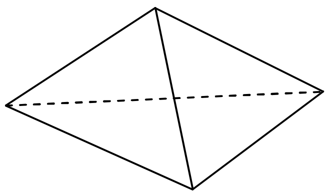
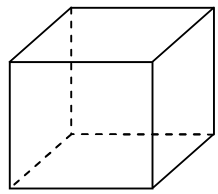
თავი 4. გრაფთა თეორია

1. გრაფის განმარტება და მაგალითები

გრაფი შედგება *წვეროებისაგან* და *წიბოებისაგან.* წვეროები წარმოადგენენ წერტილებს, ხოლო ზოგირთი წყვილი წვეროებისა შეერთებულია წიბოთი. წვეროთა სიმრავლე აღინიშნება V-თი (vertices) , ხოლო წიბოთა სიმრავლე E-თი (edges). |V| აღნიშნავს გრაფის წვეროთა რაოდენობას, ხოლო |E| კი წიბოთა რაოდენობას.

მოგვყავს რამდენიმე მნიშვნელოვანი გრაფის მაგალითი



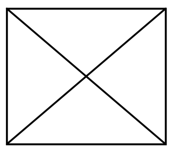


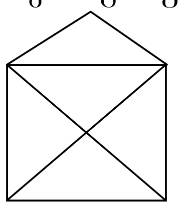
1. ტეტრაედრის გრაფი	2. კუბის გრაფი

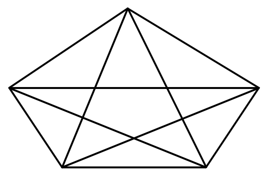
$|V| = 4, |E| = 6$	$|V| = 8, |E| = 12$

3. n-წვეროიანი სრული გრაფი   ამ გრაფს აქვს n წვერო და წვეროთა *ყველა* წყვილი შეერთებულია წიბოთი. ასეთი გრაფისათვის $|V| = n, |E| = n (n-1) / 2$.

კერძოდ





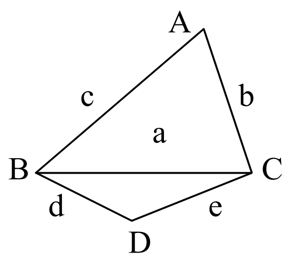


3. 4-წვეროიანი სრული გრაფი (დახურული კონვერტი)   4. ღია კონვერტი   5. 5-წვეროიანი სრული გრაფი

$|V| = 4, |E| = 6$	$|V| = 5, |E| = 8$	$|V| = 5, |E| = 10$

2. გრაფთა მოცემის ხერხები

გრაფი შეიძლება აღიწეროს მისი წვეროებისა და წიბოების უბრალო ჩამოთვლით:



ამ გრაფში 4 წვეროა A,B,C,D და 5 წიბო c = (A,B), b = (A,C), a = (C,B), d = (D,B), e = (D,C). ეს გრაფი ასე შეიძლება აღიწეროს

$V =\{A,B,C,D\}$, $E = \{(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),(D,C)\}$.

გრაფის ჩაწერა შეიძლება ე.წ *შეერთებათა მატრიცითაც*. ეს არის |V| × |V| ზომის კვადრატული მატრიცი, სადაც (i,j) ადგილზე არის 1 თუ i-ური და j-ური წვეროები შეერთებულია წიბოთი, და არის 0 წინაამდეგ შემთხვევაში. ჩვენი გრაფისთვის ეს მატრიცია

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	0	1	1	0

არსებობს განსხვავებული გზა გრაფის მატრიცით აღწერისა - *ინციდენტობის მატრიცი*. ეს არის |E| × |V| ზომის მატრიცი, სადაც (i,j) ადგილზე არის 1 თუ i-ურ ადგილზე მდგომი წვერო ეკუთვნის j-ურ ადგილზე მდგომ წიბოს, და არის 0 წინაამდეგ შემთხვევაში. ჩვენი გრაფისთვის ეს მატრიცია

	a	b	c	d	e
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	0	1
D	0	0	0	1	1

3. გრაფთა კომპონენტები

გზა გრაფის v და w წვეროებს შორის ეწოდება წვეროთა მიმდევრობას $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$, სადაც $v = v_0$, $w = v_n$ და ყოველი წყვილი $[v_i,v_{i+1}]$ ქმნის წიბოს.

გზას ეწოდება *ციკლი*, თუ ის შეკრულია, ანუ $v_0 = v_n$.

გრაფს ეწოდება *ბმული*, თუ შესაძლებელია მისი ყოველი ორი წვეროს გზით შეერთება.

გრაფს ეწოდება *ხე*, თუ ის ბმულია და *აციკლური* (ე.ი. არ აქვს ციკლები).

გრაფის წვეროს *ხარისხი* (ვალენტობა) ეწოდება იმ წიბოთა რაოდენობას, რომლებიც შეიცავენ ამ წვეროს.

თეორემა. გრაფის ყველა წვეროს ხარისხთა ჯამი ლუწი რიცხვია.

თეორემა. გრაფის კენტ ხარისხიანი წვეროების რიცხვი ლუწია.

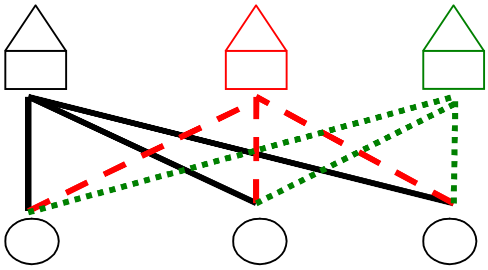
4. პლანარული გრაფები

გრაფს ეწოდება *პლანარული* (ბრტყელი) თუ შესაძლებელია მისი სიბრტყეზე ისე დახაზვა, რომ წიბოები ერთმანეთს არ კვეთდნენ.

სიბრტყეზე დახაზულ გრაფი წარმოქმნის რეგიონებს არეებს, რომლებიც შემოსაზღვრულია გარკვეული ციკლებით. ასეთ რეგიონთა სიმრავლე აღვნიშნოთ R-ით (აღვნიშნოთ, რომ რეგონებში ითვლება აგრეთვე ერთი უსასრულო რეგიონი განლაგებული გრაფის გარე კონტურის გარეთ).

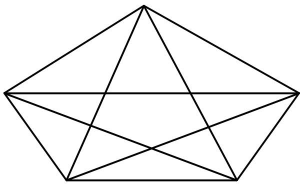
ეილერის ფორმულა. $|V| - |E| + |R| = 2$.

სამი ჭის ამოცანა. შევაერთოთ სამი სახლი სამ ჭასთან ისე, რომ ბილიკები ერთმანეთს არ კვეთდნენ.



ამ ნახაზზე ბილიკები ერთმანეთს კვეთენ, მაგრამ შეიძლება თუ არა ამ ბილიკების ისე გატარება, რომ ისინი არ იკვეთებოდნენ? ეილერის ფორმულიდან შეიძლება იმის გამოყვანა, რომ ეს შეუძლებელია, ანუ ეს გრაფი პლანარული (ბრტყელი) არ არის. ამ გრაფს ეწოდება $K_{3,3}$.

არაპლანარული გარფის მეორე მაგალითია 5-წვეროიანი სრული გრაფი K_5.:



თეორემა (გრაფის პლანარულობის კრიტერიუმი). გრაფი პლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არ შეიცავს $K_{3,3}$ ან K_5 ქვეგრაფებს.

5. შემოვლის ამოცანები

წიბოთა შემოვლის ამოცანა

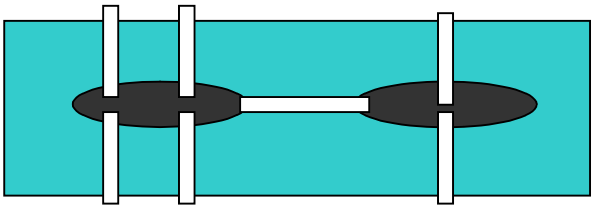
1. შეიძლება თუ არა მოცემული გრაფის ყველა წიბოს ისე შემოვლა, რომ თითეულ *წიბოზე* გავიაროთ მხოლოდ ერთხელ? ეს ფორმულირება ექვივალენტურია შემდეგის: არსებობს თუ არა გრაფში ისეთი გზა, რომელიც გრაფის ყოველ წიბოს თითოჯერ შეიცავს? ასეთ გზას ეილერის გზა ეწოდება.
2. შეიძლება თუ არა გრაფის შემოვლა ასე: დავიწყოთ რომელიმე წვეროდან, შემოვიაროთ გრაფი ისე, რომ ყველა *წიბო* მხოლოდ ერთხელ გავიაროთ და დავბრუნდეთ საწყის წვეროში. ეს ფორმულირება ექვივალენტურია შემდეგის: არსებობს თუ არა გრაფში ისეთი ციკლი, რომელიც გრაფის ყოველ წიბოს თითოჯერ შეიცავს? ასეთ ციკლს ეილერის ციკლი ეწოდება.

ლეონარდ ეილერის თეორემა.

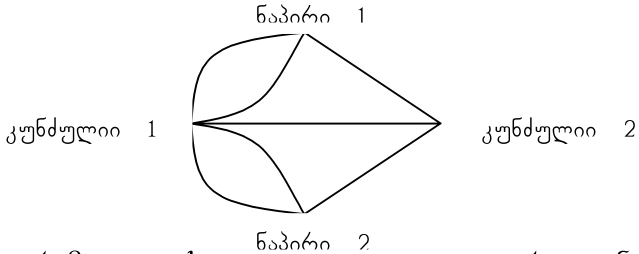
1. ეილერის ციკლი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცამ ამ გრაფს აქვს მხოლოდ ლუწხარისხიანი წვეროები.
2. ეილერის გზა არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ გრაფის კენტხარისხიანი წვეროების რიცხვი ორს არ აღემატება.

კენიგსბერგის ხიდები

შეიძლება თუ არა კენიგსბერგის შვიდივე ხიდის შემოვლა ისე, რომ არ გავიაროთ ორჯერ ერთ ხიდზე?



ეს ამოცანა ექვივალენტურია შემოვლის ამოცანისა ამ გრაფისათვის:



ეილერის თეორემით ეს შეუძლებელია, რადგან ამ გარფს აქვს 4 კენტხარისხიანი წვერო.

წვეროთა შემოვლის ამოცანა

1. შეიძლება თუ არა მოცემული გრაფის ყველა წვეროს ისე შემოვლა, რომ თითეულ წვეროზე გავიაროთ მხოლოდ ერთხელ? ეს ფორმულირება ექვივალენტურია შემდეგის: არსებობს თუ არა გრაფში ისეთი გზა, რომელიც გრაფის ყოველ წვეროს თითოჯერ შეიცავს? ასეთ გზას ჰამილტონის გზა ეწოდება.

2. შეიძლება თუ არა გრაფის შემოვლა ასე: დავიწყოთ რომელიმე წვეროდან, შემოვიაროთ გრაფი ისე, რომ ყველა წვერო მხოლოდ ერთხელ გავიაროთ და დავბრუნდეთ საწყის წვეროში. ეს ფორმულირება ექვივალენტურია შემდეგის: არსებობს თუ არა გრაფში ისეთი ციკლი, რომელიც გრაფის ყოველ წვეროს თითოჯერ შეიცავს? ასეთ ციკლს ჰამილტონის ციკლი ეწოდება.

კომივოიაჟორის ამოცანა

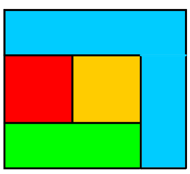
ვთქვათ გრაფში დაფიქსირებულია ყველა წიბოთა სიგრძეები. ვიპოვით უმცირესი სიგრძის ციკლი, რომელიც შემოივლის გრაფის ყველა წვეროს.

თუ გრაფს აქვს ჰამილტონის ციკლი, მაშინ ის არის ამ ამოცანის ამოხსნა.

5. ოთხი ფერის პრობლემა

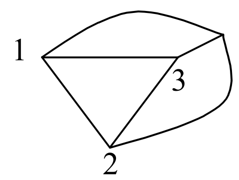
მინიმუმ რამდენი ფერია საჭირო ნებისმიერი რუკის ისე შესაღებად, რომ მეზობელ ქვეყნებს სხვადასხვა ფერი ჰქონდეთ?

სამი ფერი ამისთვის არ კმარა:



შედარებით ადვილი საჩვენებელია, რომ 5 ფერი კმარა ნებისმიერო რუკისათვის. დიდი ხნის განმავლობაში პრობლემად რჩებოდა, საკამარისია თუ არა 4 ფერი. ეს პრობლემა გადაიჭრა მხოლოდ კომპიუტერების დახმარებით ჩატარებული ვრცელი გამოთვლებით.

ეს პრობლემა შეიძლება გრაფების ენაზე ითარგმნოს. ამისათვის ნებისმიერ რუკას შევუთანადოთ ასეთი გრაფი: წვეროები იყოს ქვეყნების დედაქალაქები, ორი წვერო (დედაქალაქი) შევაერთოთ წიბოთი (რკინიგზით), თუ ამ ქვეყნებს საერთო საზღვრის მონაკვეთი აქვთ. მაშინ რუკის შეღებვის პრობლემა დადის შემდეგ ამოცანაზე: მოცემული გრაფის წვეროებს მივანიჭოთ ნომრები (ლეიბლები) ისე, რომ მეზობელ წვეროებს სხვადასხვა ნომერი ჰქონდეთ. მინიმუმ რამდენი ნომერი არის ამისათვის საკმარისი? ზემოთ მოცემული რუკის გრაფია



მის გადანომრვას ჭირდება 4 ნომერი (4 ფერი)

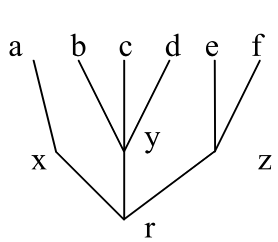
6. ხეები

ყველაზე მარტივი, მაგრამ ყველაზე გამოყენებადი გრაფებია *ხეები* ბმული აციკლური გრაფები.

ყოველი ხე პირველ რიგში ბრტყელი გრაფია: აციკლურობის გამო ის არ შეიძლება შეიცავდეს $K_{3,3}$ და K_5 გრაფებს (რომლებსაც აქვთ ციკლები). ამიტომ ხისათვის სამართლიანია ეილერის ფორმულა $|V| - |E| + |R| = 2$. კვლავ აციკლურობის გამო არ არსებობს შიგა რეგიონები, არის მართო გარე, ე.ი. $|R| = 1$, ამიტომ $|V| - |E| = 1$, ანუ ხისათვის წვეროთა რიცხვი ერთით მეტია წიბოთა რიცხვზე.

ხის სტრუქტურა აქვთ ვებ გვერდებს, დირექტორიებს, ინტერნეტის მისამართთა დომენურ სისტემას.

თავად ხის სტრუქტურა ასეთია. ხის ერთერთ წვეროს უწოდებენ ფესვს (root). ამის შემდეგ შემდეგ ავტომატურად ჩნდება იერარქია: ნებისმიერი ორი წვეროდან, რომლების წიბოთია შეერთებული, ერთერთი არის *მშობელი* (რომელიც უფრო ახლოა ფესვთან), მეორე კი *შვილი*. ფესვს ჰყავს მხოლოდ შვილები, შინაგან წვეროებს ჰყავთ როგორც მშობლები, ასევე შვილები, ყლორტი ეწოდება წვეროს, თუ მას მხოლოდ მშობელი ჰყავს.



ამ ხეში r ფესვია, x,y,z შიგა წვეროები, a,b,c,d,e,f ყლორტები. ყოველი ყლორტის ვალენტობა 1-ის ტოლია. *ბინარული* ეწოდება ხეს, თუ მისი ყოველი წვეროს (ყლორტების) გარდა, 2-ის ტოლია.

ამოცანები

ამოხსენით შემდეგი ამოცანები (ა) ტეტრაედრის გრაფისათვის; (ბ) კუბის გრაფისათვის; (გ) 4-წვეროიანი სრული გრაფისათვის; (დ) ღია კონვერტისათვის:

1. დაწერეთ ამ გრაფის შეერთებათა მატრიცი;
2. დაწერეთ ამ გრაფის ინციდენციის მატრიცი;
3. დახაზეთ ამ გრაფის ბრტყელი ნახაზი;
4. გამოთვალეთ კომბინაცია $|V| - |E| + |R|$;
5. აქვს თუ არა ამ გრაფს ეილერის გზა?
6. აქვს თუ არა ამ გრაფს ეილერის ციკლი?
7. ამოხსენით კომივოიაჟერის ამოცანა ამ გრაფისათვის.
8. მინიმუმ რამდენი ფერით შეიძლება ამ გრაფის შეღებვა?