კომბინატორიკა

§ 1. გადანაცვლება და მისი რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა

ვთქვათ, n რაიმე ნატურალური რიცხვია. **n–ელემენტიანი გადანაცვლებები** (ანუ n–გადანაცვლებები) ეწოდება n განსხვავებული ელემენტისაგან შედგენილ კომბინაციებს, რომლებიც მხოლოდ ელემენტების დალაგებით განსხვავდება.

განსხვავებულ n–გადანაცვლებათა P_n რაოდენობა ტოლია 1-დან n-ის ჩათვლით თანმიმდევრობით აღებული ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლის

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

ამ ნამრავლს ეწოდება n რიცხვის ***ფაქტორიალი*** და იგი $n!$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე

$$P_n = n!$$

შეთანხმებით, ცარიელი სიმრავლის დალაგება შესაძლებელია ერთადერთი გზით. ამიტომ ითვლება, რომ $0! = 1$.

ადგილი აქვს ტოლობას

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

მაგალითი. დავადგინოთ, რამდენ ელემენტს უნდა შეიცავდეს სიმრავლე, რომ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი იყოს:

ა) არა უმეტეს 1000-ისა;

ბ) არა ნაკლებ 500-ისა.

ამოხსნა.

ა) ამოცანის პირობით $P_n \le 1000$ ანუ $n! \le 1000$ საიდანაც $n \le 6$. მართლაც, $6! = 720 \le 1000$ და $7! = 5040 \ge 1000$.

ბ) ამოცანის პირობით, $P_n \ge 500$ ანუ $n! \ge 500$ საიდანაც $n \ge 6$. მართლაც, $5! = 120 \le 500$ და $6! = 720 \ge 500$.

§ 2. წყობა და მისი რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა

ვთქვათ, მოცემულია n-ელემენტიანი სასრული A სიმრავლე:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}.$$

ამ სიმრავლის ელემენტებიდან ნებისმიერად ამოვარჩიოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებული m ელემენტი (ცხადია $m \le n$) და ამ ელემენტებისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო დალაგებული m ელემენტიანი სიმრავლე.

n-ელემენტიანი A სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ყოველ m განსხვავებულ ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება **წყობა** n-ელემენტისა m ელემენტად. n-ელემენტის m ელემენტად ყველა წყობათა რიცხვი აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი. ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

წყობათა თვისებები.

თვისება. $A_n^0 = 1.$

თვისება. $A_n^1 = n.$

თვისება. $A_n^n = P_n = n!$

მაგალითი. დავადგინოთ, რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება 5 კაცის არჩევა ხუთ სხვადასხვა თანამდებობაზე, თუ ამ თანამდებობაზე კანდიდატთა რიცხვია 11.

ამოხსნა. ამორჩევათა ყველა შესაძლო რაოდენობა ტოლი იქნება A_{11}^5 რიცხვის. ამიტომ, $A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55\,440$.

§ 3. ჯუფთება და მისი რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა

ვთქვათ, მოცემულია n-ელემენტიანი რაიმე A სიმრავლე. განვიხილოთ მისი ნებისმიერად შედგენილი m განსხვავებულ ელემენტიან ქვესიმრავლე (დალაგების გარეშე). n-ელემენტიანი A სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ყოველ ასეთ m განსხვავებულ ელემენტიან ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჯუფთება** n-ელემენტისა m ელემენტად. n-ელემენტის m ელემენტად ყველა ჯუფთებათა რიცხვი აღინიშნება სიმბოლოთი: C_n^m (ზოგჯერ გამოიყენება $\binom{n}{m}$ სახის ჩანაწერი). ადგილი აქვს ტოლობას:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

ჯუფთებათა თვისებები:

თვისება. $C_n^0 = 1$.

თვისება. $C_n^1 = n$.

თვისება. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

მაგალითი. დავადგინოთ, საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობა, თუ თითოეულმა მონაწილემ თითოეულ დანარჩენთან თითო პარტია ითამაშა და სულ 55 პარტია შედგა?

ამოხსნა. თუ ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობას n-ით ავღნიშნავთ, მაშინ ტურნირში სულ გათამაშებულ პარტიათა რაოდენობა ტოლი იქნება C_n^2. ამოცანის პირობით

$$C_n^2 = 55.$$

გვექნება

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 55 \quad \text{ანუ} \quad n \cdot (n-1) = 110, \text{ საიდანაც } n = 11.$$

§ 4. ნიუტონის ბინომი. ბინომიალური კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულა და მათი თვისებები

განვიხილოთ ორი რიცხვის ჯამის ნატურალური ხარისხი $(a+b)^n$. რიცხვის ნატურალური ხარისხის განმარტების გამოყენებით, ძნელი არა რის იმის გამოთვლა, რომ

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

აღმოჩნდა, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ფორმულა:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^5 + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^m \cdot a^{n-m}b^m + \cdots + C_n^n \cdot b^n .$$

მიღებულ ფორმულას **ნიუტონის** ფორმულა (ანუ **ბინომი**) ეწოდება. ნიუტონის ბინომის C_n^m კოეფიციენტებს **ბინომური კოეფიციენტები** ეწოდებათ.

ნიუტონის ბინომის თვისებები.

თვისება. ბინომური კოეფიციენტების რაოდენობა (შესაბამისად, ნიუტონის ბინომის ფორმულაში შესაკრებთა რიცხვი) ტოლია $(n+1)-$ის;

თვისება. ნიუტონის ბინომის ფორმულაში პირველი შესაკრების ხარისხი კლებულობს n-დან 0-მდე, ხოლო მეორე შესაკრების ხარისხი იზრდება 0-დან n-მდე;

თვისება. ნიუტონის ბინომის ფორმულაში ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წევრების კოეფიციენტები ტოლია $C_n^m = C_n^{n-m}$;

თვისება. ბინომური კოეფიციენტები ჯერ იზრდება, შემდეგ კი კლებულობს. თუ ბინომის ხარისხის მაჩვენებელი ლუწია, მაშინ დაშლის შუა წევრის ბინომური კოეფიციენტი უდიდესია, ხოლო თუ ბინომური ხარისხის მაჩვენებელი კენტია, მაშინ ორი შუა ბინომური კოეფიციენტი ერთმანეთის ტოლია და, ამასთან, უდიდესია;

თვისება. ბინომური ხარისხის დაშლის $k+1$-ე შესაკრები T_k ტოლია

$$T_k = C_n^k \cdot a^{n-k}b^k .$$

შენიშვნა. ორი სიდიდის სხვაობის ნატურალური ხარისხისათვის მართებულია ფორმულა:

$$(a-b)^n = C_n^0 \cdot a^5 - C_n^1 \cdot a^{n-1}b + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^m \cdot C_n^m \cdot a^{n-m}b^m + \cdots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot b^n .$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$ დაშლის მეხუთე წევრი.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ზემოთ განხილული ფორმულით, გვექნება:

$$T_4 = C_{12}^4 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 495 \cdot x^{\frac{20}{3}} .$$

§ 5. პასკალის სამკუთხედი

განვალაგოთ ბინომიალური კოეფიციენტები ასეთი სამკუთხედის სახით

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0=1 \quad C_1^1=1$$
$$C_2^0=1 \quad C_2^1=2 \quad C_2^2=1$$
$$C_3^0=1 \quad C_3^1=3 \quad C_3^2=3 \quad C_3^3=1$$
$$C_4^0=1 \quad C_4^1=4 \quad C_4^2=6 \quad C_4^3=4 \quad C_4^4=1$$
. . . .

მას პასკალის სამკუთხედი ქვია. ალბათ შეამჩნევდით, რომ აქ ყოველი რიცხვი მისი ორი ზედა მეზობლის ჯამია. საზოგადოდ

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k\,.$$

პასკალის სამკუთხედის თვისებები

n-ურ სტრიქონის წევრთა ჯამი 2^n-ის ტოლია (რატომ ? გაშალე ნიუტონის ფორმულით $(1+1)^n$).

პასკალის ყოველი სტრიქონი სიმეტრიულია (რატომ ? შეადარე ერთმანეთს C_n^k და C_n^{n-k}).

მაგალითი. პასკალის სამკუთხედის გამოყენებით, ვიპივოთ $(1+x)^5$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ამოხსნა. $(1+x)^5$ გამოსახულების კოეფიციენტები პასკალის სამკუთხედის 5-ე სტრიქონის ელემენტებია: $1, 5, 10, 10, 5, 1$, ამიტომ

$$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\,.$$

დამატებითი ამოცანები.

1. შეადგინეთ A სიმრავლისაგან ყველა შესაძლო გადანაცვლება, თუ:
ა) $A=\{m, n, p, q\}$;
ბ) $A=\{1, 2, p, q, a\}$.

2. შეასრულეთ მოქმედებები და გამოთვალეთ:
ა) $\frac{6\,!-5\,!}{12}$; ბ) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$; გ) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; დ) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

3. კლასში 32 მოსწავლეა. გამოსაშვებ საღამოზე მათ ერთმანეთს სამახსოვრო ფოტოსურათები გაუცვალეს. რამდენი ფოტოსურათი გაიცვალა სულ?

4. რამდენი განსხვავებული საგნისაგან შეიძლება 2-ელემენტიანი 210 წყობის შედგენა?

5. კლასის 27 მოსწავლიდან კონფერენციისათვის უნდა აირჩიონ 3 დელეგატი. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

6. კლასში 28 მოსწავლეა. გამოსაშვებ საღამოზე მათ ერთმანეთს სამახსოვრო ფოტოსურათები გაუცვალეს. რამდენი ფოტოსურათი გაიცვალა სულ?

7. აჩვენეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

ა) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; ბ) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.

8. ამოხსენით განტოლება:

ა) $A_x^3 - 6C_x^2 = x^2 - x$; ბ) $C_n^4 = \dfrac{15A_n^2}{4}$;

გ) $A_{n+2}^4 = 224n(n+2)$; დ) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n^2\text{-}1)$

9. ამოხსენით უტოლობა $A_{n-1}^2 < 72$

10. ნიუტონის ბინომის გამოყენებით, გამოთვალეთ:

1. 99^4; 2. 999^3; 3. 98^5; 4. 998^4

11. გამოთვალეთ:

1. $(x-1)^4$; 2. $(2x^2 - y)^5$; 3. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$;
4. $(x+y)^6$; 5. $(2a^2 - b/3)^7$; 6. $(x/2 - 1/x)^7$.

12. იპოვეთ ბინომიალური გაშლის m-ური წევრი (შუა წევრი):

1. $(a^3 - 2b^2)^{12}$, $m = 7$; 2. $(2x - 1/2y)^{19}$, $m = 8$;
3. $(a^{1/2} - 1/2b^{-1/3})^{18}$, $m = 4$; 4. $(x-y)^{25}$, $m = 20$;
5. $(3x - y/3)^{15}$, $m = 11$

13. იპოვეთ $\left(x + x^{-2}\right)^{12}$ დაშლის იმ წევრის ნომერი, რომელიც არ შეიცავს x-ს.

14. იპოვეთ $\left(1 + 0{,}01\right)^{1000}$ დაშლის უდიდესი წევრის ნომერი.

15. პასკალის სამკუთხედის გამოყენებით, წარმოადგინეთ მრავალწევრის სახით შემდეგი გამოსახულება:

ა) $(a+b)^7$;

ბ) $(1-x)^{10}$.

16. შეადგინეთ 12 სტრიქონიანი პასკალის სამკუთხედი.

Combinatorics

Factorial

The product of a given integer and all smaller positive integers. The factorial of n is written $n!$ and is read aloud "n factorial".

Note: By definition, $0! = 1$.

Formula: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$
Example: $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Permutation Formula

A formula for the number of possible permutations of k objects from a set of n. This is usually written ${}_nP_k$.

Formula: $${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Example: How many ways can 4 students from a group of 15 be lined up for a photograph?

Answer: There are ${}_{15}P_4$ possible permutations of 4 students from a group of 15.

$${}_{15}P_4 = \frac{15!}{11!} = 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12 = 32760$$ different lineups

Binomial Coefficients

Numbers written in any of the ways shown below. Each notation is read aloud "n choose r."

$$\binom{n}{r} \text{ or } {}_nC_r \text{ or } C(n,r) \text{ or occasionally } \mathrm{C}_r^n$$

A binomial coefficient equals the number of combinations of *r* items that can be selected from a set of *n* items. It also represents an entry in Pascal's triangle. These numbers are called **binomial coefficients** because they are coefficients in the binomial theorem.

Formula: $$\binom{n}{r} \text{ or } {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Note: $\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!}$, where ${}_nP_r$ is the formula for permutations of *n* objects taken *r* at a time.

Examples: $$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$$

$$_{20}C_3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} = 1140$$

Pascal's Triangle

The figure below, extended infinitely. A particular entry is found by adding the two numbers that are above and on either side of the element. Note: The numbers which make up Pascal's triangle are called binomial coefficients.

Pascal's Triangle

Note that the sum of any two adjacent elements in a row can be found between them on the next row. Each row begins and ends with 1.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

etc.