ჯგუფთან” და “მონოიდთან” ერთად ხშირად ხმარობენ სიტყვას – “კომუტაციური”. ეს ნიშნავს, რომ ჯგუფური ოპერაცია არის კომუტაციური, ე. ი.

$$y \circledast x = x * y \quad \forall\, x,\, y \in M \;\text{ ან }\; \forall\, x,\, y \in G.$$

ჯგუფის აქსიომებიდან გამომდინარეობს ძალიან ბევრი სასარგებლო შედეგი. განვიხილოთ მარტივი მაგალითი.

მაგალითი 2.2. $(G, *)$ ჯგუფში

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} \circledast a^{-1}.$$

დამტკიცება.

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * 1 * a^{-1} = a * a^{-1} = 1.$$

ე. ი. $a * b$-ს მარჯვენა შებრუნებულია $b^{-1} * a^{-1}$. ანალოგიურად, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ის მარცხენა შებრუნებულიცაა, საიდანაც გამომდინარეობს საბოლოო შედეგი.

ჯგუფები ჩვენთვის პირველი მაგალითია, სადაც ფართოდ გამოიყენება იზომორფიზმები. განვიხილოთ $(R, +)$ და $(]0, \infty[\,, *)$ ჯგუფების იზომორფიზმი, რომელსაც უწოდებენ ლოგარითმს. ის ამყარებს კავშირს გამრავლებისა და შეკრების

ოპერაციებს შორის:

$$a * b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)),$$
$$\varphi : x \to hy_p(x) \text{ რაიმე } p \in]0, +\infty[\text{-თვის.}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2.1.

1. დაამტკიცეთ ერთეულოვანი და შებრუნებული ელემენტების ერთადერთობა $(G, *)$ ჯგუფში;

2. აჩვენეთ, რომ თუ $(G, \circledast)$ ჯგუფში – $a \circledast b = a \circledast c$, მაშინ $b = c$ და თუ $x * a = y * a$, მაშინ $x = y$;

3. შეამოწმეთ, რომ სასრული სიმრავლის ჩასმით სიმრავლე ქმნის ჯგუფს ჩასმათა გამრავლების მიმართ.

§ 3. რგოლები და ველები

3.1. რგოლები.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ორი ბინარული ალგებრული ოპერაციით, ეწოდება რგოლი, თუ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $\circledast$ ასოციაციურია;

2) $\oplus$ ასოციაციურია;

3) $\oplus$ კომუტაციურია;

4) $\oplus$ ოპერაციას აქვს ერთეულოვანი ელემეტრი, ე. წ. "ნული" და აღინიშნება "0"-ით;

5) არსებობს შებრუნებული ელემენტები $\oplus$-ის მიმართ (ე. წ. მოპირდაპირე). მაშასადამე, $(Z_n, \circledast, +)$ ყოველი $n \in N$-თვის არის რგოლი, რგოლი კომუტაციურია, თუ $\circledast$ ოპერაცია არის კომუტაციური.

6) დისტრიბუციულობის აქსიომა

ა) $X \circledast (y \oplus z) = (x \circledast y) \oplus (x \circledast z)$;

ბ) $(x \oplus y) \circledast z = (x \circledast z) \oplus (y \circledast z)$ ყოველი x, y, $z \in R$-თვის.

რგოლს ეწოდება ერთეულოვანი რგოლი, თუ მასში არსებობს ერთეულოვანი ელემენტი $\circledast$-ის მიმართ.

ადვილი სანახავია, რომ $(R, \circledast, \oplus)$ რგოლში ყოველი a, $b \in R$-თვის სრულდება

$$0 \circledast a = a \circledast 0 = 0,$$
$$a * (-b) = (-a) \circledast b = -(a \circledast b),$$
$$(-a) * (-b) = a * b.$$

$-a$ არის a-ს შებრუნებული $\oplus$-ის მიმართ, $a \oplus (-b)$ ჩაიწერება, როგორც $a - b$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. $(Z_n, *, +)$ არის კომუტაციური ერთეულოვანი რგოლი $n \in N$-თვის.

ზოგადად, $(Z_n, *, +)$ სისტემაში ყოველთვის არ არის შესაძლებელი "გაყოფა" (შებრუნებულის არსებობა $*$-ის მიმართ). ეს არის განსხვავება ველსა და კომუტაციურ, ერთეულოვან რგოლს შორის. მაგალითად, განვიხილოთ $(Z_6, *, +)$. Z_6-ში არსებობს ელემენტები, რომლებიც განსხვავდება ნულისაგან, მაგრამ ნამრავლში გვაძლევს ნულს; მაგალითად, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(3; 2)$, $(4; 3)$.

$(R, \circledast, \oplus)$-ში არანულოვან a და b ელემენტებს ეწოდება ნულის გამყოფები, თუ $ab = 0$. თუ R არ არის კომუტაციური, მაშინ a-ს ეწოდება მარცხენა ნულის გამყოფი, b-ს კი – მარჯვენა. ადვილი საჩვენებელია, რომ Z_p არ შეიცავს ნულის გამყოფებს, თუ p მარტივი რიცხვია.

თუ $(G, \circledast)$ ჯგუფში $a \circledast b = a * c$, მაშინ $b = c$. მაგრამ რგოლის შემთხვევაში ეს ყოველთვის არაა სამართლიანი.

თ ე ო რ ე მ ა . ზემოთ აღნიშნული პირობა K რგოლში სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ რგოლი არ შეიცავს ნულის გამყოფ ელემენტებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ, R-ს არა აქვს ნულის გამყოფები, თუ $x \circledast y = x * z$ და $x \neq 0$, მაშინ

$$x \circledast y - x \circledast z = x \circledast y - x \circledast y = 0,$$
$$x \circledast y - x \circledast z = x \circledast (y \oplus (-z)) = x * (y - z) = 0.$$

მაგრამ, რადგან რგოლი არ შეიცავს ნულის გამყოფებს და $x \neq 0$, ამიტომ $y - z = 0 \Longrightarrow y = z$. რ.დ.გ.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა . ვთქვათ, $a \circledast b = a \circledast c$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $b = c$. ვთქვათ, $x \circledast y = 0$, მაშინ $x \circledast y = x \circledast 0$ და თუ $x \neq 0$, მაშინ $y = 0$. პირიქით, თუ $y = 0$, მაშინ

$$x \circledast y = 0 = 0 \circledast y \Longrightarrow x = 0,$$

ე. ი. თუ $x * y = 0$, გამომდინარეობს, რომ ან $x = 0$ ან $y = 0$. რ.დ.გ.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . კომუტაციურ, ერთეულოვან, უნულგამყოფო რგოლს ეწოდება მთელობის არე. ე. ი. D სიმრავლე მასზე განსაზღვრული ორი ბინარული ოპერაციით, რომელშიც სრულდება აქსიომები:

1) $\oplus$ კომუტაციურია;

2) $\oplus$ ასოციაციურია;

3) $\circledast$ ასოციაციურია;

4) $\circledast$ კომუტაციურია;

5) ერთეულოვანის არსებობა $\oplus$-ის მიმართ (0);

6) შებრუნებული ელემენტის არსებობა $\oplus$-ის მიმართ $(-x)$.

7) ერთეულოვანის არსებობა $\circledast$-ის მიმართ (1).

8) დისტრიბუციულობის აქსიომა

$$x \circledast (y \oplus z) = (x \circledast y) \oplus (x \circledast z) \;\; \forall\, x,\, y,\, z \in D.$$

9) თუ $x \neq 0$ და $x \circledast y = x \circledast z$, მაშინ $y = z$. ყოველი სასრული მთელობის არე ველია, მაგრამ არსებობს უსასრულო მთელობის არეები, რომლებიც არ არიან ველები.

3.2. ველები.

განმარტება. F სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ორი ბინარული ალგებრული ოპერაციით, $(F, \circledast, \oplus)$ ველი ეწოდება, თუ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $\oplus$ კომუტაციურია;

2) $\oplus$ ასოციაციურია;

3) $\oplus$-ის მიმართ ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა (0);

4) $\oplus$-ის მიმართ შებრუნებულ ელემენტის არსებობა $(-x)$;

5) $\circledast$ კომუტაციურია;

6) $\circledast$ ასოციაციურია;

7) $\circledast$-ის მიმართ ერთეულოვანის არსებობა (1);

8) ყოველი $x \in F \setminus \{0\}$-თვის არსებობს $y \in F$ ელემენტი ისეთი, რომ $x \circledast y = 1$ (შებრუნებული x^{-1});

9) დისტრიბუციულობის აქსიომა

$$x \circledast (y \oplus z) = (x \circledast y) \oplus (x \circledast z) \;\; \forall\, x,\, y,\, z \in F.$$

მაგალითი 3.2. $(R; *, +)$ არის ველი, $(R, +)$ და $(R \setminus \{0\}, *)$ კომუტაციური ჯგუფებია. $(N, *, +)$ არ არის ველი, $(\mathcal{B}(A), \cap, \cup)$ არ არის ველი, რადგან არ აქვს შებრუნებული ელემენტი.

წინა განმარტებებში გამოვიყენეთ $\circledast$ და $\oplus$ სიმბოლოები ოპერაციების აღსანიშნავად, რადგან ეს ოპერაციებიშეიძლება განსხვავებული იყოს ჩვეულებრივი "$\cdot$", "$+$" ოპერაციებისგან.

წინადადება. ველის ერთეულოვანი ელემენტი ერთცვლადიანია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x * e = x$ და $x * e' = x \;\forall\, x \in F$, მაშინ

$$e = e * e' = e' * e = e' \Longrightarrow e = e' = 1.$$

ანალოგიურად მტკიცდება შეკრების ოპერაციის მიმართ.

წინადადება. შებრუნებული ელემენტები ველში ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x \in F \setminus \{0\}$ და დავუშვათ, რომ არსებობს ორი x და y ისეთი, რომ $x * y = 1$, $x * z = 1$. კომუტაციურობიდან

გამომდინარეობს, რომ

$$y * x = 1 = z * x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = y * 1 = y * (x + z) = (y * x) * z = 1 * z = z \Longrightarrow y = z = x^{-1}.$$

შეკრების ოპერაციის მიმართ მტკიცდება ანალოგიურად.

თ ე ო რ ე მ ა . $(F, *, +)$-ში სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $a * 0 = 0$;

2) $(-a) = a * (-1)$, $-a(+b) = (-a) + (-b)$;

3) $-(-a) = a$, $(-1) * (-1) = 1$;

4) თუ $a \neq 0$, მაშინ $a^{-1})^{-1} = a$;

5) $a * b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ან $b = 0$;

6) $(-a) * (-b) = a * b$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .
1) $a * 1 = 1$ და $a + 0 = a \Longrightarrow$

$$a + (a * 0) = (a * 1) + (a * 0) = a * (1 + 0) = a + 1 = a.$$

ე. ი. არის შეკრების მიმართ ერთეულოვანი, $\Longrightarrow a * 0 = 0$.
2) $a + (a * (-1)) = (a * 1) + (a * (-1)) = a * (1 + (-1)) = a * 0 = 0 \Longrightarrow$ $-a = a * (-1)$. ამის გამოყენებით

$$-(a + b) = (a + b) * (-1) = a * (-1) + b * (-1) = -a + (-6).$$

3) $(-a) + a = 0$ და $(-a) + (-(-a)) = 0$. რადგან შებრუნებული ელემენტები ერთადერთია, ამიტომ $a = -(-a) \Longrightarrow 1 = -(-1)$. ვთქვათ, $x = -1$, მაშინ $1 = -(x) = x * (-1) = (-1) * (-1)$.
4) შევნიშნოთ, რომ $a^{-1} \neq 0$. რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$1 = a * a^{-1} = a * 0 = 0.$$

რაც ეწინააღმდეგება ველის აქსიომებს. დამტკიცება ანალოგიურია 3)-ის დამტკიცების.
5) ვთქვათ, $a \neq 0$, მაშინ არსებობს a^{-1} და $b = 1 * b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * 0 = 0$.
6) 2)-დან გამომდინარეობს, რომ $(-b) = b * (-1)$ და $(-b) = b * (-1)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(-a) * (-b) = (a * (-1)) * (b * (-1)) = a * ((-1) * (-1)) * b = a * (1) * b = a * b.$$

ჩანაწერის სიმარტივისთვის მიღებული შეთანხმება, რომ ველში ელემენტებისთვის, თუ არ წერია ფრჩხილები, ყოველთვის პირველი სრულდება გამრავლება, შემდეგ მიმატება, მაგალითად,

$$a + b * c \equiv a + (*b * c).$$

ველის ამოხსნადობიდან გამომდინარეობს მასში წრფივი განტოლების ამოხსნადობა. ეს ძალიან მნიშვნელოვანია და, ფაქტიურად, ველებისთვის ძირითადი თვისებაა.

ველში წრფივი განტოლება არის $a*x+b=0$ სახის გამოსახულება, $0,\ a,\ b \in F$.

თ ე ო რ ე მ ა . თუ $a \neq 0$, მაშინ $a*x+b=0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი F-ში (ანუ არსებობს ერთადერთი ველის ელემენტი, რომელიც განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად, თუ x-ს შევცვლით ამ ელემენტით).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

$$a*x+b=0,$$
$$a*x+b+(-b)=0+(-b),$$
$$a*x+(b+(-b))-b \ \text{(ასოციაციურობა და 0-ის თვისება)},$$
$$a*x+0=(-b) \ \text{(მოპირდაპირობის თვისება)},$$
$$a*x=(-b) \ \text{(ნულის თვისება)},$$
$$a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*(-b) \ (a\neq 0),$$
$$(a^{-1}*a)+x=a^{-1}*(-b) \ \text{(ასოციაციურობა)},$$
$$1*x=a^{-1}*(-b) \ \text{(შებრუნებითი)},$$
$$x=a^{-1}*(-b) \ \text{(ერთეულოვანის თვისება)}.$$

რადგან ერთეულოვანი და მოპირადაპირე ელემენტები ერთადერთია ველში, ამიტომ $-b$ და a^{-1} ერთადერთი გზით განისაზღვრება ამ განტოლებიდან და, შესაბამისად, შედეგიც ერთადერთია.

განტოლება $a*x*x+b*x+c=0$, $a,\ b,\ c \in R$, ზოგადად არაა ამოხსნადი R-ში, მათი ამოხსნადობისთვის საჭიროა R ველის გაფართოება კომპლექსურ რიცხვთა ველამდე. კომპლექსურკოეფიციენტებიანი პოლინომიალური განტოლებები ყოველთვის ამოხსნადია კომპლექსურ რიცხვთა ველში, სხვა უფრო ფართო ველი არ არსებობს.

3.3. სასრული ველები. აქამდე ნახსენები ყველა ველი იყო უსასრულო. განვიხილოთ ახალი ველები, რომელიც შეიცავენ სასრულ რაოდენობა ელემენტებს.

ვთქვათ, $a \in F$, მაშინ $a, a+a, a+a+a, \dots$ ელემენტები კვლავ ველის ელემენტებია, $a+a \equiv 2$, $a+a+a \equiv 3a$, $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{-ჯერ}} \equiv na$ (n არაა აუცილებელი იყოს ველის ელემენტი), ანალოგიურად, $a*a=a^2, \dots, \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{-ჯერ}} = a^n$, $a\neq 0$.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . თუ არსებობს ისეთი უმცირესი ნატურალური n, რომ $na=0$, მაშინ n-ს ეწოდება a ელემენტის ადიციური რიგი, თუ არსებობს ისეთი უმცირესი რიცხვი, რომ $a^m=1$, მაშინ mს ეწოდება a-ს მულტიპლიკაციური რიგი.

თ ე ო რ ე მ ა . ველის არანულოვან ელემენტებს აქვთ ერთი და იგივე ადიციური რიგი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, $a, b \in F \setminus \{0\}$ და დავუშვათ, რომ a და b-ს ადიციური რიგებია, შესაბამისად, n და m, მაშინ

$$nb = n(a * a^{-1}) * b = na * (a^{-1} * b) = 0 * a^{-1} * b = 0 \Longrightarrow m \le n,$$

ანალოგიურად,

$$ma = m(b * b^{-1}) * a = (mb) * (b^{-1} * a) = 0 * b^{-1} * a = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow n \le m \Longrightarrow m = n.$$

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . თუ ველის ყველა არანულოვანი ელემენტის რიგია n, ამბობენ, რომ n არის F ველის მახასიათებელი, თუ ასეთი n არ არსებობს, ამბობენ, რომ ველი არის ნულმახასიათებლიანი.

თუ $|F| = m \in N$, გამომდინარეობს, რომ F-ს აქვს m ელემენტი, ანუ F სასრულია. თუ F ნულმახასიათებლიანია, მაშინ ის აუცილებლად უსასრულოა.

თ ე ო რ ე მ ა . ყოველი სასრული ველის მახასიათებლი მარტივი რიცხვია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავუშვათ, რომ სასრული F ველს აქვს მახასიათებელი n და $n = p * q$, სადაც $p, q < n$, $p, q \in N$. ვთქვათ, $a \in F \setminus \{0\}$. მაშინ $0 = na = (p * q)a = p(qa)$, $qa \in F$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $qa = 0$ შესრულდება $n \le q$, რადგან n არის მახასიათებელი, წინააღმდეგ შემთხვევაში $qa \in F \setminus \{0\}$. ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა. გამომდინარეობს, რომ n მარტივია.

თ ე ო რ ე მ ა . სასრულ ველს აქვს მახასიათებელი p და $|F| = p^n$ რაიმე $n \in N$-თვის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ჩვენ უკვე ვიცით, რომ თუ p არის F-ის მახასიათებელი, მაშინ p მარტივია. ვთქვათ, $|F| = q$, თუ $p = q$ თეორემა ცხადია, რადგან $n = 1$. ვთქვათ, $p \ne q$ და $a_1 \in F \setminus \{0\}$. განვიხილოთ

$$F_1 = \{y : \ y = na_1, \ n \in N, \ 1 \le n \le p\}, \ \ |F_1| = p,$$

ავიღოთ ახლა $a_2 \in F \setminus F_1$ და ვთქვათ,

$$F_2 = \{y : \ y = na_1 + ma_2 : \ m, n \in N, \ 1 \le n \le p, \ 1 \le m \le p\}.$$

თუ $F_2 = F$ პროცესს ვამთავრებთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიხილავთ $a_3 \in F \setminus F_2$ და ა. შ. ბოლოს რადგან F სასრულია, პროცესი შეწყდება და მივიღებთ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ სიმრავლეებს რაიმე $n \in N$-თვის.

F-ის ყოველი ელემენტი f ერთადერთი გზით ჩაიწერება $f = m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n$, სადაც $1 \le m_i \le p$ ყველა $i = 1, \ldots, n$-თვის. მაშასადამე, არსებობს p^n ასეთი სახის გამოსახულება, ე. ი. $|F| = p^n$. რ.დ.გ.

მაშასადამე, ნებისმიერ სასრულ ველს აქვს p^n ელემენტი რაიმე $p, n \in N$-თვის (p მარიტივია). კერძოდ, ყოველი ასეთი p და n-თვის არსებობს p^n რიგის სასრული ველი, მაგრამ ამის დამტკიცება არცთუ ისე მარტივია.

მაგალითის სახით განვიხილოთ $(Z_3, *, +)$, სადაც $*$, $+$ ნაჩვენებია 5.1 ცხრილზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ სრულდება 1)–8) აქსიომები.

ც ხ რ ი ლ ი 3.1.

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

იგივე ცხრილები განვიხილოთ Z_4-ში.

ც ხ რ ი ლ ი 3.2.

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ცხადია, Z_4-ში 2-იანს არ აქვს შებრუნებული, ამიტომ Z_4 არ არის ველი. ველი $4 = 2^2$ არსებობს. მაგრამ არ ემთხვევა Z_4-ს. მოცემული რიგის სასრული ველები იგება საკმაოდ რთულად – მრავალწევრთა თეორიის გამოყენებით. ისინი მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ კოდირების თეორიაში.

3.4. დალაგებული ველები. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ R სიმრავლე ჩვეულებრივი $\cdot$ და $+$ ოპერაციების მიმართ ქმნის ველს. თვითონ ველის სტრუქტურა არ იწვევს ელემენტთა რაიმე თვალსაზრისით დალაგებას, თუნდაც R-ის ბუნებრივ დალაგებას. ყველა ველი არ არის დალაგებული, ამიტომ ჩვენ უნდა შევამოწმოთ დამატებით რა პირობების შესრულებაა საჭირო, რომ ვისაუბროთ ელემენტთა დალაგებაზე. დალაგება შესაძლებელია სხვადასხვაგვარად. დავიწყოთ დადებითობის თვისებით. ის უშუალოდ მიგვიყვანს ველის ელემენტების დალაგებამდე, შემდეგ კი – სიგრძის ცნებამდე.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . ამბობენ, რომ F ველი დალაგებულია, თუ ის შეიცავს არაცარიელ P ქვესიმრავლეს, რომელიც ჩაკეტილი $\cdot$ და $+$ ოპერაციების მიმართ და ყოველი $x \in F$-თვის სრულდება ზუსტად ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან $x \in P \setminus \{0\}$, $x = 0$, $-x \in P \setminus \{0\}$.

P არის სიმრავლე f-ის ყველა დადებითი ელემენტებისა (0 შეიძლება შედიოდეს P-ში, შეიძლება არა; გარკვეულობისათვის შევთანხმდეთ, რომ შედის). თუ $x \in P$, მაშინ ვამბობთ, რომ x დადებითია და ვწერთ: $x \geq 0$ თუ $-x \in P \setminus \{0\}$, ვამბობთ, რომ უარყოფითია და ვწერთ $x < 0$, ანალოგიურად, თუ x და y F-ის ელემენტებია, ვამბობთ, რომ $x \leq y$ (ნაკლებია ან ტოლია) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y - x \in P$ და $x < y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y - x \in P \setminus \{0\}$. სიმბოლოები $<$, $\leq$ შეიძლება გამოვიყენოთ საწინააღმდეგოს ჩაწერისათვის მეორე მხრიდან.

"$\leq$" მიმართება არის დალაგების მიმართება.

აქედან გამომდინარეობს

თ ე ო რ ე მ ა . ვთქვათ, F დალაგებული ველია და a, b, c, $d \in F$, მაშინ

1) თუ $a \leq b$ და $b \leq c$, მაშინ $a \leq c$;

2) $a \leq a$;

3) თუ $a \leq b$ და $b \leq a$, მაშინ $a = b$;

4) თუ $a \neq 0$, მაშინ $a^2 > 0$;

5) $1 > 0$;

6) თუ $a \leq b$, მაშინ $a + c \leq b + c$;

7) თუ $a \leq b$ და $c \leq d$, მაშინ $a + c \leq b + d$;

8) თუ $a \leq b$, $0 < c$ და $d < 0$, მაშინ $a * c' leq b * c$, $b * d \leq a * d$;

9) თუ $0 < a$, მაშინ $0 < a^{-1}$ და თუ $b < 0$, მაშინ $b^{-1} < 0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ა) $a \leq b$ და $b \leq c \Longrightarrow b - a \in P$ და $c - b \in P$, მაშინ $c - a = c - b + b - a \in P$. რადგან P ჩაკეტილია $+$ ოპერაციის მიმართ, ე. ი. $a \leq c$.

2) ცხადია, $a - a = 0 \in P$.

3) $a \leq b$ და $b \leq a$, თუ $b - a = x$, მაშინ $x \in P$ და $-x \in P$, რაც ეწინააღმდეგება P-ს განმარტებას, ე. ი. $x = 0$ და $a = b$.

4) თუ $a \neq 0$ და ან $a \in P$ ან $-a \in P$; P ჩაკეტილია, მაშინ გამომდინარეობს, რომ $a^2 \in P$, $(-a) \cdot (-a) = a^2$. აქედან, თუ $-a \in P$, მაშინ $a^2 \in P$.

5) $1^2 = 1 \Longrightarrow$ (4)-ის თანახმად $1 > 0$.

6) უშუალოდ გამომდინარეობს $b - a = (b + c) - (a + c)$ თანაფარდობიდან.

7) დასამტკიცებელს მივიღებთ $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$ თანაფარდობიდან და იმის გათვალისწინებით, რომ P ჩაკეტილია.

8) მტკიცდება ანალოგიურად შემდეგი თანაფარდობის გათვალისწინებით $(b - a) * c = b * c - a * c$ და $(b - a) * (-d) = a * d - b * d$.

9) $0 < a \Longrightarrow a \in P \setminus \{0\}$, თუ $a^{-1} = 0$, მაშინ $1 = a * a^{-1} = a * 0 = 0$ და თუ $a^{-1} \notin P$, (8)-ის გამო $1 = a^{-1} * a < 0 * a = 0$. ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $0 < a^{-1}$. დანარჩენი ნაწილიც მტკიცდება ანალოგიურად.

მივიღეთ მსგავსი თანაფარდობები სიდიდის ცნებისთვის დალაგებულ ველებში.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . თუ F არის დალაგებული ველი, მაშინ

$$X \longrightarrow \begin{cases} x & \text{თუ } x \geq 0 \\ -x & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

ფუნქციას ვუწოდოთ აბსოლუტური მნიშვნელობა (სიდიდე, სიგრძე ან მოდული).

ეს ფუნქცია აღინიშნება $|x|$ სიმბოლოთი და იკითხება, როგორც "x-ის მოდული".

ჩამოვაყალიბოთ თეორემები დამტკიცების გარეშე (დაამტკიცეთ თავად სავარჯიშოს სახით!).

თ ე ო რ ე მ ა . თუ F დალაგებული ველია და $a, b \in F$, მაშინ

1) $|a| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = 0$;

2) $|-a| = |a|$;

3) $|a * b| = |a| * |b|$;

4) თუ $0 \leq b$, მაშინ $|a| \leq b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $-b \leq a \leq b$;

5) $-|a| \leq a \leq |a|$;

6) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ სამკუთხედის უტოლობა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.1.

1. დაამტკიცეთ, რომ $(R, *, +)$-ში სრულდება

ა) $0 * a = a * 0 = 0$;

ბ) $a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$;

გ) $(-a) * (-b) = a * b$.

2. ვაჩვენოთ, რომ თუ $(R, *, +)$ რიგებში ყოველი $a \in R$-თვის სრულდება $a * a = 0$, მაშინ R კომუტაციურია.

3. აჩვენეთ, რომ Z_n-ში ნულის გამყოფები მხოლოდ ის ელემენტებია, რომელთაც აქვთ საერთო არატრივიალური გამყოფი n-თან. მაშასადამე, Z_p, სადაც p მარტივია არის ველი.

4. აჩვენეთ, რომ ყოველი სასრული მთელობის არე არის ველი.

5. აჩვენეთ, რომ $(Z, *, +)$ არის მთელობის არე, მაგრამ არ არის ველი.

6. ვთქვათ, $p < q$, ხოლო $(Z_p, *_p, +_p)$ და $(Z_q, *_q, +_q)$ ჩვეულებრივი ნაშთთა კლასებია მოდულით p და q. დაამტკიცეთ, რომ $Z_p \subset Z_q$, მაგრამ $(Z_p, *_p, +_p)$ არ არის ქვერგოლი $(Z_q, *_q, +_q)$ რგოლში.
აჩვენეთ, რომ $*q$ და $+q$ არ არის Z_p-ში.

7. დაამტკიცეთ, რომ $(Z_6, *, +)$ არ არის ველი.

8. აჩვენეთ, რომ სასრულ ველს აქვს არანულოვანი მახასიათებელი და რომ ნულმახასიათებლიანი ველი უსასრულოა.

9. ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, z_n 3$ არის განმარტებული 3.2-ის უკანასკნელ თეორემაში. აჩვენეთ, რომ ყოველი $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n$ გამოსახულება განსაზღვრავს ველის ერთადერთ ელემენტს.

10. $(F, *, +)$ ველში ამოხსენით განტოლება

$$\begin{aligned} a + d * y &= c, \\ x * d + y &= b. \end{aligned}$$

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	v
c	c	d	a	b
d	d	a	b	a

11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $a * b > 0$, a, $b \in F$, მაშინ ან $a, b > 0$ ან $a, b < 0$.

12. აჩვენეთ, რომ დალაგებულ ველში $a^2 + b^2 = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = b = 0$.

13. ვთქვათ, F დალაგებულია და $a, b \in F$, $0 \le a \le b$. აჩვენეთ, რომ $a^2 \le b^2$.

14. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ველი არის მთელობის არე.

15. დალაგებულ ველში $-|a| \le a \le |a|$ და $-|a| \le -a \le |a|$ უტოლობების გათვალისწინებით დაამტკიცეთ, რომ

ა) $|a \pm b| \le |a| + |b|$;

ბ) $||a| - |b|| \le |a \pm b|$.

წრფივი ალგებრა

§ 1. წრფივი ალგებრა

უმეტეს სახელმძღვანელოში ვექტორებს აღწერენ როგორც ობიექტებს, რომელთაც აქვთ "სიგრძე" და "მიმართულება". ჩვენ განვმარტავთ ვექტორებს უფრო ზოგადად, სადაც სიგრძისა და მიმართულების ცნება არსებითია.

1.1. ვექტორული სივრცეები და წრფივი გარდაქმნები.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . ვთქვათ, F ველია, V ქვესიმრავლე "+" ბინარული ოპერაციით. დავუშვათ, რომ ყოველი $a \in F$ და $x \in V$-თვის განსაზღვრულია $ax \in V$ ელემენტი. თუ სრულდება აქსიომები:

ა) $(V, +)$ კომუტაციური ჯგუფია;

ბ) $\forall\, x,\, y \in V$ და $a,\, b \in F$-თვის

$$\begin{aligned} (a+b)x &= ax + bx, \\ a(x+y) &= ax + by, \\ (a-b)x &= a(bx), \\ 1_F x &= x, \end{aligned}$$

სადაც 1_F არის F-ის მულტიპლიკაციური ერთეული,

მაშინ ამბობენ, რომ V არის ვექტორული სივრცე F-ზე. V-ს ელემენტებს უწოდებენ ვექტორებს, "+" ოპერაციებს ეწოდება ვექტორების შეკრება და $\Lambda : F \times V \to V$ ასახვას შემდეგი წესით: $\Lambda(a, x) = ax$ ეწოდება ვექტორის გამრავლება სკალარზე.

ვექტორული სივრცე F-ზე განიმარტება როგორც $(V, +, \Lambda)$ სამეული, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოაღნიშნულ აქსიომებს. ვექტორულ სივრცის ნული აღინიშნება 0-ით, აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ $0_F x = 0\ \forall\, x \in V$-თვის და $a0 = 0\ \forall\, a \in F$-თვის.

შემდეგ მაგალითებში ნაჩვენები იქნება, რომ იქნება სიმრავლეთა სხვადასხვა კლასებს აქვთ ვექტორული სივრცის სტრუქტურა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1.

1. F^n $(n \in N)$ ვექტორული სივრცეა F-ზე შემდეგი ოპერაციებით:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$a(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_n).$$

F^n-ის ნული არის $(0_F, \ldots, 0_F)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტებს ეწოდება a ვექტორის კომპონენტები.

2. ვთქვათ, B ყველა ასახვათა სიმრავლეა, $f : [a, b] \to R$. მაშინ B არის ვექტორული სივრცე R-ზე შემდეგი ოპერაციებით:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \ \forall f, g \in B,$$
$$(af)(x) = af(x), \forall a \in R.$$

3. ვთქვათ, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \Subset B$ არის ყველა უწყვეტ ასახვათა სიმრავლე B-დან. მაშინ $\mathfrak{B}$ არის ვექტორული სივრცე B-ზე განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ.

U სიმრავლეს $U \subseteq V$ ეწოდება V-ს ქვესივრცე, თუ ის თვითონ არის ვექტორული სივრცე V-ზე განსაზღვული ოპერაციების მიმართ.

$\big\{(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0_F) : \ a_i \in F\big\}$ სიმრავლე არის F^n ვექტორული სივრცის ქვესივრცე. $\mathfrak{B}$ არის B-ს ქვესივრცე. თუ U ვექტორულ სივრცეა V-ში, მაშინ $0 \in U$.

R^n ვექტორული სივრცე $(1 \leq n \leq 3)$ წარმოიქმნება ბუნებრივად. R^n-ის ოპერაციებს აქვთ გარკვეული გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. R^2-თვის ნაჩვენებია 1.1 სურათზე. თუ $r = (x, y) \in R^2$, მაშინ x და y კომპონენტები განისაზღვრება O წერტილში ურთიერთგადამკვეთი ორიგინალური წრფეების გასწვრივ. კუთხე ამ წრფეებს შორის აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით Ox ღერძიდან. ასეთ სისტემას ეწოდება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა R^2-ში. ვექტორების შეკრება R^2-ში გეომეტრიულად შეესაბამება პარალელოგრამის წესს, როგორც ეს ნაჩვენებია 1.1(გ) ნახაზზე.

R^n სივრცის გეომეტრია განხილული იქნება ქვევით, ახლა კი შემოვიტანოთ ბაზისისა და განზომილების ცნება.

თუ V ვექტორული სივრცეა F-ზე და $S \subseteq V$, მაშინ $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, $a_i \in F$, $x_i \in S$ მოცემულ ჯამს ეწოდება S-ის ვექტორული წრიფივი კომბინაცია. ამბობენ, რომ $\{x_i : \ 1 \leq i \leq k\}$ ვექტორული სასრული სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებელია, თუ

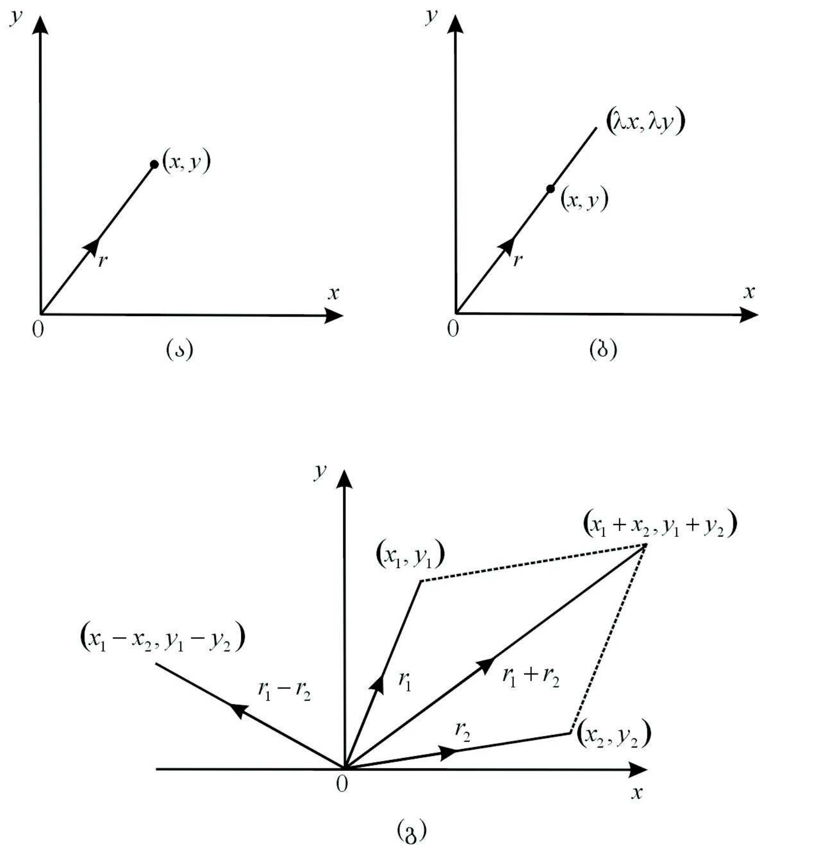
$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლეს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული. S ქვესიმრავლეს $S \leq V$ ეწოდება V სივრცის წარმომქმნელი. V-ს ნებისმიერი ელემენტი არის S-ის ელემენტების წრფივი კომბინაცია. V სივრცის დალაგებულ წრფივად დამოუკიდებელ სიმრავლეს ეწოდება V-ს ბაზისი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.2. R^3-ში $(5; 5; \sqrt{2})$ ვექტორიარის $(1; 1; 0)$ და $(0; 0; 3)$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია, რადგან

$$(5; 5; \sqrt{2}) = 5(1; 1; 0) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,(0; 0; 3).$$

$L = \big\{(1; 1; 0), (0; 0; 3)\big\}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია R^3-ში. რადგან $a(1; 1; 0) + b(0; 0; 3) = (a; a; 3b) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = 0$



ნახ. 1.1

და $b = 0$. მაგრამ L არ არის ბაზისი, რადგან ის განსაზღვრავს მხოლოდ $\{(x;x;y):\ x,\ y \in R\} \subset R^3$ ქვესივრცეს. $B = L \cup \{1;0;0\}$ ბაზისი არის L-ის გაფართოება R^3-ის ბაზისამდე. ადვილი საჩვენებელია, რომ ვქტორული სივრცის ყოველი ელემენტი ცალსახად წარმოიდგინება $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ბაზისის ელემენტებით. რადგან თუ

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \Longrightarrow 0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) e_i \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b_i - a + i = 0 \Longrightarrow b_i = a_i, \ \ 1 \le i \le n.$$

წინადადება. ვთქვათ, $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ არის V-ს წარმომქმნელი სიმრავლე და $L = \{y_1, \dots, y_l\}$ არის V-ს წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა სიმრავლე. მაშინ $m \ge l$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, $m < l$. რადგან S წარმოქმნის V-ს, ამიტომ არსებობს $a_1, a_2, \ldots, a_m \in F$ ისეთი, რომ $y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$. ამასთან, $y_1 \neq 0$. რადგან L წრფივად დამოუკიდებელი სიმრავლეა V-ში (იხ. სავარჯიშო 4.4). მაშასადამე, $a_1, a_2, \ldots, a_m$-დან რომელიღაც $\neq 0$. ვთქვათ, $a_1 \neq 0$, მაშინ $x_1 = a_1^{-1}y_1 - a_1^{-1}a_2x_2 - \cdots - a_1^{-1}a_mx_m$. ე. ი. x_1 არის $\{y_1, y_2, \ldots, x_m\}$ წრფივი კომბინაცია. რადგან S წარმოქმნის V-ს, ამიტომ $\{y_1, x_2, \ldots, x_m\}$-იც წარმოქმნის V-ს, ამიტომ $\{y_1, x_2, \ldots, x_m\}$-იც წარმოქმნის V-ს; ანალოგიურად, მივიღებთ, რომ $\{y_1, y_2, x_3, \ldots, x_m\}$ წარმოქმნის V-ს. თუ გავიმეორებთ ამ პროცესს m-ჯერ, მივიღებთ, რომ $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ წარმოქმნის V-ს, $y_{m+1} = p_1y_1 + p_2y_2 + \cdots + p_my_m$, სადაც $p_1, \ldots, p_m \in F$ და ყველა ერთდროულად არაა ნული, რადგან $y_{m+1} \neq 0 \Longrightarrow y_{m+1} - p_1y_1 - p_2y_2 - \cdots - p_my_m = 0$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ წრფივად დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $m > l$.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . ვთქვათ, B და B' არის V ვექტორული სივრცის ბაზისები. მაშინ $|B| = |B'|$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ და $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. წინა წინადადების ძალით $n \geq m$ და $m \geq n \Longrightarrow m = n$. ვექტორული

სივრცის ბაზისის სიმძლავრეს ეწოდება V სივრცის განზომილება და ფაღინიშნება $\dim(V)$-ით.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $\dim(F^n) = n$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვმარტოთ $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, სადაც

$$l_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1_F}_{i\text{-ურ ადგილას}}, 0, \ldots, 0)$$

და ვაჩვენოთ, რომ B არის F^n-ის ბაზისი. ცხადია,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i.$$

ამიტომ B წარმოქმნის F^n-ს და

$$\sum_{i=1}^{n} b_ie_i = 0 \Longrightarrow (b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0 \Longrightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0 = 0_F.$$

ე. ი. B არის ბაზისი და $\dim(V) = |B| = n$.

წინა განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ბაზისი ყოველთვის შეიცავს სასრულ რაოდენობა ელემენტებს. ამასთან, ყველა სივრცეში შეუძლებელია ბაზისი გამოყოფა. მაგალითად, B და $\mathfrak{B}$-ში არ არის ბაზისი.

ბაზისისა და განზომილების ცნება შეიძლება განზოგადდეს მთლიანად ვექტორულ სივრცეებზე, მხოლოდ ასეთი განზოგადება ჩვენ არ გვჭირდება. თუ V სივრცეს აქვს ბაზისი (ზემოთ ნახსენები), მაშინ ამობობენ, რომ სივრცეს აქვს სასრული განზომილება და მას უწოდებენ სასრულგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეს.

განვიხილოთ ახლა ვექტორული სივრცის ჰომორფიზმები.

განმარტება. ვთქვათ, V_1 და V_2 ვექტორული სივრცეებია F-ზე. ამბობენ, რომ $T : V_1 \to V_2$ ასახვა წრფივია, თუ

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(ax) = a(Tx).$$

თუ $V_2 = V_1$, მაშინ T-ს ეწოდება V_1 სივრცის წრფივი გარდაქმნა.

შემდგომში ჩვენთვის საინტერესო იქნება სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე R-ზე და მისი წრფივი გარდაქმნა. ამ თავის დანარჩენ ნაწილში V-ით აღნიშნული იქნება ვექტორული სივრცე, ხოლო $\mathrm{End}(V)$ – V სივრცის ყველა წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლე (ენდომორფიზმთა სიმრავლე).

შევნიშნოთ, რომ ზემოთქმული წინადადებების უმეტესობა შესაძლებელია წარმოვადგინოთ უფრო ზოგადი სახით.

გადავიდეთ V-ს ალგებრიდან $\mathrm{End}(V)$-ის ალგებრაზე და ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{End}(V)$ ჩაკეტილია შეკრების, გამრავლებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ I_V იგივური ასახვა და O_V ნულოვანი ასახვა წრფივია V-ზე, რადგან, განმარტების თანახმად,

$$I_V x = x \forall \in V, \quad O_V x = 0 \ \ \forall x \in V.$$

მაშასადამე, $\forall x,\, y \in V$ და $\lambda \in R$ გვაქვს

$$I_V(x+y) = x + y = I_V x + I_V y,$$
$$I_V(\lambda x) = \lambda x = \lambda(I_V x),$$
$$O_V(x+y) = 0 = 0 + 0 = O_V x + O_V y,$$
$$O_V(\lambda x) = 0 = \lambda 0 = \lambda O_V x.$$

თუ $S,\, T \in \mathrm{End}(V)$, მაშინ $S+T$ და $S \circ T$ განიმარტება ფორმულებით:

$$(S+T)x = Sx + Tx \forall\, x \in V,$$
$$(S \cdot T)x = S(Tx) \forall\, x \in V.$$

აღსანიშნავია $\mathrm{End}(V)$-ის შემდეგი თვისებები.

წინადადება. $(\mathrm{End}(V), \circ, +)$ არის ერთეულოვანი რგოლი.

დამტკიცება. მივუთითოთ დამტკიცების ძირითადი ეტაპები. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

(I) $S,\, T \in \mathrm{End}(V) \Longrightarrow S + T \in \mathrm{End}(V)$ და $S \circ T \in \mathrm{End}(V)$;

(II) $(\mathrm{End}(V), +)$ კომუტაციური ჯგუფია.

თუ $S,\, T,\, Y \in \mathrm{End}(V)$, მაშინ

(III) $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$;

(IV) $S \circ (T + U) = S \circ T + S \circ U$;

(V) $I_V \circ T = T \circ I_V = T$.

გვაქვს:

(I) $$(S+T)(x+y) = S(x+y) + T(x+y) = Sx_S y + Tx + Ty =$$
$$(Sx + Tx) + (Sy + Ty) = (S+T)x + (S+T)y.$$

ანალოგიურად

$$(S+T)(\lambda x) = S\lambda x + T\lambda x = \lambda Sx + \lambda Tx = \lambda(Sx+Tx) = \lambda(S+T)x.$$

$S\circ T \in \mathrm{End}(V)$-ის დამტკიცებად ვტოვებთ სავარჯიშოს სახით

$$\text{(II)} \qquad (S+(T+U))x = Sx + (T+U)x = Sx + (Tx+Ux) =$$
$$= (Sx+Tx)+Ux = (S+T)x + Ux = ((S+T)+U)x.$$

ე. ი. $+$ ოპერაცია ასოციაციურია და $O_V \in \mathrm{End}(V)$ ელემენტი აკმაყოფილებს პირობას:

$$T + O_V = O_V + T = T \ \ \forall\, T \in \mathrm{End}(V)$$

და არის ადიციური ერთეული $\mathrm{End}(V)$-ში. $T \in \mathrm{End}(V)$-თვის განვსაზღვროთ $T: V \to V$ ასახვა შემდეგი თანაფარდობით

$$(-T)x = -(Tx) \ \ \forall\, x \in V.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $-T \in \mathrm{End}(V)$ და $(-T+T) = T + (-T) = O_V$, ამიტომ $-T$ ასახვა არის ადიციური შებრუნებული T-თვის. $(\mathrm{End}(V);+)$-ის კომუტაციურობა გამომდინარეობს $(V;+)$-ის კომუტაციურობიდან.

(III) მტკიცება გამომდინარეობს III თავის შედეგებიდან.

(IV) ყოველი $x \in V$-თვის გვაქვს:

$$(S\circ(T+U))x = S((T+U)x) = S(Tx+Ux) = S(Tx)+S(Ux) =$$
$$= (S\circ T)x + (S\circ U)x = (S\circ T + S\circ U)x.$$

(V) დამტკიცება ტრივიალურია.

ვთქვათ, $T \in \mathrm{End}(V)$ და $\lambda \in R$. განვსაზღვროთ $\lambda T : V \to V$ ასახვა შემდეგი წესით

$$(\lambda T)x = \lambda(Tx) \ \ \forall\, x \in V.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\lambda T \in \mathrm{End}(V)$. $\Lambda : R \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ ასახვას, რომელიც განისაზღვრება $\Lambda(\lambda, T) = \lambda T$ თანაფარდობით, ეწოდება სკალარზე გამრავლება.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $(\mathrm{End}(V);+;\Lambda)$ ვექტორული სივრცეა $(\mathrm{End}(V);+)$-ზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . წინა წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ $(\mathrm{End}(V);+)$ არის კომუტაციური ჯგუფი. მაშასადამე, ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ სკალარზე გამრავლება აკმაყოფილებს პირობებს:

$$(\lambda+\mu)T = \lambda T + \mu T, \quad \lambda(S+T) = \lambda S + \lambda T,$$
$$(\lambda\mu)T = \lambda(\mu T), \quad 1_R T = T,$$

სადაც λ, $\mu \in R$ და S, $T \in \mathrm{End}(V)$. გვაქვს შემდეგი თანაფარდობების ჯაჭვი:

$$((\lambda+\mu)T)x = (\lambda+\mu)(Tx) = \lambda(Tx) + \mu(Tx) = (\lambda T)x + (\mu T)x.$$

დანარჩენი თანაფარდობები მტკიცდება ანალოგიურად.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . გამრავლების ოპერაცია რგოლში და Λ სკალარზე გამრავლება $\mathrm{End}(V)$-ში აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T),$$

სადაც $\lambda \in R$ და $S, T \in \mathrm{End}(V)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

$$(\lambda(S \circ T))x = \lambda((S \circ T)x) = \lambda(S(Tx)) = (\lambda S)(Tx) = ((\lambda S) \circ T)x,$$
$$(\lambda(S \circ T))x = \lambda((S \circ T)x) = \lambda(S(Tx)) = S(\lambda(Tx)) = (S \circ (\lambda T))x.$$

ალგებრულ სტრუქტურებს, რომელთაც აქვთ იგივე თვისებები, რაც $\mathrm{End}(V)$-ს, უწოდებენ წრფივ ალგებრებს.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . $(X; +, \circ A)$ ოთხეულს ეწოდება წრფივი ალგებრა R-ზე, თუ მოცემულია $\Lambda : R \times X \to X$ ასახვა და სრულდება:

(I) $(X; +, \Lambda)$ ვექტორული სივრცე R-ზე;

(II) $(X; \circ, +)$ რგოლია;

(III) Λ და $\circ$ აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\lambda(x_1 \cdot x_2) = (\lambda x_1) \circ x_1 = x_1 \circ (\lambda x_2)$$

$\forall\, \lambda \in R$ და $x_1,\, x_2 \in X$.

$\mathrm{End}(V)$-ში მიღებული შედეგები შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $\mathrm{End}(V)$ ზემოაღნიშნული ოპერაციებით არის წრფივი ალგებრა მულტიპლიკაციური ერთეულით.

თუ $T \in \mathrm{End}(V)$ და $\exists\, S : V \to V$ ისეთი, რომ

$$S \circ T = T \circ S = I_V,$$

მაშინ $S \in \mathrm{End}(V)$. ასეთ შემთხვევაში T-ს ეწოდება შებრუნებადი, ხოლო $S = T^{-1}$-ს T გარდაქმნის შებრუნებული.

$\mathrm{Aut}(V)$-თი აღვნიშნოთ ყველა შებრუნებული გარდაქმნების სიმრავლე $\mathrm{End}(V)$-დან, ე. ი. V-ს ავტომორფიზმთა სიმრავლე.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ არის ჯგუფი.

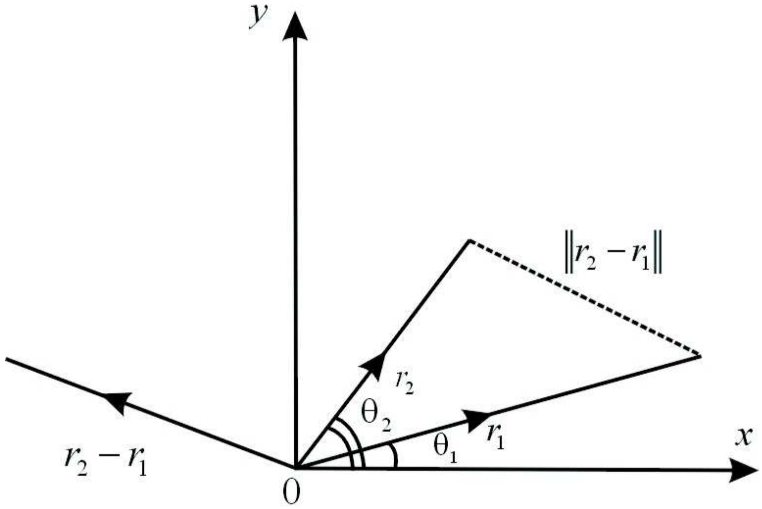
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . რადგან $I_V \in \mathrm{Aut}(V)$ და $I_V \circ I_V = I_V$, შესაბამისად არსებობს I_V^{-1}, რომელიც I_V-ის ტოლია.

ვთქვათ, $S \in \mathrm{Aut}(V)$, მაშინ

$$S^{-1} \circ S = S \circ S^{-1} = I_V.$$

ამიტომ $(S^{-1})^{-1}$ არსებობს და ემთხვევა S-ს. ე. ი. $S^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$, თუ $S', T \in \mathrm{Aut}(V)$, მაშინ

$$(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I)v.$$



ნახ. 1.2

ანალოგიურად, $(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = I_V$, ამიტომ $(S \circ T)^{-1}$ არსებობს და რადგან $S, T \in \mathrm{Aut}(V) \Longrightarrow S \circ T \in \mathrm{Aut}(V)$. ოპერაციის ასოციაციურობა უკვე დამტკიცებულია.

1.2. სტრუქტურული გამოსახულებები R^n-ში. განვიხილოთ R^n-ის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, სადაც ვექტორის "სიგრძეს" და "მიმართულებას" აქვს გეომეტრიულიაზრი. განვიხილოთ R^2. თუ $r(x,y) \in R^2$, მაშინ მანძილი (x,y) წერტილიდან $(0,0)$ წერტილამდე არის $(x^2+y^2)^{1/2}$. ეს მანძილი აღვნიშნოთ $\|r\|$-ით, ეს ფაქტიურად არის $\|\cdot\| : R^2 \to R$ ასახვა. მას ეწოდება სიგრძე (იგივეა, რაც მოდული ან ნორმა). განვიხილოთ $r_1(x_1,y_1)$ და $r_2(x_2,y_2)$ წერტილები (სურ. 1.4)

ვთქვათ, θ_1 და θ_2 $[0,\pi]$ შუალედიდან აღებული კუთხეებია, რომელსაც ქმნის r_1 და r_2 ვექტორები ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. მაშინ r_1 და r_2 ვექტორებს შორის მანძილია $\|r_2 - r_1\|$, ხოლო $\theta = \theta_2 - \theta_1$ – მათ შორის კუთხეა,

$$\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \theta_2 =$$
$$= \frac{x_1}{\|r_1\|}\,\frac{x_2}{\|r_2\|} + \frac{y_1}{\|r_1\|}\,\frac{y_2}{\|r_2\|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\|r_1\|\,\|r_2\|}\,.$$

$x_1x_2 + y_1y_2$ გამოსახულება შეგვიძლია გამოვიყენოთ მანძილების და კუთხეების დასათვლელად r^2-ში. განვსაზღვროთ $\Phi : R^2 \times R^2 \to R$ ასახვა შემდეგნაირად

$$\Phi(r_1, r_2) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

მაშინ

$$\|r\| = (\Phi(r_1,r_2))^{1/2}, \quad \cos\theta = \frac{\Phi(r_1,r_2)}{[\Phi(r_1,r_1)\Phi(r_2,r_2)]^{1/2}}\,.$$

θ კუთხე R^2-ის ორ ვექტორს შორის განიმარტება ცალსახად იმ პირობით, რომ $0 \leq \theta \leq \pi$. როცა $\theta = 0$, ან $\theta = \pi$, ამბობენ, რომ r_1 და r_2 არაელელეურებია (კოლინეარულია).

გამოყენებით მათემატიკაში $\Phi(r_1, r_2)$-ს აღნიშნავენ $r_1 \cdot r_2$-ით და უწოდებენ სკალარულ ნამრავლს. თუ $r_1 \neq 0$ და $r_2 \neq 0$, მაშინ $r_1 \cdot r_2 = 0$. მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\theta = \pi/2$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ r_1 და r_2 ურთიერთმართობულია (ორთოგონალურია). მოვიყვანოთ სკალარული ნამრავლის თვისებები.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა .

1) $r \cdot r \geq 0$ და $r \cdot r = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $r = (0, 0)$;

2) $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \; \forall r_1, \, r_2 \in R^2$;

3) $r_1 \cdot (r_2 + r_2) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 \; \forall r_1, \, r_2, \, r_3 \in R^2$;

4) $\lambda(r_1 \cdot r_2) = (\lambda r_1) \cdot r_2 = r_1 \cdot (\lambda r_2), \, \forall r_1, \, r_2 \in R^2, \, \lambda \in R$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

1) თუ $r = (x, y) = R^2$, მაშინ $r \cdot r = (x^2 + y^2) \geq 0 \; \forall x, \, y \in R$ და $r \cdot r = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = 0$ და $y = 0$.

2) $r_1 \cdot r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1 = r_2 \cdot r_1$.

3) და (4) მტკიცდება ანალოგიურად (დაამტკიცეთ!).

ზოგადად, თუ V ვექტორული სივრცეა R-ზე და $\Phi : V \times V \to R$ ასახვა აკმაყოფილებს (1)–(4) პირობებს, მაშინ $(V; \Phi)$ ვექტორულ სივრცეში განიხილება კუთხისა და სიგრძის ცნებები. Φ ასახვას ეწოდება V-ს შიგა ნამრავლი, ხოლო $(V; \Phi)$-ს – ვექტორული სივრცის შიგა ნამრავლი. კერძოდ, თუ განვმარტავთ $\Phi : R^n \times R^n \to R \; (n \in N)$ ასახვას შემდეგი წესით:

$$\Phi(a, b) \equiv a \cdot b = \sum_{i=2}^{n} a_i b_i,$$

სადაც $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, მაშინ ეს ასახვა იქნება აღნიშნული თვისებების მქონე. განვიხილოთ a ვექტორის სიგრძე, როგორც $\|a\| = (a \cdot a)^{1/2}$. ხოლო

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \, \|b\|} \quad (\text{კუთხე} \in [0, \pi]).$$

R^b შესაძლებელია განიმარტოს სხვა შიგა ნამრავლებიც.

ზემომოყვანილ გამრავლებას უწოდებენ ჩვეულებრივს ან ევკლიდურ ნამრავლს.

როცა $n = 1$, ეს ნამრავლი არის ჩვეულებრივი გამრავლება R-ში, ხოლო $\arccos \frac{xy}{|x| \, |y|}$ კუთხე არის 0 ან π, xy-ის ნიშნის შესაბამისად. $\| \cdot \|$ ნორმა არის R-ის $| \cdot |$ მოდულის განზოგადება და აქვს ანალოგიური თვისებები. მაგალითად,

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\|a\| \geq 0 \;\; \forall\, a \in R^n,$$
$$\|a\| = 0 \;\; \text{მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } a = 0,$$
$$\|\lambda a\| = |\lambda|\, \|a\| \;\; \forall\, a \in R^n \;\; \text{და } \lambda \in R,$$
$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \;\; \forall\, a,\, b \in R^n.$$

$a \in R^n$ ვექტორს ეწოდება ერთეულოვანი, თუ $\|a\| = 1$ (ეს იგივეა, რომ $a{\cdot}a = 1$). თუ $a \in R^n \backslash \{0\}$, მაშინ $\frac{a}{\|a\|}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც a ვექტორის თანამიმართულია. ერთეულოვან ვექტორს აღნიშნავენ $\widehat{a}$-ით.

თუ $B = \left\{\widehat{e}_1, \widehat{e}2, \dots, \widehat{e}_n\right\}$ არის R^n-ის ბაზისი ისეთი, რომ

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \; i \neq j \\ 1 & \text{თუ } \; i = j \end{cases},$$

მაშინ ბაზისს ეწოდება ორთონორმირებული.

R^n-ის ორთონორმირებულ ბაზისს, რომელიც აგებულია შემდეგი წესით

$$\widehat{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{\quad 1 \quad}_{i\text{-ურ ადგილას}}, 0, \dots, 0), \;\; 1 \leq i \leq n.$$

უწოდებენ სტანდატულ ბაზისს R^n-ში. R^2-ის და R^3-ის სტანდარტული ბაზისებია $(\widehat{i}, \widehat{j})$ და $(\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k})$. განვიხილოთ ამ ბაზისთა გეომეტრიულ იინტერპრეტაცია. i და j ვექტორები R^2-ში ქმნიან მარჯვენა სისტემას, ხოლო მესამე oz ღერძი მართობია $\widehat{i}$ და $\widehat{j}$ ვექტორების შემცველი სიბრტყის, ამასთან მიმართულია ისე, რომ სამეული $(\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k})$ იყოს მარკვენა (იხ. სურ 1.5).

განმარტება. ვთქვათ, $a = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ და $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, a და b ვექტორების $a \times b$ ვექტორული ნამრავლი არის

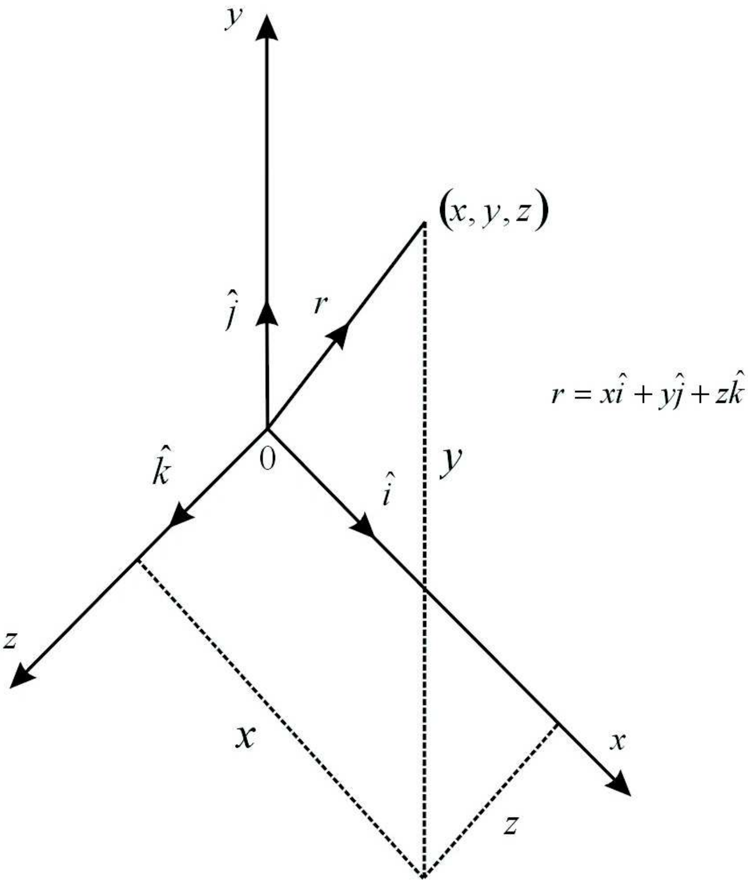
$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ვექტორი. "$\times$" ოპერაცია შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $R^3 \times R^3 \to R^3$ ასახვა.

წინადადება. თუ $a,\, b \in R^3$, მაშინ

1) $\|a \times b\| = \|a\|\, \|b\| \sin\theta$, სადაც θ არის კუთხე a-სა და b-ს შორის;

2) $a \times b$ ვექტორი მართობულია a და b ვექტორების;



ნახ. 1.3

დამტკიცება.
1) $\|a \times b\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$

$$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 -$$
$$-2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_3b)^2 =$$
$$= \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2\Big(1 - \frac{(a \cdot b)^2}{\|a\|^2\|b\|^2}\Big) =$$
$$= \|a\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2\theta) = \|a\|^2\|b\|^2\sin^2\theta.$$

2) ადვილი საჩვენებელია, რომ $a \cdot (a \times b) = 0$ და $b \cdot (a \times b) = 0$, $\Longrightarrow$ დასამტკიცებელი.

$a \times b$ ვექტორის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისთვის შევნიშნოთ, რომ თუ

$$a = (a_1, 0, 0), \quad b = (b_1, b_2, 0),$$

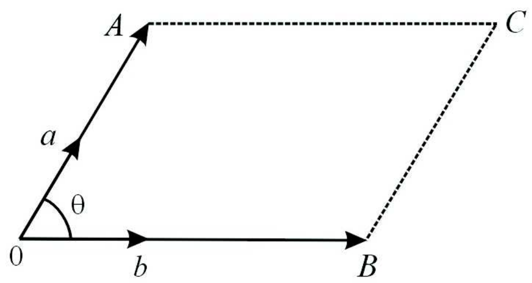
მაშინ $a \times b = (0, 0, a_1 b_2)$ ამიტომ, როცა $a_1 > 0$, მაშინ

$$a \times b = \begin{cases} |a_1 b_2|\widehat{k}, & b_2 > 0 \\ -|a_1 b_2|\widehat{k}, & b_2 < 0 \end{cases},$$

$a \times b$ ვექტორის მიმართულება უნდა ავირჩიოთ ისე, რომ სამეული $(a, b, a \times b)$ იყოს მარჯვენა. ვექტორული ნამრავლი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$a \times b = \|a\| \cdot \|b\| \sin\theta \cdot \widehat{n},$$

სადაც $\widehat{n}$ ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც მართობული a და b ვექტორების. ამასთან, (a, b, n) მარჯვენაა. თუ $a \times b = 0$, მაშინ a და b წრფივად დამოკიდებულია, და თუ $\|a\| > 0$ და $\|b\| > 0$, მაშინ $a \times b = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ a და b კოლინეარულია, ვთქვათ, მოცემულია a და b ვექტორები (იხ. სურ 5.6) მაშინ $\|a \times b\|$ – ეს არის $OACB$ პარალელოგრამის ფართობი და $a \times b$-ს განიხილავენ, როგორც ფართობის ვექტორს.



ნახ. 1.4

მოვიყვანოთ ზოგიერთი თვისება (დაამტკიცეთ!).

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა .

1) $a \times b = -b \times a$;

2) $a \times (b + c) = a \times b = a \times c$;

3) $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$;

4) $\widehat{i} \times \widehat{j} = \widehat{k}$, $\widehat{j} \times \widehat{k} = \widehat{i}$, $\widehat{k} \times \widehat{i} = \widehat{j}$;

5) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$;

6) $a \times (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = -a \cdot (c \times b) = -b \cdot (a \times c) = -c(b \times a)$.

$a\times(b\times c)$ გამოსახულებას ხშირად უწოდებენ ორმაგ ვექტორულ ნამრავლს, ხოლო $a\cdot(b\times c)$-ს – შერეულ ნამრავლს. გეომეტრიულად $a\cdot(b\times c)$ არის a, b, c ვექტორებზე დაჭიმული პარალელეპიპედის მოცულობა.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . $\{a,b,c\}\subset R^3$ წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a\cdot(b\times c)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავუშვათ, რომ a, b და c წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ $\exists\,\lambda,\mu,\sigma\in R$, რომლებიც ერთდროულად არაა ნული და სრულდება

$$\lambda s+\mu b+\sigma c=0.$$

ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda\neq 0$, მაშინ

$$\begin{aligned}a=-\lambda^{-1}(\mu+\sigma c),&\\ a\cdot(b\times c)&=-\lambda^{-1}(\mu+\sigma c)\cdot(b\times c)=\\ &=-\lambda^{-1}\big[\mu b\cdot(b\times c)+\sigma c\cdot(b\times c)\big]=0.\end{aligned}$$

პირიქით, თუ $a\cdot(b\times c)=0$, მაშინ ან ა) a, b და c ვექტორებიდან ერთ-ერთი ნულია, ან ბ) a ორთოგონალურია $b\times c$ ვექტორის. b და c ორთოგონალურია $b\times c$ ვექტორის, ამიტომ $a=\lambda' b+\mu' c$ რაიმე $\lambda',\mu'\in R$. ე. ი. a, b და c წრფივად დამოკიდებულია.

და ბოლოს, მოკლედ განვიხილოთ "ვექტორული" ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკითხი. ე. ი. R^n-ზე მოცემულია ჩვეულებრივი ნორმა. განვსაზღვროთ $f:R\to R^n$ წარმოებული ფუნქცია.

ერთგანზომილებიანი შემთხვევის განზოგადებით ვიტყვით, რომ f დიფერენცირებადია t წერტილში, თუ $\exists\,F(t)=(F_1(t),\dots,F_n(t))\in R^n$ ისეთი, რომ

$$\Big\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-F(t)\Big\|\longrightarrow 0,\ \text{ როცა }\ t\to 0,$$

ე. ი. თუ f-ის კომპონენტებია $f_1,\dots,f_n$ ისეთი, რომ

$$\Big\|\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}-F_1(t),\dots,\frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}-F_n(t)\Big\|\longrightarrow 0.$$

როცა $h\to 0$. ცხადია, თითოეული კომპონენტი მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $h\to 0$, ამიტომ $\frac{df}{dt}$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\frac{df_1}{dt},\dots,\frac{df_n}{dt}$ და

$$\frac{df}{dt}=\Big(\frac{df_1}{dt},\dots,\frac{df_n}{dt}\Big).$$

სხვაგვარად, "ვექტორული" ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის გვჭირდება მისი კომპონენტების დიფერენცირებადობა. მაგალითად, თუ $f:R\to R^3$ განსაზღვრულია შემდეგი წესით

$$f(t)=(2t^2,\ln t,\sin^2 t),$$

მაშინ

$$\frac{df}{dt}=\Big(4t,\frac{1}{t},2\sin t\cos t\Big).$$

ვთქვათ, მოცემულია $f : R \to R^3$ და $g : R \to R^3$. განვსაზღვროთ $f \cdot g : R \to R^3$ და $f \times g : R \to R^3$. დავუშათ, რომ

$$(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t) \text{ და } (f \times g)(t) = f(t) \times g(t),$$

მაშინ

$$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = f \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} \cdot g,$$
$$\frac{d}{dt}(f \times g) = f \times \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} \times g.$$

(დაამტკიცეთ!)

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 5.4.

1. თუ V არის ვექტორული სივრცე F ველზე, მაშინ

$$O_F x = 0 \;\; \forall x \in V,$$
$$a0 = 0 \;\; \forall a \in F.$$

2. $(a; 1; 3) \in R^3$ ვექტორი $(a \in R)$ წარმოადგინეთ

$$S\{(1;1;0), (0;2;0), (0;0;4)\}$$

ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით. აჩვენეთ, რომ S არის წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა. არის თუ არა S სისტემა R^3-ის ბაზისი?

3. აჩვენეთ, რომ თუ $\{x_1, \ldots, x_m\}$ არის V სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, მაშინ $x_i \neq 0 \; \forall i$-თვის, $1 \leq i \leq m$.

4. ა) რომელია წრფივი გარდაქმნა?

$$T_1(x, y) = (a, y), \;\; a \in R \setminus \{0\},$$
$$T_2(x, y) = (\lambda x + y, \sigma y), \;\; \lambda, \sigma \in R \setminus \{0\},$$
$$T_3(x, y) = (x^2, 0),$$
$$T_4(x, y) = (x, 0).$$

ბ) განმარტეთ $T_2 \circ T_4$ და $T_4 \circ T_2$ ნამრავლი.

გ) დაამტკიცეთ, რომ თუ $T \in \mathrm{End}(V)$, მაშინ $T0 = 0$.

5. ა) თუ V არის ვექტორული სივრცე, მაშინ $p : V \to V$ გარდაქმნას ეწოდება პროექცია, თუ $(p \circ p)x = Px, \forall x \in V$. დაამტკიცეთ, რომ $p : R^2 \to R^2$ გარდაქმნა, სადაც

$$p(x, y) = \Big(\frac{1}{a-b}(ax - y + c); \frac{b}{a-b}(ax - y + c) + c\Big),$$

a, b, $c \in R$ და $a \neq b$, არის პროექცია R^2-ში. რა პირობებში სრულდება $p \in \mathrm{End}(R^2)$?

ბ) (4ა) სავარჯიშოს რომელი გარდაქმნაა პროექცია?

6. ვთქვათ, $T \in \mathrm{End}(V)$. $N(T) = \{x \in V : \ Tx = 0\}$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ნულოვანი ქვესივრცე (სირთვი). აჩვენეთ, რომ $N(T)$ ქვესივრცეა V-ში. აჩვენეთ, რომ T-ს ანასახი ასევე ქვესივრცეა V-ში.

7. ვთქვათ, V ვექტორული სივრცეა R-ზე და $T \in \mathrm{End}(V)$. ამბობენ, რომ T-ს აქვს საკუთრივი მნიშვნელობა $\lambda \in R$, თუ $\exists$ არანულოვანი $x \in V$ ვექტორი, რომ $Tx = \lambda x$. x-ს ეწოდება T-ს საკუთრივი ვექტორი, რომელიც შეესაბამება λ-ს.

ა) აჩვენეთ, რომ თუ $T \in \mathrm{End}(V)$ ისეთია, რომ

$$T(x,y) = (x + ay; y),$$

მაშინ $\forall\,(p,0)$ სახის ვექტორი $(p \neq 0)$ არის T-ს საკუთრივი ვექტორი. რომელია მისი საკუთრივი მნიშვნელობა?

ბ) ვთქვათ, $T \in \mathrm{End}(V)$. V_λ-ით აღვნიშნოთ λ საკუთრივი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორების სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $V_\lambda \cup \{0\}$ რის ვექტორული ქვესივრცე V-ში. დაამტკიცეთ ანალოგიური დებულება $N(T)$-თვის.

8. იპოვეთ T_1, $T_2 \in \mathrm{End}(R^2)$-ის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები:

$$T_1(x,y) = (-y, x), \quad T_2(x,y) = (x, -y).$$

რა გეომეტრიული აზრი აქვს T_1-ს და T_2-ს?

9. დაამტკიცეთ

ა) თუ S, $T \in \mathrm{End}(V)$, მაშინ $S \circ T \in \mathrm{End}(V)$;

ბ) თუ $T \in \mathrm{End}(V)$-თვის არსებობს $S : V \to V$ გარდაქმნა ისეთი, რომ

$$S \circ T = T \circ S = I_V,$$

მაშინ $S \in \mathrm{End}(V)$;

გ) თუ $T \in \mathrm{Aut}(V)$, მაშინ $\Lambda^0(T) = \{0\}$.

10. დაამტკიცეთ, რომ თუ r_1, r_2, $r_3 \in R^2$ და $\lambda \in R$, მაშინ

ა) $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$;

ბ) $\lambda(r_1 \cdot r_2) = (\lambda r_1) \cdot r_2 = r_1 \cdot (\lambda r_2)$;

გ) $|r_1 \cdot r_2| \leq \|r_1\|\,\|r_2\|$;

დ) $\|r_1 - r_2\|^2 = \|r_1\|^2 + \|r_2\|^2 - 2\|r_1\|\,\|r_2\| \cos\theta$, სადაც θ არის კუთხე r_1-სა და r_2-ს შორის.

ე) $\big|\|r_1\| - \|r_2\|\big| \leq \|r_1 + r_2\| \leq \|r_1\| + \|r_2\|$. (ბოლო უტოლობა ცნობილია სამკუთხედის უტოლობის სახელით.)

ახსენით მათი გეომეტრიული აზრი.

11. გამოთვალეთ $a = (1,1,1)$, $b = (1,p,0)$, $p \in R$ ვექტორების პარალელური ერთეულოვანი ვექტორები. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც მართობულია a და b ვექტორების ერთდროულად.

12. ვთქვათ, a, b, $c \in R^3$ და $\lambda \in R$. დაამტკიცეთ, რომ

1) $a \times b = -b \times a$;

2) $a \times (b + c) = a \times b = a \times c$;

3) $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$;

4) $\widehat{i} \times \widehat{j} = \widehat{k}$, $\widehat{j} \times \widehat{k} = \widehat{i}$, $\widehat{k} \times \widehat{i} = \widehat{j}$;

5) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$;

6) $a(b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = -a \cdot (c \times b) = -b \cdot (a \times c) = -c(b \times a)$.

13. გამოიყენეთ 5.4.12-ის შედეგები და აჩვენეთ, რომ $X : R^3 \to R^3$ არა ასოციურია (ე. ი. $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$, ზოგადად).

14. ვთქვათ, $g : R \to R^3$. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\dfrac{d}{dt}(f \cdot g) = f \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} \cdot g$;

ბ) $\dfrac{d}{dt}(f \times g) = f \times \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} \times g$.

გ) თუ $\|f(t)\| = a \ \forall t$-თვის, სადაც a $(a \in R)$ მუდმივია, მაშინ $\frac{df}{dt}$ ორთოგონალურია f-ის ყველა t-თვის. გამოთვალეთ

$$f(t) = (a\cos t, a\sin t, 0), \quad g(t) = (0, 1, t).$$

მესერები და ბულის ალგებრები

§ 1. მესერები და ბულის ალგებრები

ბულის ალგებრას ჩვენ უკვე გავეცანით ზემოთ. ვაჩვენებთ, რომ ბულის არაერთი ალგებრა არსებობს. დავიწყოთ უფრო ზოგადი სტრუქტურების, ე. წ. მესერების შესწავლა. ზოგიერთი მესერი ძალიან მნიშვნელოვანია გამოთვლების თეორიაში აპროქსიმაციის თვალსაზრისით. ერთი პროგრამა ახდენს მეორის აპროქსიქმაციას, თუკი მოცულობათა სივრცეში ერთი და იგივე გამოთვლები ტარდება.

გამოთვლა არის რაიმე მოცემულობებზე პროგრამის მოქმედების შედეგი. ამასთან, ეს პროგრამა დაწრილია რაიმე ენაზე. საზოგადოდ, გამოთვლილი თვისებები ჩაწერილი უნდა იყოს იმ ენის ტერმინებში, რომლითაც ეს პროგრამაა დაწერილი.

1.1. მესერები. შეგახსენებთ, რომ ρ ბინარული მიმართება S სიმრავლეზე არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება, თუ სრულდება რეფლექსურობა, ტრანზიტულობა და ანტისიმეტრიულობა. ე. ი. (S, ρ) არის ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე, შესაძლებელია ρ ჩაიწეროს, როგორც "$\leq$", ხოლო $(S, \leq)$ – უბრალოდ S. ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეს ეწოდება წრფივად დალაგებული (ჯაჭვი), თუ $\forall\, x, y \in S$ ან $x \leq y$ ან $y \leq x$, ან სრულდება ორივე ერთად. საზოგადოდ, ნებისმიერი ნაწილობრივი დალაგება შეიძლება წარმოდგინდეს, როგორც წრფივი დალაგების გაერთიანება.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი სასრული წრფივი დალაგება $(A, \leq)$ შეიძლება წაროვადგინოთ, როგორც

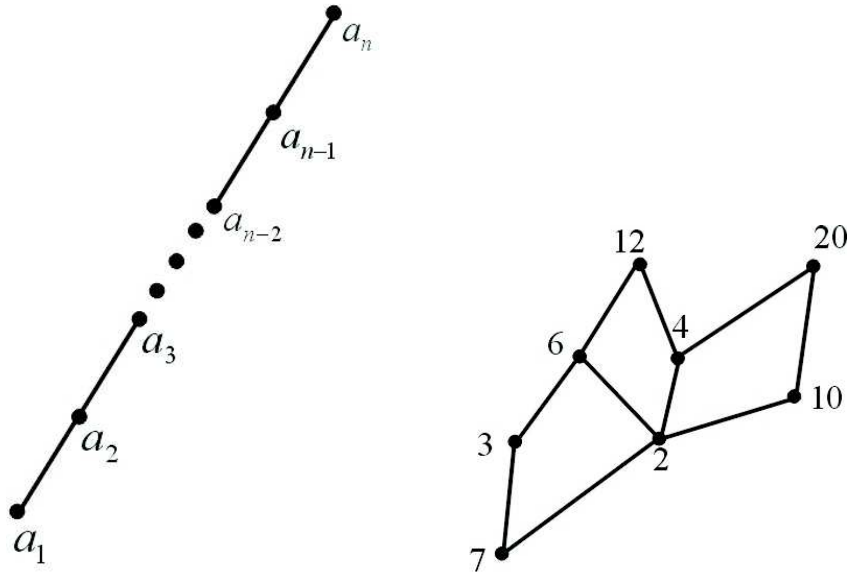
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdot \leq a_n.$$

ასეთ შაემთხვევაში რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის დამტკიცება არაა საჭირო. 1.1(ა) ნახაზზე ნაჩვენებია $(A, \leq)$-ს წარმოდგენა. A-ს ჩავწერთ, როგორც $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . სასრულ სიმრავლეს ნაწილობრივ დალაგება შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც რაღაც ქვესიმრავლეთ წრფივი დალაგებების გაერთიანება. (დაამტკიცეთ!)

ამ ფაქტის გამოყენებით, ყოველი ნაწილობრივი დალაგება შეიძლება წარმოვადგინოთ ჯაჭვების საშუალებით. მიღებულ დიაგრამას უწოდებენ ჰასის დიაგრამას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. $\rho = \big\{(x, y \cdot x)$ არის y-ის გამყოფი$\big\}$ მიმართება, რომელიც განსაზღვრულია $\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$ სიმრავლეზე, გვაძლევს ჰასის



ნახ. 1.1

დიაგრამას (იხ. ნახ. 1.1(ბ)) და დაყოფილია ჯაჭვებად:

$$\{(1,2,4,12),(1,3,6,12),(2,6),(4,20),(2,10,20)\}$$

ეს დაყოფა ეკვივალენტურია $\{(2,6,12),(1,3,6),(1,2,10,20),(2,4,20),(4,12)\}$ სისტემის.

შევნიშნოთ, რომ მიუხედავად იმისა, რომ $1\rho x$ $\forall x$-თვის მცემული სიმრავლიდან, დიაგრამაზე არ არის 1-დან გამავალი 8 ისარი. ეს მიიღწევა რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის თვისების გამო.

ვთქვათ, მოცემულია $(A,\leq)$ და $B\subseteq A$. ბუნებრივია ისმის კითხვა: B არის თუ არა შემოსაზღვრული ზევიდან (ქვევიდან) A-ს ელემენტებით? შემდეგში მოვძებნით უმცირეს ზედა საზღვარს (უდიდეს ქვედა საზღვარს), რომელიც აღინიშნება sup (inf). ეს განმარტებები მოცემული იყო თავი 2-ის მე-5 პარაგრაფში. მათ გამოვიყენებთ მესერების განხილვისას.

განმარტება. ნაწილობრივ დალაგებულ $(A,\leq)$ სიმრავლეს ეწოდება მესერი, თუ მის ყოველ წყვილს აქვს სუპრემუმი და ინფიმუმი. ამას აღვნიშნავთ შემდეგნაირად:

$$X\wedge Y-\inf(\{x,y\}),\quad X\vee Y=\sup(\{x,y\}).$$

ყოველი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე მესერი არ არის. მაგალითად, 1.1. მაგალითის ნაწილობრივ დალაგებუილი სიმრავლე არ არის მესერი, რადგან $12\vee 20$ არ არის განსაზღვრული.

$\wedge$ და $\vee$ ოპერაციები ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლის წყვილებს შორის შეიძლება კიდევ უფრო განვაზოგადოთ.

ვთქვათ, $\wedge X = \bigwedge\limits_{x\in X} x = \inf X$, $\vee X = \bigvee\limits_{x\in X} x = \sup X$ ეს არის სასრული არაცარიელი X სიმრავლის $\sup X$ და $\inf X$.

ადვილი სანახავია, რომ არსებობს მრავალი სპეციალური ტიპის მესერები, რომელშიც შესაძლებელია სხვადასხვა ოპერაციების ჩატარება. განვიხილოთ სმი მათგანი.

განმარტება. L მესერს ვუწოდოთ დისტრიბუციული, თუ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$\forall\, x,\, y,\, z \in L$.

ყველა მესერი არ არის დისტრიბუციული.

მაგალითი 1.2. 1.9 ნახაზზე გამოსახული მესერი არ არის დისტრიბუციული, რადგან

$$b \wedge (d \vee c) = b \wedge e = b,$$

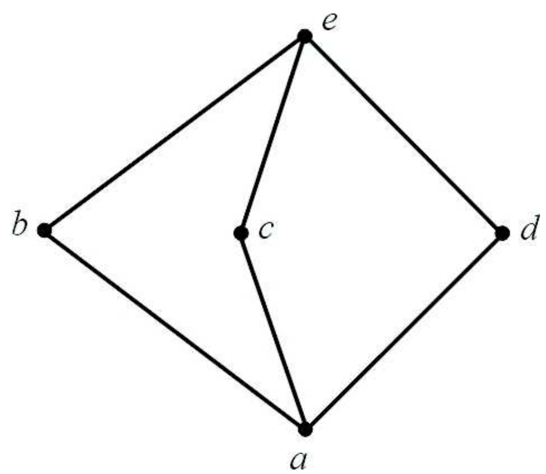
მაშინ

$$(b \wedge d) \vee (b \wedge c) = a \vee a = a.$$

წინადადება. ვთქვათ, $(L, \wedge, \vee)$ დისტრიბუციულ მესერში სრულდება თანაფარდობები

$$x \vee y = x \vee z_1, \quad x \wedge y = x \wedge z.$$

მაშინ $y = z$.



ნახ. 1.2

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევნიშნოთ, რომ
ა) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$;
ბ) $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$;
გ) $(a \wedge b) \vee a = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.
ამიტომ

$$y = y \vee (y \wedge x) = y \vee (z \wedge x) = (y \vee z) \wedge (y \vee x) = \\ = (z \vee y) \wedge (z \vee x) = z \vee (y \wedge x) = z \vee (z \wedge x) = z.$$

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . დავუშვათ, რომ $(L, \wedge, \vee)$ მესერში $0, 1 \in L$ და $0 \leq x \leq 1$, $\forall x \in L$, მაშინ

$$x \vee 1 = 1, \;\; x \wedge 1 = x, \;\; x \wedge 0 = 0, \;\; x \vee 0 = 0, \;\; \forall x \in L.$$

ასეთ მესერს უწოდებენ მესერს **გ ა ს რ უ ლ ე ბ ი თ**, თუ $\forall x \in L$-თვის $\exists \overline{x} \in L$ ისეთი, რომ $x \wedge \overline{x} = 0$, $x \vee \overline{x} = 1$ ($\overline{x}$-ს ეწოდება x-ის გასრულება).

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . თუ $(L, \wedge, \vee)$ არის დისტრიბუციული მესერი გასრულებით, მაშინ გასრულება ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, რომ x, y, $z \in L$ და

$$x \vee y = x \vee z (= 1), \quad x \wedge y = x \wedge z (= 0).$$

მაშინ წინა წინადადების ძალით $y = z$.

მესერის მესამე, სპეციალური ტიპი უჩვეულობა იმ თვალსაზრისით, რომ სასრული მესერების შესახებ არ ამბობს რაიმე ახალს.

ჩამოვაყალიბოთ მესერთა სხვაგვარი განმარტება წინადადების სახით.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა . L არის მარტივი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vee x$ და $\wedge x$ არსებობს L-ის ყოველი არაცარიელი, სასრული X ქვესიმრავლისთვის.

(მტკიცდება ინდუქციით, დაამტკიცეთ!)

თუ L-ში განსაზღვრული $\wedge L$, იგი აღინიშნება O-ით და ეწოდება უმცირესი ელემენტი L-ში. ანალოგიურად, თუ L-ში არსებობს $\vee L$, აღინიშნება 1-ით და ეწოდება L-ის უდიდესი ელემენტი. განმარტების ძალით $\vee \varnothing = 0$.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . L მესერს ეწოდება სრული, თუ $\vee x$ და $\wedge x$ არსებობს ყველა X ქვესიმრავლეთათვის L-დან.

ყველა სასრული მესერი სრულია. განვიხილოთ Q სიმრავლე ჩვეულებრივი $\leq$ დალაგებით და უსასრულო სიმრავლე π-რიცხვის მიახლოებისას, სადაც რიცხვები ერთმანეთისგან განსხვავდება ათობითი თანრიგის მხოლოდ ერთი ციფრით. ამ აპროქსიმაციის ზედა ზღვარი, ცხადია, არის π, მაგრამ $\pi R \setminus Q$, მაშასადამე, $(Q, \leq)$ არ არის სრული მესერი. $(R, \leq)$ მესერი სრულია და $Q \subseteq R$.

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ შესაძლებელია ყოველი მესერის გასრულება სრულ მესერამდე, თუმცა ამ საკითხს ჩვენ არ შევეხებით.

1.2. ბულის ალგებრები. მოვიყვანოთ ფორმალური განმარტება ზოგადი ბულის ალგებრების (ასე ეწოდება XIX საუკუნის მათემატიკოს ჯ. ბულის პატივსაცემად). სიმრავლეთა ალგებრა ბულის ალგებრის კერძო შემთხვევაა და თუმცა განსხვავებული ბულის ალგებრები სტრუქტურულად ,სგავსია, უნდა შევნიშნოთ, რომ ისინი შეიძლება არ იყოს ერთმანეთში ჩადგმული.

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . B სიმრავლეს $\vee$, $\wedge$ და $-$ ($\vee$ – "ან" ოპერაცია, $\wedge$ – "და" ოპერაცია, $-$ გასრულების ოპერაციაა, ხშირად $\vee$-ს ეწოდება დიზუნქციას, ხოლო $\wedge$-ს კონიუნქციას). ოპერაციებით ეწოდება ბულის ალგებრა. ბინარული ოპერატორები: $\wedge$, $\vee$ და უნარული ოპერატორი B-ს ორ განსხვავებულ ელემენტთან 0 და 1 აკმაყოფილებენ შემდეგ აქსიომებს: ყოველი a, b, და C-თვის B-დან

1) $a \vee b = b \vee a$;

2) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

3) $a \vee 0 = a$;

4) $a \vee \overline{a} = 1$;

5) $a \wedge b = b \wedge a$;

6) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

7) $a \wedge 1 = a$;

8) $a \wedge \overline{a} = 0$;

9) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

10) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

ამრიგად, "და" და "ან" კომუტაციური, ასოციაციური და დისტრიბუციულია. თვითეულ მათგანს აქვს ერთეულოვანი ელემენტი და როდესაც გვაქვს ელემენტის კომბინაცია თვის დამატებასთან "და/ან"-ის საშუალებით, შედეგად ვიღებთ "ან/და"-ს მიმართ ერთეულოვან ელემენტს; ზემომოყვანილი ოპერატორები დაკავშირებულია კომპიუტერულ ლოგიკასთან, რომლის საშუალებითაც ხდება სქემების აგება. სხვა ბულის ალგებრებში შესაძლებელია უფრო მოსახერხებელი იყოს $\vee$ ჩავთვალოთ როგორც გაერთიანება, ხოლო $\wedge$ – როგორც თანაკვეთა. $\overline{a}$ ოპერაციას ჩაწერენ როგორც a' ან $\rceil a$.

ბულის ალგებრა შეგვიძლია განვმარტოთ როგორც დისტრიბუციული მესერის გასრულება. ამიტომ ბულის $(B(x), \cap, \cup')$ ალგებრის ანალოგიურად არაცარიელი X სიმრავლისთვის შეგვიძლია მივიღოთ მთელი რიგი თვისებები.

ინვოლუციის კანონი (ორმაგი უარყოფის კანონი). x-ის დამატების დამატება არის x, $x \in B$.

შთანთქმის კანონი. $\forall\, a,\, b \in B$-თვის სამართლიანია

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

იდემპოტენტურობის კანონი. ყოველი ელემენტი B-დან იდემპოტენტურია $\wedge$ და $\vee$-ის მიმართ.

მორგანის კანონი. $\forall\, a,\, b \in B$-თვის სამართლიანია

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}, \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

ინვოლუციურობისა და მორგანის კანონებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ავიღებთ B ბულის ალგებრას $(B, \vee, \wedge, -)$ და გარდავქმნით ახალ სისტემად ან x-ის ასახვით $\overline{x}$, ან $\wedge$ და $\vee$ ოპერაციების დახმარებით, მაშინ მიღებული სისტემა კვლავ ბულის ალგებრაა. ეს ფაქტი ცნობილია ორადულობის პრინციპის სახელით. მართლაც, მორგანის კანონები შეიძლება მივიღოთ სხვაგვარადაც, ყოველი ელემენტის ასახვით თავის დამატებაში.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ თეორემას, რომელიც გვიჩვენებს, როგორი სტანდარტული ფორმით ჩაიწერება ბულის გამოსახულებები. ამის უშუალო შედეგია, რომ ორი ოპერატორი საკმარისია ყველა ბინარული ფუნქციის აღსაწერად. შემოვიტანოთ აუცილებელი ტერმინოლოგია.

ამბობენ, რომ ბულის A და B ფორმულები ეკვივალენტურია ($A \equiv B$ ან $A \longleftrightarrow B$), თუ ისინი გამოსახავენ ერთი და იგივე ფუნქციას. უმარტივეს შემთხვევაში ეს არის ეკვივალენტობის მიმართება.

ც ხ რ ი ლ ი 1.1.

A	B	$A \longleftrightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ანალოგიურად, ამბობენ, რომ A იწვევს B-ს იმპლიკაციას ($A \to B$), თუ სრულდება 1.3 ცხრილის გამოსახლებები (ჭეშმარიტობის ცხრილი).

ისრები ხშირად სხვადასხვა აზრს ატარებენ. აქ $A \to B$ არის ზუსტად იგივე, რაც $(\rceil A) \vee B$, ხოლო $A \equiv B$ იგივეა, რაც $(A \to B) \wedge (B \to A)$. ლოგიკურად $A \to B$ აღნიშნავს “თუ A, მაშინ B” (ე. ი. თუ A ჭ-ია, მაშინ B-ც ჭ-ია). ხშირად $\longrightarrow$ და $\longleftrightarrow$ სიმბოლოებს უწოდებენ პირობით და უპირობო ოპერატორებს, შესაბამისად.

ჩვეულებრივ უარყოფის აღმნიშვნელ შემდეგ სიმბოლოებს იყენებენ.

$$A \not\equiv B = \rceil(A \equiv B), \quad A \uparrow B = \rceil(A \wedge B),$$
$$A \not\longrightarrow B = \rceil(A \longrightarrow B), \quad A \downarrow B = \rceil(A \vee B).$$

ახლა შეგვიძლია აღვწეროთ ყველა ბინარული ოპერაცია $\{0;1\}^2 \longrightarrow \{0;1\}$ (აქ ისარი მიუთითებს ასახვას). 1.4 ცხრილზე მითითებული ფორმით.

ც ხ რ ი ლ ი 1.2.

A	0	1	0	1	ფუნქცია	A	0	1	0	1	ფუნქცია
B	0	0	1	1		B	0	0	1	1	
f_0	0	0	0	0	0	f_8	1	0	0	0	$A \downarrow B$
f_1	0	0	0	1	$A \wedge B$	f_9	1	0	0	1	$A \equiv B$
f_2	0	0	1	0	$B \not\longrightarrow A$	f_{10}	1	0	1	0	$\rceil A$
f_3	0	0	1	1	B	f_{11}	1	0	1	1	$A \longrightarrow B$
f_4	0	1	0	0	$A \not\longrightarrow B$	f_{12}	1	1	0	0	$\rceil B$
f_5	0	1	0	1	A	f_{13}	1	1	0	1	$B \longrightarrow A$
f_6	0	1	1	0	$A \not\equiv B$	f_{14}	1	1	1	0	$A \uparrow B$
f_7	0	1	1	1	$A \vee B$	f_{15}	1	1	1	1	1

უფრო მეტიც, ჩვენ შეგვიძლია აღვწეროთ ყველა ასახვა $\{0;1\}^n$-დან $\{0;1\}$-ში მხოლოდ $\uparrow$ ან $\downarrow$ ოპერაციების საშუალებით ($\uparrow$ ეწოდება შეფერის შტრიხი და აღინიშნება "$|$", ლოგიკურად ნიშნავს "არა და", ხოლო $\downarrow$ – "არა ან"). $\uparrow$ ან $\downarrow$ ასოციაციურია. განმარტებით $A \uparrow B \uparrow$ არის $(A \wedge B \wedge C)$ და არა $((A \wedge B' \wedge C)$. ამბობენ, რომ $\{\uparrow\}$ ანდ $\{\downarrow\}$ ოპერატორთა სიმრავლე ადეკვატურია.

თ ე ო რ ე მ ა . ნებისმიერი $\{0;1\}^n \longrightarrow \{0;1\}$ ასახვა შეიძლება წარმოიდგინოს $\uparrow$ ან $\downarrow$ ოპერატორების ფორმულებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ $f : \{0;1\}^n \longrightarrow \{0;1\}$ ასახვა $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in N)$ ცვლადებისთვის. ფუნქცია სრულად იქნება განსაზღვრული 2^n სტრიქონის * მქონე ჭეშმარიტობის ცხრილით. მტკიცება ნათელია, თუ ცხრილის ყოველ სტრიქონში არის 1 (მაშინ $f = 1$) ან ყოველ სტრიქონში შედეგია 0 (მაშინ $f = 0$). წინააღმდეგ შემთხვევაში არსებობს ცხრილის n სტრიონი, სადაც შედეგი არის – 1.

განვიხილოთ** $B_1, B_2, \dots, B_m$ გამოსახულებები, თვითეული B_i შეესაბამება $(B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in})$ დალაგებულ n-ს, სადაც $B_{ij} = p_{ij}$ ან $\rceil p_{ij}$, იმისდა მიხედვით $p_s = 1$ თუ 0-ს, ცხრილის მოცემულ სტრიქონში. მაშინ

$$f = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m = (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m)'' =$$
$$= (B_1' \wedge B_2' \wedge \cdots \wedge B_m')' = (B_1' \uparrow B_2' \uparrow \cdots \uparrow B_m'),$$
$$B_i' = (B_{i1} \wedge B_{i2} \wedge \cdots \wedge B_{in})' = B_{i1} \uparrow B_{i2} \uparrow \cdots \uparrow B_{in}.$$

უფრო მეტიც, თუ რომელიმე B_{ij} ცხრილში შეესაბამება 0-ს, მაშინ უნდა ავიღოთ $\rceil p_j$ გამოსახულება, რომელიც მიიღება შემდეგნაირად:

$$(\rceil a) \equiv (a \uparrow a).$$

* ყოველ სტრიქონში შეესაბამება რაიმე n სიგრძის ორეულს და შეიცავს ამ წყვილისთვის ფუნქციის მნიშვნელობას.

ამრიგად, წინადადება დამტკიცებულია. კომპაქტურად ეს ჩაიწერება:

ა)

$$
\begin{aligned}
f &= \bigvee_{i=1}^{m} \Big(\bigwedge_{j=1}^{n} B_{ij} \Big), \\
f &= \mathop{\uparrow}_{i=1}^{m} \Big(\mathop{\uparrow}_{j=1}^{n} B_{ij} \Big).
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

ბ) ანალოგიურად, მორგანის კანონების ძალით და ნულის შემცველი სტრიქონების განხილვით, მივიღებთ

$$
f = \mathop{\downarrow}_{i=1}^{2^n-m} \Big(\mathop{\downarrow}_{j=1}^{n} \rceil B_{ij} \Big). \qquad (**)
$$

ამ რეზულტატიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი გამოსახულება გამოყვანადია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $p_1, p_2, \dots, p_n$-ით წარმოქმნილი ბულის ალგებრის ელემენტთა რიცხვია – 2^n.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. მხოლოდ $\uparrow$-ის გამოყენებით მივიღეთ f ფუნქციის წარმოდგენა. ჭეშმარიტობის ცხრილი იხ. 1.5.

ც ხ რ ი ლ ი 1.3.

x	y	z	t	x	y	z	t
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

აღწერილი მეთოდის გამოყენებით

$$
f = (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).
$$

ამრიგად,

$$
f' = (x' \wedge y' \wedge z)' \wedge (x' \wedge y \wedge z')' \wedge (x \wedge y' \wedge z')' \wedge (x \wedge y' \wedge z)' \wedge (x \wedge y \wedge z)',
$$

ამიტომ

$$
f = (x' \uparrow y' \uparrow z) \uparrow (x' \uparrow y \uparrow z') \uparrow (x \uparrow y' \uparrow z') \uparrow (x \uparrow y' \uparrow z) \uparrow (x \uparrow y \uparrow z),
$$

სადაც

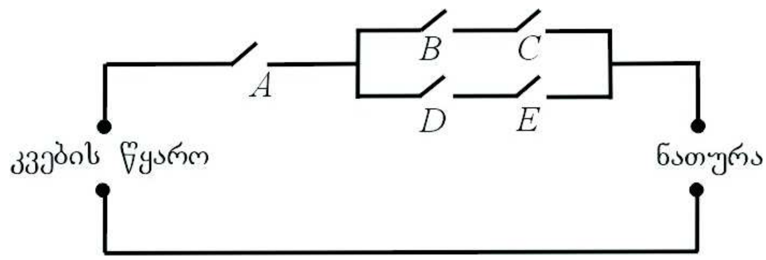
$$
x' = x \uparrow x, \quad y = y \uparrow y, \quad z' = z \uparrow z.
$$

** ვთქვათ, $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$ არის ყველა ნაკრები, რომელზედაც $f = 1$, $1 \leq m < 2^n$, ყოველი ასეთი სისტემისათვის იგება კონიუნქცია $B_i = B_{i1} \wedge \cdots \wedge B_{in}$, სადაც $B_{ik} = p_k$, თუ $\alpha_{ik} = 1$ და $B_{ik} = \rceil p_k$, თუ $\alpha_{ik} = 0$ $(k = 1, \dots, n)$. ადვილი სანახავია, რომ $f = B_1 \vee \cdots \vee B_m$.

(*) გამოსახულებას ეწოდება ნორმალური ფორმის დიზიუნქცია. ის არის კონიუნქციის დიზიუნქცია (ან და – და ან). (**) გამოსახულებას ეწოდება ნორმალური ფორმის კონიუნქცია*.

დაბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ მტკიცებას ბულის ალგებრაში რომელსაც აქვს ყოველთვის 1 მნიშვნელობა ეწოდება ტავტოლოგია, ხოლო – გამოსახულებას, რომელიც ყოველთვის იღებს 0 მნიშვნელობას, ეწოდება – წინააღმდეგობა.

1.3. ბულის ალგებრის ზოგიერთი გამოყენება. მრავალი პრობლემა მათემატიკაში, კერძოდ, კომბინატორიკაში, ყველაზე უკეთ იხსნება ბულის ალგებრების საშუალებით. ბულის ალგებრები, აგრეთვე, გამოიყენება რეალური სიტუაციის მოდელირებისას. ეს მეთოდი შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას ფართოდ გავრცელებულ არეებში, რომელთა კლასიფიკაცია შეუძლებელია. განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი (გადამრთველი სქემები).



ნახ. 1.3

აუცილებლად უნდა აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ შემოვიფარგლებით სქემების აგებისა და გარდაქმნის მხოლოდ გარკვეული საკითხებით. ამ წიგნის მიზანია ფორმალური გამოკვლევა. თავიდან ვნახოთ როგორ გამოიყენება ბულის ალგებრა სადენებისა და ჩამრთველებისაგან შედგენილი სქემის აღწერა-განსაზღვრაში. 1.10 ნახაზზე გამოსახული სქემა შედგება 5 ჩამრთველისგან, კვების წყაროსგან, ნათურასა და შემაერთებელი სადენებისგან. დიაგრამიდან ჩანს, რომ დენი მოძრაობს ჩაკეტილ ჯაჭვში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჩამრთველი ჩაკეტილი და B და C ორივე ჩაკეტილია, ან D და E ორივე ჩაკეტილია. ეს ალგებრულად ასე გამოიყურება:

$$A \wedge \big((B \wedge C) \vee (D \wedge E)\big).$$

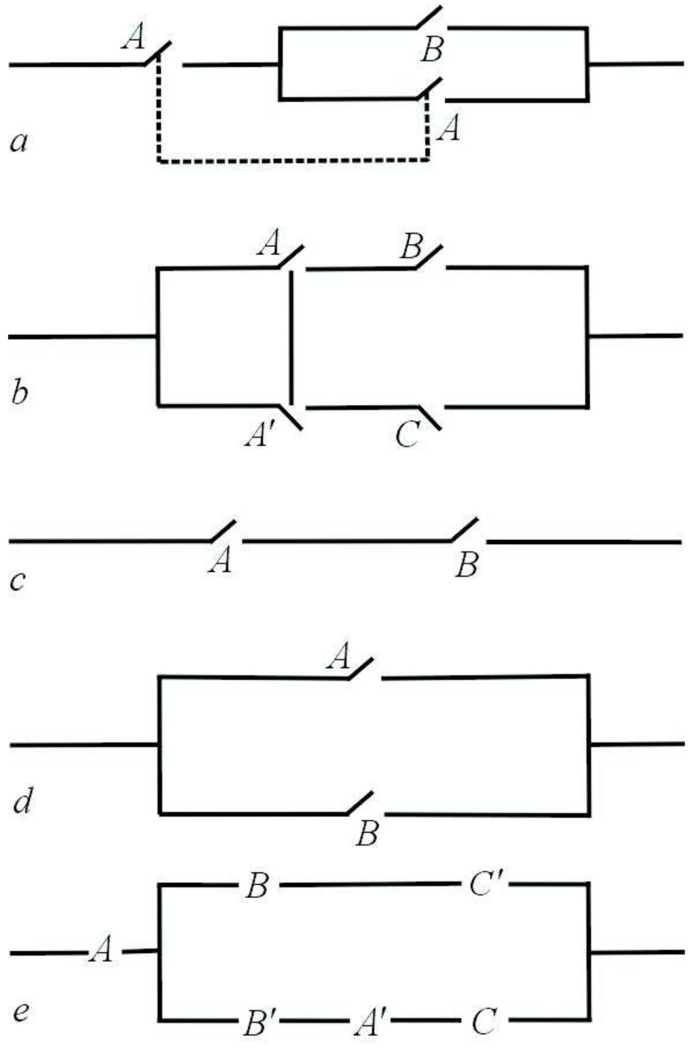
ვიდრე გადავალთ თემის განხილვაზე, გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა გადამრთველებიანი ელექტრული სქემის ელემენტების შესახებ დიაგრამაში. სქემის მიხედვით მხოლოდ ზედა, ჩამრთველებიანი ნაწილი განსხვავდება განხილული მაგალითებისაგან. მაშასადამე, შესაძლებელია ქვედა მხარე არც განვიხილოთ.

---

* ნორმალური ფორმის კონიუნქცია არის

$$f = \bigwedge_{i=1}^{2^n-m} \Big(\bigvee_{j=1}^{n} \rceil B_{ij} \Big) \text{ (იხ. (**)).}$$

სქემის შიგნით ზოგიერთი ჩამრთველი შესაძლებელი იყოს ურთიერთდამოკიდებული (სურ. 1.11a) და შეიძლება იმუშაონ ისე, რომ როდესაც ერთი ჩართულია, მეორე აუცილებლად უნდა იყოს გამორთული (სურ. 1.11b).



ნახ. 1.4

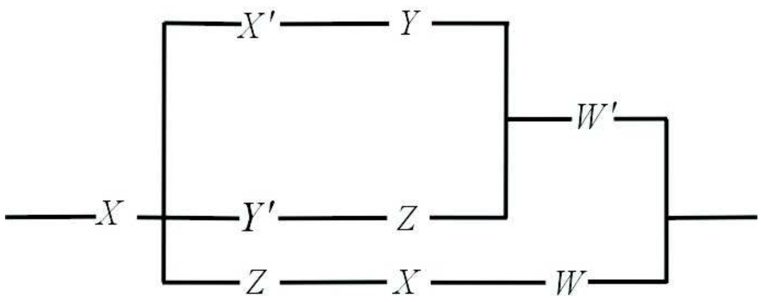
ძირითადი მეთოდი ჩამრთველია განლაგების, არის მიმდევრობით შეერთება (სურ. 1.11c), რასაც შეესაბამება "და" (ე. ი. $A \wedge B$) და პარალელური შეერთება (სურ. 1.11d) "ან"-ის შესაბამისი (ე. ი. $A \vee B$). შევნიშნოთ ბოლოს, რომ დიაგრამაზე არის ზედმეტი ჩამრთველებიც და მოხერხებულობისთვის ისინი აღვნიშნოთ იგივე "სახელებით" (სურ. 1.11e). ამრიგად, ნებისმიერი ოპერაცია ბულის

ალგებრაში შეიძლება წარმოვადგინოთ სქემის სახით და პირიქით. ამრიგად, ეკვივალენტური სქემის მისაღებად საჭიროა საწყისი სქემიდან გადავიდეთ ბულის ალგებრის შესაბამის გამოსახულებაზე, შემდეგ უფრო მარტივ გამოსახულებაზე, დაბოლოს, მის შესაბამის სქემაზე.

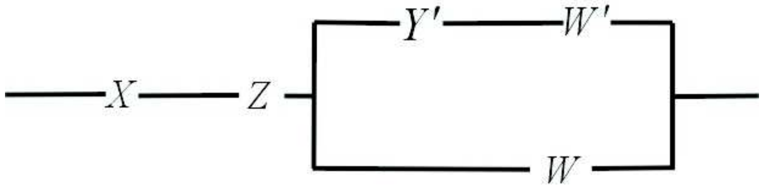
მაგალითი 1.4. 1.12 სქემა გავამარტივოთ. მას შეესაბამება შემდეგი გამოსახულება:

$$
\begin{aligned}
&X \wedge \big(\big(\big((X' \wedge Y) \vee (Y' \wedge Z)\big) \wedge W'\big) \vee (Z \wedge X \wedge W)\big) = \\
&\qquad = X \wedge \big((X' \wedge Y \wedge W') \vee (Y' \wedge Z \wedge W') \vee (Z \wedge X \wedge W)\big) = \\
&\qquad = (X \wedge X' \wedge Y \wedge W')(X \wedge Y' \wedge Z \wedge w')(X \wedge Z \wedge Z \wedge W) = \\
&\quad = (X \wedge Y' \wedge Z \wedge W') \vee (X \wedge Z \wedge W) = (X \wedge Z) \wedge ((Y' \wedge W') \vee W).
\end{aligned}
$$

ბოლო გამოსახულება შეესაბამება 1.13-ს.



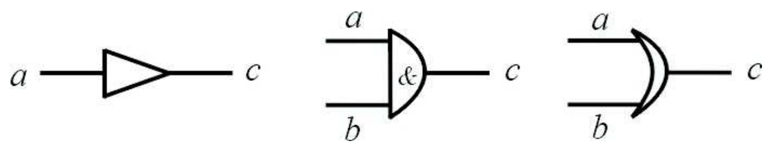
ნახ. 1.5



ნახ. 1.6

ახლა გადავიდეთ კომბინირებულ სქემებზე. ასეთ სქემაში მთავარი კომპონენტები ალემენტებია. ყველაზე უმარტივესი ელემენტი არის n შესასვლელისა და m გამოსასვლელის მქონე მოწყობილობა $(m, n \in N)$. ყოველ შესვლაზე გააქტიურდება ერთ-ერთი ორი სიგნალიდან. ისინი აღნიშნავს, როგორც 0 და 1, მაგრამ საერთოდ ყოველი ორი განსხვავებულ მნიშვნელობას სისტემაც გამოდგება. რეალურად ჩვენ სიგნალი გვაქვს 0 ვოლტის მახლობლობაში (მაგალითად, 0-დან 0,8 ვოლტამდე), რომელსაც მივიჩნევთ 0-ად, და მეორე – 4 ვოლტის მიდამოში (3-დან 4-მდე), რომელსაც მივიჩნევთ 1-ად. აქედან განიმარტება ამოსული მნიშვნელობები (0 და 1). შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ ყველა ფუნქციის წარმოსადგენად დაგვჭირდება საკმაოდ ბევრი განსხვავებული ელემენტი,

მაგრამ ეს ასე არაა. დროის დაყოვნების არმქონე სქემებს შეესაბამება ერთადერთი ტიპისელემენტები. ეს პირდაპირ არ ჩანს, მაგრამ სქემის სტრუქტურა უფრო ცხადი გახდება თუ განვიხილავთ 1.14-ზე გამოსახულ სამი ტიპის ელემენტებს.



ნახ. 1.7

მარტივია ელემენტი “არა” მისი მოქმედება ხდება შემდეგნაირად

$$c = \rceil a \ \ (c = \text{არა } a)$$

1.6. ცხრილის საშუალებით.

ცხრილი 1.4.

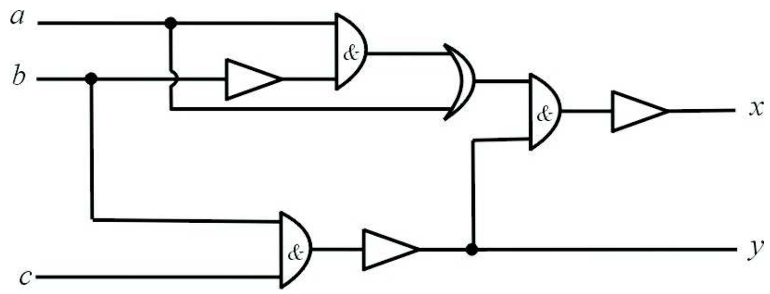
INPUT(a)	OUTPUT(c)
0	1
1	0

ანალოგიურად, “და” და “ან”-ის ელემენტები განისაზღვრება 1.7. ცხრილით.

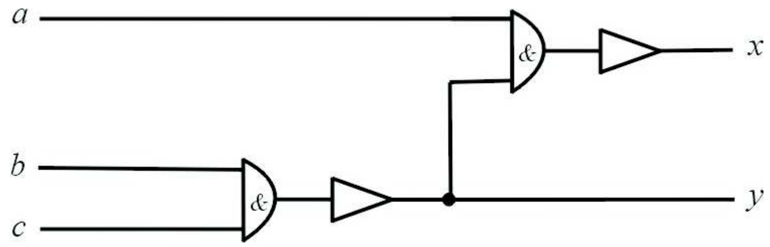
ც ხ რ ი ლ ი 1.5.

a	b	და	ან
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

“და” და “ან” ელემენტებს შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე შესასვლელი. ამ შემთხვევაში ისინი განიმარტება ანალოგიურად, ანუ “და” ელემენტის გამოსვლის სიგნალი 1-ია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ რომელიმე შემოსული სიგნალი არის 1. ალგებრულად “არ” ელემენტის გამოსვლის სიგნალს აქვს სახე: $\rceil$ (შესვლის სიგნალი), ხოლო “და” ელემენტის გამოსვლის სიგნალს აქვს სახე: (პირველი შესვლის სიგნალი)$\wedge$(მეორე შესვლის სიგნალი)$\wedge \ldots$ დაბოლოს, “ან”-ის გამოსვლის სიგნალს აქვს სახე: (პირველი შესვლის სიგნალი)$\vee$(მეორე შესვლის სიგნალი)$\vee \ldots$ უფრო რთული ფუნქციების წარმოსადგენად, ელემენტები შეიძლება “გავაერთიანოთ” სხვადასხვა გზებით. მაგალითად, განვიხილოთ სქემა:



ნახ. 1.8



ნახ. 1.9

სქემის გასასვლელიდან “უკან” დაბრუნებისას მივიღებთ

$$x = \big(\big(a \vee (a \wedge b')\big) \wedge (y)\big)',$$
$$y = (b \wedge c)',$$

ამიტომ

$$x = \big(\big((a \vee a) \wedge (a \vee b')\big) \wedge (b \wedge c)'\big)' = \big((a \wedge (a \vee b')) \wedge (b \wedge c)'\big)' = (a \wedge (b \wedge c)')'$$

(შთანთქმის კანონი).

ამრიგად, ერთ-ერთი ყველაზე გამარტივებული სქემა გამოსახულია 1.9 ნახაზზე.

მაშასადამე, ბულის ალგებრები შეგვიძლია გამოვიყენოთ რთული სქემების გასამარტივებლად და მათი ანალიზისათვის. განხილული მაგალითი გვიჩვენებს როგორ უნდა ჩავატაროთ ეს პროცესი.

არსებობს ისეთი მოწყობილობები, რომლებიც ახდენენ სხვა ლოგიკური ოპერაციების რეალიზებას. ყველაზე მნიშვნელოვანია “არა და” და “არა ან” ელემენტები (იხ. ნახ. 1.10).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.5. შევნიშნოთ, რომ f-ის ბოლო ფორმაში ფრჩხილებში მოთავსებული ყოველი გამოსახულება არის უკანასკნელი ელემენტის შესასვლელი 1.11 ნახაზზე და შესაძლებელია გამოთვლილ იქნას წინამდებარე ელემენტების საშუალებით. წყვეტილით გამოსახული სქემის ნაწილიპრაქტიკულად არაა საჭირო, რადგან ბევრი ელექტრონული ელემენტისათვის გასასვლელის დამატება მიიღწევა დამხმარე გასასვლელით. აღვნიშნოთ, რომ მიღებული სქემა ზოგადად

,,არა და''   ,,არა ან''

ნახ. 1.10

გამოყენებული ელემენტების რაოდენობით არ არის მინიმალური. ბოლოს განვიხილოთ ორი მაგალითი, რომელიც აჩვენებს, თუ როგორ გამოიყენება ბულის ალგებრა სხვა ამოცანებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.6. დავუშვათ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1. მონაცემთა სტრუქტურის ცოდნა აუცილებელია გაწვრთნილი ტვინის სრულყოფისათვის;
2. მხოლოდ პროგრამირების გამოცდილებას შეუძლია შექმნას გაწვრთნილი ტვინი.
3. კომპილატორის დასაწერად საჭიროა ამოცანის ანალიზის უნარი.
4. გაუწვრთნელ ტვინს არ შეუძლია ამოცანის ანალიზი.
5. ყველა, ვისაც დაუწერია სტრუქტურული პროგრამები, შეიძლება ჩაითვალოს როგორც გამოცდილი პროგრამისტი.
6. შესაძლებელია თუ არა ამ წინამღვრებიდან დავადგინოთ ქვემოთ ჩამოთვლილი დებულებების სამართლიანობა:

    $1'$. სტრუქტურული პროგრამების წესის გამოცდილება აუცილებელია იმისათვის, რომ შეძლოთ კომპილატორის დაწერა.

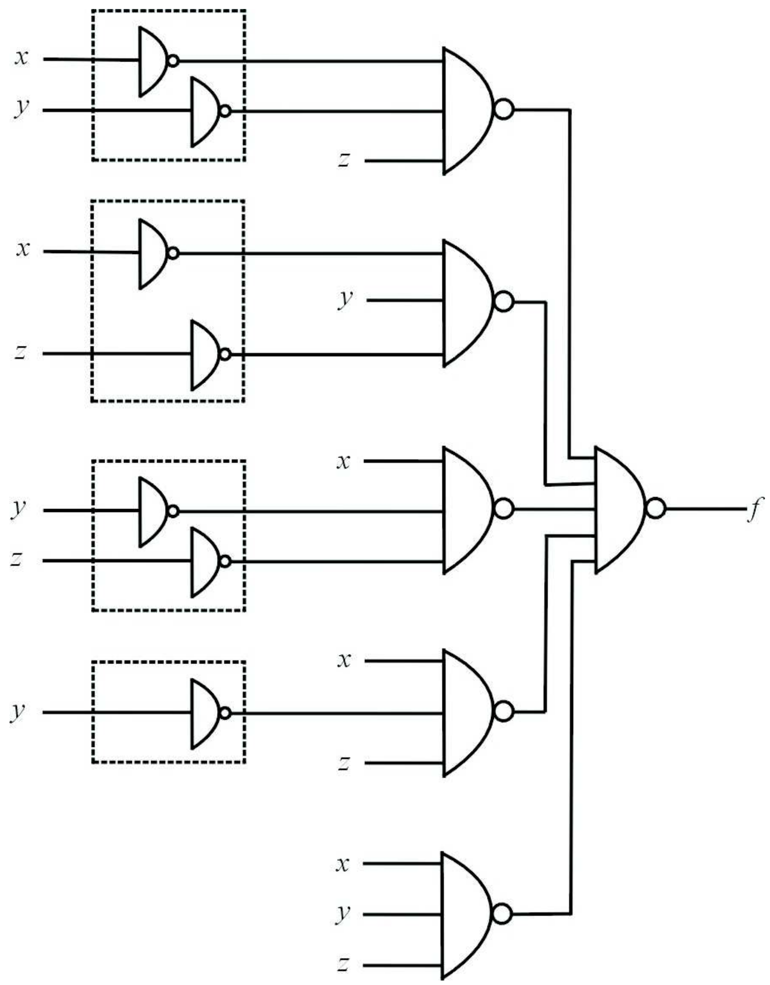
    $2'$. მონაცემთა სტრქუტურის ცოდნა ნაწილია პროგრამირების გამოცდილება.

    $3'$. ამოცანათა ანალიზი შეუძლებელია მათთვის, ვინც უგულებელჰყოფს მონაცემთა სტრუქტურებს.

    $4'$. გამოცდილ პროგრამისტს, რომელიც წერდა სტრუქტურულ პროგრამებს, შეუძლია ამოცანების ანალიზი და აქვს გაწვრთნილი ტვინი, შეუძლია დაწეროს კომპილატორი?

ამ კითხვებზე პასუხების გასაცემად, ჩვენ შეგვეძლო გამოგვეკვლია მტკიცებათა ლოგიკური შედეგები, მაგრამ უფრო რთულ სიტუაციებში უმჯობესია ვისარგებლოთ ჩვენი ცოდნით ბულის ალგებრებში. თავდაპირველად მოვახდინოთ ჩვენი მტკიცებულებათა კოდირება. ვთქვათ,

$\mathcal{E}$ არის ყველა პროგრამისტთა სიმრავლე.



ნახ. 1.11

U ისინი მათ შორის, ვინც იცის მონაცემთა სტრუქტურა.

V ისინი მათ შორის, ვისაც აქვს გაწვრთნილი ტვინი.

W ისინი მათ შორის, ვონც არის გამოცდილი პროგრამისტი.

X ისინი მათ შორის, ვისაც შეეძლება კომპილატორის დაწერა.

Y ისინი მათ შორის, ვისაც შეუძლია ამოცანათა ანალიზი.

Z ისინი მათ შორის, ვისაც შეუძლია სტრუქტურული პროგრამების წერა, მაშინ:

1) $U \supseteq V$;

2) $W \supseteq V$;

3) $X \subseteq Y$;

4) $V \supseteq Y$;

5) $W \subseteq Z$;

1′) $Z \supseteq X$;

2′) $U \supseteq W$;

3′) $Y \subseteq U$;

4′) $W \cap Z \cap Y \cap V_4 \supseteq X$.

ადვილი სანახავია, რომ (1′) უშუალოდ გამომდინარეობს (3), (4), (2) და (5)-დან. ანალოგიურად (3′) გამომდინარეობს (40) და (1)-დან. ასევე,

$$W \cap Z \cap Y \cap V = W \cap Y \cap V = Y \cap V = Y \supseteq X.$$

ამრიგად, (4′) ასევე სამართლიანია. (2′) არ გამომდინარეობს (1)–(5)-დან, რადგან ჩვენ ვიცით მხოლოდ $W \subseteq Z$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.7. ალისა ამბობს: ბარბარა და კლარა ამბობენ სიმართლეს. კლარა ამბობს: ელზა და ფლორა ორივე ან სიმართლეს ამბობს ან ორივე ტყუის. მეორეს მხრივ, დები ფიქრობენ, რომ უკიდურეს შემთხვევაში ან კლარა ან ბარბარა ამბობს სიმართლეს, რადგან ბარბარა ირწმუნება, რომ მხოლოდ ერთ-ერთია მართალი – ალისა ან ფლორა. ელზა ფიქრობს, რომ ალისა და ბარბარა ყოველთვის ამბობენ სიმართლეს, მაგრამ, ფლორა დარწმუნებულია, რომ ბარბარა და კლარა ორივე ერთად არ ამბობს სიმართლეს. ვის უნდა ვენდოთ?

განვიხილოთ მტკიცებათა სიმრავლე:
"ალისა (არ) ამბობს სიმართლეს".
"ბარბარა (არ) ამბობს სიმართლეს"
. . . .

და ვთქვათ, A შეიცავს მხოლოდ იმ მტკიცებებს, სადაც ალისა ამბობს სიმართლეს, ანალოგიურად განვმარტოთ B, C, D, E და F სიმრავლეები; თუ $S \subseteq A \cap B'' \cap C$ არის არაცარიელი სიმრავლე, მაშინ S ჩართულია ისეთ მტკიცებებში, როგორიცაა
"ალისა ამბობს სიმართლეს",
"ბარბარა ტყუის",
"კლარა ამბობს სიმართლეს".

პირველი მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ ალისა ამბობს სიმართლეს, მაშინ სიმართლეს ამბობს ბარბარა და კლატრაც.

ანუ თუ $x \in A$, მაშინ $x \in B \cap C$, ე. ი.

$$A \subseteq B \cap C. \tag{1}$$

სხვა მტკიცებულელბებიც ჩაიწერება ანალოგიურად

$$C \subseteq (E \cap F) \cup (E' \cap F'), \tag{2}$$
$$D \subseteq A \cup B, \tag{3}$$
$$B \subseteq (E \cup F) \setminus (E \cap F) = (E \cap F') \cup (E' \cap F), \tag{4}$$
$$E \subseteq A \cap B, \tag{5}$$
$$F \subseteq (B \cap C)'. \tag{6}$$

(2), (4) და (1)-დან გამომდინარეობს, რომ $B \cap C = \varnothing$, ამიტომ $A = \varnothing$, მაშინ (5)-დან მივიღებთ, რომ $E = \varnothing$. აქამდე ჩვენი მსჯელობა ეფექტური იყო, რადგან ვგულისხმობდით, რომ მართალი ადამიანი ამბობს სიმართლეს. მაგრამ არაფერი ვიცით იმის შესახებ, თუ რას ამბობს მატყუარა. თუ შემოვიფარგლებით იმ ფაქტით, რასაც ამბობს მატყუარა, ყველაფერი ტყუილია, მაშინ (1)–(6) ჩართვები შეგვიძლია შევცვალოთ ეკვივალენტური სიმბოლოებით.

მაგალითად, თუ ბარბარა და კლარა მართლია მთქმელებია, მაშინ რადგან ალისა ამბობს, რომ ეს ასეა, ამიტომ ალისაც მართლისმოქმედია, ე. ი.

$$A = B \cap B, \tag{1a}$$
$$C = (E \cap F) \cup (E' \cap F'), \tag{2a}$$
$$D = A \cup B, \tag{3a}$$
$$B = (E \cup F') \cup (E' \cap F), \tag{4a}$$
$$E = A \cap B, \tag{5a}$$
$$F = (B \cap C)'. \tag{6a}$$

როგორც ზემოთ, $A = \varnothing$, $E = \varnothing$ და ამიტომ ალისა და ელზა არასოდეს ამბობენ სიმართლეს. $(2a)$, $(4a)$ და $(6a)$-დან გამომდინარეობს, რომ $F = \mathcal{E}$, ე. ი. $(3a)$, $(4a)$-დან მივიღებთ, რომ $D = B = F = \mathcal{E}$. აქედან $(2a)$-ს დახმარებით მივიღებთ, რომ $C = \varnothing$, აქედან გამომდინარეობს, რომ შესაძლებელია მხოლოდ ერთი მტკიცება: $x \in A' \cap B \cap C' \cap D \cap E' \cap F$. ეს ნიშნავს, რომ ალისა, კლარა და ელზა ტყუიან, ხოლო ბარბარა, დები და ფლორა სიმრათლეს ამბობენ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.1.

1. აჩვენეთ, რომ $(B, *, +, ')$ ბულის ალგებრაში ყოველი x, y, $z \in B$-თვის სამართლიანია

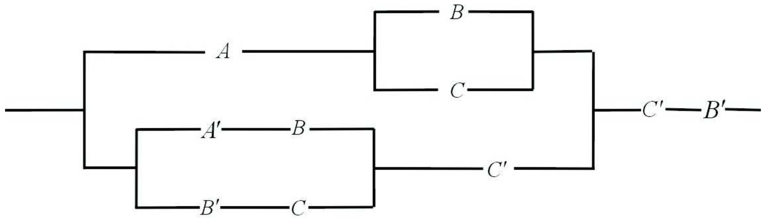
ა) $(x + y) * (x' + y) = y$;

ბ) $(z + x) * (z' + y) = (z * y) + (z' * x)$;

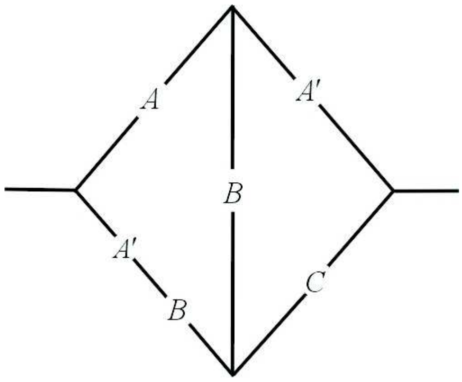
გ) $((x * z) + (y * z'))' = (x' * z) + (y' * z')$.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $(B, *, +, ')$-ში სრულდება თანაფარდობა $x * y = x * z$, მაშინ $x + y = x + z$.

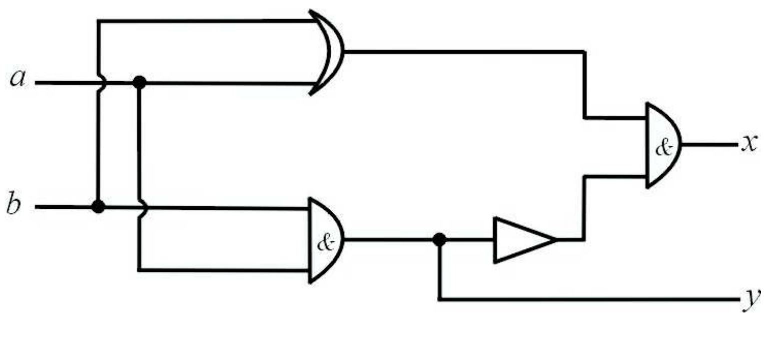
3. 1.12 და 1.13 სქემებიდან მიიღეთ მათი ეკვივალენტური უფრო “მარტივი” სქემები.



ნახ. 1.12



ნახ. 1.13



ნახ. 1.14

4. 1.14 სქემისათვის ააგეთ ცხრილი a და b შესასვლელისათვის x და y გამოსათვლელის შესაბამისი ფუნქციისათვის. ააგეთ ორი სქემა 1.8 ცხრილის გამოყენებით.

5. ააგეთ “არა და ” ოპერაციის შესაბამისი სქემა, რომელსაც აქვს ოთხი შესასვლელი ან გამოსასვლელზე ერთიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა შესასვლელი ნულია.

6. ვთქვათ, სრულდება:

ა) ყველა მრბოლელი იმპულსურია;

ბ) ყველა კარგი პროგრამისტი მელანქოლიურია.

გ) არავინაა იმპულსური და მელანქოლიური.

დ) მკითხველი მელანქოლიურია.

არის თუ არა მკითხველი კარგი პროგრამისტი და ან მრბოლელი?

7. საერთაშორისო კონფერენციის ორგანიზატორებმა კომერციული ინტერესების თავიდან აცილების მიზნით, გადაწყვიტეს, რომ კომპიუტერების ყველა მწარმოებელი ისარგებლებდა მხოლოდ ერთი მაღაზიით. თვითონ მწარმოებლები იქნებოდნენ პასუხისმგებლები იმის თაობაზე, თუ ვინ მიიღებდა მონაწილეობას წარმომადგენლობაში. ხუთმა ევროპულმა და ხუთმა ამერიკულმა კომპანიამ თანხმობა განაცხადა მონაწილეობაზე (აღვნიშნოთ ისინი A, B, C, D, E და F, G, H, I, J, შესაბამისად). მაგრამ სავაჭრო პოლიტიკისა და კონტრაქტის ვალდებულებების გამო, აუცილებელია გარკვეულია შეზღუდვები. ევროპელები ითხოვენ, რომ G და I-ს არ შეუძლიათ ერთდროულად მონაწილეობის მიღება. ანალოგიურად, ერთდროულად არ შეუძლიათ F, G და J-ს. ამერიკელები ითხოვენ, რომ A და D ვერ მიიღებენ მონაწილეობას, ვიდრე G არ მიიღებს მონაწილეობას. ანალოგიურად გამოირიცხება C და D-ს მონაწილეობა G-მდე. თუ E მონაწილეობს, მაშინ უნდა მონაწილეობდეს J-ც. მაგრამ, თუ ორივე მონაწილეობს, მაშინ B ვერ მიიღებს მონაწილეობას, და ბოლოს, B და C-ს ერთად არ შეუძლიათ მონაწილოების მიღება. შესაძლებელია თუ არა თითოეული ჯგუფიდან სამ-სამი მონაწილის შერჩევა, ისე, რომ არ დაიღვეს პირობები და როგორ?

§ 2. ჩაკეტილი ნახევარრგოლები

გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ ა . S სიმრავლეს $\circledast$ და $\oplus$ ბინარული ოპერაციებით, ეწოდება ჩაკეტილი ნახევარრგოლი, თუ სრულდება:

ა) $\oplus$ ოპერაცია ასოციაციურია;

ბ) $\oplus$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ერთეულოვანი 0 ელემენტი;

გ) $\circledast$ ოპერაცია ასოციაციურია;

დ) $\circledast$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ერთეულოვანი 1 ელემენტი;

ე) $\forall x \in S$-თვის $x \circledast 0 = 0 = 0 \circledast x$;

ვ) $\oplus$ ოპერაცია კომუტაციურია $x \oplus y = y \oplus x \ \forall x,\, y \in S$.

ზ) $\oplus$ ოპერაცია იდემპოტენტურია $x \oplus x = x \ \forall x \in S$.

თ) $\circledast$ და $\oplus$ ოპერაციები დისტრიბუციულია,

$$x \circledast (y \oplus z) = (x \circledast y) \oplus (x \circledast z) \ \ \forall x,\, y,\, z \in S,$$
$$(x \oplus y) \circledast z = (x \circledast z) \oplus (y \circledast z) \ \ \forall x,\, y,\, z \in S.$$

ი) S-ის სასრული რაოდენობა ელემენტების ჯამი არსებობს და ის ერთადერთია (ე. ი. არაა დამოკიდებულია შეჯამების რიგზე).

კ) $\circledast$ ოპერაცია დისტრიბუციულია უსასრულო ჯამის მიმართ:

$$\Big(\sum_i a_i\Big) \circledast \Big(\sum_j b_j\Big) = \sum_{i,j}(a_i \circledast b_j),$$

სადაც

$$\sum_i a_i = a_1 \oplus a_2 \oplus + \cdots, \quad \sum_j b_j = b_1 \oplus b_2 \oplus + \cdots, \quad .$$

ეს საკმაოდ უცნაური სტრუქტურა ხშირად გამოიყენება გრაფთა ჩაკეტვის ალგორითმებში. ჩაკეტილ ნახევარრგოლებში შედეგების საილუსტრაციოდ შევადაროთ $(Z_2, \cdot, +)$ და $(Z_2, \wedge, \vee)$, სადაც ოპერაციები განმარტებულია 2.1 ცხრილის საშუალებით:

ც ხ რ ი ლ ი 2.1.

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

განვიხილოთ ჩაკეტვის ოპერაციის განმარტება. ამ ოპერაციის შედეგი ავღნიშნოთ a^*-ით:

$$a^* = \sum_{i=0}^{\infty} a^i,$$

$$a^0 = 1, \;\; a^1 = a, \;\; a^2 = a * a \;\text{ და }\; a^i = a^{i-1} * a$$

($(Z_2, \wedge, \vee)$-ში $\vee$ არის "+" და $\wedge$ არის "·"). ჩაკეტილ ნახევარრგოლში ამ განმარტებას აზრი აქვს, $1^* = 1^0 \vee 1^1 \vee 1^2 \vee \vee \cdots = 1 \vee 1 \vee 1 \vee \cdots = 1$.

(ზ და თ აქსიომების ძალით) მაგრამ თუ შევცდებით, იგივე განვმარტოთ $(Z_2, \cdot, +)$-ში მივიღებთ, რომ

$$1^* = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots .$$

ეს ჯამი შეგვიძლია დათვლილი შემდეგნაირად:

$$\underbrace{1+1}+\underbrace{1+1}+\cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

ან

$$1 + \underline{1+1} + \underline{1+1} + \underline{1+1} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

ე. ი. ჯამი არ არის განმარტებული, მაშასადამე, ჩაკეტვის ოპერაციას აზრი არა აქვს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2.1. შეამოწმეთ, რომ $(\{\varnothing, \mathcal{E}\}, \cap, \cup)$ არის ჩაკეტილი ნახევარრგოლი.

gamoyenebani:
kodireba, kriptografia, kompiuteruli tomografia, globaluri pozicionirebis sistema

kodireba

1. Sesavali

vixilavT informaciis „xmauriani" arxiT gadacemis problemas, kerZod orobiT kodirebasa da dekodirebas.

tipiuri situacia aseTia: vTqvaT gvinda gadvceT Setyobineba romelic aris romeliRac alfabetis ramodenime simbolosagan Semdgari mwkrivi. es alfabeti SeZleba iyos Semgdari asoebisgan, aTobiTi an orobiTi ricxvebisgan, an sxva raime simboloebisgan. aseTi gadacema SeiZleba xorcieldebodes erTi kompiuteridan meoreSi, an iyos, vTqvaT, satelefoni saubari, an telegadacema da sxva.

praqtikulad yvela arxi araidealuria im gagebiT, rom gadacemuli gadacemuli simbolo SeiZleba aranulovani albaTobiT araswორad iyos miRebuli arxSi arsebuli "xmauriT" damaxinjebis gamo.

magaliTad, vTqvaT gadasacemia ricxvi 6. gadacemisas es ricxvi SeiZleba damaxinjdes da abonentma miiRos ricxvi 7. ar arsebobs meTodi, romliTac SeiZleba imis amocnoba, rom 7-is nacvlad 6 unda yofiliyo. am problemis movla ase SeiZleba. gadmcemi da mimRebi unda SeTanxmdnen kodis gasaRebze – vTqvaT ricxvze 234. gadamcemi axdens gadasacemi ricxvis kodirebas: gadasacem ricxvs a mimdevrobiT amravlebs 2-ze, 3-ze, 4-ze da a-is nacvlad agzavnis sam ricxvs – 2a, 3a, 4a. vTqvaT Tu gadasacemia ricxvi 6, maSin gadacems sameuls

12, 18, 24.

abonenti axdens miRebul ricxvebis dekodirebas: hyofs maT mimdevrobiT 2-ze, 3-ze, 4-ze. Tu gzavnili uSecdomod Cavida, samive SemTxvevaSi gayofisas miiReba 6, e.i gamogzavnili ricxvi yofila 6. magram Tu gzavnili gzaSi damaxinjda da vTqvaT abonentma miiRo 12, 19, 24, maSin dekodirebisas abonenti miiRebs sameuls

6, 6,33..., 6.

advili misaxvedria, rom Sua ricxvi 6,33... Secdomis Sedegia, e.i. gamogzavnili yofila 6. cxadia, Tu damaxinjda erTi ki ara, ori an samive ricxvi, maSin gamogzavnili ricxvis amocnoba SeuZlebeli iqneba. magram ori an sami Secdomis albaToba gacilebiT naklebia, videre erTisa, erT Secdomas ki kodirebis es meTodi advilad amoicnobs da gaasworebs. kodireba miT ufro kargad imuSavebs, rac ufro grZeli iqneba koduri sityva. magaliTad xuTcifriani koduri sityva amoicnobs da gaasworebs 2 Secdomas, Svidcifriani – sams.

kodirebis es nimuSi mxolod sailustraciod mogvyavs. sinamdvileSi is ar gamodgeba orobiTi, e.i 0 da 1-iT Sedgenili gzavnilebis gadasacemad, kompiuterebi ki swored am ori simbolosgan Semdgar alfabets iyeneben. sinamdvileSi gamoiyeneba gacilebiT ufro faqizi kodebi, romlebsac qvemoT aRvwerT.

amgvarad, informaciis gadacemis zogadi sqema aseTia:

gasagzavni informacia $\rightarrow$ kodirebuli informacia $\rightarrow$ miRebuli informacia $\rightarrow$ dekodirebuli informacia.

kodebi or klasad iyofa: Secdomebis aRmomCeni da Secdomebis gamswor ebeli kodebi.

magaliTad, zemoT aRwerili kodirebis nimuSSi koduri sityva orniSna rom yofiliyo, maSin es kodi mxolod Secdomebis aRmomCeni iqneboda. marTlac, vTqvaT koduri sityvaa 23, e.i. a-s nacvlad igzavneba ricxvTa wyvili 2a, 3a. igive 6-iani kodirdeba wyvilad 12, 18. vTqvaT pirveli 1-iani damaxinjda da abonentma miiRo wyvili 22, 18. maSin dekodirebisas miviRebT 11, 6 da savsebiT gaugebaria, ra ricxvi iyo gadmocemuli. e.i. am kods Secdomis mxolod aRmoCena SeuZlia, xolo gasworeba ki – ara.

zemoT aRweril samniSna kods ki SeuZlia Secdomis ara marto aRmoCena, aramed erTi Secdomis gasworebac.

moviyvanoT kodirebis ramdenime martivi meTodi.

vTqvaT, gasagzavnia nulebisa da erTebisgan Semdgari mwkrivi (e.i. Cveni alfabeti Sedgeba ori asosgan - 0 da 1)

0010111010110100110011000110101000101011

davyoT es mwkrivi xuTeulebad (5 asoian sityvebad)

00101 11010 11010 01100 11000 11010 10001 01011.

kodirebis meTodi aseTi iyos: daviTvaloT TiTeuli sityvis cifrTa jami, da Tu es jami luwia, sityvas meeqvse asod mivuweroT 0, xolo Tu kentia – mivuweroT 1. maSin kodirebuli gzavnili ase gamouyureba

001010 110101 110101 011000 110000 110101 100010 010111.

aseTi kodirebis Semdeg yoveli sityvis cifrTa jami aucileblad luwia! da Tu gzavnilSi romelime sityvis (eqvseulis) cifrTa jami kenti iqneba, maSin utyuarad davaskvniT, rom es sityva Secdomas Seicavs. dekodirebisTvis sakmarisia CamovacaloT eqvseuls bolo cifri. rogorc vxedavT kodirebis am meTods Secdomebis mxolod aRmoCena SeuZlia, Tanac mxolod zogierTis. Tu magaliTad romelime sityvaSi ori Secdoma moxda, maSin am Secdomas ver aRmovaCenT: Tu 110000-is nacvlad movida 110110 (e.i. damaxinjda meoTxe da mexuTe asoebi) cifrTa jami isev luwi gamodis.

2. veli Z_2

rogorc simravle Z_2 Sedgeba ori elementisagan {0,1}. Sekrebis operacia aseTia:

$$0+0=0, \quad 0+1=1+0=1, \quad 1+1=0.$$

xolo gamravleba ki aseTi:

$$0\times 0=0, \quad 0\times 1=1\times 0=0, \quad 1\times 1=1.$$

es operaciebi aqceven Z_2-s velad. Z_2^n-iT aRvniSnavT n-ganzomilebian veqtorul sivrces Z_2-ze:

$$Z_2^n = Z_2\times ...\times Z_2.$$

yoveli n-niSna orobiTi ricxvi sinamdvileSi aris $(Z_2)^n$ -is veqtori

$$(e_1,\ldots,e_n), \quad e_k = 0,1.$$

Cven dagvWirdeba Semdegi metrika $(Z_2)^n$-Si: manZili $a=(a_1,\ldots,a_n)$ da $b=(b_1,\ldots,b_n)$ veqtorebs Soris $d(a,b)$ aris im poziciebis raodenoba, sadac $a_k\neq b_k$.

magaliTad manZili $d((01011),(10110))=4$, radgan es veqtorebi gansxvavdebian oTx poziciaSi – pirvelSi, meoreSi, mesameSi da mexuTeSi. manZilis es cneba akmayofilebs saWiro aqsiomebs:

1. $d(a,b)=0$ maSin da mxolod maSin, rodesac $a=b$;
2. $d(a,b)=d(b,a)$;
3. $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)$.

SemovitanoT kidev aseTi cneba. $a=(a_1,\ldots,a_n)\in(Z_2)^n$ veqtoris wona $w(a)$ iyos im poziciaTa raodenoba, sadac $a_k=1$.

Teorema. manZili or veqtors Soris udris maTi jamis wonas.

3. kodirebisa da dekodirebis zogadi sqema

orobiTi n-niSna blokebis kodirebuli gadacemis Sedgeba Semdegi etapebisagan:

1. kodireba – funqcia $f: (Z_2)^n \to (Z_2)^m$, amasTan es funqcia cxadia unda iyos ineqcia da xSirad – wrfivi, amitom $n < m$..
2. gadacema - funqcia $g: (Z_2)^m \to (Z_2)^m$, wesiT igivuri unda iyos, magram xdeba Secdomebi, da kodireba-dekodirebis arsi swored am Secdomebis gasworebaSia. es asaxva sazogadod wrfivi ar aris.

dekodireba - funqcia $h: (Z_2)^m \to (Z_2)^n$, romlis arsi imaSia rom kompozicia $h\ g\ f : (Z_2)^n \to (Z_2)^n$ iyos maqsimalurod axlos igivurTan. es asaxvac ar aris wrfivi sazogadod.

aseT kods aRvniSnavT (n,m)-iT.

Teorema. (n,m)-kodis SeuZlia Secdomis aRmoCena yvela poziciaSi maSin da mxolod maSin, rodesac manZili kodirebul sityvebs Soris iyos n-ze meti, anu $d(f(x),f(y))>n$.

Teorema. (n,m)-kodis SeuZlia Secdomis gasworeba yvela poziciaSi maSin da mxolod maSin, rodesac manZili kodirebul sityvebs Soris iyos 2n-ze meti anu $d(f(x),f(y))>2n$.

5. kodirebis ZiriTadi sqemebi

siluwis testi

kodireba

yovel gadasacem sityvas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ emateba me-8 biti (testbiti) t ise, rom miRebuli 8 bitiani sityvis $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$,t cifrTa jami luwi gamovides, anu

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \to a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, t = (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7) \bmod 2.$

magaliTebi

1,1,0,1,0,0,1 → 1,1,0,1,0,0,1, **0**; 0,1,0,1,0,0,1 → 1,1,0,1,0,0,1, **1**,

dekodireba

Tu miRebuli sityvis $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$,t cifrTa jami luwia, maSin sityva sworadaa gadmocemuli, Tu kentia, maSin mcdarad, anu

if $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+t) \bmod 2 = 0$ then true else false

magaliTebi

1,1,0,1,0,0,1, **0 true;** 1,1,0,0,0,0,1, **0 false.**

siluwis testiT SeiZleba mxolod Secdomis aRmoCena, magaram gasworeba – ara.

siluwis testis reitingia 8:7 (8 bitian gzavnilSi informatiu-lia 7 biti, me-8 ki sasinji bitia).

hemingis 8:4 kodi

kodireba

gadasacemi 4 bitiani sityva a,b,c,d CavweroT matricis saxiT da mivuweroT oTxi testbiti x = (a + c)mod 2, y = (b + d)mod 2, z = (a + b)mod 2, t = (c + d)mod 2

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & x & y & \ \\ \hline \ & a & b & z \\ \hline \ & c & d & t \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$$

gadasacemi koduri sityva ase Caiwereba: x,y,a,z,b,c,d,t (adgilebze, romelTa nomrebia 2-is xarisxebi – 1,2,4,8 iwereba testbitebi, danarCen adgilebze ki gadasacebi bitebi).

magaliTebi

$$0,1,1,0 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & 0 & 1 & \ \\ \hline \ & 1 & 0 & \ \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & 1 & 1 & \ \\ \hline \ & 0 & 1 & 1 \\ \hline \ & 1 & 0 & 1 \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \rightarrow \mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1},1,1,0,\mathbf{1}$$

dekodireba

miRebuli 8 bitiani sityva x,y,a,z,b,c,d,t Caiwereba matricad da mowmdeba siluweze misi striqonebi da svetebi. Tu aRmoCnddeba, rom Secdomaa i-ur striqonsa da j-ur svetSi, maSin mcdaria am striqonisa da svetis gadakveTaze mdgari biti. Tu Secdomaa mxolod erT striqonSi an mxolod erT svetSi, maSin gzavnilis oTxive biti sworia.

magaliTebi

$$\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1},0,1,0,\mathbf{1} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & 1 & 1 & \ \\ \hline \ & 0 & 0 & 1 \\ \hline \ & 1 & 0 & 1 \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & 1 & \mathit{1} & \ \\ \hline \ & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{1} \\ \hline \ & 1 & \mathit{0} & 1 \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & 1 & \mathit{1} & \ \\ \hline \ & \mathit{0} & \mathbf{1} & \mathit{1} \\ \hline \ & 1 & \mathit{0} & 1 \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \rightarrow 0,1,\mathbf{1},0$$

hemingis 7:4 kodi

kodireba

gadasacemi 4 bitiani sityva a,b,c,d CavweroT matricis saxiT da mivuweroT sami testbiti $x = (c + a + b) \bmod 2$, $y = (a + b + d) \bmod 2$, $z = (c + d + b) \bmod 2$ $(c + d) \bmod 2$

x			y
	a	b	
	c	d	
			z

gadasacemi koduri sityva ase Caiwereba: x,y,a,z,b,c,d (adgilebze, romelTa nomrebia 2-is xarisxebi – 1,2,4 iwereba testbitebi, danarCen adgilebze ki gadasacebi bitebi).

magaliTi

0,1,1,0 →

	0	1	
	1	0	

→

0			1
	0	1	
	1	0	
			0

→ **0**,**1**,0,**0**,1,1,0

dekodireba

miRebuli 7 bitiani sityva x,y,a,z,b,c,d nawildeba matricad da mowmdeba siluweze Semdegi blokebi:
x-is bloki x+c+a+b; **y-is bloki** y+a+b+d; **z-is bloki** z+c+d+b.
Tu mcdaria x da y blokebi, maSin unda Seworodes biti a;
Tu mcdaria z da y blokebi, maSin unda Seworodes biti d;
Tu mcdaria x da z blokebi, maSin unda Seworodes biti c;
Tu mcdaria x,y da z blokebi, maSin unda Seworodes biti b;
yvela sxva SemTxvevaSi gzavnili a,b,c,d sworia.

magaliTi

0,**1**,0,**0**,1,0,0 →

0			1
	0	1	
	0	0	
			0

0			1
	0	1	
	0	0	
			0

→

	0	1	
	1	0	

→ 0,1,1,0

savarjiSoebi

- daSifreT siluwis kodiT gzavnili

  1011001 0011010 1010101 0101110 0010011 1011100 0111001 1010101

- aRmoaCineT mcdari baitebi siluwis kodiT daSifrul gzavnilSi

10110010 00110101 10101011 01011100 00100110 10111000 01110011 10101010

- daSifreT hemingis 8:4 kodiT gzavnili

0001 1010 0010 1101

- aRmoaCineT da gaasworeT Secdomebi hemingis 8:4 kodiT daSifrul gzavnilSi

01000011 00110101 10000101 10101011

- aRmoaCineT da gaasworeT Secdomebi hemingis 8:4 kodiT daSifrul gzavnilSi

01000011 00010101 10001101 10101010

- daSifreT hemingis 7:4 kodiT gzavnili

0001 1010 0010 1101

- aRmoaCineT da gaasworeT Secdomebi hemingis 7:4 kodiT daSifrul gzavnilSi

0101001 0111010 1001010 0110101

- aRmoaCineT da gaasworeT Secdomebi hemingis 7:4 kodiT daSifrul gzavnilSi

0101001 0101010 1001110 0110001

6. kriptografia

kriptografiis mizani diametrulad gansxvavdeba kodirebis miznisagan. Tu kodirebis mizania gazavnili maqsimalurad gasagebi gaxados (damaxinjebebis SemTxvevaSic ki), kriptografiaSi – piriqiT, mizania gzavnili gasagebi iyos mxolod misTvis, vinc icis „gasaRebi“, sxvebisTvis ki gaugebari darces.

kriptografiuli paradoqsi: me da Tqven vsubrobT telefoniT an internetiT. viRaca (mteri) ismens yvela Cvens saubars. miuxedavad amisa Cven SegviZlia SevTanxmdeT misTvis miuwvdomel saidumlo ricxvze – kodze, romlis meSveobiTac ukve nebismier informacias gavcvliT.

me Cavifiqre ricxvi a (personal key). misgan gavakeTe gzavnili $x = f(a) = 2^a \bmod 5$ (public key) da gavagzavne.

man Caifiqra ricxvi b (personal key). misgan gaakeTa gzavnili $y = f(b) = 2^b \bmod 5$ (public key) da gamomigzavna.

es x da y mterma icis, magram ar icis a da b.

axla, Cemi personal key a da misi public kay y-iT me vakeTeb ricxvs $c = F(y,a) = y^a \bmod 5$.

xolo is Tavisi personal key b da Cemi public kay x-iT akeTebs $c' = F(x,b) = x^b \bmod 5$.   .

Teorema. $F(f(b),a) = F(f(a),b)$.

damtkiceba.
$F(f(b),a) = f(b)^a = (2^b \bmod 5)^a = 2^{ba} \bmod 5 = 2^{ab} \bmod 5 = (2^a \bmod 5)^b = f(a)^b = F(f(a),b)$,

aq gamoyenebulia aseTi Tviseba: $(m \bmod k)^n = m^n \bmod k$ romelic niutonis binomidan gamodis.

amrigad, es ricxvebi c da c' erTmaneTs emTxveva. da es aris is saidumlo ricxvi, romelic Cven orma viciT mxolod.

magaliTi.

me Cavifiqre $a = 3$ da gavgzavne $x = 2^3 \bmod 5 = 3$. mterma ar icis ra aris a. es SeiZleba iyos 3 (aq $2^3 \bmod 5 = 8 \bmod 5 = 3$), an 7 (aq $2^7 \bmod 5 = 128 \bmod 5 = 3$). an sxva ricxvi.

man Caifiqra $b = 2$ da gamomigzavna $y = 2^2 \bmod 5 = 4$. aqac mterma ar icis ra aris b. es SeiZleba iyos 2 (aq $2^2 \bmod 5 = 4 \bmod 5 = 4$), an 6 (aq $2^6 \bmod 5 = 64 \bmod 5 = 4$). an sxva ricxvi.

me gavakeTe $c = y^a = 4^3 \bmod 5 = 64 \bmod 5 = 4$. is gaakeTebs $c' = x^b = 3^2 \bmod 5 = 9 \bmod 5 = 4$. es 4 aris Cveni koduri ricxvi.

ra SeuZlia mters? mas SeiZleba egonos (orive sxva unda) $a = 7$, $b = 3$, maSinac, cxadia isev $x = 3$ da $y = 4$, da misi varaudiT koduri ricxvi iqneba $c = y^a = 4^7 \bmod 5 = 64 \bmod 5 = 4$. $c' = x^b = 3^6 \bmod 5 =$

anu, Cven jer virCevT funqcias $f : R \to R$ (araSeqcevads) da kidev erT funqcias $F : R$ x: $R \to R$; romlebic akmayofilebs pirobas $F(f(a),b) = F(f(b),a)$.

mere me vigzavni f(a)-s, is migzavnis f(b)-s da orive vakeTeds kods $F(f(a),b) = c = F(f(b),a)$. Cvens SemTxvevaSi $f(a) = 2^a \bmod 5$ da $F(a,b) = a^b \bmod 5$.

kompiuteruli tomografiis maTematika

kompiuteruli tomografi aris samedicino danadgari, romlis saSualebaT xdeba daxSul areebSi damaluli obieqtebis (mag. tvini Tavis qalaSi, RviZli muclis RruSi) damzera, introskopia.

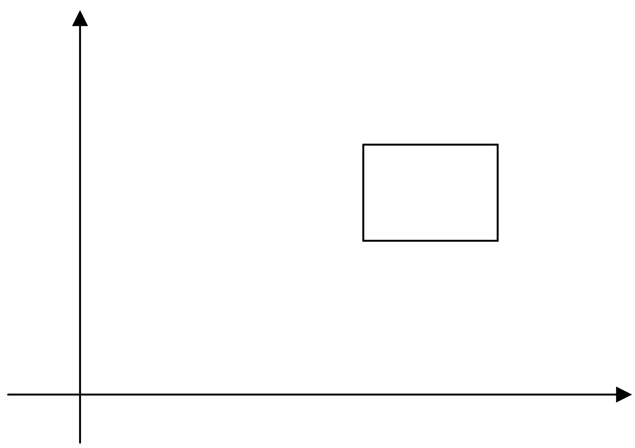
safuZveli aris klasikuri rentgenoskopia an misi Zalian Tanamedrove variantebi, mag. magnituri rezonansi.

klasikuri rentgenis suraTi aCvenebs damaluli obieqtis proeqcias erT sibrtyeSi, mis mxolod brtyel suraTs, Crdils. tomografia damyarebulia am meTodis mravaljerad gamoyenebaze – iReben obieqtis rentgenis suraTs ramdenime mimarTulebidan da miRebuli ramdenime proeqciis meSveobiT maTematikuri meTodebis gamoyenebiT xdeba obieqtis moculobiTi (3D) suraTis Seqmna. cxadia es idea – mravalproeqciiani rentgenoskopia – Tavidanve gaCnda, magram imis gamo, rom miRebuli proeqciebis maTematikuri damuSaveba uzarmazar gamoTvlebs moiTxovs, kompiuterebis epoqamde am meTodis praqtikuli gamoyeneba ver xerxdeboda.

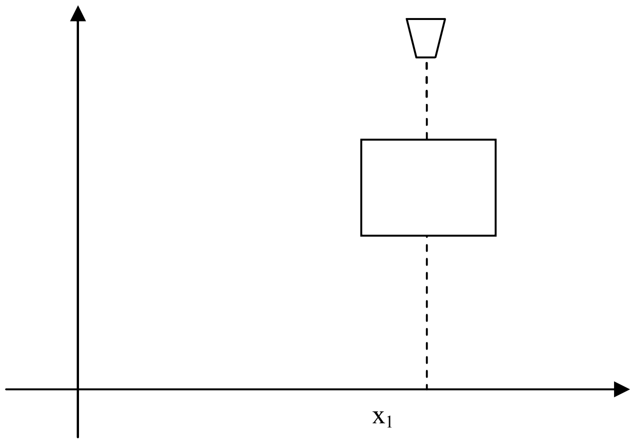
qvemoT gaCvenebT kompiuteruli tomografiis maTematikis meTodebis azrs Zalze gamartivebul – diskretul viTarebaSi.

erTi wertilis lokalizeba

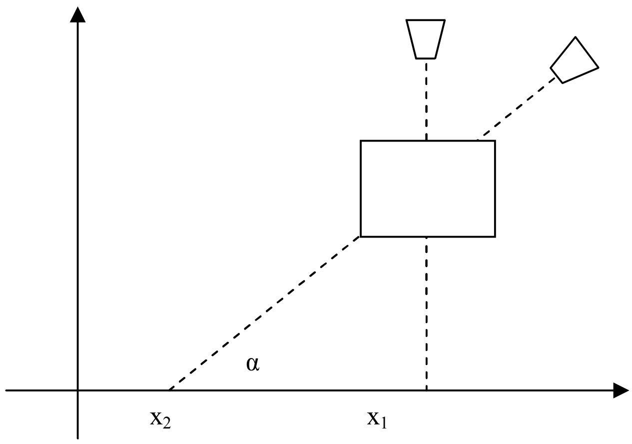
vTqvaT erTi wertili A ucnobi koordinatebiT moTavsebulia xiluli sinaTlisTvis gaumWirvale, magram rentgenis sxivebisaTvis gamWvirvale yuTSi



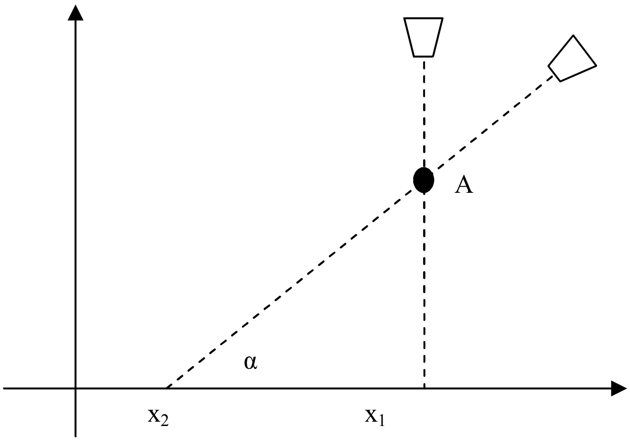
zemdan gadaRebu l i (ver t ika l u r i, $\alpha = 90^{\circ}$) ren t genis su raT i mogvcems mxo l od x_1 koo r d inat s, anu ucnobi wer t i l i imyo feba x_1 wer t i l ze gamava l ver t ika l u r wr feze, magram misi zust i mdebareoba ucnobi r Ceba



wer t i l is sabo l oo l oka l izaciisTvis saWi r oa kidev er T i ren t genis su raT is gadaReba raime α kuTxiT. es su raT i mogvcems x_2 wer t i l s x RerZze da viRebT, r om A wer t i l i mdebareobs x_2 wer t i l ze gamava l α kuTxiT daxr i l wr feze



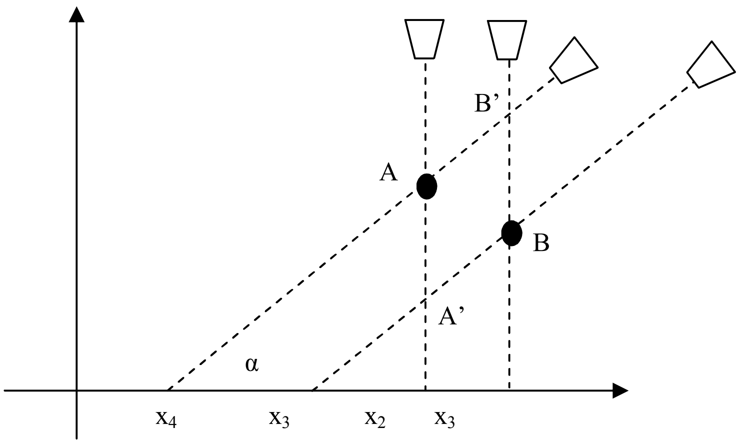
sabo l ood, es o r i ren t genis su raT i gvaZ l evs saSua l ebas davadginoT sad mdebareobs wer t i l i – am o r i wr f is gadakveTaze



aqedan dadgindeba A wertilis meore koordinatic: $y_1 = (x_1 - x_2) tg\, \alpha$.

ori wertilis lokalizeba

axla vTqvaT ori wertili mdebareobs gaumWvirvale yuTSi. ori rentgenis suraTiT ver xerxdeba maTi lokalizeba

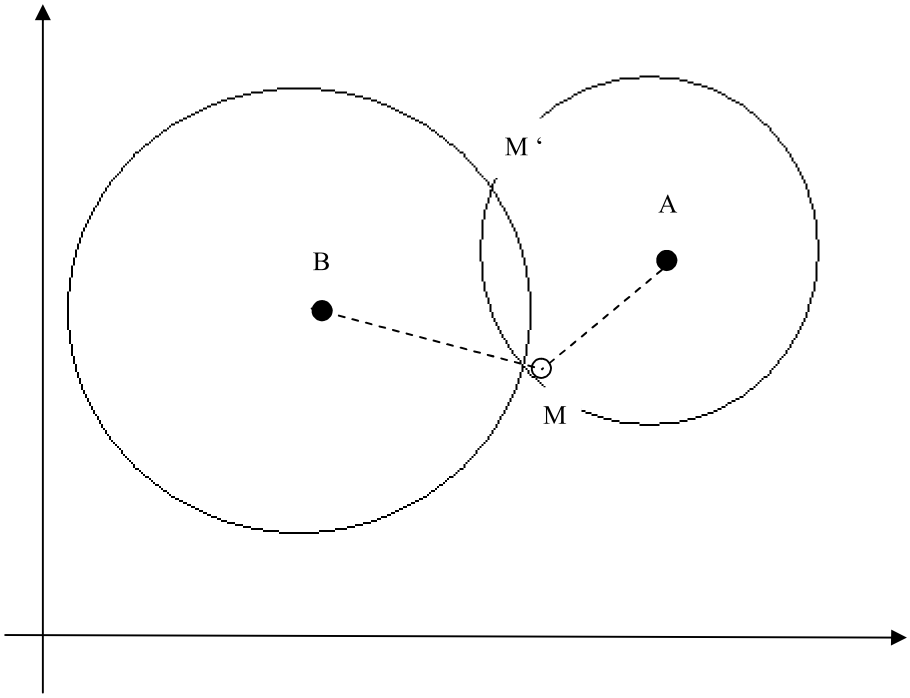


am naxazze, sadac mocemulia ori rentgenoskopirebis (90^0 da α kuTxeebiT) Sedegi, gaurkvevelia, romeli wyvilia realuri, A, B Tu A', B'. amis garkveva mxolod mesame rentgenis suraTiT moxerxdeba.

gasagebia, rom ufro meti wertilis SemTxvevaSi bevrad meti rengenoskopirebi iqneba saWiro, Sesabamisi gamoTvlebic arsebiTad garTuldeba da moxerxdeba mxolod kompiuterebis gamoyenebiT.

GPS - Global Positioning System
adgilmdebareobis garkvevis (pozicionirebis) globaluri sistema

martivi SemTxveva _ pozicionireba sibrtyeze



A Tanamgzavris koordinatebi (a_1,a_2),

B Tanamgzavris koordinatebi (b_1,b_2),

M wertilis ucnobi koordinatebi (x, y),

t_A - A Tanamgzavridan M wertilamde signalis mosvlis dro,

$r_A = c \cdot t_A$ - A Tanamgzavridan M wertilamde manZili,

t_B - B Tanamgzavridan M wertilamde signalis mosvlis dro,

$r_B = c \cdot t_B$ - B Tanamgzavridan M wertilamde manZili.

$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r_A^2 \\ (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = r_B^2 \end{cases}$$

mxolod am ori gantolebisgan Semdgari sistemis amonaxsni mogvcems or wertils _ M-s da M’–s.

Tu gveqneba t_c monacemi mesame C Tanamgzavridan, maSin SevZlebT davadginoT, romelia Cveni namdvili mdebareoba, M Tu M‘:

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r_A^2\\(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2=r_B^2\\(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r_C^2\end{cases}$$

amocana. vTqvaT cnobilia, rom A Tanamgzavris koordinatebia (0,0), B Tanamgzavrisa (0, 6). xolo C Tanamgzavrisa (3, 6). manZili M wertilidan A Tanamgzavramde aris 5, manZili M wertilidan B Tanamgzavramde aris 5i da manZili M wertilidan C Tanamgzavramde aris 2. ipoveT M wertilis koordinatebi.

amoxsna. 2 Tanamgzavris monacemebiT:

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\(x-6)^2+y^2=25\end{cases}$$

ori amonaxsni: $(x=3, y=-4)$ da $(x=3, y=4)$.

3 Tanamgzavris monacemebiT:

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\(x-6)^2+y^2=25\\(x-3)^2+(y-6)^2=4\end{cases}$$

erTi amonaxsni: $(x=3, y=4)$.

pozicionireba sivrceSi

samganzomilebian SemTxvevaSi wertils aqvs sami koordinati, amitom saWiro iqneba monacemebi 4 Tanamgzavridan.

pozicionireba saaTis koreqciiT

sinamdvileSi amocana ufro rTulia: Tanamgzavrebze ZviradRirebuli zusti saaTebia, kargad sinqronizebuli, xolo Tqveni GPS-is saaTi ki iafia, arazusti, romlis Cvenebac gansxvavdeba Tanamgzavris saaTis Cvenebisgan Δt droiT. amgvarad Semodis kidev erTi, meoTxe ucnobi Δt, amitom saWiro xdeba monacemi me-5 Tanamgzavridanac:

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}+c\cdot\Delta t=r_A\\\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}+c\cdot\Delta t=r_B\\\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2}+c\cdot\Delta t=r_C\\\sqrt{(x-d_1)^2+(y-d_2)^2+(z-d_3)^2}+c\cdot\Delta t=r_D\\\sqrt{(x-e_1)^2+(y-e_2)^2+(z-e_3)^2}+c\cdot\Delta t=r_E\end{cases}.$$

masala gameorebisTvis

simravleTa Teoria

1. simravlis cneba

simravle – sawyisi cnebaa (ar ganimarteba). tavtologiurad _ garkveul elementTa erToblioba.

magaliTebi

1. am auditoriaSi myof studentTa simravle;
2. kursis studentTa simravle;
3. fakultetis studentTa simravle;
4. naturalur ricxvTa simravle $N=\{1,2,3,4,\ldots\}$;
5. mTel ricxvTa simravle $Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$;
6. racionalur ricxvTa (wiladTa) simravle Q;
7. namdvil ricxvTa simravle Q;
8. luw ricxvTa simravle $\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$;
9. kent ricxvTa simravle $\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$;
10. 6-ze nakleb naturalur ricxvTa simravle $\{1,2,3,4,5\}$;
11. orniSna ricxvTa simravle $\{10,11,12,\ldots,98,99\}$;
12. orniSna kent simravle $\{11,13,\ldots,97,99\}$;

aRniSvna:

$x\in X$ “elementi x ekuTvnis X simravles”.
$x\notin X$ “elementi x ar ekuTvnis X simravles”.

magaliTebi

$5\in N$, $3\in N$, $-3\notin N$, $-3\in Z$, $0.33\notin N$, $0.33\notin Z$, $0.33\in Q$, $4\in\{1,4,9,25\}$, $7\notin\{1,4,9,25\}$.

aRniSvna:

$X\subset Y$ “X simravle Sedis Y simravleSi” = “X simravle aris Y simravlis qvesimravle”.
$X\not\subset Y$ “X simravle ar Sedis Y simravleSi” = “X simravle ar aris Y simravlis qvesimravle”.

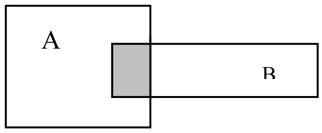
magaliTebi

$N\subset Z\subset Q\subset R$, $\{1,3,5\}\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\{1,3,9\}\not\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

2. moqmedebani simravleebze

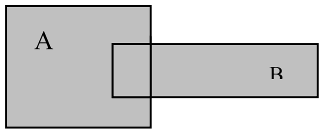
simravleTa TanakveTa

$A \cap B = \{x, x \in A$ da $x \in B\}$



simravleTa gaerTianeba

$A \cup B = \{x, x \in A$ an $x \in B\}$

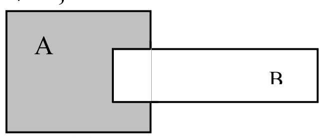


magaliTebi

$\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,5\} = \{2,3\}$, $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

simravleTa sxvaoba

$A \setminus B = \{x, x \in A, x \notin B\}$

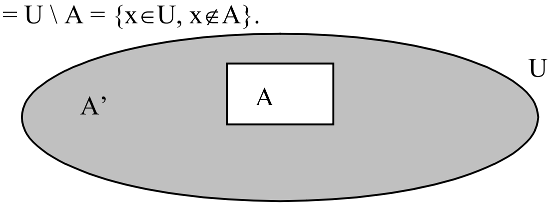


ukiduresi SemTxvevebi: carieli simravle $\varnothing$ da universi U (damokidebulia konteqstze).

simravleTa toloba: $A = B$ Tu $A \subset B$ da $B \subset A$.

A simravlis damateba:

$A' = U \setminus A = \{x \in U, x \notin A\}$.



operaciaTa Tvisebebi

ricxvebSi	simravleebSi
$a \bullet b$	$A \cap B$
$a + b$	$A \cup B$
0	$\varnothing$
$a \bullet 0 = 0$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$a + 0 = a$	$A \cup \varnothing = A$
$a \bullet b = b \bullet a$	$A \cap B = B \cap A$
$a + b = b + a$	$A \cup B = B \cup A$

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$
1
$a \bullet 1 = a$

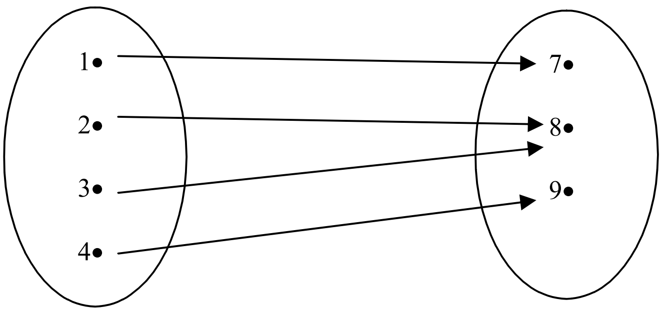
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
U
$A \cap U = A$
$A \cup U = U$
$A \cap A' = \varnothing$
$A \cup A' = U$ - $A \cap A = A$
$A \cup A = A$

3. asaxvebi

asaxva (funqcia) X simravlidan Y simravleSi $f : X \to Y$ aris wesi, romliTac X simravlis yovel elements Seesabameba Y simravlis erTi garkveuli elementi. simravles X ewodeba f asaxvis gansazRvris are, xolo simravles Y misi mniSvnelobaTa are.

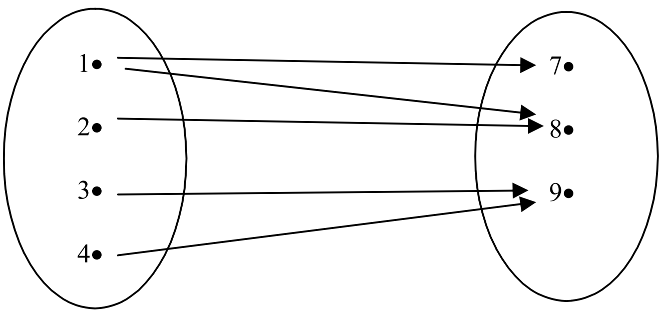
magaliTebi

1. $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{7,8,9\}$, xolo wesi f aseTia: $f(1) = 7$, $f(2) = 8$, $f(3) = 8$, $f(4) = 9$,



SeTanadebis es wesi asaxvaa.

2. $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{7,8,9\}$, xolo wesi f aseTia: $f(1) = 7$, $f(1) = 8$, $f(2) = 8$, $f(3) = 9$, $f(4) = 9$, grafikulad



SeTanadebis es wesi ar aris asaxva, radgan $x = 1$ elements Seesabameba ori sxvadasxva elementi - $y = 7$ da $y = 8$.

3. X iyos adamianebis simravle, Y-ic aseve adamianebis simravle, xolo SeTanadebis wesi iyos aseTi: yovel $x \in X$ elements (adamians) Seesabamebodes misi Zma. es ar aris asaxva: (a) arsebobs erTi mainc adamiani, visac Zma ar hyavs, anu arsebobs iseTi $x \in X$, romelsac araferi ar Seesabameba, (b) arsebobs erTi mainc adamiani, romelsac or Zma hyavs, anu arsebobs iseTi $x \in X$, romelsac ori sxvadasxva $y \in Y$ Seesabameba, rac agreTve akrZaluli asaxvis ganmartebiT.
4. es magaliTi gaswordeba, Tu Sesabamisobis wess ase SevcvliT: yovel adamians Seesabamebodes misi deda. maSin yovel $x \in X$ elements Seesabameba Tavisi erTaderTi $y \in Y$.
5. $X = R$, $Y = R$, xolo SeTanadebis wesi $f: X \to Y$ iyos mocemuli formuliT $f(x) = x^2$, kerZod $f(1) = 1, f(2) = 4, f(5) = 25, \dots$.

ganmarteba. asaxvas $f: X \to Y$ ewodeba *siureqcia,* Tu Y-is yovel elementSi gadmodis romelime x, anu Tu $\forall y \in Y \ \exists x \in X, f(x) = y$.

magaliTebi

asaxva $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ ar aris siureqcia: elementSi $y = -4$ araferi ar gadmodis.

xolo asaxva $f: R \to R$, $f(x) = 3x$ siureqciaa: elementSi y gadmodis $x = y / 3$.

ganmarteba. asaxvas $f: X \to Y$ ewodeba *ineqcia,* Tu X-is gansxvavebuli elementebi Y-is gansxvavebul elementebSi gadadian, anu Tu $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

magaliTebi

asaxva $f(x) = x^2$ ar aris ineqcia: gansxvavebuli elementebi $x = -2$ da $x = 2$ erT elementSi gadadian – $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$.

xolo asaxva $f(x) = 3x$ ineqciaa: vTqvaT $x_1 \neq x_2$ anu $x_1 - x_2 \neq 0$, maSin $f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2) \neq 0$ e.i. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ganmarteba. asaxvas $f: X \to Y$ ewodeba *bieqcia,* Tu is erTdroulad siureqciacaa da ineqciac.

aseT asaxvas urTierTcalsaxa asaxvasac uwodeben.

magaliTebi

asaxva $f(x) = x^2$ ar aris bieqcia: is arc siureqciaa da arc ineqcia.

xolo asaxva $f(x) = 3x$ bieqciaa: is siureqciac iyo da ineqciac.

4. asaxvaTa kompozicia

asaxvebi $f: X \to Y$ da $g: Y \to Z$ gansazRvraven asaxvas $(g \bullet f): X \to Z$, romelsac maTi kompozicia ewodeba da is moicema tolobiT $(g \bullet f)(x) = g(f(x))$.

magaliTi
vTqvaT $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$, maSin maTi kompozicia $(g \bullet f): R \to R$ moicema tolobiT $(g \bullet f)(x) = (x + 2)^2$.
xolo kompozicia $(f \bullet g): R \to R$ ki tolobiT $(f \bullet g)(x) = x^2 + 2$..

asaxvas $id_X : X \to X$ romelic mocemulia tolobiT $id_X(x) = x$ igivuri asaxva ewodeba.

Teorema. nebismieri asaxvebisaTvis $f : Y \to X$ da $g : X \to Z$ samarTliania tolobebi $id_X \bullet f = f$, $g \bullet id_X = g$.

$f : X \to Y$ asaxvis Seqceuli ewodeba iseT asaxvas $f^{-1} : Y \to X$, rom srulდeba pirobebi $f^{-1} \bullet f = id_X$ da $f \bullet f^{-1} = id_Y$. yvela asaxvas ar gaaCnia Seqceuli. asaxvas ewodeba Seqcevadi, Tu mas aqvs Seqceuli asaxva.

Teorema. asaxva $f : X \to Y$ siureqciaa maSin da mxolod maSin, rodesac arsebobs asaxva $g: Y \to X$ iseTi, rom sruldeba piroba $f \bullet g = id_Y$.

Teorema. asaxva $f : X \to Y$ ineqciaa maSin da mxolod maSin, rodesac arsebobs asaxva $g: Y \to X$ iseTi, rom sruldeba piroba $g \bullet f = id_x$.

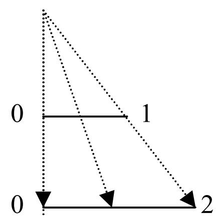
Teorema. asaxva $f : X \to Y$ bieqciaa maSin da mxolod maSin, rodesac arsebobs asaxva $g: Y \to X$ iseTi, rom sruldeba pirobebi $g \bullet f = id_x$, $f \bullet g = id_Y$.
es niSnavs, rom $g = f^{-1}$. amrigad miviReT, rom asaxva aris bieqcia maSin da mxolod maSin, rodesac is Seqcevadia.

5. simravlis simZlavre

ganmarteba. X da Y simravleebs uwodeben toli simZlavris simravleebs, Tu arsebobs bieqcia $f: X \to Y$.

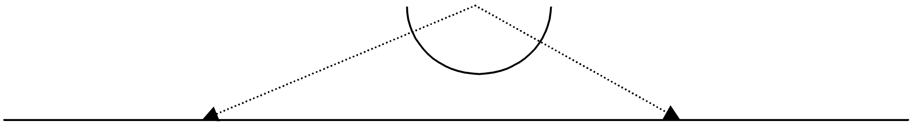
Teorema. intervali (0,1) da intervali (0,2) toli simZlavris simravleebia.

damtkiceba.



Teorema. intervali (0,1) da mTeli RerZi (namdvil ricxvTa simravle) toli simZlavris simravleebia.

damtkiceba.



Teorema. naturalur ricxvTa simravle $N = \{1,2,3,\ldots\}$ da luw naturalur ricxvTa simravle $\{2,4,6,\ldots\}$ toli simZlavris simravleebia.

damtkiceba. asaxva $f:\{1,2,3,\ldots\} \to \{2,4,6,\ldots\}$ moccemuli formuliT $f(n) = 2n$ amyarebs saWiro bieqcias.

Teorema. naturalur ricxvTa simravle $N = \{1,2,3,\ldots\}$ da kent naturalur ricxvTa simravle $\{1,3,5,\ldots\}$ toli simZlavris simravleebia

damtkiceba. asaxva $f:\{1,2,3,\ldots\} \to \{3,5,7,\ldots\}$ moccemuli formuliT $f(n) = 2n + 1$ amyarebs saWiro bieqcias.

simravles ewodeba Tvladi, Tu is tolZalovania naturalur ricxvTa simravlisa. wina ori Teorema niSnavs, rom luw ricxvTa simravle da kent ricxvTa simravle orive Tvladia.

Teorema. mTel ricxvTa simravle Tvladia, anu simravleebi N da Z toli simZlavrisani arian.

Teorema. racionalur ricxvTa simravle Tvladia, anu simravleebi N da Q toli simZlavrisani arian.

Teorema. namdvil ricxvTa simravle Tvladi ar aris, anu simravleebi N da R ar arian toli simZlavris.

amrigad, erTmaneTSi Calagebuli simravleebidan $N \subset Z \subset Q \subset R$ pirveli sami Tvladia, anu isini toli simZlavrisani arian, xolo ukanaskneli, namdvil ricxvTa simravle, anu kontinuumi, R ki araTvladia, is arsebiTad ufro mZlavria, vidre N.

savarjiSoebi

1. vTqvaT $U = \{1,2,3,4,5\}$, $X = \{1,5\}$, $Y = \{1,2,4\}$, $Z = \{2,5\}$. ipoveT

   (a) $X \cap Y'$; (b) $(X \cap Z) \cup Y'$; (c) $X \cup (Y \cap Z)$; (d) $(X \cup Y) \cap (X \cap Z)$;

(e) $(X \cup Y)'$; (f) $X' \cap Y'$; (g) $(X \cap Y)'$; (h) $(X \cup Y) \cup Z$; (i) $X \cup (Y \cup Z)$; (j) $X \setminus Z$; (k) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

2. vTqvaT $A \cap B = \varnothing$, ipoveT $A \setminus B$ da $B \setminus A$.
3. ipoveT $X \cap X'$, $X \cup X'$, $X \setminus X'$.
4. mocemulia simravleebi A, B da C, amasTan $C \subset B$. daamtkiceT, rom

   (a) $A \cap C \subset A \cap B$; (b) $A \cup C \subset A \cup B$; (c) $A \setminus B \subset A \setminus C$; (d) $C \setminus A \subset B \setminus A$;

   (e) $B' \setminus A \subset C' \setminus A$.
5. daamtkiceT, rom $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. daamtkiceT, rom $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
7. daamtkiceT, rom $A \subset B$ maSin da mxolod maSin, rodesac $A \cup B = B$.
8. daamtkiceT, rom $A \subset B$ maSin da mxolod maSin, rodesac $A \cap B = A$.
9. vTqvaT asaxvebi $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3$, ipoveT kompozicia $(g \bullet f): R \to R$.
10. vTqvaT asaxvebi $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3$, ipoveT kompozicia $(f \bullet g): R \to R$.
11. vTqvaT asaxvebi $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^3$, ipoveT kompozicia $(f \bullet g): R \to R$.
12. vTqvaT asaxvebi $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^3$, ipoveT kompozicia $(g \bullet f): R \to R$.
13. vTqvaT asaxvebi $f: R \to R$ da $g: R \to R$ mocemulia tolobebiT $f(x) = 2x$, $g(x) = 0{,}5x$, ipoveT kompozicia $(g \bullet f): R \to R$.
14. vTqvaT asaxva $f: R \to R$ mocemulia tolobiT $f(x) = 2x$, aris Tu ara es asaxva (a) siureqcia, (b) ineqcia, (g) bieqcia?
15. vTqvaT asaxva $f: R \to R$ mocemulia tolobiT $f(x) = x^2$, aris Tu ara es asaxva (a) siureqcia, (b) ineqcia, (g) bieqcia?
16. vTqvaT asaxva $f: R \to R$ mocemulia tolobiT $f(x) = x^3$, aris Tu ara es asaxva (a) siureqcia, (b) ineqcia, (g) bieqcia?
17. aCveneT, rom igivuri asaxva $id_X: X \to X$ bieqciaa.
18. aCveneT, rom ori siureqciis kompozicia siureqciaa.
19. aCveneT, rom ori ineqciis kompozicia ineqciaa.
20. aCveneT, rom ori bieqciis kompozicia bieqciaa.

6. simravleTa namravli

A da B simravleTa namravli ewodeba simravles, romlis elementebia wyvilebi (a,b), sadac a aris A simravlis elementi, xolo b ki B simravlisa, anu

$$A \times B = \{(a,b): a \in A,\ b \in B\}.$$

magaliTebi

1. A iyos simravle, Semdgare 8 laTinuri asosagan $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ xolo simravle B iyos $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, maSin maTi namravli aris 64 elementisgan Semdgari simravle

a8,b8,c8,d8,e8,f8,g8,h8
a7,b7,c7,d7,e7,f7,g7,h7
a6,b6,c6,d6,e6,f6,g6,h6
a5,b5,c5,d5,e5,f5,g5,h5
a4,b4,c4,d4,e4,f4,g4,h4
a3,b3,c3,d3,e3,f3,g3,h3
a2,b2,c2,d2,e2,f2,g2,h2
a1,b1,c1,d1,e1,f1,g1,h1

rac aris Wadrakis dafis standartili notacia.

2. namravli $R \times R$ aris sibrtye.

7. mimarTebebi

mimarTeba A da B simravleebs Soris ewodeba $A \times B$ namravlis qvesimravles $R \subset A \times B$. Tu $(a,b) \in R \subset A \times B$ maSin amboben, rom a aris R-mimarTebaSia b-sTan da es ase aRiniSneba aRb.

mimarTebaTa SesaZlo Tvisebebi:

1. mimarTebas ewodeba refleqsuri Tu $\forall x$-Tvis xRx;
2. mimarTebas ewodeba simetriuli Tu $\forall x,y$-Tvis $xRy \Rightarrow yRx$;
3. mimarTebas ewodeba tranzituli Tu $\forall x,y,z$-Tvis $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$;
4. mimarTebas ewodeba antisimetriuli Tu $\forall x,y$ -Tvis $xRy,\ yRx \Rightarrow x = y$.

ganvixiloT aseTi mimarTebebi:

(1) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x \mid y$ (x yofs y-s)$\}$;

(2) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x < y\}$;

(3) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x \le y\}$;

(4) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x - y$ luwia$\}$.

amocana

gaarkvieT TiTeuli am mimarTebisaTvis aqvT Tu ara maT zemoT CamoTvlili Tvisiebebi.

8. mimarTebis matrica

mimarTeba sasrul simravleze SeiZleba matricis saxiT Caiweros. vTqvaT $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ da mocemulia raime mimarTeba $R \subset A \times B$. am mimarTebas Seesabameba $m \times n$ matrici $||\alpha_{ij}||$, sadac $\alpha_{ij} = 1$ Tu $x_i\ R\ y_j$ da $\alpha_{ij} = 0$ winaaRmdeg SemTxvevaSi.

magaliTi

vTqvaT $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ da mimarTeba $R \subset A \times B$ aseTia: a_1Rb_1, a_1Rb_3, a_2Rb_2, maSin am mimarTebis matricia

	b_1	**b_2**	**b_3**
a_1	1	0	1
a_2	0	1	0

amocanebi

- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i-j$ luwia.
- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i-j$ kentia.
- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i<j$.
- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i\leq j$.
- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i>j$.
- dawereT matrici {1,2,3,4} simravleze gansazRvruli aseTi mimarTebisa: iRj Tu $i\geq j$.
- gaarkvieT TiTeuli am mimarTebisaTvis aqvT Tu ara maT zemoT CamoTvlili Tvisiebebi.

9. mimarTebaTa ZiriTadi saxeebi

aseTi zogadobiT mimarTebis cneba iSviaTad gamoiyeneba. Cven dagvWirdeba mimarTebaTa sami kerZo saxe.

1. ***asaxva*** aris mimarTebis kerZo saxe: yoveli asaxva $f : A \to B$ aCens aseT mimarTebas $R = \{(x,f(x))\} \subset X \times Y$, am simravles f asaxvis grafiki ewodeba. sinamdvileSi asaxva aris mimarTeba (anu qvesimravle) $R \subset X \times Y$ iseTi, rom sruldeba Semdegi 2 piroba:

   (1) $\forall\ x \in X\ \exists\ y \in Y \Rightarrow x\ R\ y$;

   (2) $xRy,\ xRy' \Rightarrow y = y'$.

2. mimarTebas ewodeba ***eqvivalentoba***, Tu is refleqsuria, simetriuli da tranzituli, anu sruldeba Semdegi aqsiomebi

   (1) xRx;

   (2) $xRy \Rightarrow yRx$;

(3) $xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

Tu R mimarTeba am aqsiomebs akmayofilebs, maSin xRy simbolos nacvlad xmaroben aRniSvnas: $x \sim y$, rac ase ikiTxeba “x eqvivalenturia y-is”. maSin es aqsiomebi ufro nacnob saxes iReben:

(1) $x \sim x$;

(2) $x \sim y \Rightarrow x \sim y$;

(3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

magaliTebi

SemovitanoT mTel ricxvTa simravleSi aseTi mimarTeba: $x \sim y$ Tu $x - y$ iyofa 5-ze. aCveneT, rom es eqvivalentobis mimarTebaa.

vTqvaT X simravleze mocemulia eqvivalentobis mimarTeba $x \sim y$, x elementis eqvivalentobis klasi $[x]$ ewodeba simravles $[x] = \{y \in X, x \sim y\}$.

Teorema. yoveli eqvivalentobis mimarTeba hyofs X simravles erTmaneTis araTanamkveT eqvivalentobis klasebad.

damtkiceba. unda vaCvenoT ori ram: (1) rom eqvivalentobis klasebis simravle faravs mTel X-s da (2) rom ori klasi an ar TanaikveTeba, an mTlianad emTxveva erTmaneTs.

pirveli winadadeba cxadia – X-is yoveli elementi x Sedis Tundac, Tavis klasSi $[x]$: $x \sim x$ **refleqsurobis** gamo.

axla davamtkicoT meore winadadeba. vTqvaT $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, es niSnavs, rom $\exists z$ i.r. $z \in [x] \cap [y]$, anu $z \sim x$ da $z \sim y$. **simetriulobiT** es igivea rac $x \sim z$ da $z \sim y$, **tranzitulobiT** ki es gvaZlevs $x \sim y$, amitom $[x] = [y]$.

rogorc vxedavT damtkicebaSi gamoyenebulia eqvivalentobis samive aqsioma.

magaliTi

zemoT naxsenebi eqvivalentobis mimarTeba mTel ricxvTa Z simravleSi “$x \sim y$ Tu $x - y$ iyofa 5-ze” hyofs Z-s Semdeg 5 eqvivaletobis klasad

$[0] = \{\ldots, 0,5,10,15,\ldots\}$, $[1] = \{\ldots,1,6,11,\ldots\}$, $[2] = \{\ldots,2,7,12,\ldots\}$, $[3] = \{\ldots,3,8,13,\ldots\}$, $[4] = \{4,9,14,\ldots\}$. am klasTa simravles qvia *5-ze gayofis naSTTa klasebi* da ase aRiniSneba: Z_5. analogiurad imarteba *n-ze gayofis naSTTa klasebi* Z_n.

amocanebi

- adamianTa simravleze ganvixiloT aseTi mimarTeba “$x \sim y$ Tu x aris y-is winapari”. aris Tu ara es eqvivalentobis mimarTeba?
- adamianTa simravleze ganvixiloT aseTi mimarTeba “$x \sim y$ Tu maT saerTi winapari hyavT”. aris Tu ara es eqvivalentobis mimarTeba?

- ganvixiloT {0,1,2,3,4,5,6} simravleze aseTi mimarTeba "$x \sim y$ Tu $x - y$ iyofa 3-ze". aCveneT, rom es eqvivalentobis mimarTebaa, CamowereT ewvivalentobis klasebi, dawereT am mimarTebis matrici.

3. mimarTebas ewodeba ***nawilobrivi dalageba*** Tu is refleqsuria, antisimetriuli da tranzituli, anu Tu sruldeba Semdegi aqsiomebi:

(1) xRx;

(2) $xRy,\ yRx \Rightarrow x = y$;

(3) $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$.

Tu R mimarTeba am aqsiomebs akmayofilebs, maSin xRy simbolos nacvlad xmaroben ufro nacnob aRniSvnas: $x \le y$. maSin es aqsiomebi ufro nacnob saxes iReben:

(1) $x \le x$;

(2) $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$;

(3) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$.

mimarTebas ewodeba ***sruli dalageba***, Tu is nawilobrivi dalagebaa da damatebiT sruldeba aseTi aqsiomac: nebismieri ori elementi sadaria, anu (4) $\forall x,y$ an $x \le y$, an $y \le x$.

magaliTebi

U iyos raime simravle, xolo X iyos am simravlis yvela qvesimravleTa simravle, anu $x \in X$ Tu $x \subset U$. SemovitanoT X-ze aseTi dalageba: $x \le y$ Tu $x \subset y$. es nawilobrivi dalagebaa.

mimarTeba naturalur ricxvTa simravleze "$x \le y$ Tu x yofs y-s" aseve nawilobrivi dalagebaa.

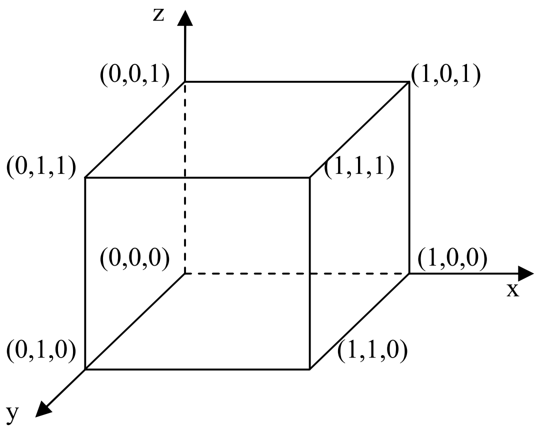
X iyos adamianebis simravle, xolo dalageba SemovitanoT ase: $x \le y$ Tu x aris y-is winapari. esec nawilobrivi dalagebaa.

namdvil ricxvTa simravleze SemovitanoT mimarTeba, romelic mocemulia sibrtyis $R^2 = R \times R$ aseTi qvesimravliT: es iyos I da III sakoordinato kuTxeebis biseqtrisis qveS moTavsebuli naxevarsibrtye.

aCveneT, rom es dalageba sinamdvileSi sruli dalagebaa, romelic emTxveva RerZis Cveulebriv dalagebas.

10. nawilobrivi dalageba kubis wveroTa simravleSi (hemingis dalageba)

erTi wvero metia meoreze, Tu mis koordinatebSi meti 1-bia



(0,0,0) < (0,0,1) < (0,1,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,0,1) < (1,0,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,1,0) < (0,1,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,1,0) < (1,1,0) < (1,1,1)

(0,0,0) < (1,0,0) < (1,1,0) < (1,1,1)

(0,0,0) < (1,0,0) < (1,0,1) < (1,1,1)

udidesi da umciresi, minimaluri da maqsimaluri

vTqvaT $(X, \leq)$ nawilobrivad dalagebuli simravlea. elements $m \in X$ ewodeba umciresi Tu $\forall x$-Tvis $m \leq x$. analogiurad, elements $M \in X$ ewodeba udidesi Tu $\forall x$-Tvis $x \leq M$.

Teorema. nebismier nawilobrivad dalagebul simravleSi SeiZleba arsebobdes araumetes erTi umciresi (udidesi) elementisa.

damtkiceba. vTqvaT m da m' ori umciresi elementia. m-is umciresobis gamo $m \leq m'$, xolo m'-is umciresobis gamo $m' \leq m$. antisimetriulobiT viRebT $m = m'$. analogiurad damtkicdeba udidesi elemetis erTaderTobac.

dalagebul simravleTa namravli

vTqvaT $(X, \leq)$ da $(Y, \leq)$ nawilobriv dalagebuli simravleebia. ganvmartoT maT namravlze $X \times Y$ aseTi dalageba: $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ Tu $x_1 \leq x_2$ da $y_1 \leq y_2$. am dalagebas vuwodoT namravlis dalageba.

leqsikografiuli dalageba

imave namravlze $X \times Y$ imarteba sxvanairi dalagebac (msgavsi imisa, Tu rogoraa dalagebuli sityvebi leqsikonSi, amitom am dalagebas leqsikografiuli dalageba ewodeba): $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ Tu $x_1 < x_2$, xolo Tu $x_1 = x_2$, maSin $y_1 \leq y_2$.

amocanebi

- (nawilobriv) dalagebul simravleTa yvela zemoT moyvanil magaliTSi aRmoaCineT umciresi da udidesi elementebi, Tuki aseTebi arseboben.

- adamianTa simravleze ganvixiloT aseTi mimarTeba “$x R y$ Tu x aris y-is winapari”. aris Tu ara es dalageba? eqvivalentoba? asaxva?
- adamianTa simravleze ganvixiloT aseTi mimarTeba “$x R y$ Tu maT saerTi winapari hyavT”. aris Tu ara es dalageba? eqvivalentoba? asaxva?
- ganvixiloT {1,2,3,4} simravleze aseTi mimarTeba “$x R y$ Tu $x \leq y$”. aCveneT, rom es dalagebaa, dawereT am mimarTebis matrici.
- ganvixiloT {1,2,3,4} simravleze aseTi mimarTeba “$x R y$ Tu x yofs y-s”. aCveneT, rom es dalagebaa, dawereT am mimarTebis matrici.
- ganvixiloT {1,2,3,4} simravleze aseTi mimarTeba “$x R y$ Tu $x - y$ iyofa 3-ze”. aCveneT, rom es eqvivalentobis mimarTebaa, CamowereT ewvivalentobis klasebi, dawereT am mimarTebis matrici.
- daamtkiceT, rom nawilobriv dalagebuli vTqvaT $(X, \leq)$ da $(Y, \leq)$ imravleebis zemoT aRwerili $X \times Y$ namravlis dalageba nawilobrivi dalagebaa.
- vTqvaT $(X, \leq)$ da $(Y, \leq)$ dalagebebi orive srulia. sworia Tu ara, rom $X \times Y$ namravlis dalagebac srulia?
- daamtkiceT, rom nawilobriv dalagebuli vTqvaT $(X, \leq)$ da $(Y, \leq)$ simravleebis $X \times Y$ namravlis zemoT aRwerili leqsikografiuli dalageba nawilobrivi dalagebaa.
- vTqvaT $(X, \leq)$ da $(Y, \leq)$ orive srulia. sworia Tu ara, rom $X \times Y$–is leqsikografiuli dalagebac srulia?
- daasaxeleT $N \times N$ simravlis is elementebi, romelTaTvisac sruldeba $(x,y) \leq (5,4)$ namravlis dalagebiT.
- daasaxeleT $N \times N$ simravlis is elementebi, romelTaTvisac sruldeba $(x,y) \leq (5,4)$ leqsikografiuli dalagebiT.
- emTxveva Tu ara erTmaneTs namravlis da leqsikografiuli dalagebebi?

algebra

1. jgufebi

ganmarteba. jgufi ewodeba simravles G operaciiT
$\mu : G \times G \to G,\ \mu(a,b) = a * b$,
romelic akmayofilebs Semdeg aqsiomebs:

1. asociaturoba: $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. erTeuli: $\forall\ e \in R$ i.r. yoveli elementisaTvis $a \in R$ sruldeba piroba $a * e = e * a = a$
3. mopirdapire: $\forall a \in R\ \exists\ \hat{a}$ i.r. $a * \hat{a} = \hat{a} * a = e$;

jgufi komutaturia (abelisaa) Tu damatebiT sruldeba aqsioma
4. $a * b = b * a$.
abelis jgufebisaTvis gamoiyeneba adituri Cawera: $a*b=a+b$, $e = 0$, $\hat{a} = -a$, xolo araabelurebisTvis – multiplikaturi: $a*b=a\cdot b$, $e = 1$, $\hat{a} = a^{-1}$.

magaliTebi

1. luwi ricxvebi Sekrebis mimarT abelis jgufia, kentebi ki ara.
2. $(Z, +)$ jgufia;
3. racionaluri ricxvebi gamravlebis mimarT ar aris jgufi.
4. $(Q \setminus 0, \cdot)$ jgufia.
5. $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ jgufia Semdegi operaciis mimarT:

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

6. araabeluri jgufis magaliTia aragadagvarebul matricTa jgufi matricTa gamravlebis mimarT:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}$$

xolo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$$

Teorema. jgufSi neitraluri elementi erTaderTia.

Teorema. jgufSi yovel elemnts gaaCnia mxolod erTi mopirdapire.
damtkiceba.

2. qvejgufi

ganmarteba. jgufis qvesimravles $H \subset G$ ewodeba qvejgufi, Tu H TviTon aris jgufi igive operaciis mimarT, anu sruldeba pirobebi
1. Tu $a,b \in H$, maSin $a * b \in H$;
2. $e \in H$;
3. Tu $a \in H$, maSin $\hat{a} \in H$

magaliTebi.
1. $N \subset Z$ ar aris qvejgufi.
2. kenti ricxvebis simravle ar aris Z-is qvejgufi.
3. luwi ricxvebis simravle aris Z-is qvejgufi:
4. $Z_6= \{0,1,2,3,4,5)$ jgufis qvesimravleTagan qvejgufebia mxolod {0}, {0,2,4}, {0,3}.

Teorema. $nZ \subset Z$ qvejgufia, piriqiTac, Z-is nebismieri qvejgufi nZ saxisaa.

3. homomorfizmebi

ganmarteba. jgufebis asaxvas
$f : G \to G'$
ewodeba homomorfizmi, Tu sruldeba Semdegi pirobebi
1. $f(e) = e'$;
2. $f(a * b) = f(a) * f(b)$.

magaliTebi
1. asaxva $f : Z \to Z$ mocemuli tolobiT $f(k) = 3k+1$ ar aris homomorpizmi.
2. aseve ar aris homomorpizmi asaxva $f(k) = k^2$:
3. asaxva $f : Z \to Z$ mocemuli tolobiT $f(x) = 3x$ homomorfizmia
4. asaxva $f : Z \to Z$ mocemuli tolobiT $f(x) = nx$ homomorfizmia, piriqiTac, nebismieri homomorfizmi $f : Z \to Z$ aucileblad $f(x) = nx$ tipisaa:
5. asaxva $f : Z \to Z_2$ mocemuli tolobebiT $f(2n) = 0$, $f(2n+1) = 1$ homomorfizmia.

4. anasaxi da birTvi

ganmarteba. $f : G \to G'$ homomorfizmis anasaxi ewodeba qvesimravles
$\mathrm{Im}\, f = \{g \in G', g = f(h)\}$.
$\mathrm{Im}\, f$ yovelTvis aracarielia: $e' = f(e) \in \mathrm{Im}\, f$.

ganmarteba. $f : G \to G'$ homomorfizmis birTvi ewodeba qvesimravles
$\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G, f(g) = e'\}$.
$\mathrm{Ker}\, f$ yovelTvis aracarielia: $e \in \mathrm{Ker}\, f$.

magaliTebi.
1. $f : Z \to Z$, $f(x) = 3x$ homomorfizmisTvis
$\mathrm{Im}\, f = \{\ldots, -6,-3,0,3,6,\ldots\}$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
2. $f : Z \to Z_2$, $f(2x) = 0$, $f(2x+1) = 1$ homomorfizmisTvis
$\mathrm{Im}\, f = Z_2$, $\mathrm{Ker}\, f = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$.

Teorema. $\mathrm{Im}\, f$ qvejgufia.

Teorema. $\mathrm{Ker}\, f$ qvejgufia.

Teorema. homomorfizmi $f : H \to G$ ineqciaa maSin da mxolod maSin, rodesac $\mathrm{Ker}\, f = e$.

5. rgolebi da velebi

ganmarteba. rgoli ewodeba simravles R aRWurvils ori operaciiT, SekrebiTa da gamravlebiT $a + b$, $a \cdot b$, romlebic akmayofileben Semdeg aqsiomebs
1. $(R, +)$ komutaturi jgufia;
2. Sekreba da gamravleba dakavSirebulni arian distribuciulobis kanonebiT: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b)\cdot c = a \cdot c + b\cdot c$;
3. gamravleba asociaturia: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

rgols hqvia *erTeuliani*, Tu damatebiT sruldeba aqsioma
4. arsebobs elementi $e \in R$, romelic gamravlebis mimarT neitralur elemnts warmoadgens: $a \cdot e = e \cdot a = a$;

rgols hqvia *komutaturi*, Tu damatebiT sruldeba piroba
5. $a \cdot b = b \cdot a$.

ganmarteba. rgols $(R, +, \cdot)$ ewodeba veli, Tu is erTeuliania, komutaturia da yovel aranulovan elements gaaCnia Sebrunebuli, anu $\forall\, a \neq 0 \in R\ \exists\, \hat{a} \in R$ i.r. $a \cdot \hat{a} = e$.

magaliTebi.
1. $(Z, +, \cdot)$ rgolia, magram ar aris veli.

2. $(Q,+,\cdot)$ ve l ia.

3. Z_4 rgo l ia Semdegi operaciebis mimarT:

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	1	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

magram ar aris ve l i:

4. Z_3 ve l ia.

5. **komp l eqsur ricxvTa ve l i.** $R^2 = \{(a,b),\ a,b \in R\}$ Semdegi operaciebiT $(a,b)+(c,d)=(a+c,\, b+d)$, $(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c - b\cdot d,\ a\cdot d + b\cdot c)$ ve l ia.

ganmarteba. R rgo l is aranu l ovan e l ements a hqvia 0-is gamyo fi, Tu arsebobs aranu l ovani $b \in R$ iseTi, rom $a \cdot b = 0$. rgo l s hqvia unu l gayo f o, Tu mas nu l is gamyo febi ar aqvs.

maga l iTebi.

1. Z da Q unu l gamyo f o rgo l ebia.
2. Z_4-s aqvs nu l is gamyo f i: $2\cdot 2 = 0$.

Teo rema. ve l s ar SeiZ l eba hqondes nu l is gamyo febi.

Teo rema. Z_n unu l gamyo foa maSin da mxo l od maSin, rodesac n mar t ivia.

Teo rema. Z_n ve l ia maSin da mxo l od maSin, rodesac n mar t ivia.

amo canebi

1. 2+4 Z_5-Si aris
(a) 6 (b) 0 (g) 1 (d) 3

2. Z_6-Si 4-is mopirdapire (Sekrebis mimarT) aris
(a) 6 (b) 0 (g) 1 (d) 2

3. am qvesimrav l eTagan Z-is qvejgufia
(a) naturaluri ricxvebi (b) kenti ricxvebi
(g) 3-is jeradi ricxvebi (d) sru l i kvadratebi

4. am qvesimrav l eTagan Z-is qvejgufia
(b) dadebiTi ricxvebi (b) uaryofiTi ricxvebi
(g) 0 (d) 100-ze nak l ebi ricxvebi

5. am qvesimrav l eTagan Z_4-is qvejgufia
(a) {1,2,3} (b) {0,1,2} (g) {2,4} (d) {0,2}

6. am asaxvaTagan $f: R \to R$ rome l ia homomorfizmi
(a) $f(x)=x^2$ (b) $f(x)=\sin x$ (g) $f(x)=2^x$ (d) $f(x)=5x$

7. (2,4) da (1,3) komp l eqsur ricxvTa namrav l ia
(a) (2,12) (b) (-10,10) (g) (10,-10) (d) (14,10)

8. (0,1) kompleqsuri ricxvis kvadratia
(a) (0,-1) (b) (1,0) (g) (1,1) (d) (-1,0)

9. (0,1) kompleqsuri ricxvis Sebrunebulia
(a) (1,0) (b) (0,0) (g) (1,1) (d) (0,-1)

10. amrgolTagan romeli ar aris veli
(a) racionaluri ricxvebi Q (b) mTeli ricxvebi Z
(g) namdvili ricxveebi R (d) kompleqsuri ricxvebi C

11. romelia amrgolTagan veli
(a) Z_4 (b) Z_3 (g) Z_6 (d) Z

12. romelia amrgolTagan unulgamyofo
(a) Z_4 (b) Z_8 (g) Z_6 (d) Z

13. amrgolTagan romels aqvs 0-is gamyofebi
(a) Z_2 (b) Z_3 (g) Z_6 (d) Z

14. $3 \cdot 4$ Z_5-Si aris
(b) 12 (b) 2 (g) 0 (d) 3

15. Z_5-Si 4-is Sebrunebuli (gamravlebis mimarT) aris
(a) 0,25 (b) 4 (g) 1 (d) 3

16. Z_6-Si 0-is gamyofia
(a) 3 (b) 4 (g) 1 (d) 5

17. Z_7 –Si 2-is mopirdapire Sekrebis mimarT aris
(a) -2 (b) 4 (g) 1 (d) 5

18. Z_7 –Si 2-is mopirdapire gamravlebis mimarT aris
(a) 0.5 (b) 4 (g) 1 (d) 5

19. Z_7 –Si $3 - 5$ aris
(a) 0 (b) 4 (g) 1 (d) 5

20. Z_7 –Si 3:2 aris
(b) 0 (b) 4 (g) 1 (d) 5

propoziciuri logika

propozicia _ “gamonaTqvami”, “winadadeba”, an WeSmaritia, magaliTad,

“am winadadebaSi oTxi sityvaa”,

an mcdari

“studentebi gamocdaze ar iweren”,

zogis WeSmariteba ki gaurkvevelia, mag.

“xval, albaT, iwvimebs”, “romeli saaTia?”.

propoziciuri logika operirebs *mxolod* im gamonaTqvamebiT, romlebic an WeSmaritia, an mcdari.

propoziciuri logika, anu propoziciaTa aRricxva aris aRwera imisa, rogor miviRoT WeSmariti winadadebebidan (vTqvaT aqsiomebidan) sxva WeSmariti winadadebebi (vTqvaT Teoremebi).

propoziciuri logika eyrdnoba or ZiriTad princips:

winaaRmdegobis principi. ar arsebobs winadadeba, romelic erdroulad WeSmariticaa da mcdaric.

mesame gamoricxulis principi. yoveli winadadeba an WeSmaritia, an mcdari.

sxva sityvebiT propoziciur logikaSi mxolod aseT – an WeSmarit, an mcdar – winadadebebs ixilaven. amitomac hqvia am logikas sxvanairad *absoluturi* logika.

operaciebi winadadebebze

aris ramdenime operacia, romlebic erTi an ramdenime winadadebisgan sxva winadadebebs aCenen.

uaryofis operacia - ara. yovel winadadebas “A” SeeTanadeba misi uaryofa, winadadeba “NOT A”, sxva aRniSvniT $\neg$ A. Tu “A” WeSmaritia, maSin “NOT A” mcdara; Tu “A” mcdaria, maSin “NOT A” WeSmaritia.

koniunqciis operacia - da. yovel or winadadebas “A”, “B” SeeTanadeba winadadeba “A AND B” , sxva aRniSvniT A ^ B. . es winadadeba WeSmaritia maSin da mxolod maSin, rodesac orive - “A”-c da “B”-c WeSmaritia. yvela sxva SemTxvevaSi “A AND B” mcdaria.

diziunqciis operacia - an. yovel or winadadebas “A”, “B” SeeTanadeba winadadeba “A OR B” , sxva aRniSvniT A v B. es winadadeba WeSmaritia maSin da mxolod maSin, rodesac erTi mainc, an “A” an “B” WeSmaritia. Tu orive mcdaria, maSin mcdaria “A OR B”-c.

implikaciis operacia - gamomdinareobs. yovel or winadadebas “A” da “B” SeeTanadeba winadadeba “A IMPLIES B”, sxva aRniSvniT A→B. amis eqvivalenturi formebia

1. A → B;
2. Tu A maSin B;
3. A aris sakmarisi B-sTvis;
4. B aris aucilebeli A-sTvis.

WeSmaritebis cxrilebi

aqaa “gamravlebis tabulebi” am operaciebisaTvis

A	NOT *A*
F	T
T	F

A	*B*	*A* AND *B*
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

A	*B*	*A* OR *B*
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

A	*B*	*A* IMPLIES *B*
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

aq T (TRUE) niSnavs WeSmarits, xolo F (FALSE) _ mcdars. operaciaTa aRmniSvneli inglisuri sityvebis AND, OR, IMPLIES nacvlad iyeneben aRniSvnebs

$$\text{NOT} = \neg,\quad \text{OR} = \vee,\ \text{AND} = \wedge,\ \text{IMPLIES} = \rightarrow$$

ixmareba agreTve aRniSvna A <=> B rac niSnavs, rom A → B da B → A. es niSnavs, rom A da B eqvivalenturni arian.

magaliTi. ganvixiloT sami sawyisi winadadeba

T = Tovs, y = yinavs, g = gareT gavdivar.

CavweroT winadadebebi operaciebis terminebSi

1. “Tu Tovs an yinavs, gareT ar gavdivar”

(T OR y) IMPLIES NOT g

anu

$$(T \vee y) \rightarrow \neg g.$$

2. „Tu arc Tovs da arc yinavs, gareT gavdivar“

$$(\neg T \wedge \neg y) \rightarrow g.$$

3. „roca gareT gavdivar, maSin Tovs“

$$g \rightarrow T.$$

4. “an Tovs, an yinavs”

$$T \vee y.$$

amrigad, mocemuli ramdenime winadadebidan logikuri operaciebis meSveobiT SeiZleba SevqmnaT axali winadadebebi da da Semdeg vcadoT gavarkvioT, rodisaa miRebuli winadadeba WeSmariti da rodis mcdari.

tavtologia, absurdi, saTuo

Tu Sedgenili winadadeba WeSmaritia Semadgeneli winadadebebis nebismieri mniSvnelobisaTvis, maSin mas *tavtologia* ewodeba. Tu yovelTvis mcadria – *absurdi*, Tu xan WeSmaritia da xan mcdari – *saTuo*.
magaliTad, $P \vee (\neg P)$ tavtologiaa, is yovelTvis WeSmaritia:

P	¬P	P v (¬P)
0	1	1
1	0	1

$P \wedge (\neg P)$ absurdia, is yovelTvis mcdaria:

P	¬P	P ^ (¬P)
0	1	0
1	0	0

$P \rightarrow (\neg P)$ saTuoa:

P	¬P	P → (¬P)
0	1	1
1	0	0

is mcdaric SeiZleba iyos da WeSmaritic.

ZiriTadi igiveobebi (tavtologiebi)

de morganis kanonebi

1) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

2) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

kontrpoziciis kanoni

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p);$$

STanTqmis kanonebi

1) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$;

2) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$;

distribuciulobis kanonebi

1) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

2) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

TiTeuli am kanonis Semowmeba SesaZlebelia cxrilebiT, SevamowmoT magaliTad de morganis kanoni $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$:

P	**Q**	**P v Q**	**¬(P v Q)**	**¬P**	**¬Q**	**¬Q ^ ¬P**
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

aq me-3 da me-7 svetebi erTnairia, e.i. **¬(P v Q)** da **¬Q ^ ¬P** erTdroulad arian mcdari an WeSmarito (maT erTnairi WeSmaritebis funqciebi aqvT), amitom isini eqvivalenturni arian.

qvemoT mogvyavs ramdenime sxva tavtologia

$P \Leftrightarrow (P \vee P)$

$P \Leftrightarrow (P \wedge P)$

$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

$[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$

$[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$[P \wedge (Q \vee R] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

$[P \vee (Q \wedge R] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

$(P \vee \text{True}) \Leftrightarrow \text{True}$

$(P \wedge \text{False}) \Leftrightarrow \text{False}$

$(P \vee \text{False}) \Leftrightarrow P$

$(P \wedge \text{True}) \Leftrightarrow P$

$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \text{True}$

$(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \text{False}$

$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$

$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$

$[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

$[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)] \Leftrightarrow \neg P$

$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

davamtkicoT $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	P→Q	¬P	Q	¬Q v P
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

davamtkicoT $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

P	Q	P→Q	¬P	¬Q	¬Q→¬P
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

hilbertis aqsiomebi

$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

$A_2 : ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;

$A_3 : A \wedge B \rightarrow A$;

$A_4 : A \wedge B \rightarrow B$;

$A_5 : A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$;

$A_6 : A \rightarrow (A \vee B)$;

$A_7 : B \rightarrow (A \vee B)$;

$A_8 : (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$;

$A_9 : \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;

$A_{10} : (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$;

$A_{11} : A \vee \neg A$.

cnobili antikuri tavtologiebi

$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ - **silogizmi** (sokrate adamiania, yvela adamiani mikvdavia, e.i. sokratec mokvdavia)

$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ - **Modus Ponens** - gamoyvanis wesi (Tu A-dan gamodis B da A WeSmaritia, maSin WeSmaritia B-c)

$((\neg B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A)$ - **Modus Tollens** - winaaRmdegobis daSveba (Tu A-dan gamodis B, magram B mcdaria, maSin mcdari yofila A-c).

xidi lagikidan simravleebisken

vTqvaT X raime simravlea, xolo P raime gamonaTqvami X-is elementebis Sesaxeb. Tu $x \in X$ elements aqvs es P Tviseba, maSin vwerT P(x).

magaliTad, X = N iyos naturalur ricxvTa simravle, xolo P iyos Tviseba „aris martivi ricxvi“. maSin P(2), P(3), P(5), P(7), . . . , magram ara P(4), P(6), P(8), ...

simravle P_T ganimarteba, rogorc erToblioba yvela im x-sa, romelTac aqvT es P Tviseba, anu

$$P_T = \{x \in X, P(x)\}.$$

Cvens magaliTSi P = „aris martivi ricxvi“ $P_T = \{2,3,5,7,9,11,13, ...\}$.

leqsikoni logikuri operaciebidan simravlur operaciebSi

$$\vee = \bigcup = +, \quad \wedge = \bigcap = \cdot.$$

$$(P \vee Q)_T = \{x \in X, \quad P(x) \ or \ Q(x)\} = P_T \bigcup Q_T$$

$$(P \wedge Q)_T - \{x \in X, \quad P(x) \ and \ Q(x)\} - P_T \bigcap Q_T$$

$$(\neg P)_T = \{x \in X, \quad not \ P(x)\} = P_T^c.$$

simravluri da logikuri de morganis kanonebi

$$(P_T \bigcup Q_T)^c = P_T^c \bigcap Q_T^c \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$(P_T \bigcap Q_T)^c = P_T^c \bigcup Q_T^c \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$

kvantorebi

$\forall x \in X \quad P(x)$ niSnavs „yoveli x-Tvis X-dan P WeSmaritia“.

$\exists x \in X \quad P(x)$ niSnavs „arsebobs x X-dan, romlisTvisac P WeSmaritia“.

kvantorebi da uaryofa

$$\neg(\forall x \in A, \ P(x)) \ \Leftrightarrow \ \exists x \in A, \ \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in A, \ P(x)) \ \Leftrightarrow \ \forall x \in A, \ \neg P(x)$$

savarjiSoebi

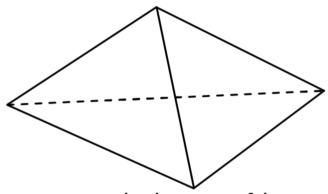
daamtkiceT zemoT moyvanili tavtologiebi.

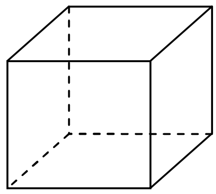
grafTa Teoria

(mokle kursi)

1. grafis ganmarteba da magaliTebi

grafi Sedgeba *wveroebisagan* da *wiboebisagan*. wveroebi warmoadgenen wertilebs, xolo zogirTi wyvili wveroebisa SeerTebulia wiboTi. wveroTa simravle aRiniSneba V-Ti (vertices), xolo wiboTa simravle E-Ti (edges). |V| aRniSnavs grafis wveroTa raodenobas, xolo |E| ki wiboTa raodenobas.
mogvyavs ramdenime mniSvnelovani grafis magaliTi



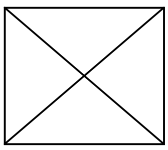


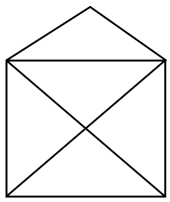
1. tetraedris grafi
$|V| = 4, |E| = 4$

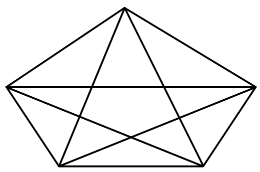
2. kubis grafi
$|V| = 8, |E| = 12$

3. n-wveroiani sruli grafi – am grafs aqvs n wvero da wveroTa *yvela* wyvili SeerTebulia wiboTi. aseTi grafisaTvis $|V| = n$, $|E| = n(n-1)/2$.

kerZod,







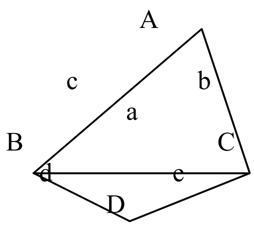
3. 4-wveroiani sruli grafi (daxuruli konverti)
$|V| = 4, |E| = 6$

4. Ria konverti
$|V| = 5, |E| = 8$

5. 5-wveroiani sruli grafi
$|V| = 5, |E| = 10$

2. grafTa mocemis xerxebi

grafi SeiZleba aRiweros misi wveroebisa da wiboebis ubralo CamoTvliT:



am grafSi 4 wveroa A,B,C,D da 5 wibo c = (A,B), b = (A,C), a = (C,B), d = (D,B), e = (D,C). es grafi ase SeiZleba aRiweros
V ={A,B,C,D}, E = {(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),(D,C)}.

grafis Cawera SeiZleba e.w. *SeerTebaTa matriciTac*. es aris |V| × |V| zomis kvadratuli matrici, sadac (i,j) adgilze aris 1 Tu i-uri da j-uri wveroebi SeerTebulia wibiTi, da aris 0 winaamRdeg SemTxvevaSi. Cveni grafisTvis es matricia

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	0	1	1	0

arsebobs gansxvavebuli gza grafis matriciT aRwerisa - *incidentobis matrici*. es aris |E| × |V| zomis matrici, sadac (i,j) adgilze aris 1 Tu i-ur adgilze mdgomi wvero ekuTvnis j-ur adgilze mdgom wibos, da aris 0 winaamRdeg SemTxvevaSi. Cveni grafisTvis es matricia

	a	b	c	d	e
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	0	1
D	0	0	0	1	1

3. grafTa komponentebi

gza grafis v da w wveroebs Soris ewodeba wveroTa mimdevrobas $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$, sadac $v = v_0$, $w = v_n$ da yoveli wyvili $[v_i,v_{i+1}]$ qmnis wibos.
gzas ewodeba *cikli*, Tu is Sekrulia, anu $v_0 = v_n$.
grafs ewodeba *bmuli*, Tu SesaZlebelia misi yoveli ori wveros gziT SeerTeba.

grafs ewodeba *xe*, Tu is bmulia da *acikluri* (e.i. ar aqvs ciklebi).
grafis wveros *xarisxi* (valentoba) ewodeba im wiboTa raodenobas, romlebic Seicaven am wveros.

Teorema. grafis yvela wveros xarisxTa jami luwi ricxvia.

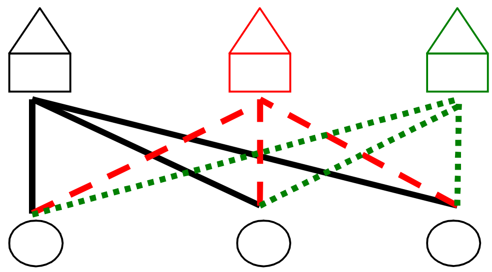
Teorema. grafis kent xarisxiani wveroebis ricxvi luwia.

4. planaruli grafebi

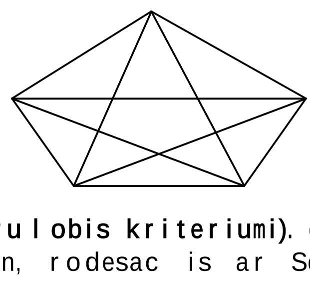
grafs ewodeba *planaruli* (brtyeli) Tu SesaZlebelia misi sibrtyeze ise daxazva, rom wiboebi erTmaneTs ar kveTdnen.
sibrtyeze daxazul grafi warmoqmnis regionebs – areebs, romlebic SemosazRvrulia garkveuli ciklebiT. aseT regionTa simravle aRvniSnoT R-iT (aRvniSnoT, rom regonebSi iTvleba agreTve erTi usasrulo regioni ganlagebuli grafis gare konturis gareT).

eileris formula. $|V| - |E| + |R| = 2$.

sami Wis amocana. SevaerToT sami saxli sam WasTan ise, rom bilikebi erTmaneTs ar kveTdnen.



am naxazze bilikebi erTmaneTs kveTen, magram SeiZleba Tu ara am bilikebis ise gatareba, rom isini ar ikveTebodnen? eileris formulidan SeiZleba imis gamoyvana, rom es SeuZlebelia, anu es grafi planaruli (brtyeli) ar aris. am grafs ewodeba $K_{3,3}$.
araplanaruli grafis meore magaliTia 5-wveroiani sruli grafi K_5.:



Teorema (grafis planarulobis kriteriumi). grafi planarulia maSin da mxolod maSin, rodesac is ar Seicavs $K_{3,3}$ an $K_{3,3}$ qvegrafebs.

5. Semov l is amo canebi

wiboTa Semov l is amo cana

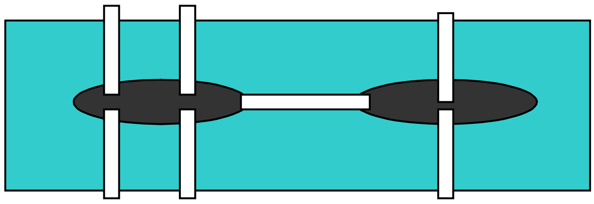
1. SeiZ l eba Tu ara mo cemu l i grafis yve l a wibos ise Semov l a, rom TiTeu l *wiboze* gaviaroT mxo l od erTxe l ? es formu l ireba eqviva l enturia Semdegis: arsebobs Tu ara grafSi iseTi gza, rome l ic grafis yove l wibos TiTojer Seicavs? aseT gzas ei l eris gza ewo deba.
2. SeiZ l eba Tu ara grafis Semov l a ase: daviwyoT rome l ime wve-rodan, SemoviaroT grafi ise, rom yve l a *wibo* mxo l od erTxe l gaviaroT da davbrundeT sawyis wveroSi. es formu l ireba eqvi-va l enturia Semdegis: arsebobs Tu ara grafSi iseTi cik l i, ro-me l ic grafis yove l wibos TiTojer Seicavs? aseT cik l s ei l e-ris cik l i ewo deba.

l eonard ei l eris Teo rema.

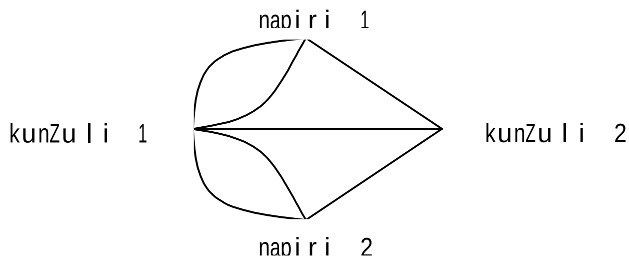
1. ei l eris cik l i arsebobs maSin da mxo l od maSin, rocam am grafs aqvs mxo l od l uwxarisxiani wveroebi.
2. ei l eris gza arsebobs maSin da mxo l od maSin, roca am grafis kentxarisxiani wveroebis ricxvi ors ar aRemateba.

kenigsbergis xidebi

SeiZ l eba Tu ara kenigsbergis Svidive xidis Semov l a ise, rom ar gaviaroT orjer erT xidze?



es amo cana eqviva l enturia Semov l is amo canisa am grafisaTvis:



ei l eris TeoremiT es SeuZ l ebe l ia, radgan am garfs aqvs 4 kentxarisxiani wvero.

wveroTa Semov l is amo cana

1. SeiZ l eba Tu ara mo cemu l i grafis yve l a wveros ise Semov l a, rom TiTeu l wveroze gaviaroT mxo l od erTxe l ? es formu l ireba eqviva l enturia Semdegis: arsebobs Tu ara grafSi

iseTi gza, romelic grafis yovel wveros TiTojer Seicavs? aseT gzas hamiltonis gza ewodeba.
2. SeiZleba Tu ara grafis Semovla ase: daviwyoT romelime wverodan, SemoviaroT grafi ise, rom yvela wvero mxolod erTxel gaviaroT da davbrundeT sawyis wveroSi. es formulireba eqvivalenturia Semdegis: arsebobs Tu ara grafSi iseTi cikli, romelic grafis yovel wveros TiTojer Seicavs? aseT cikls hamiltonis cikli ewodeba.

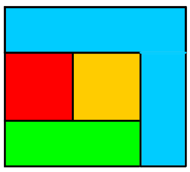
komivoiaJoris amocana

vTqvaT grafSi dafiqsirebulia yvela wiboTa sigrZeebi. vipoviT umciresi sigrZis cikli, romelic Semoivlis grafis yvela wveros.

Tu grafs aqvs hamiltonis cikli, maSin is aris am amocanis amoxsna.

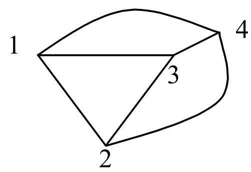
5. oTxi feris problema

minimum ramdeni feria saWiro nebismieri rukis ise SesaRebad, rom mezobel qveynebs sxvadasxva feri hqondeT?
sami feri amisTvis ar kmara:



SedarebiT advili saCvenebelia, rom 5 feri kmara nebismiero rukisaTvis. didi xnis ganmavlobaSi problemad rCeboda, sakamarisia Tu ara 4 feri. es problema gadaiWra mxolod kompiuterebis daxmarebiT Catarebuli vrceli gamoTvlebiT.

es problema SeiZleba grafebis enaze iTargmnos. amisaTvis nebismier rukas SevuTanadoT aseTi grafi: wveroebi iyos qveynebis dedaqalaqebi, ori wvero (dedaqalaqi) SevaerToT wiboTi (rkinigziT), Tu am qveynebs saerTo sazRvris monakveTi aqvT. maSin rukis SeRebvis problema dadis Semdeg amocanaze: mocemuli grafis wveroebs mivaniWoT nomrebi (leiblebi) ise, rom mezobel wveroebs sxvadasxva nomeri hqondeT. minimum ramdeni nomeri aris amisaTvis sakmarisi? zemoT mocemuli rukis grafia



mis gadanomrvas Wirdeba 4 nomeri (4 feri).

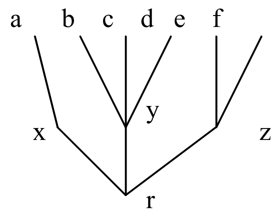
6. xeebi

yve l aze mar t ivi, magram yve l aze gamoyenebadi g r a febia *xeebi* – bmu l i acik l u r i g r a febi.

yove l i xe pi rve l r igSi br tye l i g r a f ia: acik l u r obis gamo is a r SeiZ l eba Seicavdes $K_{3,3}$ da K_5 g r a febs (r om l ebsac aqvT cik l ebi). ami t om xisaTvis samar T l iania ei l e r is f o r mu l a $|V| - |E| + |R| = 2$. kv l av acik l u r obis gamo ar a r sebobs Siga regi onebi, a r is mar To ga r e, e.i. $|R| = 1$, ami t om $|V| - |E| = 1$, anu xisaTvis wve r oTa r icxvi e r TiT me t ia wiboTa r icxvze.

xis s t r uqt u r a aqvT veb gve r debs, d i r eqt o r iebs, i n t e r ne t is misamar TTa d omenu r sis t emas.

Tavad xis s t r uqt u r a aseTia. xis e r Te r T wve r os uwo deben f esvs (root). amis Semdeg Semdeg av t omat u r ad Cndeba ie r a r qia: nebismie r i o r i wve r odan, r om l ebis wiboTia See r Tebu l i, e r Te r Ti a r is *mSobe l i* (rome l ic u f r o ax l oa fesvTan), meo r e ki *Svi l i*. f esvs hyavs mxo l o d Svi l ebi, Sinagan wve r oebs hyavT r ogo r c mSob l ebi, aseve Svi l ebi, y l o r t i ewo deba wve r os, Tu mas mxo l o d mSobe l i hyavs.



am xeSi r f esvia, x, y, z Siga wve r oebi, a, b, c, d, e, f y l o r tebi. yove l i y l o r t is va l ent oba 1-is t o l ia. *binaru l i* ewo deba xes, Tu misi yove l i wve r os (y l o r tebis) ga r da, 2-is t o l ia.

amo canebi

amoxseni T Semdegi amo canebi (a) t et r aed r is g r a f isaTvis; (b) kubis g r a f isaTvis; (g) 4-wve r oiani s r u l i g r a f isaTvis; (d) Ria konve r t isaTvis:

1. dawe reT am g r a f is See r TebaTa mat r i c i;
2. dawe reT am g r a f is incidenc iis mat r i c i;
3. daxazeT am g r a f is br tye l i naxaz i;
4. gamoTva l eT kombinac ia $|V| - |E| + |R|$;
5. aqvs Tu a r a am g r a f s ei l e r is gza?
6. aqvs Tu a r a am g r a f s ei l e r is cik l i?
7. amoxseni T komovo iaJe r is amo cana am g r a f isaTvis.
8. minimum ramdeni f e r iT SeiZ l eba am g r a f is SeRebva?

kombinatorika

n-elementis gadanacvlebaTa raodenoba

$$P(n) = n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

n-elementidan k-elementis amorCevis kombinaciaTa raodenoba (binomialuri koeficienti)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Tvisebebi

$$C_n^0 = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^1 = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

niutonis binomi

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Teorema. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^0 = 2^n.$

damtkiceba. $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$

paskalis samkuTxedi

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

amocanebi

1. daamtkiceT $C_n^0 = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^1 = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$

2. gamoTvaleT $(a+b)^5, (a+b)^6, (a+b)^7$.

3. kalaTaSi 20 burTulaa, maT Soris 7 wiTeli, danaCeni Savi. rogoria albaToba imisa, rom SemTxvevitad amoRebul 5 burTulaSi iqneba 2 wiTeli?

amoxsna. sul SesaZlo kombinaciebis (xuTeulebis amorCevis ocidan) aris C_{20}^5, xolo kombinaciebi, romlebic Seicaven 2 wiTels aris $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. amitom saZiebeli albaTobaa $P = \frac{C_7^2 \cdot C_{13}^3}{C_{20}^5}$.

4. ipoveT albaToba imisa, rom SemTxveviT arCeuli 5-niSna ricxvi ar Seicavdes cifrs 5.

4. dawesebulebaSi 5 vakansiaa kacebisaTvis, 5 vakansia qalebisaTvis da 4 vakansia, romelTaTvisac sqess mniSvneloba ar aqvs. konkurSi monawileobs 12 mamakaci da 8 qali. ramdenia vakansiaTa Sevsebis variantebis raodenoba?

5. klasSi 13 biWia da 12 gogona. (a) ramdennairad SeiZleba am klasis gamwkriveba ise, rom biWebi simaRlis mixedviT iyvnen dalagebulni? (b) igive amocana gogonebis simaRlis mixedviT dalagebaze.

gamoyenebuli literatura

1. Mazzola, G., Milmeister, G., Weissmann, J. Comprehensive mathematics for computer scientists. 1. Sets and numbers, graphs and algebra, logic and machines, linear geometry. Universitext. *Springer-Verlag, Berlin*, 2004.

2. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. Concrete mathematics. A foundation for computer science. Second edition. *Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA*, 1994.

3. Cooke, D. J., Bez, H. E. Computer Mathematics. *Cambridge University Press*, 1984; Russian transl.: *Nauka, Moscow*, 1990.

4. Birkhoff, G., Bartee, T. Modern Applied Algebra, *McGraw Hill*, 1970; Russian transl.: *Nauka, Moscow*, 1989.

5. Lang, S. Algebra. Revised third edition. *Graduate Texts in Mathematics*, 211. *Springer-Verlag, New York*, 2002.

6. Seymour Lipschutz, Essential Computer Mathematics. *Schaum's Outline*, 2003.

7. Birkgof, G. Lattice theory. (Russian) Translated from the English and with an appendix by V. N. Saliĭ. Translation edited by L. A. Skornyakov. *Nauka, Moscow*, 1984.

sarCevi