თორნიკე ქადეიშვილი

ჰომოტოპიის თეორია

ჰომოტოპია

განმარტება. ორ ასახვას $f,g:X\to Y$ ეწოდება ჰომოტოპიური თუ არსებობს უწყვეტი ასახვა (ჰომოტოპია) $F:X\times I\to Y$ ისეთი, რომ

$$F(x,0)=f(x),\ F(x,1)=g(x).$$

აღნიშვნა $f\underset{F}{\sim}g$.

სავარჯიშო. ნებისმიერი ორი ასახვა $f,g:X\to R$ ჰომოტოპიურია. ჰომოტოპიას ახორციელებს ასახვა $F:X\times I\to R,\ F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x).$ შეამოწმეთ, რომ $f\underset{F}{\sim}g.$

სავარჯიშო. ვთქვათ X წრფივადბმული სივრცეა, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შეერთდეს წირით, ანუ

$$\forall x_*,y_*\in X\ \exists\alpha:I\to X,\ \alpha(0)=x_*,\alpha(1)=y_*\ .$$

აჩვენეთ, რომ ამ შემთხვევაში მუდმივი ასახვები $f:X\to X,\ f(x)=x_*$ და $g:X\to X,\ g(x)=y_*$ ჰომოტოპიურია. (მე მგონია ჰომოტოპია $F(x,t)=\alpha(t)$ გამოდგება.)

თეორემა. ჰომოტოპია ექვივალენტობის მიმართებაა.

დამტკიცება.
რეფლექსურობა: $f\underset{F}{\sim}f$ ჰომოტოპიით $F(x,t)=f(x).$
სიმეტრიულობა: $f\underset{F}{\sim}g\ \Rightarrow\ g\underset{G}{\sim}f$, სადაც $G(x,t)=F(x,1-t).$
ტრანზიტულობა: $f\underset{F}{\sim}g,\ g\underset{G}{\sim}h\Rightarrow f\underset{H}{\sim}h$, სადაც

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ G(x,2t-1), & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}.$$

$Map(X,Y)$ აღნიშნავს ყველა უწყვეტი ასახვის სიმრავლეს X-დან Y-ში

$$Map(X,Y)=\{f:X\to Y\}.$$

ჰომოტოპია ექვივალენტობის მიმართებაა ამ სიმრავლეში.

$[X,Y] = Map(X,Y)/\sim$ აღნიშნავს ექვივალენტობის (ჰომოტოპიის) კლასების სიმრავლეს.

ყოველ ასახვას $f \in Map(X,Y)$ შესაბამება მისი ჰომოტოპიის კლასი $[f] \in [X,Y]$ რაც აჩენს ასახვას

$$Map(X,Y) \to [X,Y].$$

თეორემა. თუ მოცემული უწყვეტი ასახვებისათვის

$$U \xrightarrow{h} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{k} V$$

გვაქვს $f \underset{F}{\sim} g$, მაშინ $fh \sim gh$ და $kf \sim kg$.

დამტკიცება. $fh \underset{H}{\sim} gh,\ H(u,t) = F(h(u),t)$, და $kf \underset{G}{\sim} kg,\ G(x,t) = kF(x,t)$.

კატეგორია $hoTop$ *

კატეგორიის Top ობიექტებია ტოპოლოგიური სივრცეები, ხოლო მორფიზმები $Mor_{Top}(X,Y) = Map(X,Y)$. ახლა განვმარტოთ ახალი კატეგორია $hoTop$ (ჰომოტოპიზირებული Top): $ob(hoTop) = ob(Top)$, ხოლო $Mor_{hoTop}(X,Y) = [X,Y]$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ $hoTop$ კორექტულად განმარტებული კატეგორიაა. აქ საჭიროა განიმარტოს კომპოზიცია "ახალი" მორფიზმებისა $[f] \in [X,Y],\ [g] \in [Y,Z]$. განვმარტოთ კომპოზიცია ასე: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, მაგრამ აქ კორექტულობა იქნება საჩვენებელი.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ კატეგორიაში $hoTop$ ჰომოტოპიურად ექვივალენტურობა იზომორფულობას ნიშნავს. (ტრივიალურია, უბრალოდ კარგად გაიაზრეთ, რას ნიშნავს ეს ცნებები).

ჰომოტოპიური ექვივალენტობა

განმარტება. უწყვეტ ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება *ჰომეომორფიზმი* თუ არსებობს შებრუნებული უწყვეტი ასახვა $g : Y \to X$ ისეთი, რომ

$$f \circ g = id_Y \quad \text{და} \quad g \circ f = id_X.$$

განმარტება. X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეები *ჰომეომორფულია*, თუ არსებობს ჰომეომორფიზმი $f : X \to Y$. აღნიშვნა $X \approx Y$.

განმარტება. უწყვეტ ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება *ჰომოტოპიური ექვივალენტობა* თუ არსებობს მისი ჰომოტოპიური შებრუნებული უწყვეტი ასახვა $g : Y \to X$ ისეთი, რომ $f \circ g \sim id_Y$ და $g \circ f \sim id_X$

სავარჯიშო. ყოველი ჰომეომორფიზმი ჰომოტოპიური ექვივალენტობაა. (ასევე ტრივიალურია: თუ $\beta=\alpha$, მაშინ $\beta \underset{F}{\sim} \alpha$, $F(x,t)=f(x)$.)

მაგრამ პირიქით არა. მაგალითად, რომ $f:R\to pt$ არ არის ჰომეომორფიზმი, მაგრამ არის ჰომოტოპიური ექვივალენტობაა: $g:pt\to R$ იყოს ასახვა $g(pt)=0\in R$, მაშინ $f\circ g=id_{pt}$ ხოლო $g\circ f \underset{F}{\sim} id_X$ ასეთი ჰომოტოპიით $F(x,t)=(1-t)x.$

განმარტება. X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეები *ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია*, თუ არსებობს ჰომოტოპიური ექვივალენტობა $f:X\to Y$. აღნიშვნა $X\sim Y$. სხვა ტერმინოლოგიით X და Y-ს აქვთ ერთნაირი *ჰომოტოპიური ტიპი.*

თეორემა. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჰომოტოპიური ექვივალენტობა ექვივალენტობის მიმართებაა.

სავარჯიშო. დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

განმარტება. ტოპოლოგიურ სივრცეს X ქვია *მოჭიმვადი*, თუ $X\sim pt$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ X მოჭიმვადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $id_X:X\to X$ ჰომოტოპიურია მუდმივი ასახვისა $c:X\to X$, $c(x)=x_*$.

რეტრაქცია*

განმარტება. ქვესივრცეს $A\subset X$ ეწოდება X-ის რეტრაქტი, თუ არსებობს უწყვეტი ასახვა $r:X\to A$ ი.რ. ნებისმიერი წერტილისთვის $a\in A$ გვაქვს $r(a)=a.$ სხვაგვარად, თუ $i:A\to X$ აღნიშნავს ჩადგმას $A\subset X$, მაშინ $r\circ i=id_A$.

განმარტება. რეტრაქციას

$$A \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} X$$

ეწოდება დეფორმაციული, თუ $r\circ i=id_A$ ტოლობასთან ერთად დამატებით სრულდება $i\circ r=id_X$

ფარდობითი ჰომოტოპია

ვთქვათ $A\subset X$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე (ქვესიმრავლე ინდუცირებული ტოპოლოგიით), $f,g:X\to Y$ და ვთქვათ ეს ასახვები ერთმანეთს ემთხვევა A-ზე: $f\,|\,A=g\,|\,A$.

განმარტება. ვიტყვით, რომ $f\sim g\; rel\, A$ თუ არსებობს $F:X\times I\to Y$ ისთი, რომ $f \underset{F}{\sim} g$ და $F(a,t)=F(a,0)$, $\forall\; a\in A, t\in I$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ ეს მიმართებაც ექვივალენტობაა.

ფარდობითი ჰომოტოპიურობის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა $A = x_* \in X$. ამ შემთხვევაში $f \sim g\, rel\, x_*$ თუ $F(x_*, t) = F(x_*, 0) = F(x_*, 1) = f(x_*) = g(x_*)$.

ტოპოლოგიური სივრცეების წყვილთა კატეგორია

ამ კატეგორიის ობიექტები იყოს ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილები (სივრცე-ქვესივრცე) (X, A), $A \subset X$, ხოლო წყვილთა მორფიზმი $f : (X, A) \to (Y, B)$ ასე იმარტება $f : X \to Y$, $f(A) \subset B$.

ფარდობითი ჰომოტოპია $f \sim g\ rel\, A$ მორფიზმთა სიმრავლეში $Map((X, A), (Y, B))$ განმარტავს ექვივალენტობას და ე.ი. ფაქტორსიმრავლეს (ფარდობითი ჰომოტოპიური კლასების სიმრავლეს $[(X, A), (Y, B)]$.

მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა ე.წ. პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორია. აქ ობიექტებია წყვილები (სივცე-დაფიქსირებული წერტილი) (X, x_*), $x_* \subset X$, ხოლო მორფიზმი $f : (X, x_*) \to (Y, y_*)$ არის ასახვა $f : X \to Y$, $f(x_*) = y_*$. ფარდობითი ჰომოტოპია $f \sim g\ rel\, x_*$ განმარტავს ფარდობითი ჰომოტოპიური კლასების სიმრავლეს $[(X, x_*), (Y, y_*)]$.

ფუნდამენტური ჯგუფი $\pi(X, x_*)$

$\pi(X, x_*)$ როგორც სიმრავლე

ვთქვათ (X, x_*) პუნქტირებული ტოპოლოგიური სივრცეა. როგორც ყოველთვის, $I = [0,1]$, ხოლო მისი საზღვარი აღვნიშნოთ ასე $\dot{I} = \{0,1\}$. განვმარტოთ სიმრავლე

$$\pi(X, x_*) = [(I, \dot{I}), (X, x_*)]$$

ამით სიმრავლე $\pi(X, x_*)$ კორექტულადაა განმარტებული. მაინც დავაზუსტოთ.

ასახვას $\alpha : I \to X$ ჰქვია გზა X-ში.

ასახვა $\alpha : (I, \dot{I}) \to (X, x_*)$ დამატებით აკმაყოფილებს პირობას $\alpha(0) = \alpha(1) = x_*$, მას ჰქვია მარყუჟი (X, x_*)-ში.

ორი მარყუჟი $\alpha, \beta : (I, \dot{I}) \to (X, x_*)$ ფარდობითად ჰომოტოპიურია თუ არსებობას ასახვა (ჰომოტოპია) $F : I \times I = I^2 \to X$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$F(s, 0) = \alpha(s), \quad F(s, 1) = \beta(s), \quad F(0, t) = F(1, t) = x_*.$$

საბოლოოდ, $\pi(X,x_*)=[(I,\dot{I}),(X,x_*)]$ არის მარყუჟთა ფადობითი ჰომოტოპიის კლასები. მისი ელემენტებია მარყუჟთა კლასები $[\alpha]\in\pi(X,x_*)$.

მრავალფეროვნებისთვის მოვიყვანთ $\pi(X,x_*)$-ის კიდევ ერთ განმარტებას. როგორც ყოველთვის, S^1 იყოს წრეწირი (ერთგანზომილებიანი სფერო, ხოლო $s_*\in S^1$ მისი რომელიმე ფიქსირებული წერტილი. მაშინ

$$\pi(X,x_*)=[(S^1,s_*),(X,x_*)]\,.$$

როგორმე თვითონ დაინახეთ, რომ $\pi(X,x_*)$ სიმრავლის ეს ორი განმარტება მონაკვეთის და წრეწირის ტერმინებში ერთმანეთს ემთხვევა.

$\pi(X,x_*)=[(I,\dot{I}),(X,x_*)]$ როგორც ჯგუფი

$\pi(X,x_*)$ არ არის მხოლოდ სიმრავლეა, ის ჯგუფია ოპერაციის მიმართ, რომელსაც ახლა განვმარტავთ.

ყოველი მარყუჟი $\alpha:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ არის გზა, რომელიც იწყება $s=0$ მომენტში წერტილში x_* , 1 წუთის განმავლობაში ($s=0$ მომენტიდან $s=1$ მომენტამდე) შემოირბენს გარკვეულ ტრაექტორიას და $s=1$ მომენტში დაბრუნდება ისევ x_* წერტილში.

ახლა ვთქვათ გვაქვს ორი მარყუჟი $\alpha,\beta:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$. ჩვენი მიზანია განვმარტოთ მათი “ნამრავლი”, ახალი მარყუჟი $\beta\cdot\alpha$. უხეშად ეს ასე ავხსნათ: $\beta\cdot\alpha$-მ პირველი ნახევარი წუთის განმავლობაში შემოიაროს α და მეორე ნახევარი წუთის განმავლობაში შემოიაროს β. უფრო ზუსტად,

$$\beta\cdot\alpha=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\le s\le\dfrac{1}{2}\\ \beta(2s-1), & \dfrac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}.$$

მარყუჟთა გამრავლება განმარტავს გამრავლებას $\pi(X,x_*)$-ში: ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის $[\alpha],[\beta]\in\pi(X,x_*)$ განვმარტოთ

$$[\beta]\cdot[\alpha]=[\beta\cdot\alpha].$$

ეს გამრავლება გადააქცევს სიმრავლეს $\pi(X,x_*)$-ს ჯგუფად, მაგრამ ამისათვის ჯერ უამრავი რაღაცის დამტკიცება დაგვჭირდება.

კორექტულობა. კლასების ნამრავლი არ არის დამოკიდებული კლასებიდან მარყუჟების ამორჩევაზე, ანუ, თუ $\alpha\sim\alpha'\ rel\,\dot{I}$ და $\beta\sim\beta'\ rel\,\dot{I}$, მაშინ

$\beta\cdot\alpha\sim\beta'\cdot\alpha'\ rel\,\dot{I}$ ანუ $[\beta\cdot\alpha]=[\beta'\cdot\alpha']$. დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.

ასოციატურობა. საზოგადოდ მარყუჟების ნამრავლი არ არის ასოციატური - $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\neq(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha$, მაგრამ $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\sim(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha\ rel\,\dot{I}$, რაც ნიშნავს, რომ $[\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)]=[(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha]$. დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.

ერთეული. ნეიტრალური ელემენტის როლს ასრულებს მუდმივი მარყუჟის ჰომოტოპიის კლასი; აღვნიშნოთ $\varepsilon:(I,\dot{I})\to(X,x_*),\ \varepsilon(s)=x_*$. კვლავ, ეს არ არის ნეიტრალური ელემენტი მარყუჟთა გამრავლებისთვის: $\varepsilon\cdot\alpha\neq\alpha,\ \alpha\cdot\varepsilon\neq\alpha$, მაგრამ $\varepsilon\cdot\alpha\sim\alpha\ rel\,\dot{I},\ \alpha\cdot\varepsilon\sim\alpha\ rel\,\dot{I}$, რაც ნიშნავს, რომ $[\varepsilon]\cdot[\alpha]=[\alpha],[\alpha]\cdot[\varepsilon]=[\alpha]$. დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.

მოპირდაპირე. ყოველი მარყუჟისათვის $\alpha:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ განვმარტოთ მარყუჟი $\alpha^{-1}:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ ასე: $\alpha^{-1}(s)=\alpha(1-s)$. ისევ და ისევ, საზოგადოდ $\alpha\cdot\alpha^{-1}\neq\varepsilon$, მაგრამ $\alpha\cdot\alpha^{-1}\sim\varepsilon\ rel\,\dot{I}$, რაც იძლევა $[\alpha]\cdot[\alpha^{-1}]=[\varepsilon]$. ანალოგიურად, $[\alpha^{-1}]\cdot[\alpha]=[\varepsilon]$. ეს კი ნიშნავს, რომ $[\alpha]$ ჰომოტოპიის კლასის მოპირდაპირეს როლს ასრულებს $[\alpha^{-1}]$, ანუ $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$. დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.

თუ ამას ყველაფერს დავამტკიცებთ (დავწერთ შესაბამის ჰომოტოპიებს) საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $\pi(X,x_*)$ ჯგუფია.

დამოკიდებულება წერტილის არჩევაზე

საზოგადოდ ფუნდამენტური ჯგუფი $\pi(X,x_*)$ დამოკიდებულია $x_*\in X$ წერტილის არჩევაზე, ანუ თუ $x_*\neq y_*$, მაშინ შესაძლებელია $\pi(X,x_*)\neq\pi(X,y_*)$, მაგრამ

თეორემა. თუ X წრფივადბმული სივრცეა, მაშინ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(X,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

დამტკიცება. წრფივადბმულობის გამო არსებობს x_* და y_* წერტილების შემაერთებელი გზა $\gamma:I\to X,\gamma(0)=x_*,\gamma(1)=y_*$. დაგვჭირდება აგრეთვე y_* და x_* წერტილების შემაერთებელი გზა $\gamma^{-1}:I\to X,\gamma^{-1}(0)=y_*,\gamma^{-1}(1)=x_*$, რომელიც ასე შეიძლება განვმარტოთ: $\gamma^{-1}(s)=\gamma(1-s)$.

განვმარტოთ ორი ასახვა

$$\varphi:\pi(X,x_*)\to\pi(X,y_*),\ \ \psi:\pi(X,y_*)\to\pi(X,x_*)$$

ტოლობებით $\varphi([\alpha])=[\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1}]$, $\psi([\beta])=[\gamma^{-1}\cdot\beta\cdot\gamma]$. კვლავ გრძელი შემოწმება მოგვცემს, რომ ორივე ასახვა კორექტულად განმარტებული ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, ამასთან $\varphi\circ\psi=id_{\pi(X,y_*)}$ da $\psi\circ\varphi=id_{\pi(X,x_*)}$, რაც ნიშნავს, რომ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(X,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

ინდუცირებული ჰომომორფიზმი, ანუ ფუნქტორულობა

მოყვანილი კონსტრუქცია შეუთანადებს პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეს (X,x_*) მის ფუნდამენურ ჯგუფს $\pi(X,x_*)$. ახლა ვაჩვენებთ, რომ მეტიც, პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნებისმიერ ასახვა

$$f:(X,x_*)\to(Y,y_*)$$

აჩენს (ინდუცირებს) შესაბამის ფუნდამენტურ ჯგუფთა ჰომომრფიზმს

$$\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Y,y_*).$$

ეს $\pi(f)$ ასე იმარტება $\pi(f)([\alpha]=[f\circ\alpha]$.

აქ რაღაა შესამოწმებელი? კორექტულობა და ჰომომორფულობა.

ამას გარდა, ადვილი სანახავია, რომ $\pi(id_X)=id_{\pi(X,x_*)}$.

და კიდევ ერთი რამ: ორი უწყვეტი ასახვისათვის

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$$

კომპოზიციის შესაბამისი ჰომომორფიზმი არის ამ ასახვათა შესაბამისი ჰომომრფიზმების კომპოზიცია, ანუ

$$\pi(g\circ f)=\pi(g)\circ\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Z,z_*).$$

ეს ყველაფერი იმას ნიშნავს, რომ $\pi:Top_*\to Groups$ არის ფუნქტორი პუნქტირებული ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიიდან ჯგუფთა კატეგორიაში.

სავარჯიშო. ვთქვათ $f,g:(X,x_*)\to(Y,y_*)$ და $f\sim g\ rel\, x_*$, მაშინ

$$\pi(f)=\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Y,y_*).$$

სავარჯიშო. თუ (X,x_*) და (X,x_*) ჰომოტოპიურად ექვივალენტური პუნქტირებული სივრცეებია, მაშინ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(Y,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

სავარჯიშო. თუ X მოჭიმვადი სივრცეა, მაშინ ის ცალადბმულია, რაც მიშნავს, რომ $\pi(X, x_*) = 0$ (მაგრამ არაპირიქით, ამის მაგალითია ორგანზომილებიანი სფერო S^2).

გამოყენება ბრაუერის უძრავი წერტილის თეორემა

დავეყრდნობით ინტუიტიურ ფაქტს $\pi(S^1, s_*) = Z$ და ორგანზომილებიანი დისკის (წრის) მოჭიმვადობას $\pi(D^2, x_*) = 0$.

თეორემა 1. არ არსებობს წრის უწყვეტი რეტრაქცია მის საზღვარზე $r: D^2 \to S^1$.

დამტკიცება. ვთქვათ ასეთი რეტრაქცია არსებობს, ე.ი. გვაქვს ასახვა $r: D^2 \to S^1$ ისეთი, რომ კომპოზიცია $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$ არის id_{S^1}. ვიმოქმედოთ ამ დიაგრამაზე ფუნქტორით π

$$\pi(S^1) = Z \xrightarrow{\pi(i)} \pi(D^2) = 0 \xrightarrow{\pi(r)} \pi(S^1) = Z .$$

ჰომომორფიზმთა ეს კომპოზიცია ნულოვანია (რატომ?), რაც ეწინაამღდეგება პირობას $\pi(id_{S^1}) = id_Z$.

თეორემა 2. ყოველ უწყვეტ ასახვას $f: D^2 \to D^2$ აქვს უძრავი წერტილი, ანუ არსებობს ისეთი $x^* \in D^2$, რომ $f(x^*) = x^*$.

დამტკიცება. დავუშვათ ყოველი $x \in D^2$ წერტილისთვის $f(x) \neq x$. განვმარტოთ ასახვა $r: D^2 \to S^1$ ასე: შევაერთოთ წერტილი $f(x) \in D^2$ სხივით წერტილთან $x \in D^2$. $r(x)$ იყოს ამ სხივის წრეწირთან თანაკვეთის წერტილი. ცოტა დაფიქრდით, და დაინახავთ, რომ ეს r რეტრაქციაა, რაც ეწინააღმდეგება წინა თეორემას.