თორნიკე ქადეიშვილი

სიმპლექსური კომპლექსი

ალგებრულ ტოპოლოგიაში უფრო მეტი წარმატებით ხერხდება "კარგი" ტოპოლოგიური სივრცეების შესწავლა. ეს "კარგი" სივრცეები ორი ტიპისაა: ე.წ. *მრავალნაირობები* და *პოლიედრები.*

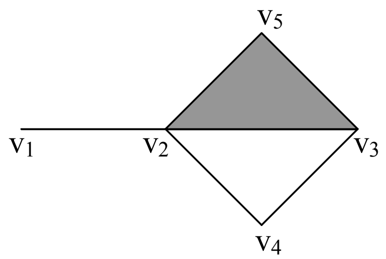
პირველი "კარგი" ტიპი მრავალნაირობა არის ტოპოლოგიური სივრცე რომელიც ლოკალურად გამოიყურება როგორც ევკლიდური სივრცე R^n. უფრო ზუსტად, ტოპოლოგიური სივრცე M არის n-განზომილებიანი მრავალნაირობა, თუ მისი ყოველი წერტილისათვის $x \in M$ არსებობს ღია მიდამო $x \in U \subset M$ რომელიც ჰომეომორფულია R^n-ის ან, რაც იგივეა, მისი რაიმე ბმული ღია ქვესიმრავლისა.

1-მრავანაირობათა მაგალითებია: ღერძი R^1, ინტერვალი (0,1), წრეწირი S^1.

2-მრავანაირობათა მაგალითებია სიბრტყე R^2, ღია დისკი $D^2 - S^1$, სფერო S^2, ტორი $T^2 = S^1 \times S^1$.

მეორე ტიპი "კარგი" სივრცეებისა არის ე.წ. პოლიედრები, სხვა ტერმინია *სიმპლექსური კომპლექსები.* ეს არის ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აშენებულია სტანდარტული აგურებისგან სიმპლექსებისგან. 1-განზომილებიანი სიმპლექსია წერტილი, 2-განზომილებიანი მონაკვეთი, 2-განზომილებიანი სამკუთხედი, 3-განზომილებიანი ტერაედრი, და ა.შ.

პოლიედრის მაგალითია ეს ტოპოლოგიური სივრცე



მისი აგებისას გამოყენებულია შემდეგი აგურები:

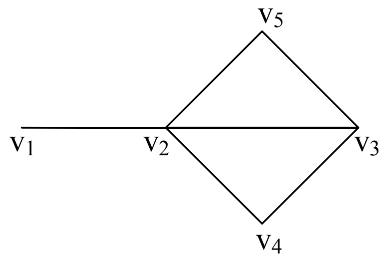
5 წერტილი $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;
6 მონაკვეთი $\{(v_1v_2),(v_2v_3),(v_2v_4),(v_3v_4),(v_2v_5),(v_3v_5)\}$;
1 სამკუთხედი $\{(v_2v_3v_5)\}$.

ამ სამშენებლო მასალას უნდა ახლდეს პროექტი, აღწერა, როგორ უნდა დაკავშირდეს ეს ელემენტები ერთმანეთთან. ჩვენს შემთხვევაში პროექტი, სამშენებლო ინსტრუქცია, ასეთია:

განალაგეთ წერტილები (წვეროები, 0-სიმპლექსები) v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. როგორ ამას მნიშვნელობა არ აქვს, ჩვენ ხომ ტოპოლოგიაში ვართ და არა გეომეტრიაში,

ფორმას და ზომებს მნიშვნელობა არ აქვს. წარმოიდგინეთ, რომ მონაკვეთები, სამკუთხედები და სხვა სამშენებლო აგურები რეზინისაა და მათი გაჭიმვა-შეკუმშვა შეიძლება.

ამის შემდეგ პირველი მონაკვეთი (წიბო, 1-სიმპლექსი) v_1v_2 ერთი ბოლოთი მიამაგრეთ v_1 წვეროს, მეორე კი v_2 წვეროს. ასე გააგრძელეთ დანარჩენი 1-სიმპლექსების ჩამაგრება. შედეგად მივიღებთ ასეთ კარკასს



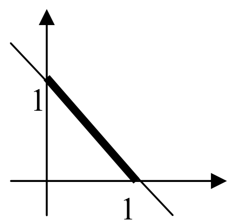
ახლა ამ კარკასში ჩავამაგროთ დარჩენილი 2-განზომილებიანი აგური სამკუთხედი (წახნაგი, 2-სიმპლექსი) $(v_2v_3v_5)$ აი ასე: ამ სამკუთხედის შესაბამისი გვერდი მივამაგროთ უკვე კარკასში ჩადგმულ 1-სიმპლექსს v_2v_3, მეორე გვერდი 1-სიმპლექსს v_2v_5, მესამე გვერდი 1-სიმპლექსს v_3v_5, და პოლიედრიც აშენდა!

დროა ამ ყველაფრის ფორმალიზებისა.

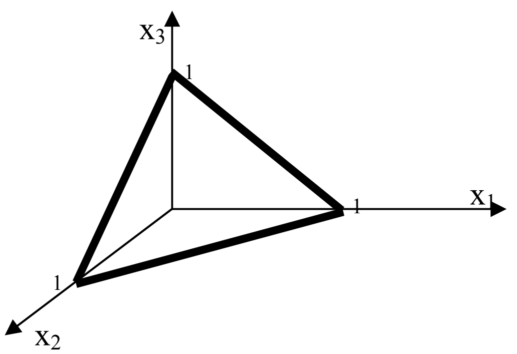
განმარტება. სტანდარტული n სიმპლექსი Δ^n ეწოდება R^{n+1}-ის ქვესიმრავლეს

$$\Delta^n = \{(x_1,...,x_{n+1}) \in R^{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1, \quad x_k \geq 0, \ k = 1,...,n+1\}.$$

კერძოდ



$$\Delta^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2, \ x_1 + x_2 = 1, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}$$



$$\Delta^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0\}$$

სამშენებლო პროექტის ფორმალიზებაა შემდეგი

განმარტება. *აბსტრაქტული სიმპლექსური კომპლექსი* ეწოდება სიმრავლეს V და მის სასრულ ქვესიმრავლეთა (სიმპლექსების) ოჯახს $S=\{\delta\subset V\}$ ისე, რომ სრულდება ორი პირობა

$$(i)\ v\in V\Rightarrow\{v\}\in S,\quad (ii)\ \sigma\in S,\tau\subset\sigma\Rightarrow\tau\in S.$$

V სიმრავლის ელემენტებს (V,S) სიმპლექსური კომპლექსის *წვეროებს* უწოდებენ, გამოყოფილ სასრულ ქვესიმრავლეებს *სიმპლექსებს.* სიმპლექსის $\sigma\in S$ განზომილება ერთით ნაკლებია მასში ელემენტების რაოდენობაზე

$$\dim\sigma=card(\sigma)-1.$$

ამრიგად წვეროები 0-სიმპლექსებია. თუ $\sigma\in S$ და $\tau\subset\sigma$, მაშინ τ ს ქვია σ ს *წახნაგი.*

ამ ტერმინებში სიმპლექსური კომპლექსის განმარტებაში მოცემული აქსიომები ასე ჟღერს:
(i) ყოველი წვერო სიმპლექსია,
(ii) ყოველი სიმპლექსის წახნაგი ასევე სიმპლექსია.

სიმპლექსური კომპლექსის ყველა n-სიმპლექსის სიმრავლეს

$$V_n=\{\sigma\in S,\dim\sigma=n\}$$

ქვია *n-სკელეტონი* (ჩონჩხი). ცხადია $V_0=V$.

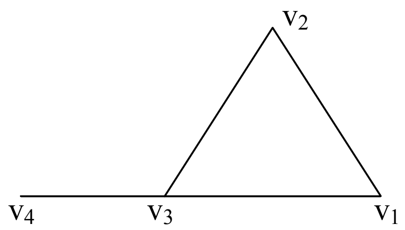
სიმპლექსური კომპლექსების ასახვა $f:(V,S)\to(V',S')$ ეწოდება წვეროების ასახვას $f:V_0\to V_0'$ რომელიც ინახავს სიმპლიციალურ სტრუქტურას, ანუ სიმპლექსი გადაჰყავს სიმპლექსში, ანუ

$$\sigma\in S\Rightarrow f(\sigma)\in S'.$$

ყოველ სიმპლექსურ კომპლექსს (V,S) შეესაბამება მისი *რეალიზაცია,* პოლიედრი $|V|$ - ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც მიიღება სტანდარტული Δ^n სიმპლექსების შეწებებით (V,S)-ის სიმპლიციალური სტრუქტურის მიხედვით, აი დაახლოებით ისე, როგორც ზემოთ მოყვანილ მაგალითში იყო. სიმპლიციალური ასახვა იწვევს რეალიზაციების უწყვეტ ასახვას და რეალიზაცია ხდება ფუნქტორი სიმპლიციალური კომპლექსების კატეგორიიდან ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიაში.

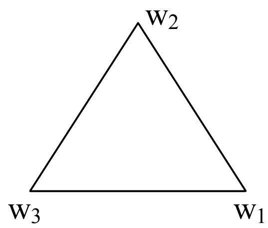
მაგალითები

1. ქართული ასო ნ *ჰომეომორფულია* ასეთი პოლიედრისა



მისი სიმპლექსური კომპლექსია
$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$V_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$.

2. იგივე ქართული ასო ნ *ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია* ასეთი პოლიედრისა



მისი სიმპლექსური კომპლექსია
$W_0 = \{w_1, w_2, w_3\}$
$W_1 = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_2)\}$.

3. ასო ნ-ს ზემოთ აღწერილი ორი სიმპლექსური მოდელების წვეროების ასახვა

$$f : W \to V,\ f(w_1) = v_3,\ f(w_2) = v_2,\ f(w_3) = v_3$$

სიმპლიციალური ასახვაა, ხოლო

$$g : W \to V,\ g(w_1) = v_3,\ g(w_2) = v_2,\ g(w_3) = v_4$$

- არა (რატომ?).

სავარჯიშოები

1. დახაზეთ პოლიედრი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი სიმლექსური კომპლექსის რეალიზაციას
$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
$V_1 = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_4, v_7)\}$
$V_2 = \{(v_3, v_4, v_5), (v_4, v_5, v_6), (v_4, v_5, v_7), (v_4, v_5, v_6), (v_5, v_6, v_7), (v_4, v_6, v_7)\}$
$V_3 = \{(v_4, v_5, v_6, v_7)\}$

2. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრეწირის S^1.

3. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრის (დისკის) D^2.

4. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია სფეროსი S^2.

5. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ბირთვის D^3.

6. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსები, რომელთა რეალიზაციები ჰომეომორფულია ამ ლათინური ასოებისა

A B C D E F G H I J K L M N P Q R S T V W X Y Z .

რომელი ასოებია ერთმანეთის ჰომეომორფული? რამდენი ჰომეომორფიზმის კლასია ამ ალფაბეტში? გააკეთეთ იგივე ქართული ასოებისთვისაც.

7. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსები, რომელთა რეალიზაციები ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია ამ ლათინური ასოებისა

A B C D E F G H I J K L M N P R S T V W X Y Z .

რომელი ასოებია ერთმანეთის ჰომოტოპირად ექვივალენტური? რამდენი ჰომოტოპიის ტიპია ამ ალფაბეტში? გააკეთეთ იგივე ქართული ასოებისთვისაც.

8. ჩამოთვალეთ ის ლათინური ასოები, რომელთაც აქვთ 0-ის, 1-ის და 8-ის ჰომოტოპიური ტიპი.

9. ჩამოთვალეთ ის ქართული ასოები, რომელთაც აქვთ 0-ის, 1-ის და 8-ის ჰომოტოპიური ტიპი.

10. გაიხსენეთ ასო ნ-ს ზემოთ აღწერილი ორი სიმპლექსური მოდელი V და W. აჩვენეთ, რომ მათი წვეროების ნებისმიერი ასახვა $V \to W$ ავტომატურად სიმპლიციალურია.