6. სიმრავლეთა ნამრავლი

A და B სიმრავლეთა ნამრავლი ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია წყვილები (a,b), სადაც a არის A სიმრავლის ელემენტი, ხოლო b კი B სიმრავლისა, ანუ

$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}.$$

მაგალითები

1. A იყოს სიმრავლე, შემდგარი 8 ლათინური ასოსაგან {a,b,c,d,e,f,g,h} ხოლო სიმრავლე B იყოს {1,2,3,4,5,6,7,8}, მაშინ მათი ნამრავლი არის 64 ელემენტისგან შემდგარი სიმრავლე

a8,b8,c8,d8,e8,f8,g8,h8
a7,b7,c7,d7,e7,f7,g7,h7
a6,b6,c6,d6,e6,f6,g6,h6
a5,b5,c5,d5,e5,f5,g5,h5
a4,b4,c4,d4,e4,f4,g4,h4
a3,b3,c3,d3,e3,f3,g3,h3
a2,b2,c2,d2,e2,f2,g2,h2
a1,b1,c1,d1,e1,f1,g1,h1

რაც არის ჭადრაკის დაფის სტანდარტილი ნოტაცია.

2. ნამრავლი $R \times R$ არის სიბრტყე.

7. მიმართებები

მიმართება A და B სიმრავლეებს შორის ეწოდება $A \times B$ ნამრავლის ქვესიმრავლეს $R \subset A \times B$. თუ $(a,b) \in R \subset A \times B$ მაშინ ამბობენ, რომ a არის R-მიმართებაშია b-სთან და ეს ასე აღინიშნება aRb.

მიმართებათა შესაძლო თვისებები:

1. მიმართებას ეწოდება რეფლექსური თუ $\forall x$ -თვის xRx;
2. მიმართებას ეწოდება სიმეტრიული თუ $\forall x,y$ -თვის $xRy \Rightarrow yRx$;
3. მიმართებას ეწოდება ტრანზიტული თუ $\forall x,y,z$ -თვის $xRy, yRz \Rightarrow xRz$;
4. მიმართებას ეწოდება ანტისიმეტრიული თუ $\forall x,y$ -თვის $xRy, yRx \Rightarrow x = y$.

განვიხილოთ ასეთი მიმართებები:

(1) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x \mid y$ (x ყოფს y-ს)$\}$;
(2) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x < y\}$;
(3) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x \le y\}$;
(4) $R = \{(x,y): x,y \in N,\ x - y$ ლუწია$\}$.

ამოცანა

გაარკვიეთ თითეული ამ მიმართებისათვის აქვთ თუ არა მათ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისიებები.

8. მიმართების მატრიცა

მიმართება სასრულ სიმრავლეზე შეიძლება მატრიცის სახით ჩაიწეროს. ვთქვათ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ და მოცემულია რაიმე მიმართება $R \subset A \times B$. ამ მიმართებას შეესაბამება $m \times n$ მატრიცი $\|\alpha_{ij}\|$, სადაც $\alpha_{ij} = 1$ თუ $x_i \, R \, y_j$ და $\alpha_{ij} = 0$ წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მაგალითი

ვთქვათ $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ და მიმართება $R \subset A \times B$ ასეთია: a_1Rb_1, a_1Rb_3, a_2Rb_2, მაშინ ამ მიმართების მატრიცია

	b_1	**b_2**	**b_3**
a_1	1	0	1
a_2	0	1	0

ამოცანები

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i-j$ ლუწია.

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i-j$ კენტია.

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i < j$.

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i \le j$.

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i > j$.

დაწერეთ მატრიცი {1,2,3,4} სიმრავლეზე განსაზღვრული ასეთი მიმართებისა: iRj თუ $i \ge j$.

გაარკვიეთ თითეული ამ მიმართებისათვის აქვთ თუ არა მათ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისიებები.

9. მიმართებათა ძირითადი სახეები

ასეთი ზოგადობით მიმართების ცნება იშვიათად გამოიყენება. ჩვენ დაგვჭირდება მიმართებათა სამი კერძო სახე.

1. ***ასახვა*** არის მიმართების კერძო სახე: ყოველი ასახვა $f : A \to B$ აჩენს ასეთ მიმართებას $R = \{(x,f(x))\} \subset X \times Y$, ამ სიმრავლეს f ასახვის გრაფიკი ეწოდება. სინამდვილეში ასახვა არის მიმართება (ანუ ქვესიმრავლე) $R \subset X \times Y$ ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი 2 პირობა:

   (1) $\forall \, x \in X \; \exists \, y \in Y \Rightarrow x \, R \, y$;

(2) $xRy, xRy' \Rightarrow y = y'$.

2 . მიმართებას ეწოდება ***ექვივალენტობა,*** თუ ის რეფლექსურია, სიმეტრიული და ტრანზიტული, ანუ სრულდება შემდეგი აქსიომები

(1) xRx;
(2) $xRy \Rightarrow yRx$;
(3) $xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

თუ R მიმართება ამ აქსიომებს აკმაყოფილებს, მაშინ xRy სიმბოლოს ნაცვლად ხმარობენ აღნიშვნას: $x \sim y$, რაც ასე იკითხება "x ექვივალენტურია y-ის". მაშინ ეს აქსიომები უფრო ნაცნობ სახეს იღებენ:

(1) $x \sim x$;
(2) $x \sim y \Rightarrow x \sim y$;
(3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

მაგალითები
შემოვიტანოთ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ასეთი მიმართება: $x \sim y$ თუ $x - y$ იყოფა 5-ზე. აჩვენეთ, რომ ეს ექვივალენტობის მიმართებაა.

ვთქვათ X სიმრავლეზე მოცემულია ექვივალენტობის მიმართება $x \sim y$, x ელემენტის ექვივალენტობის კლასი [x] ეწოდება სიმრავლეს $[x] = \{y \in X, x \sim y\}$.

თეორემა. ყოველი ექვივალენტობის მიმართება ჰყოფს X სიმრავლეს ერთმანეთის არათანამკვეთ ექვივალენტობის კლასებად.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ ორი რამ: (1) რომ ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე ფარავს მთელ X-ს და (2) რომ ორი კლასი ან არ თანაიკვეთება, ან მთლიანად ემთხვევა ერთმანეთს.
პირველი წინადადება ცხადია X-ის ყოველი ელემენტი x შედის თუნდაც, თავის კლასში [x]: $x \sim x$ **რეფლექსურობის** გამო.
ახლა დავამტკიცოთ მეორე წინადადება. ვთქვათ $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, ეს ნიშნავს, რომ $\exists z$ ი.რ. $z \in [x] \cap [y]$, ანუ $z \sim x$ და $z \sim y$. **სიმეტრიულობით** ეს იგივეა რაც $x \sim z$ და $z \sim y$, **ტრანზიტულობით** კი ეს გვაძლევს $x \sim y$, ამიტომ $[x] = [y]$.
როგორც ვხედავთ დამტკიცებაში გამოყენებულია ექვივალენტობის სამივე აქსიომა.

მაგალითი
ზემოთ ნახსენები ექვივალენტობის მიმართება მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეში "$x \sim y$ თუ $x - y$ იყოფა 5-ზე" ჰყოფს Z-ს შემდეგ 5 ექვივალეტობის კლასად
$[0] = \{\ldots, 0,5,10,15,\ldots\}$, $[1] = \{\ldots,1,6,11,\ldots\}$, $[2] = \{\ldots,2,7,12,\ldots\}$, $[3] = \{\ldots,3,8,13,\ldots\}$, $[4] = \{4,9,14,\ldots\}$. ამ კლასთა სიმრავლეს ქვია *5-ზე გაყოფის ნაშთთა კლასები* და ასე აღინიშნება: Z_5. ანალოგიურად იმარტება *n-ზე გაყოფის ნაშთთა კლასები* Z_n.

ამოცანები

ადამიანთა სიმრავლეზე განვიხილოთ ასეთი მიმართება "$x \sim y$ თუ x არის y-ის წინაპარი". არის თუ არა ეს ექვივალენტობის მიმართება?

ადამიანთა სიმრავლეზე განვიხილოთ ასეთი მიმართება “$x \sim y$ თუ მათ საერთი წინაპარი ჰყავთ”. არის თუ არა ეს ექვივალენტობის მიმართება?

განვიხილოთ {0,1,2,3,4,5,6} სიმრავლეზე ასეთი მიმართება “$x \sim y$ თუ $x - y$ იყოფა 3-ზე”. აჩვენეთ, რომ ეს ექვივალენტობის მიმართებაა, ჩამოწერეთ ეწვივალენტობის კლასები, დაწერეთ ამ მიმართების მატრიცი.

3. მიმართებას ეწოდება ***ნაწილობრივი დალაგება*** თუ ის რეფლექსურია, ანტისიმეტრიული და ტრანზიტული, ანუ თუ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

(1) xRx;

(2) $xRy,\ yRx \Rightarrow x = y$;

(3) $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$.

თუ R მიმართება ამ აქსიომებს აკმაყოფილებს, მაშინ xRy სიმბოლოს ნაცვლად ხმარობენ უფრო ნაცნობ აღნიშვნას: $x \le y$. მაშინ ეს აქსიომები უფრო ნაცნობ სახეს იღებენ:

(1) $x \le x$;

(2) $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$;

(3) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$.

მიმართებას ეწოდება ***სრული დალაგება,*** თუ ის ნაწილობრივი დალაგებაა და დამატებით სრულდება ასეთი აქსიომაც: ნებისმიერო ორი ელემენტი სადარია, ანუ

(4) $\forall x,y$ ან $x \le y$, ან $y \le x$.

ყოველი ნაწილობრივი დალაგება $\le$ აჩენს მკაცრ დალაგებას $<$: ვიტყვით, რომ $x < y$ თუ $x \le y$ და $x \ne y$.

მაგალითები

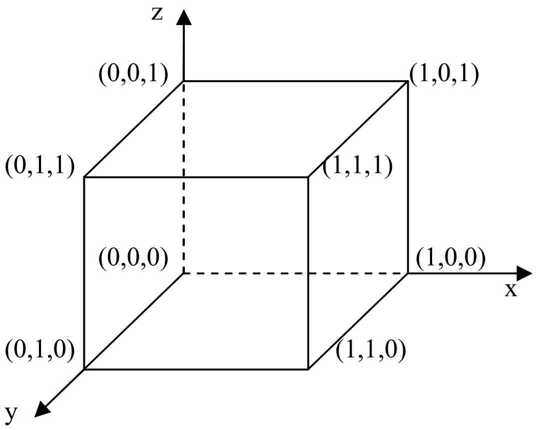
U იყოს რაიმე სიმრავლე, ხოლო X იყოს ამ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, ანუ $x \in X$ თუ $x \subset U$. შემოვიტანოთ X-ზე ასეთი დალაგება: $x \le y$ თუ $x \subset y$. ეს ნაწილობრივი დალაგებაა.

მიმართება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე “ $x \le y$ თუ x ყოფს y-ს” (აღინიშნება $x \mid y$) ასევე ნაწილობრივი დალაგებაა.

X იყოს ადამიანების სიმრავლე, ხოლო დალაგება შემოვიტანოთ ასე: $x \le y$ თუ x არის y-ის წინაპარი. ესეც ნაწილობრივი დალაგებაა.

ნამდვლ რიცხვთა სიმრავლეზე შემოვიტანოთ მიმართება, რომელიც მოცემულია სიბრტყის $R^2 = R \times R$ ასეთი ქვესიმრავლით: ეს იყოს I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის ქვეშ მოთავსებული ნახევარსიბრტყე.
აჩვენეთ, რომ ეს დალაგება სინამდვილეში სრული დალაგებაა, რომელიც ემთხვევა ღერძის ჩვეულებრივ დალაგებას.

ნაწილობრივი დალაგება კუბის წვეროთა სიმრავლეში (ჰემინგის დალაგება)
ერთი წვერო მეტია მეორეზე, თუ მეორეს კოორდინატები მიღებულია პირველში ზოგიერთი 0-ის 1-იანით შეცვლით:



(0,0,0) < (0,0,1) < (0,1,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,0,1) < (1,0,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,1,0) < (0,1,1) < (1,1,1)

(0,0,0) < (0,1,0) < (1,1,0) < (1,1,1)

(0,0,0) < (1,0,0) < (1,1,0) < (1,1,1)

(0,0,0) < (1,0,0) < (1,0,1) < (1,1,1)

უდიდესი და უმცირესი, მინიმალური და მაქსიმალური

ვთქვათ $(X, \leq)$ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეა.

ელემენტს $s \in X$ ეწოდება უმცირესი თუ ის ნაკლებია (ან ტოლი) ნებისმიერ სხვა ელემეტზე, ანუ $\forall x$ - თვის $s \leq x$.

ანალოგიურად, ელემენტს $g \in X$ ეწოდება უდიდესი თუ ის მეტია (ან ტოლი) ნებისმიერ სხვა ელემეტზე, ანუ $\forall x$ - თვის $x \leq g$.

ელემენტს $M \in X$ ეწოდება მაქსიმალური, თუ არ არსებობს მასზე მეტი სხვა ელემენტი $y > M$.

ელემენტს $m \in X$ ეწოდება მინიმალური, თუ არ არსებობს მასზე ნაკლები სხვა ელემენტი $y < m$.

თეორემა. ნებისმიერ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში შეიძლება არსებობდეს არაუმეტეს ერთი უმცირესი (უდიდესი) ელემენტისა.
დამტკიცება. ვთქვათ s და s' ორი უმცირესი ელემენტია. s-ის უმცირესობის გამო $s \leq s'$, ხოლო s'-ის უმცირესობის გამო $s' \leq s$. ანტისიმეტრიულობით ვიღებთ $s = s'$. ანალოგიურად დამტკიცდება უდიდესი ელემეტის ერთადერთობაც.

თეორემა. უდიდესი ელემენტი მაქსიმალურიცაა.
დამტკიცება. ვთქვათ g უდიდესია, ე.ი. $g \geq y$ ნებისმიერი y-თვის, მაგრამ არ არის მაქსიმალური, ანუ არსებობს y ისეთი რომ $y > g$. მკაცრი უტოლობის განმარტების თანახმად ეს ნიშნავს, რომ $y \geq g$ მაგრამ $y \neq g$, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას $g \geq y$.

თეორემა. თუ დალაგება სრულის, მაშინ მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტი უდიდესიცაა (უმცირესიცაა).
დამტკიცება. ვთქვათ M მაქსიმალურია, ანუ არ არსებობს y ისეთი, რომ $y > M$. ვაჩვენოთ, რომ M უდიდესია, ანუ $M \geq z$ ყოვლელი z-თვის. დავუშვათ წინააღმდეგი, არსებობს $y \neq M$ და $y \geq M$, ეს ნიშნავს $y > M$ რაც ეწინააღმდეგება M-ის მაქსიმალურობას.

ამრიგად სრული დალაგების შემთხვევაში არ არსებობს განსხვავება მაქსიმალურ და უდიდეს (მინიმალურ და უმცირეს) ელემენტებს შორის.

მაგალითი 1. განვიხილოთ სიმრავლე $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ გაყოფადობის დალაგების მიმართ $a \leq b$ თუ $a \mid b$. აქ: 1 მინიმალურია და უმცირესი, 4,5,6 მაქსიმალური ელემენტებია, უდიდესი არ არსებობს.

მაგალითი 2. განვიხილოთ სიმრავლე $X = \{1,2,3,,6\}$ გაყოფადობის დალაგების მიმართ $a \leq b$ თუ $a \mid b$. აქ: 1 მინიმალურია და უმცირესი, 6 მაქსიმალური და უდიდესი.

მაგალითი 3. განვიხილოთ კუბის 8 წვეროს სიმრავლე ჰემინგის დალაგებით. აქ (0,0,0) მინიმალურია და უცირესი, (1,1,1) კი მახსიმალური და უდიდესი.

მაგალითი 2. S სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეში 2^S მინიმალური და უმცირესია ცარიელი სიმრავლე, მაქსიმალური და უდიდესი კი S.

დალაგებულ სიმრავლეთა ნამრავლი
ვთქვათ $(X, \leq)$ და $(Y, \leq)$ ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეებია. განვმარტოთ მათ ნამრავლზე $X \times Y$ ასეთი დალაგება: $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ თუ $x_1 \leq x_2$ და $y_1 \leq y_2$. ამ დალაგებას ვუწოდოთ ნამრავლის დალაგება.

ლექსიკოგრაფიული დალაგება
იმავე ნამრავლზე $X \times Y$ იმართება სხვანაირი დალაგებაც (მსგავსი იმისა, თუ როგორაა დალაგებული სიტყვები ლექსიკონში, ამიტომ ამ დალაგებას ლექსიკოგრაფიული დალაგება ეწოდება): $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ თუ $x_1 < x_2$, ხოლო თუ $x_1 = x_2$, მაშინ $y_1 \leq y_2$.

ამოცანები

(ნაწილობრივ) დალაგებულ სიმრავლეთა ყველა ზემოთ მოყვანილ მაგალითში აღმოაჩინეთ უმცირესი და უდიდესი ელემენტები, თუკი ასეთები არსებობენ.

ადამიანთა სიმრავლეზე განვიხილოთ ასეთი მიმართება “$x R y$ თუ x არის y-ის წინაპარი”. არის თუ არა ეს დალაგება? ექვივალენტობა? ასახვა?

ადამიანთა სიმრავლეზე განვიხილოთ ასეთი მიმართება “$x R y$ თუ მათ საერთი წინაპარი ჰყავთ”. არის თუ არა ეს დალაგება? ექვივალენტობა? ასახვა?

განვიხილოთ {1,2,3,4} სიმრავლეზე ასეთი მიმართება “$x\,R\,y$ თუ $x \le y$”. აჩვენეთ, რომ ეს დალაგებაა, დაწერეთ ამ მიმართების მატრიცი.

განვიხილოთ {1,2,3,4} სიმრავლეზე ასეთი მიმართება “$x\,R\,y$ თუ x ყოფს y-ს”. აჩვენეთ, რომ ეს დალაგებაა, დაწერეთ ამ მიმართების მატრიცი.

განვიხილოთ {1,2,3,4} სიმრავლეზე ასეთი მიმართება “$x\,R\,y$ თუ $x - y$ იყოფა 3-ზე”. აჩვენეთ, რომ ეს ექვივალენტობის მიმართებაა, ჩამოწერეთ ეწვივალენტობის კლასები, დაწერეთ ამ მიმართების მატრიცი.

დაამტკიცეთ, რომ ნაწილობრივ დალაგებული ვთქვათ $(X, \le)$ და $(Y, \le)$ სიმრავლეების ზემოთ აღწერილი $X \times Y$ ნამრავლის დალაგება ნაწილობრივი დალაგებაა.

ვთქვათ $(X, \le)$ და $(Y, \le)$ დალაგებები ორივე სრულია. სწორია თუ არა, რომ $X \times Y$ ნამრავლის დალაგებაც სრულია?

დაამტკიცეთ, რომ ნაწილობრივ დალაგებული ვთქვათ $(X, \le)$ და $(Y, \le)$ სიმრავლეების $X \times Y$ ნამრავლის ზემოთ აღწერილი ლექსიკოგრაფიული დალაგება ნაწილობრივი დალაგებაა.

ვთქვათ $(X, \le)$ და $(Y, \le)$ ორივე სრულია. სწორია თუ არა, რომ $X \times Y$ ის ლექსიკოგრაფიული დალაგებაც სრულია?

დაასახელეთ $N \times N$ სიმრავლის ის ელემენტები, რომელთათვისაც სრულდება $(x,y) \le (5,4)$ ნამრავლის დალაგებით.

დაასახელეთ $N \times N$ სიმრავლის ის ელემენტები, რომელთათვისაც სრულდება $(x,y) \le (5,4)$ ლექსიკოგრაფიული დალაგებით.

ემთხვევა თუ არა ერთმანეთს ნამრავლის და ლექსიკოგრაფიული დალაგებები?