თორნიკე ქადეიშვილი

ალგებრა

ჯგუფები

განმარტება. ჯგუფი ეწოდება სიმრავლეს G ოპერაციით

$$\mu : G\times G \to G, \ \mu(a,b) = a * b,$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1. ასოციატურობა: $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. ერთეული: $\exists\, e \in R$ ი.რ. ყოველი ელემენტისათვის $a \in R$ სრულდება პირობა $a * e = e * a = a$
3. მოპირდაპირე: $\forall a \in R \ \exists\, \hat{a}$ ი.რ. $a * \hat{a} = \hat{a} * a = e$;

ჯგუფი კომუტატურია (აბელისაა) თუ დამატებით სრულდება აქსიომა
4. $a * b = b * a$.

აბელის ჯგუფებისათვის გამოიყენება ადიტიური ჩაწერა:
$a*b=a+b$, $e = 0$, $\hat{a} = -a$,
ხოლო არააბელურებისთვის მულტიპლიკატური: $a * b=a\cdot b$, $e = 1$, $\hat{a} = a^{-1}$.

მაგალითები

1. ლუწი რიცხვები შეკრების მიმართ აბელის ჯგუფია, კენტები კი არა.
2. $(Z, +)$ ჯგუფია;
3. რაციონალური რიცხვები გამრავლების მიმართ არ არის ჯგუფი.
4. $(Q \setminus 0, \cdot)$ ჯგუფია.
5. $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ჯგუფია შემდეგი ოპერაციის მიმართ:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

6. $Z_n = \{0,1, \dots , n - 1\}$ ჯგუფია შემდეგი ოპერაციის მიმართ:

$$a+b = \begin{cases} a+b & if \ \ a+b<n \\ a+b-n & if \ \ a+b \geq n \end{cases}$$

7. არააბელური ჯგუფის მაგალითია არაგადაგვარებულ მატრიცთა ჯგუფი მატრიცთა გამრავლების მიმართ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}$$

ხოლო

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$$

თეორემა. ჯგუფში ნეიტრალური ელემენტი ერთადერთია.

თეორემა. ჯგუფში ყოველ ელემენტს გააჩნია მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე. დამტკიცება.

ქვეჯგუფი

განმარტება. ჯგუფის ქვესიმრავლეს $H \subset G$ ეწოდება ქვეჯგუფი, თუ H თვითონ არის ჯგუფი იგივე ოპერაციის მიმართ, ანუ სრულდება პირობები

1. თუ $a,b \in H$, მაშინ $a * b \in H$;
2. $e \in H$;
3. თუ $a \in H$, მაშინ $\hat{a} \in H$

მაგალითები

1. $N \subset Z$ არ არის ქვეჯგუფი.
2. კენტი რიცხვების სიმრავლე არ არის Z-ის ქვეჯგუფი.
3. ლუწი რიცხვების სიმრავლე 2Z არის Z-ის ქვეჯგუფი.
4. n-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე nZ არის Z-ის ქვეჯგუფი.
5. $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5)$ ჯგუფის ქვესიმრავლეთაგან ქვეჯგუფებია მხოლოდ $\{0\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2,3,4,5)$.

თეორემა. $nZ \subset Z$ ქვეჯგუფია, პირიქითაც, Z-ის ნებისმიერი ქვეჯგუფი nZ სახისაა.

ჰომომორფიზმები

განმარტება. ჯგუფების ასახვას

$$f : G \rightarrow G'$$

ეწოდება ჰომომორფიზმი, თუ სრულდება შემდეგი პირობები

1. $f(e) = e'$ ($f(0) = 0$ ადიტიურ ჩაწერაში);
2. $f(a * b) = f(a) * f(b)$ ($f(a + b) = f(a) + f(b)$ ადიტიურ ჩაწერაში).

მაგალითები

1. ასახვა $f : Z \rightarrow Z$ მოცემული ტოლობით $f(k) = 3k+1$ არ არის ჰომომორფიზმი.

2. ასევე არ არის ჰომომორპიზმი ასახვა $f(k) = k^2$:

3. ასახვა $f : Z \to Z$ მოცემული ტოლობით $f(x) = 3x$ ჰომომორფიზმია.

5. ასახვა $f : Z \to Z$ მოცემული ტოლობით $f(x) = nx$ ჰომომორფიზმია, პირიქითაც, ნებისმიერი ჰომომორფიზმი $f : Z \to Z$ აუცილებლად $f(x) = nx$ ტიპისაა.
6. ასახვა $f : Z \to Z_2$ მოცემული ტოლობებით $f(2n) = 0$, $f(2n+1) = 1$ ჰომომორფიზმია.

7. აღწერეთ ჰომომორფიზმები $Z_2 \to Z$.

8. დაწერეთ ჰომომორფიზმი $(R, +) \to (R_+ , \cdot)$, აქ ეს უკანასკნელი დადებით რიცხვთა მულტიპლიკატური ჯგუფია.

9. დაწერეთ ჰომომორფიზმი $(R_+ , \cdot) \to (R, +)$.

ანასახი და ბირთვი

განმარტება. $f : G \to G'$ ჰომომორფიზმის ანასახი ეწოდება ქვესიმრავლეს

$$\mathrm{Im}\, f = \{g \in G',\ g = f(h) \}.$$

Im f ყოველთვის არაცარიელია: $e' = f(e) \in \mathrm{Im}\, f$.

განმარტება. $f : G \to G'$ ჰომომორფიზმის ბირთვი ეწოდება ქვესიმრავლეს

$$\mathrm{Ker}\, f = \{g\in G,\ f(g) = e' \}$$

($f(g) =0$ ადიტიურ ჩაწერაში). Ker f ყოველთვის არაცარიელია: $e \in \mathrm{Ker}\, f$.

მაგალითები
1. $f : Z \to Z$, $f(x) = 3x$ ჰომომორფიზმისთვის
$\mathrm{Im}\, f = \{ \ldots, -6,-3,0,3,6,\ldots\}$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
2. $f : Z \to Z_2$, $f(2x) = 0$, $f(2x+1) = 1$ ჰომომორფიზმისთვის
$\mathrm{Im}\, f = Z_2$, $\mathrm{Ker}\, f = \{ \ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots \}$.

თეორემა. Im f ქვეჯგუფია.

თეორემა. Ker f ქვეჯგუფია.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $f : H \to G$ ინექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mathrm{Ker}\, f = e$.

მონომორფიზმი, ეპიმორფიზმი, იზომორფიზმი

მოდით ამის შემდეგ მხოლოდ აბელის ჯგუფებზე ვილაპარაკოთ.

განმარტება.
მონომორფიზმი ქვია ინექციურ ჰომომორფიზმს.
ეპიმორფიზმი ქვია სიურექციულ ჰომომორფიზმს.
იზომორფიზმი ქვია ბიექციურ ჰომომორფიზმს.

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f : H \to G}$ აქვს მარჯვენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g : G \to H}$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარჯვენა შებრუნებული, მაშინ ის ეპიმორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ეპიმორფულობა არ იწვევს მარჯვენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარჯვენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს ჰომომორფიზმი. მაგ. $f : Z \to Z_2,\ f(2n) = 0,\ f(2n+1) = 1$ (აქ საკმარისია ითქვას მხოლოდ $f(1) = 1$).

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f : H \to G}$ აქვს მარცხენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g : G \to H}$ ისეთი, რომ $g \circ f = id_H$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარცხენა შებრუნებული, მაშინ ის მონომორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ინექციულობა არ იწვევს მარცხენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარცხენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს ჰომომორფიზმი. მაგ. $g : Z \to Z,\ g(n) = 2n.$

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f : H \to G}$ აქვს შებრუნებული (შებრუნებადია) თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g : G \to H}$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G,\ g \circ f = id_H$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $\mathrm{f : H \to G}$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის შბრუნებადია.

ზუსტი მიმდევრობები

აბელის ჯგუფთა და ჰოჰომორფიზმთა მიმდევრობას

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ქვია ზუსტი, თუ $\operatorname{Im} f = Ker\, g$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ ეპიმორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ მონომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$..

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$..

მაგალითები

1. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = 2,\ f(1) = 1$).

2. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_n \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = n,\ f(1) = 1$).

3. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_4 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = 2,\ f(1) = 1$).

3'. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_2 \times Z_2 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = (1,0),\ f(1,0) = 0,\ f(0,1) = 1$).
მიაქციეთ ყურადღება, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ და $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ (კოორდინატობრივი შეკრებით) ორივე 4 ელემენტიანი, მაგრამ ერთმანეთისგან განსხვავებული ჯგუფია. ეს ფენომენი დასაბამს აძლევს გაფართოებათა თეორიას.

5. ფაქტორჯგუფი

ვთქვათ, A აბელის ჯგუფია, ხოლო $B \subset A$ მისი ქვეჯგუფი. შემოვიტანოთ A-ში ასეთი მიმართება: $a \sim b$ თუ $a - b \in B$.

თეორემა. ეს ექვივალენტობის მიმართებაა.

A/B იყოს შესაბამისი ფაქტორსიმრავლე. შემოვიტანოთ ამ ფატორსიმრავლეში ასეთი შეკრების ოპერაცია: ნებისმიერი ორი ექვივალენტობის კლასისათვის $\alpha, \alpha' \in A/B$ განვმარტოთ

$$\alpha + \alpha' := cl(a + a')$$

აქ $a \in \alpha,\ a' \in \alpha'$ ამ ექვივალენტობის კლასებიდან ამორჩეული ნებისმიერი ელემენტებია, ხოლო $cl(x)$ აღნიშნავს $x \in A$ ელემენტის ექვივალენტობის კლასს ფაქტორსიმრავლეში A/B.

თეორემა. ეს ოპერაცია კორექტულია და აქცევს ფაქტორსიმრავლეს A/B აბელის ჯგუფად.

ამ ჯგუფს ფატორჯგუფი ქვია.
განმარტება. $f: A \to B$ ჰომომორფიზმის კობირთვი $Co\ker f$ ეწოდება ფაქტორჯგუფს $B/\operatorname{Im} f$.

მაგალითები

1. ააგეთ იზომორფიზმი $Z/2Z$ ფაქტორჯგუფსა და Z_2-ს შორის.

2. ააგეთ იზომორფიზმი Z/nZ ფაქტორჯგუფსა და Z_n-ს შორის.

3. ნეტა რა არის R/Z?

4. ჰომომორფიზმისთვის $f: Z \to Z,\ f(1) = 5$ აღწერეთ $Ker\, f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

5. ჰომომორფიზმისთვის $f: A \to A \times B,\ f(a) = (a, 0)$ აღწერეთ $Ker\, f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

6. ჰომომორფიზმისთვის $f: Z_2 \to Z_4,\ f(1) = 2$ აღწერეთ $Ker\, f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

რგოლები და ველები

განმარტება. რგოლი ეწოდება სიმრავლეს R აღჭურვილს ორი ოპერაციით, “შეკრებითა” და “გამრავლებით” $a + b,\ a \cdot b$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ აქსიომებს

1. (R, +) კომუტატური ჯგუფია;
2. შეკრება და გამრავლება დაკავშირებულნი არიან დისტრიბუციულობის კანონებით: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3. გამრავლება ასოციატურია: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

რგოლს ჰქვია *ერთეულიანი*, თუ დამატებით სრულდება აქსიომა
4. არსებობს ელემენტი $e \in R$, რომელიც გამრავლების მიმართ ნეიტრალურ ელემნტს წარმოადგენს: $a \cdot e = e \cdot a = a$;

რგოლს ჰქვია *კომუტატური*, თუ დამატებით სრულდება პირობა
5. $a \cdot b = b \cdot a$.

განმარტება. რგოლს $(R, +, \cdot)$ ეწოდება ველი, თუ ის ერთეულიანია, კომუტატურია და ყოველ არანულოვან ელემენტს გააჩნია შებრუნებული, ანუ $\forall\, a \neq 0 \in R\ \exists\, \hat{a} \in R$ ი.რ. $a \cdot \hat{a} = e$.

მაგალითები.
1. $(Z, +, \cdot)$ რგოლია, მაგრამ არ არის ველი.
2. $(Q, +, \cdot)$ ველია.
3. Z_4 რგოლია შემდეგი ოპერაციების მიმართ:

+	0	1	2	3
0	0	1	1	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

მაგრამ არ არის ველი:
4. Z_3 ველია.
5. **კომპლექსურ რიცხვთა ველი.** $R^2 = \{(a,b),\ a,b \in R\}$ შემდეგი ოპერაციებით
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$
ველია.

განმარტება. R რგოლის არანულოვან ელემენტს a ჰქვია 0-ის გამყოფი, თუ არსებობს არანულოვანი $b \in R$ ისეთი, რომ $a \cdot b = 0$. რგოლს ჰქვია უნულგაყოფო, თუ მას ნულის გამყოფები არ აქვს.

მაგალითები.
1. Z და Q უნულგამყოფო რგოლებია.
2. Z_4- ს აქვს ნულის გამყოფი: $2 \cdot 2 = 0$.

თეორემა. ველს არ შეიძლება ჰქონდეს ნულის გამყოფები.

თეორემა. Z_n უნულგამყოფოა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც n მარტივია.

თეორემა. Z_n ველია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც n მარტივია.

ამოცანები

1. 2+4 Z_5-ში არის
(ა) 6 (ბ) 0 (გ) 1 (დ) 3

2. Z_6-ში 4-ის მოპირდაპირე (შეკრების მიმართ) არის
(ა) 6 (ბ) 0 (გ) 1 (დ) 2

3. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z-ის ქვეჯგუფია
(ა) ნატურალური რიცხვები (ბ) კენტი რიცხვები
(გ) 3-ის ჯერადი რიცხვები (დ) სრული კვადრატები

4. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z-ის ქვეჯგუფია
(ბ) დადებითი რიცხვები (ბ) უარყოფითი რიცხვები
(გ) 0 (დ) 100-ზე ნაკლები რიცხვები

5. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z_4-ის ქვეჯგუფია
(ა) {1,2,3} (ბ) {0,1,2} (გ) {2,4} (დ) {0,2}

6. ამ ასახვათაგან $f: R \to R$ რომელია ჰომომორფიზმი
(ა) $f(x) = x^2$ (ბ) $f(x) = \sin x$ (გ) $f(x) = 2^x$ (დ) $f(x) = 5x$

7. (2,4) და (1,3) კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლია
(ა) (2,12) (ბ) (-10,10) (გ) (10,-10) (დ) (14,10)

8. (0,1) კომპლექსური რიცხვის კვადრატია
(ა) (0,-1) (ბ) (1,0) (გ) (1,1) (დ) (-1,0)

9. (0,1) კომპლექსური რიცხვის შებრუნებულია
(ა) (1,0) (ბ) (0,0) (გ) (1,1) (დ) (0,-1)

10. ამ რგოლთაგან რომელი არ არის ველი
(ა) რაციონალური რიცხვები Q (ბ) მთელი რიცხვები Z
(გ) ნამდვილი რიცხვეები R (დ) კომპლექსური რიცხვები C

11. რომელია ამ რგოლთაგან ველი
(ა) Z_4 (ბ) Z_3 (გ) Z_6 (დ) Z

12. რომელია ამ რგოლთაგან უნულგამყოფო

(ა) Z_4 (ბ) Z_8 (გ) Z_6 (დ) Z

13. ამ რგოლთაგან რომელს აქვს 0-ის გამყოფები
(ა) Z_2 (ბ) Z_3 (გ) Z_6 (დ) Z

14. $3 \cdot 4$ Z_5-ში არის
(ბ) 12 (ბ) 2 (გ) 0 (დ) 3

15. Z_5-ში 4-ის შებრუნებული (გამრავლების მიმართ) არის
(ა) 0,25 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 3

16. Z_6-ში 0-ის გამყოფია
(ა) 3 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

17. Z_7 ში 2-ის მოპირდაპირე შეკრების მიმართ არის
(ა) -2 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

18. Z_7 ში 2-ის მოპირდაპირე გამრავლების მიმართ არის
(ა) 0.5 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

19. Z_7 ში 3 5 არის
(ა) 0 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

20. Z_7 ში 3:2 არის
(ბ) 0 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5