პროპოზიციური ლოგიკა

პროპოზიცია - "გამონათქვამი", "წინადადება", ან ჭეშმარიტია, მაგალითად
"ამ წინადადებაში ოთხი სიტყვაა",
ან მცდარი
"სტუდენტები გამოცდაზე არ იწერენ",
ზოგის ჭეშმარიტება კი გაურკვეველია, მაგ.
"ხვალ, ალბათ, იწვიმებს", "რომელი საათია?".

პროპოზიციური ლოგიკა ოპერირებს *მხოლოდ* იმ გამონათქვამებით, რომლებიც ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.

პროპოზიციური ლოგიკა, ანუ პროპოზიციათა აღრიცხვა არის აღწერა იმისა, როგორ მივიღოთ ჭეშმარიტი წინადადებებიდან (ვთქვათ აქსიომებიდან) სხვა ჭეშმარიტი წინადადებები (ვთქვათ თეორემები).

პროპოზიციური ლოგიკა ეყრდნობა ორ ძირითად პრინციპს:

წინააღმდეგობის პრინციპი. არ არსებობს წინადადება, რომელიც ერდროულად ჭეშმარიტიცაა და მცდარიც.

მესამე გამორიცხულის პრინციპი. ყოველი წინადადება ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.

სხვა სიტყვებით პროპოზიციურ ლოგიკაში მხოლოდ ასეთ – ან ჭეშმარიტ, ან მცდარ – წინადადებებს იხილავენ. ამიტომაც ჰქვია ამ ლოგიკას სხვანაირად *აბსოლუტური* ლოგიკა.

ოპერაციები წინადადებებზე

არის რამდენიმე ოპერაცია, რომლებიც ერთი ან რამდენიმე წინადადებისგან სხვა წინადადებებს აჩენენ.

უარყოფის ოპერაცია - არა. ყოველ წინადადებას "A" შეეთანადება მისი უარყოფა, წინადადება "NOT A", სხვა აღნიშვნით ¬ A. თუ "A" ჭეშმარიტია, მაშინ "NOT A" მცდარა; თუ "A" მცდარია, მაშინ "NOT A" ჭეშმარიტია.

კონიუნქციის ოპერაცია - და. ყოველ ორ წინადადებას "A", "B" შეეთანადება წინადადება "A AND B" , სხვა აღნიშვნით A ^ B. . ეს წინადადება ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ორივე - "A"-ც და "B"-ც ჭეშმარიტია. ყველა სხვა შემთხვევაში "A AND B" მცდარია.

დიზიუნქციის ოპერაცია - ან. ყოველ ორ წინადადებას "A", "B" შეეთანადება წინადადება "A OR B" , სხვა აღნიშვნით A v B. ეს წინადადება ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი მაინც, ან "A" ან "B" ჭეშმარიტია. თუ ორივე მცდარია, მაშინ მცდარია "A OR B"-ც.

იმპლიკაციის ოპერაცია - გამომდინარეობს. ყოველ ორ წინადადებას “A” და “B” შეეთანადება წინადადება “A IMPLIES B”, სხვა აღნიშვნით A→B. ამის ექვივალენტური ფორმებია

1. A → B;
2. თუ A მაშინ B;
3. A არის საკმარისი B-სთვის;
4. B არის აუცილებელი A-სთვის.

ჭეშმარიტების ცხრილები

აქაა “გამრავლების ტაბულები” ამ ოპერაციებისათვის

A	NOT *A*
F	T
T	F

A	*B*	*A* AND *B*
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

A	*B*	*A* OR *B*
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

A	*B*	*A* IMPLIES *B*
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

აქ T (TRUE) ნიშნავს ჭეშმარიტს, ხოლო F (FALSE) - მცდარს.

ოპერაციათა აღმნიშვნელი ინგლისური სიტყვების AND, OR, IMPLIES ნაცვლად იყენებენ აღნიშვნებს

NOT = ¬ , OR = v , AND = ^ , IMPLIES = →

იხმარება აგრეთვე აღნიშვნა A <=> B რაც ნიშნავს, რომ A → B და B → A. ეს ნიშნავს, რომ A და B ექვივალენტურნი არიან.

მაგალითი. განვიხილოთ სამი საწყისი წინადადება

თ = თოვს, ყ = ყინავს, გ = გარეთ გავდივარ.

ჩავწეროთ წინადადებები ოპერაციების ტერმინებში

1. “თუ თოვს ან ყინავს, გარეთ არ გავდივარ”

(თ OR ყ) IMPLIES NOT გ

ანუ

(თ v ყ) → ¬ გ.

2. „თუ არც თოვს და არც ყინავს, გარეთ გავდივარ“

(¬ თ ^ ¬ ყ) → გ.

3. „როცა გარეთ გავდივარ, მაშინ თოვს“

გ → თ.

4. “ან თოვს, ან ყინავს”

თ v ყ.

ამრიგად, მოცემული რამდენიმე წინადადებიდან ლოგიკური ოპერაციების მეშვეობით შეიძლება შევქმნათ ახალი წინადადებები და და შემდეგ ვცადოთ გავარკვიოთ, როდისაა მიღებული წინადადება ჭეშმარიტი და როდის მცდარი.

ტავტოლოგია, აბსურდი, სათუო

თუ შედგენილი წინადადება ჭეშმარიტია შემადგენელი წინადადებების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაშინ მას *ტავტოლოგია* ეწოდება. თუ ყოველთვის მცადრია – *აბსურდი*, თუ ხან ჭეშმარიტია და ხან მცდარი – *სათუო*.

მაგალითად P v (¬P) ტავტოლოგიაა, ის კოველთვის ჭეშმარიტია:

P	¬P	P v (¬P)
0	1	1
1	0	1

P ^ (¬P) აბსურდია, ის ყოველთვის მცდარია:

P	¬P	P ^ (¬P)
0	1	0
1	0	0

P →(¬P) სათუოა:

P	¬P	P → (¬P)
0	1	1
1	0	0

ის მცდარიც შეიძლება იყოს და ჭეშმარიტიც.

ძირითადი იგივეობები (ტავტოლოგიები)

დე მორგანის კანონები

1) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

2) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

კონტრპოზიციის კანონი

$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;

შთანთქმის კანონები

1) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$;

2) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$;

დისტრიბუციულობის კანონები

1) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

2) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

თითეული ამ კანონის შემოწმება შესაძლებელია ცხრილებით, შევამოწმოთ მაგალითად დე მორგანის კანონი $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$:

P	**Q**	**P v Q**	**¬(P v Q)**	**¬P**	**¬Q**	**¬Q ^ ¬P**
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

აქ მე-3 და მე-7 სვეტები ერთნაირია, ე.ი. **¬(P v Q)** და **¬Q ^ ¬P** ერთდროულად არიან მცდარი ან ჭეშმარიტო (მათ ერთნაირი ჭეშმარიტების ფუნქციები აქვთ), ამიტომ ისინი ექვივალენტურნი არიან.

ქვემოთ მოგვყავს რამდენიმე სხვა ტავტოლოგია

$P \Leftrightarrow (P \vee P)$
$P \Leftrightarrow (P \wedge P)$
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
$[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$
$[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
$[P \wedge (Q \vee R] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$
$[P \vee (Q \wedge R] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
$(P \vee \text{True}) \Leftrightarrow \text{True}$
$(P \wedge \text{False}) \Leftrightarrow \text{False}$
$(P \vee \text{False}) \Leftrightarrow P$
$(P \wedge \text{True}) \Leftrightarrow P$
$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \text{True}$
$(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \text{False}$
$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$
$[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$
$[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)] \Leftrightarrow \neg P$
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

დავამტკიცოთ $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	P→Q	¬P	Q	¬Q v P
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

დავამტკიცოთ (P →Q) ⇔(¬Q →¬P)

P	Q	P→Q	¬P	¬Q	¬Q→¬P
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

ჰილბერტის აქსიომები

$A_1 : A \to (B \to A)$;

$A_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;

$A_3 : A \wedge B \to A$;

$A_4 : A \wedge B \to B$;

$A_5 : A \to (B \to (A \wedge B))$;

$A_6 : A \to (A \vee B)$;

$A_7 : B \to (A \vee B)$;

$A_8 : (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

$A_9 : \neg A \to (A \to B)$;

$A_{10} : (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

$A_{11} : A \vee \neg A$.

ცნობილი ანტიკური ტავტოლოგიები

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ - **სილოგიზმი** (სოკრატე ადამიანია, ყველა ადამიანი მიკვდავია, ე.ი. სოკრატეც მოკვდავია)

$(A \wedge (A \to B)) \to B$ - **Modus Ponens** - გამოყვანის წესი (თუ A-დან გამოდის B და A ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია B-ც)

$((\neg B)\wedge(A\to B))\to(\neg A)$ - **Modus Tollens** - წინააღმდეგობის დაშვება (თუ A-დან გამოდის B, მაგრამ B მცდარია, მაშინ მცდარი ყოფილა A-ც).

ხიდი ლაგიკიდან სიმრავლეებისკენ

ვთქვათ X რაიმე სიმრავლეა, ხოლო P რაიმე გამონათქვამი X-ის ელემენტების შესახებ. თუ $x\in X$ ელემენტს აქვს ეს P თვისება, მაშინ ვწერთ P(x).

მაგალითად X = N იყოს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო P იყოს თვისება „არის მარტივი რიცხვი". მაშინ P(2), P(3), P(5), P(7), . . . , მაგრამ არა P(4), P(6), P(8), ...

სიმრავლე P_T განიმარტება, როგორც ერთობლიობა ყველა იმ x-სა, რომელთაც აქვთ ეს P თვისება, ანუ

$$P_T=\{x\in X, P(x)\}.$$

ჩვენს მაგალითში P = „არის მარტივი რიცხვი" P_T = { 2,3,5,7,9,11,13, ... }.

ლექსიკონი ლოგიკური ოპერაციებიდან სიმრავლურ ოპერაციებში

$\vee=\bigcup=+,\quad \wedge=\bigcap=\cdot.$

$$(P\vee Q)_T=\{x\in X,\quad P(x)\ or\ Q(x)\}=P_T\bigcup Q_T$$

$$(P\wedge Q)_T=\{x\in X,\quad P(x)\ and\ Q(x)\}=P_T\bigcap Q_T$$

$$(\neg P)_T=\{x\in X,\quad not\ P(x)\}=P_T^c.$$

სიმრავლური და ლოგიკური დე მორგანის კანონები

$$(P_T\bigcup Q_T)^c=P_T^c\bigcap Q_T^c\quad\Leftrightarrow\quad \neg(P\vee Q)=(\neg P)\wedge(\neg Q)$$

$$(P_T\bigcap Q_T)^c=P_T^c\bigcup Q_T^c\quad\Leftrightarrow\quad \neg(P\wedge Q)=(\neg P)\vee(\neg Q)$$

კვანტორები

$\forall x\in X\quad P(x)$ ნიშნავს „ყოველი x -თვის X-დან P ჭეშმარიტია".

$\exists x\in X\quad P(x)$ ნიშნავს „არსებობს x X-დან, რომლისთვისაც P ჭეშმარიტია".

კვანტორები და უარყოფა

$\neg(\forall x\in A,\ P(x))\ \Leftrightarrow\ \exists x\in A,\ \neg P(x)$

$\neg(\exists x\in A,\ P(x))\ \Leftrightarrow\ \forall x\in A,\ \neg P(x)$

სავარჯიშოები

ვთქვათ

L = "სტუდენტი ესწრება ლექციებს",

S ="სტუდენტი სწავლობს",
E ="სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას".
ჩაწერეთ L, S, E გამოთქმების საშუალებით გამოთქმა
"გამოცდის ჩაბარებისათვის აუცილებელია ლექციებზე დასწრება და მეცადინეობა".

$E \Rightarrow (L \wedge S)$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \vee S) \Rightarrow E$

ვთქვათ
L = "სტუდენტი ესწრება ლექციებს",
S ="სტუდენტი სწავლობს",
E ="სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას".
ჩაწერეთ L, S, E გამოთქმების საშუალებით გამოთქმა
"გამოცდის ჩაბარებისათვის აუცილებელია ლექციებზე დასწრება ან მეცადინეობა".

$E \Rightarrow (L \vee S)$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$

ვთქვათ
L = "სტუდენტი ესწრება ლექციებს",
S ="სტუდენტი სწავლობს",
E ="სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას".
ჩაწერეთ L, S, E გამოთქმების საშუალებით გამოთქმა
"გამოცდის ჩაბარებისათვის საკმარისია ლექციებზე დასწრება და მეცადინეობა".

$(L \wedge S) \Rightarrow E$ $E \Rightarrow (L \vee S)$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \vee S) \Rightarrow E$

ვთქვათ
L = "სტუდენტი ესწრება ლექციებს",
S ="სტუდენტი სწავლობს",
E ="სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას".
ჩაწერეთ L, S, E გამოთქმების საშუალებით გამოთქმა
"გამოცდის ჩაბარებისათვის საკმარისია ლექციებზე დასწრება ან მეცადინეობა".

$(L \vee S) \Rightarrow E$ $E \Rightarrow (L \vee S)$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$ $(L \wedge S) \Rightarrow E$

ვთქვათ
C ="გივი ჭკვიანია",
E ="გივი განათლებულია",

W ="გივი წარმატებულია".
ჩაწერეთ ამ გამონათქვამებით გამოთქმა
"გივი ჭკვიანი და განათლებულია, მაგრამ არ არის წარმატებული".

$C \wedge E \wedge \neg W$ $\quad C \wedge \neg E \wedge W$ $\quad \neg C \wedge E \wedge W$ $\quad \neg C \wedge \neg E \wedge W$

ვთქვათ
C ="გივი ჭკვიანია",
E ="გივი განათლებულია",
W ="გივი წარმატებულია".
ჩაწერეთ ამ გამონათქვამებით გამოთქმა
"გივი არაა განათლებული, მაგრამ ჭკვიანია და წარმატებული".

$C \wedge \neg E \wedge W$ $\quad C \wedge E \wedge \neg W$ $\quad \neg C \wedge E \wedge W$ $\quad \neg C \wedge \neg E \wedge W$

ვთქვათ
C ="გივი ჭკვიანია",
E ="გივი განათლებულია",
W ="გივი წარმატებულია".
ჩაწერეთ ამ გამონათქვამებით გამოთქმა
"გივი არც განათლებულია და არც ჭკვიანი, მაგრამ წარმატებულია".

$\neg C \wedge \neg E \wedge W$ $\quad C \wedge E \wedge \neg W$ $\quad \neg C \wedge E \wedge W$ $\quad C \wedge \neg E \wedge W$

ვთქვათ
C ="გივი ჭკვიანია",
E ="გივი განათლებულია",
W ="გივი წარმატებულია".
ჩაწერეთ ამ გამონათქვამებით გამოთქმა
"გივი განათლებული და ჭკვიანია, მაგრამ არ არის წარმატებული".

$C \wedge E \wedge \neg W$ $\quad C \wedge \neg E \wedge W$ $\quad \neg C \wedge E \wedge W$ $\quad \neg C \wedge \neg E \wedge W$

მკაცრი ლექტორის განცხადება:
"ყველა ლექციაზე დასწრება და შუალედური ტესტის ჩაბარება საბოლოო გამოცდის ჩაბარების აუცილებელი პირობაა".

ანუ, თუ აღვნიშნავთ

L =”ყველა ლექციაზე დასწრება”,
T =”შუალედური ტესტის ჩაბარება”,
E =”საბოლოო გამოცდის ჩაბარება”,

მაშინ ეს ფრაზა ასე ჩაიწერება: $E \Rightarrow (L \wedge T)$.

ამ განცხადების ფონზე რომელია ჭეშმარიტი წინადადება

$\neg L \vee \neg T \Rightarrow \neg E$ $\quad \neg L \wedge \neg T \Rightarrow \neg E$ $\quad \neg E \Rightarrow \neg L \vee \neg T$ $\quad \neg E \Rightarrow \neg L \wedge \neg T$

ნაკლებად მკაცრი ლექტორის განცხადება:
”ყველა ლექციაზე დასწრება ან შუალედური ტესტის ჩაბარება საბოლოო გამოცდის ჩაბარების აუცილებელი პირობაა”.
ანუ, თუ აღვნიშნავთ

L =”ყველა ლექციაზე დასწრება”,
T =”შუალედური ტესტის ჩაბარება”,
E =”საბოლოო გამოცდის ჩაბარება”,

მაშინ ეს ფრაზა ასე ჩაიწერება: $E \Rightarrow (L \vee T)$.

ამ განცხადების ფონზე რომელია ჭეშმარიტი წინადადება

$\neg L \wedge \neg T \Rightarrow \neg E$ $\quad \neg L \vee \neg T \Rightarrow \neg E$ $\quad \neg E \Rightarrow \neg L \vee \neg T$ $\quad \neg E \Rightarrow \neg L \wedge \neg T$

კეთილი ლექტორის განცხადება:
”ყველა ლექციაზე დასწრება ან შუალედური ტესტის ჩაბარება საბოლოო გამოცდის ჩაბარების საკმარისი პირობაა”.
ანუ, თუ აღვნიშნავთ
L =”ყველა ლექციაზე დასწრება”,
T =”შუალედური ტესტის ჩაბარება”,
E =”საბოლოო გამოცდის ჩაბარება”,

მაშინ ეს ფრაზა ასე ჩაიწერება: $(L \vee T) \Rightarrow E$.

ამ განცხადების ფონზე რომელია ჭეშმარიტი წინადადება

$\neg E \Rightarrow \neg L \wedge \neg T$ $\quad \neg E \Rightarrow \neg L \vee \neg T$ $\quad \neg L \vee \neg T \Rightarrow \neg E$ $\quad \neg L \wedge \neg T \Rightarrow \neg E$

ნაკლებად კეთილი ლექტორის განცხადება:
"ყველა ლექციაზე დასწრება და შუალედური ტესტის ჩაბარება საბოლოო გამოცდის ჩაბარების საკმარისი პირობაა".
ანუ, თუ აღვნიშნავთ

L ="ყველა ლექციაზე დასწრება",
T ="შუალედური ტესტის ჩაბარება",
E ="საბოლოო გამოცდის ჩაბარება",

მაშინ ეს ფრაზა ასე ჩაიწერება: $(L \wedge T) \Rightarrow E$.

ამ განცხადების ფონზე რომელია ჭეშმარიტი წინადადება

$\neg E \Rightarrow \neg L \vee \neg T$ $\neg L \vee \neg T \Rightarrow \neg E$ $\neg L \wedge \neg T \Rightarrow \neg E$ $\neg E \Rightarrow \neg L \wedge \neg T$

N -ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, P -თი კი მარტივ რიცხვთა სიმრავლე. რომელი ფორმულა გამოხატავს გამონათქვამს

"ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს მასზე მეტი მარტივი რიცხვი"

$\forall n \in N\ \exists p \in P,\ n < p$
$\forall n \in N\ \forall p \in P,\ n < p$
$\exists n \in N\ \forall p \in P,\ n < p$
$\exists n \in N\ \exists p \in P,\ n < p$

N -ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, P -თი კი მარტივ რიცხვთა სიმრავლე. რომელი ფორმულა გამოხატავს გამონათქვამს

"ყოველი ნატურალური რიცხვისთვი ნაკლებია რომელიღაც მარტივ რიცხვზე"

$\forall n \in N\ \exists p \in P,\ n < p$
$\forall n \in N\ \forall p \in P,\ n < p$
$\exists n \in N\ \forall p \in P,\ n < p$
$\exists n \in N\ \exists p \in P,\ n < p$

N -ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, P -თი კი მარტივ რიცხვთა სიმრავლე. რომელი ფორმულა გამოხატავს გამონათქვამს

”ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს მარტივი რიცხვი, რომელზეც იყოფა ეს ნატურალური რიცხვი”

$\forall n \in N\ \exists p \in P,\ \ p \mid n$

$\forall n \in N\ \forall p \in P,\ \ p \mid n$

$\exists n \in N\ \forall p \in P,\ \ p \mid n$

$\exists n \in N\ \exists p \in P,\ \ p \mid n$

N -ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, P -თი კი მარტივ რიცხვთა სიმრავლე. რომელი ფორმულა გამოხატავს გამონათქვამს

”ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს მარტივი რიცხვი, რომელიც ჰყოფს ამ ნატურალურ რიცხვს”

$\forall n \in N\ \exists p \in P,\ \ p \mid n$

$\forall n \in N\ \forall p \in P,\ \ p \mid n$

$\exists n \in N\ \forall p \in P,\ \ p \mid n$

$\exists n \in N\ \exists p \in P,\ \ p \mid n$