თავი 1. სიმრავლეთა თეორია

1. სიმრავლის ცნება

სიმრავლე საწყისი ცნებაა (არ განიმარტება). ტავტოლოგიურად - გარკვეულ ელემენტთა ერთობლიობა.

მაგალითები

1. ამ აუდიტორიაში მყოფ სტუდენტთა სიმრავლე;
2. კურსის სტუდენტთა სიმრავლე;
3. ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე;
4. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$;
5. მთელ რიცხვთა სიმრავლე $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$;
6. რაციონალურ რიცხვთა (წილადთა) სიმრავლე Q;
7. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R;
8. ლუწ რიცხვთა სიმრავლე $\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$;
9. კენტ რიცხვთა სიმრავლე $\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$;
10. 6-ზე ნაკლებ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\{1,2,3,4,5\}$;
11. ორნიშნა რიცხვთა სიმრავლე $\{10,11,12,\ldots,98,99\}$;
12. ორნიშნა კენტ სიმრავლე $\{11,13,\ldots,97,99\}$;

აღნიშვნა:

$x \in X$ "ელემენტი x ეკუთვნის X სიმრავლეს".

$x \notin X$ "ელემენტი x არ ეკუთვნის X სიმრავლეს".

მაგალითები

$5 \in N$, $3 \in N$, $-3 \notin N$, $-3 \in Z$, $0.33 \notin N$, $0.33 \notin Z$, $0.33 \in Q$, $4 \in \{1,4,9,25\}$, $7 \notin \{1,4,9,25\}$.

აღნიშვნა:

$X \subset Y$ "X სიმრავლე შედის Y სიმრავლეში" = "X სიმრავლე არის Y სიმრავლის ქვესიმრავლე".

$X \not\subset Y$ "X სიმრავლე არ შედის Y სიმრავლეში" = "X სიმრავლე არ არის Y სიმრავლის ქვესიმრავლე".

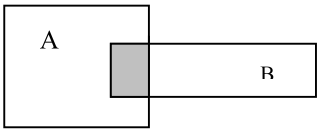
მაგალითები

$N \subset Z \subset Q \subset R$, $\{1,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\{1,3,9\} \not\subset \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

2. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

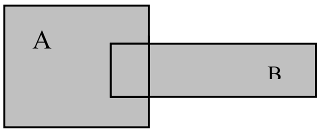
სიმრავლეთა თანაკვეთა

$A \cap B = \{x,\ x \in A$ და $x \in B\}$



სიმრავლეთა გაერთიანება

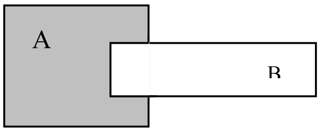
$A \cup B = \{x,\ x \in A$ ან $x \in B\}$



მაგალითები
$\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,5\} = \{2,3\}$, $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

სიმრავლეთა სხვაობა

$A \setminus B = A - B = \{x,\ x \in A,\ x \notin B\}$



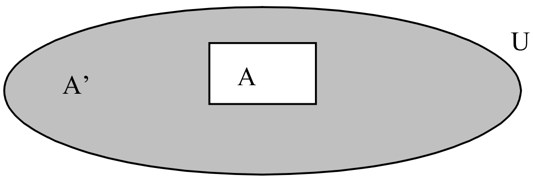
უკიდურესი შემთხვევები: ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$ და უნივერსუმი U

(დამოკიდებულია კონტექსტზე).

სიმრავლეთა ტოლობა: $A = B$ თუ $A \subset B$ და $B \subset A$.

A სიმრავლის დამატება:

$A' = U \setminus A = \{x \in U,\ x \notin A\}$.



ოპერაციათა თვისებები

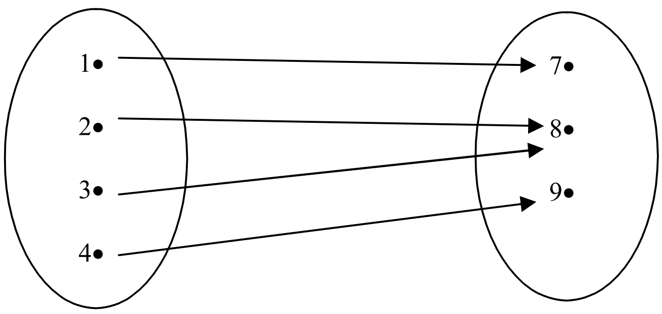
რიცხვებში	სიმრავლეებში
$a \bullet b$	$A \cap B$
$a + b$	$A \cup B$
0	$\varnothing$
$a \bullet 0 = 0$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$a + 0 = a$	$A \cup \varnothing = A$
$a \bullet b = b \bullet a$	$A \cap B = B \cap A$
$a + b = b + a$	$A \cup B = B \cup A$
$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$	$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
1	U
$a \bullet 1 = a$	$A \cap U = A$
	$A \cup U = U$
	$A \cap A' = \varnothing$
	$A \cup A' = U$ - $A \cap A = A$
	$A \cup A = A$

3. ასახვები

ასახვა (ფუნქცია) X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f: X \to Y$ არის წესი, რომლითაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი გარკვეული ელემენტი. სიმრავლეს X ეწოდება f ასახვის განსაზღვრის არე, ხოლო სიმრავლეს Y მისი მნიშვნელობათა არე.

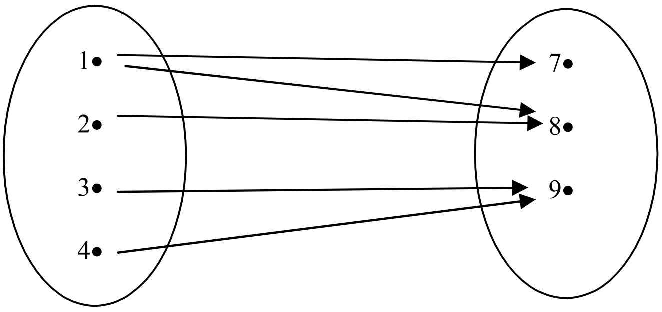
მაგალითები.

1. $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{7,8,9\}$, ხოლო წესი f ასეთია: $f(1) = 7$, $f(2) = 8$, $f(3) = 8$, $f(4) = 9$,



შეთანადების ეს წესი ასახვაა.

2. $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{7,8,9\}$, ხოლო წესი f ასეთია: $f(1) = 7$, $f(1) = 8$, $f(2) = 8$, $f(3) = 9$, $f(4) = 9$, გრაფიკულად



შეთანადების ეს წესი არ არის ასახვა, რადგან $x = 1$ ელემენტს შეესაბამება ორი სხვადასხვა ელემენტი - $y = 7$ და $y = 8$.

3. X იყოს ადამიანების სიმრავლე, Y-იც ასევე ადამიანების სიმრავლე, ხოლო შეთანადების წესი იყოს ასეთი: ყოველ $x \in X$ ელემენტს (ადამიანს) შეესაბამებოდეს მისი ძმა. ეს არ არის ასახვა: (ა) არსებობს ერთი მაინც ადამიანი, ვისაც ძმა არ ჰყავს, ანუ არსებობს ისეთი $x \in X$, რომელსაც არაფერი არ შეესაბამება, (ბ) არსებობს ერთი მაინც ადამიანი, რომელსაც ორ ძმა ჰყავს, ანუ არსებობს ისეთი $x \in X$, რომელსაც ორი სხვადასხვა $y \in Y$ შეესაბამება, რაც აგრეთვე აკრძალულია ასახვის განმარტებით.

4. ეს მაგალითი გასწორდება, თუ შესაბამისობის წესს ასე შევცვლით: ყოველ ადამიანს შეესაბამებოდეს მისი დედა. მაშინ ყოველ $x \in X$ ელემენტს შეესაბამება თავისი ერთადერთი $y \in Y$.

5. $X = R$, $Y = R$, ხოლო შეთანადების წესი $f : X \to Y$ იყოს მოცემული ფორმულით $f(x) = x^2$, კერძოდ $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(5) = 25$, … .

განმარტება. ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება *სიურექცია,* თუ Y-ის ყოველ ელემენტში გადმოდის რომელიმე x, ანუ თუ $\forall y \in Y \ \exists x \in X, f(x) = y$.

მაგალითები

ასახვა $f:R \to R$, $f(x) = x^2$ არ არის სიურექცია: ელემენტში $y = -4$ არაფერი არ გადმოდის.

ხოლო ასახვა $f:R \to R$, $f(x) = 3x$ სიურექციაა: ელემენტში y გადმოდის $x = y / 3$.

განმარტება. ასახვას $f:X\to Y$ ეწოდება *ინექცია,* თუ X-ის განსხვავებული ელემენტები Y-ის განსხვავებულ ელემენტებში გადადიან, ანუ თუ $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

მაგალითები
ასახვა $f(x) = x^2$ არ არის ინექცია: განსხვავებული ელემენტები $x = -2$ და $x = 2$ ერთ ელემენტში გადადიან $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$.

ხოლო ასახვა $f(x) = 3x$ ინექციაა: ვთქვათ $x_1 \neq x_2$ ანუ $x_1 - x_2 \neq 0$, მაშინ $f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2) \neq 0$ ე.ი. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

განმარტება. ასახვას $f:X\to Y$ ეწოდება *ბიექცია,* თუ ის ერთდროულად სიურექციაცაა და ინექციაც.

ასეთ ასახვას ურთიერთცალსახა ასახვასაც უწოდებენ.

მაგალითები
ასახვა $f(x) = x^2$ არ არის ბიექცია: ის არც სიურექციაა და არც ინექცია.

ხოლო ასახვა $f(x) = 3x$ ბიექციაა: ის სიურექციაც იყო და ინექციაც.

4. ასახვათა კომპოზიცია

ასახვები $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ განსაზღვრავენ ასახვას $(g \bullet f): X \to Z$, რომელსაც მათი კომპოზიცია ეწოდება და ის მოიცემა ტოლობით $(g \bullet f)(x) = g(f(x))$.

მაგალითი
ვთქვათ $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$, მაშინ მათი კომპოზიცია $(g \bullet f): R \to R$ მოიცემა ტოლობით $(g \bullet f)(x) = (x + 2)^2$. ხოლო კომპოზიცია $(f \bullet g): R \to R$ კი ტოლობით $(f \bullet g)(x) = x^2 +2$..

ასახვას $id_X : X \to X$ რომელიც მოცემულია ტოლობით $id_X(x) = x$ იგივური ასახვა ეწოდება.

თეორემა. ნებისმიერი ასახვებისათვის $f : Y \to X$ და $g : X \to Z$ სამართლიანია ტოლობები $id_X \bullet f = f$, $g \bullet id_X = g$.

$f : X \to Y$ ასახვის შექცეული ეწოდება ისეთ ასახვას $f^{-1} : Y \to X$, რომ სრულდება პირობები $f^{-1} \bullet f = id_X$ და $f \bullet f^{-1} = id_Y$. ყველა ასახვას არ გააჩნია შექცეული. ასახვას ეწოდება შექცევადი, თუ მას აქვს შექცეული ასახვა.

თეორემა. ასახვა $f : X \to Y$ სიურექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ასახვა $g: Y \to X$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა $f \bullet g = id_Y$.

თეორემა. ასახვა $f: X \to Y$ ინექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ასახვა $g: Y \to X$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა $g \bullet f = id_X$.

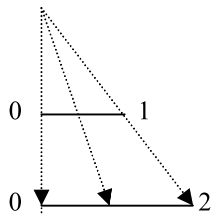
თეორემა. ასახვა $f: X \to Y$ ბიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ასახვა $g: Y \to X$ ისეთი, რომ სრულდება პირობები $g \bullet f = id_X$, $f \bullet g = id_Y$.
ეს ნიშნავს, რომ $g = f^{-1}$. ამრიგად მივიღეთ, რომ ასახვა არის ბიექცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის შექცევადია.

5. სიმრავლის სიმძლავრე

განმარტება. X და Y სიმრავლეებს უწოდებენ ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებს, თუ არსებობს ბიექცია $f: X \to Y$.

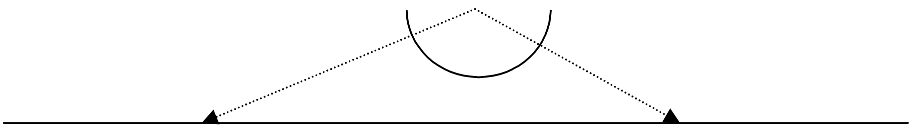
თეორემა. ინტერვალი (0,1) და ინტერვალი (0,2) ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

დამტკიცება.



თეორემა. ინტერვალი (0,1) და მთელი ღერძი (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე) ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

დამტკიცება.



თეორემა. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N = \{1,2,3,\ldots\}$ და ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\{2,4,6,\ldots\}$ ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

დამტკიცება. ასახვა $f: \{1,2,3,\ldots\} \to \{2,4,6,\ldots\}$ მოცემული ფორმულით $f(n) = 2n$ ამყარებს საჭირო ბიექციას.

თეორემა. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N = \{1,2,3,\ldots\}$ და კენტ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\{1,3,5,\ldots\}$ ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია

დამტკიცება. ასახვა $f: \{1,2,3,\ldots\} \to \{3,5,7,\ldots\}$ მოცემული ფორმულით $f(n) = 2n + 1$ ამყარებს საჭირო ბიექციას.

სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ ის ტოლძალოვანია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლისა. წინა ორი თეორემა ნიშნავს, რომ ლუწ რიცხვთა სიმრავლე და კენტ რიცხვთა სიმრავლე ორივე თვლადია.

თეორემა. მთელ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ანუ სიმრავლეები N და Z ტოლი სიმძლავრისანი არიან.

თეორემა. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ანუ სიმრავლეები N და Q ტოლი სიმძლავრისანი არიან.

თეორემა. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე თვლადი არ არის, ანუ სიმრავლეები N და R არ არიან ტოლი სიმძლავრის.

ამრიგად ერთმანეთში ჩალაგებული სიმრავლეებიდან $N \subset Z \subset Q \subset R$ პირველი სამი თვლადია, ანუ ისინი ტოლი სიმძლავრისანი არიან, ხოლო უკანასკნელი, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ კონტინუუმი, R კი არათვლადია, ის არსებითად უფრო მძლავრია, ვიდრე N.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ $U = \{1,2,3,4,5\}$, $X = \{1,5\}$, $Y = \{1,2,4\}$, $Z = \{2,5\}$. იპოვეთ
   (a) $X \cap Y'$; (b) $(X \cap Z) \cup Y'$; (c) $X \cup (Y \cap Z)$; (d) $(X \cup Y) \cap (X \cap Z)$;
   (e) $(X \cup Y)'$; (f) $X' \cap Y'$; (g) $(X \cap Y)'$; (h) $(X \cup Y) \cup Z$; (i) $X \cup (Y \cup Z)$;
   (j) $X \setminus Z$; (k) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.
2. ვთქვათ $A \cap B = \varnothing$, იპოვეთ $A \setminus B$ და $B \setminus A$.
3. იპოვეთ $X \cap X'$, $X \cup X'$, $X \setminus X'$.
4. მოცემულია სიმრავლეები A, B და C, ამასთან $C \subset B$. დაამტკიცეთ, რომ
   (a) $A \cap C \subset A \cap B$; (b) $A \cup C \subset A \cup B$; (c) $A \setminus B \subset A \setminus C$; (d) $C \setminus A \subset B \setminus A$;
   (e) $B' \setminus A \subset C' \setminus A$.
5. დაამტკიცეთ, რომ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. დაამტკიცეთ, რომ $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
7. დაამტკიცეთ, რომ $A \subset B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A \cup B = B$.
8. დაამტკიცეთ, რომ $A \subset B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A \cap B = A$.
9. ვთქვათ ასახვები $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3$, იპოვეთ კომპოზიცია $(g \bullet f): R \to R$.
10. ვთქვათ ასახვები $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3$, იპოვეთ კომპოზიცია $(f \bullet g): R \to R$.
11. ვთქვათ ასახვები $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^3$, იპოვეთ კომპოზიცია $(f \bullet g): R \to R$.
12. ვთქვათ ასახვები $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^3$, იპოვეთ კომპოზიცია $(g \bullet f): R \to R$.
13. ვთქვათ ასახვები $f : R \to R$ და $g : R \to R$ მოცემულია ტოლობებით $f(x) = 2x$, $g(x) = 0{,}5x$, იპოვეთ კომპოზიცია $(g \bullet f): R \to R$.
14. ვთქვათ ასახვა $f : R \to R$ მოცემულია ტოლობით $f(x) = 2x$, არის თუ არა ეს ასახვა (ა) სიურექცია, (ბ) ინექცია, (გ) ბიექცია?

15. ვთქვათ ასახვა $f: R \to R$ მოცემულია ტოლობით $f(x) = x^2$, არის თუ არა ეს ასახვა (ა) სიურექცია, (ბ) ინექცია, (გ) ბიექცია?
16. ვთქვათ ასახვა $f: R \to R$ მოცემულია ტოლობით $f(x) = x^3$, არის თუ არა ეს ასახვა (ა) სიურექცია, (ბ) ინექცია, (გ) ბიექცია?
17. აჩვენეთ, რომ იგივური ასახვა $id_X: X \to X$ ბიექციაა.
18. აჩვენეთ, რომ ორი სიურექციის კომპოზიცია სიურექციაა.
19. აჩვენეთ, რომ ორი ინექციის კომპოზიცია ინექციაა.
20. აჩვენეთ, რომ ორი ბიექციის კომპოზიცია ბიექციაა.