თორნიკე ქადეიშვილი

ზოგადი ტოპოლოგია

ასახვის უწყვეტობა

ტოპოლოგიის ცნება იძლევა საშუალებას განიმარტოს ასახვის უწყვეტობა მაქსიმალურად ზოგად სიტუაციაში.

ვთქვათ $f:X\to Y$ რაიმე ასახვაა. რა სტრუქტურით უნდა იყვნენ აღჭურვილი X და და Y სიმრავლეები, რომ შევძლოთ საუბარი f ასახვის უწყვეტობაზე?

გავიხსენოთ $f:R\to R$ ფუნქციის უწყვეტობის კლასიკური განმარტება.

განმარტება. ფუნქცია $f:R\to R$ უწყვეტია წერტილში $x\in R$ თუ

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0,\ \forall x'\ \ |x'-x|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x)|<\varepsilon\,.$$

ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი, თუ ის უწყვეტია განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

R-ის რა სტრუქტურებია გამოყენებული ამ განმარტებაში?

ეს არის: აბელის ჯგუფის სტრუქტურა (მონაწილეობს სხვაობა $x'-x$), ნორმა ($|x'-x|$), დალაგება ($|x'-x|<0$).

რამდენად აუცილებელია ეს სამივე სტრუქტურა ასახვის უწყვეტობის ცნების გასამარტად? ხომ არ შეიძლება X და Y საიმრავლეებზე ნაკლები სტრუქტურების მოთხოვნა?

მეტრულ სივრცე

განმარტება. სიმრავლეს X ეწოდება მეტრული სივრცე, თუ მოცემულია ასახვა - მეტრიკა $d:X\times X\to X$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

(1) $d(a,b)\geq 0,\ d(a,b)=0\Leftrightarrow a=b;$

(2) $d(a,b)=d(b,a);$

(3) $d(a,b)+d(b,c)\leq d(a,c).$

მაგალითები

1. $(R,d),\ d(a,b)=|a-b|.$

2. $(R^n,d),\ d((a_1,\ldots,a_n),(b,\ldots,b_n))=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}\,.$

3. დისკრეტული მეტრიკა (X, d_{disc}): $d_{disc}(a,b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$.

ღია სიმრავლეები მეტრულ სივრცეებში

განმარტება. მატრულ ხივრცეში (X,d) ღია დისკი ცენტრით $x \in X$ და რადიუსით $r > 0$ ეწოდება ქვესიმრავლეს $D(x,r) = \{x' \in X,\ d(x',x) < r\}$.

განმარტება. წერტილს $a \in A \subset X$ ეწოდება A ქვსიმრავლის შიგა წერტილი თუ $\exists r > 0,\ D(a,r) \subset A.$

განმარტება. მეტრული სივრცის ქვესიმრავლეს $A \subset X$ ეწოდება ღია, თუ მისი ყოველი წერტილი შიგაა.

თეორემა. $(X = R^n, d)$ მეტრულ სივრცეში
(1) $\varnothing$ და X ღია სიმრავლეებია;
(2) ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის $A_i \subset X,\ i \in I$ გაერთიანება $\bigcup_{i \in I} A_i$ ღიაა.
(3) ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის $A_i \subset X,\ i \in \{1,2,...,n\}$ თანაკვეთა $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ღიაა.

მაგალითი. აქ ოჯახის სასრულობა არსებითია, გააანალიზეთ ასეთი მაგალითი: (R,d)-ში $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}),\ n = 1,2,3,...$.

ჩაკეტილი სიმრავლეები მეტრულ სივრცეებში

განმარტება. მეტრული სივრცის ქვესიმრავლეს $F \subset X$ ეწოდება ჩაკეტილი, თუ მისი დამატება $X - F$ ღიაა.

თეორემა. $(X = R^n, d)$ მეტრულ სივრცეში
(1) $\varnothing$ და X ჩაკეტილი სიმრავლეებია;
(2) ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის $F_i \subset X,\ i \in I$ თანაკვეთა $\bigcap_{i \in I} F_i$ ჩაკეტილია.
(3) ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის $F_i \subset X,\ i \in \{1,2,...,n\}$ გაერთიანება $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ჩაკეტილია.

მაგალითი. აქ ოჯახის სასრულობა არსებითია, გააანალიზეთ ასეთი მაგალითი: (R,d)-ში $F_n = (-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}),\ n = 1,2,3,...$.

განმარტება. წერტილს $x \in F \subset X$ ეწოდება $F \subset X$ ქვესიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ $\forall r > 0 \;\; D(b,r) \bigcap F \neq \varnothing$.

თეორემა. ქვესიმრავლე $F \subset X$ ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის შეიცავს მის ყველა დაგროვების წერტილს.

ფუნქციათა უწყვეტობა მეტრულ სივრცეებში

განმარტება. (X, d_X) და (Y, d_Y) მეტრულ სივრცეთა ასახვას $f : X \to Y$ ვუწოდოთ უწყვეტი x წერტილში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \; \forall x' \in X \quad d_X(x', x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon .$$

ფუნქციას ეწდება უწყვეტი, თუ ის უწყვეტია განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

თუ $(X, d_X) = (R, d) = (Y, d_Y)$, მაშინ ეს განმარტება ემთხვევა კლასიკურს.

თეორემა. (X, d_X) და (Y, d_Y) მეტრულ სივრცეთა ასახვა $f : X \to Y$ უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y -ის ყოველი ღია ქვესიმრავლის წინასახე ღიაა X -ში.

ეს თეორემა განაპირობებს ტოპოლოგიური სივრცის ცნებას.

ტოპოლოგიური სივრცე

განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება წყვილს $(X, \{U_i\}_{i \in I})$, სადაც X სიმრავლეა, ხოლო $\{U_i\}_{i \in I}$ მის გარკვეულ ქვესიმრავლეთა ოჯახი (რომელთაც შემდგომ "ღია" სიმრავლეებს დავუძახებთ), ამასთან ეს ოჯახი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ აქსიომებს:

(1) $\varnothing$ და X "ღია" სიმრავლეებია;
(2) "ღია" სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის $A_i \subset X, \; i \in I$ გაერთიანება $\bigcup_{i \in I} A_i$ "ღიაა".
(3) "ღია" სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის $A_i \subset X, \; i \in \{1, 2, \dots, n\}$ თანაკვეთა $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ "ღიაა".

მაგალითები
1. დისკრეტული ტოპოლოგია $(X, \{\forall U \subset X\})$ (აქ ღიებად გამოცხადებულია X -ის ყველა ქვესიმრავლე);
2. ანტიდისკრეტული ტოპოლოგია $(X, \{\varnothing, X\})$, აქ მხოლოდ ორი ქვესიმრავლეა გამოცხადებული ღიად.

3. მეტრული ტოპოლოგია: ნებისმიერი მეტრული სივრცე ტოპოლოგიური სივრცეცაა, სადც ღიებად გამოცხადებულია მართლა ღია სიმრავლეები.

ტოპოლოგიური სივრცე (ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში)

განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება წყვილს $(X, \{F_i\}_{i\in I})$, სადაც X სიმრავლეა, ხოლო $\{F_i\}_{i\in I}$ მის გარკვეულ ქვესიმრავლეთა ოჯახი (რომელთაც შემდგომ "ჩაკეტილ" სიმრავლეებს დავუძახებთ), ამასთან ეს ოჯახი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ აქსიომებს:

(1) $\varnothing$ და X ჩაკეტილი სიმრავლეებია;
(2) ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის $F_i \subset X,\ i \in I$ თანაკვეთა $\bigcap_{i\in I} F_i$ ჩაკეტილია.
(3) ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის $F_i \subset X,\ i \in \{1,2,...,n\}$ გაერთიანება $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ჩაკეტილია.

თეორემა. ეს ორი განმარტება ექვივალენტურია.
დამტკიცება. ყოველი "ღია" სიმრავლისათვის მისი დამატება გამოვაცხადოთ "ჩაკეტილად". თუ "ღიები აკმაყოფილებდნენ თავის აქსიომებს, მაშინ ასე განმარტებლი "ჩაკეტილები" თავის აქსიომებს დააკმაყოფილებენ, და პირიქით. ხომ გაიგეთ? მეტი ახსნა არც არის საჭირო, ზუსტი დამტკიცება თვითონ ჩაატარეთ.

ინტერიორი

ვთქვათ $(X, \{U_i\}_{i\in I})$ ტოპოლოგიური სივცეა და $A \subset X$ მისი ქვესიმრავლე.
განმარტება. A-ს ინტერიორი $\operatorname{int}(A)$ (ენა არ მიბრუნდება "შიგანი" ვუწოდო) ეწოდება
1. A-ს უდიდეს ღია ქვესიმრავლეს;
2. A-ში შემავალ ყველა ღია ქვესიმრავლის გაერთიანებას
$$\operatorname{int}(A) = \bigcup U_i,\ U_i \subset A,\ U_i \in \{U_i\}_{i\in I};$$
3. A-ს ყველა შიგა წერტილის სიმრავლეს.

სამივე ეს პირობა ექვივალენტურია.

ინტერიორის თვისებები

1. $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$.
2. $\operatorname{int}(A \bigcap B) = \operatorname{int}(A) \bigcap \operatorname{int}(B)$.

მაგალითები

1. R-ში: $\mathrm{int}([0,1]) = \mathrm{int}((0,1]) = \mathrm{int}([0,1)) = \mathrm{int}((0,1)) = (0,1)$.
2. R^2-ში: $\mathrm{int}([0,1]) = \mathrm{int}((0,1]) = \mathrm{int}([0,1)) = \mathrm{int}((0,1)) = \varnothing$.
3. R^2-ში: $\mathrm{int}(\overline{D}(x,r)) = \overline{D}(x,r) - S(x,r)$, ანუ ჩაკეტილი დისკის ინტერიორია ღია დისკია.

სავარჯიშო. საზოგადოდ $\mathrm{int}(A \bigcup B) \neq \mathrm{int}(A) \bigcup \mathrm{int}(B)$. მოიყვანეთ სათანადო მაგალითი.

ჩაკეტვა

ვთქვათ $(X, \{U_i\}_{i \in I})$ ტოპოლოგიური სივცეა და $A \subset X$ მისი ქვესიმრავლე.
განმარტება. A-ს ჩაკეტვა $cl(A)$ ეწოდება

1. A-ს მომცველ უმცირეს ჩაკეტილ სიმრავლეს;
2. A-ს მომცველ ყველა ჩაკეტილი სიმრავლის თანაკვეთას
$$cl(A) = \bigcap F_i,\ F_i \supset A;$$
3. A-ს ყველა დაგროვების წერტილის სიმრავლეს.

სამივე ეს პირობა ექვივალენტურია.

ჩაკეტვის თვისებები

1. $cl(cl(A)) = cl(A)$.
2. $cl(A \bigcup B) = cl(A) \bigcup cl(B)$.

მაგალითები

1. R-ში: $cl((0,1)) = cl((0,1]) = cl([0,1)) = cl([0,1]) = [0,1]$.
2. R^2-ში: $cl(D(x,r)) = \overline{D}(x,r)$, ანუ ღია დისკის ჩაკეტვა ჩაკეტილი დისკია.

სავარჯიშო
საზოგადოდ $cl(A \bigcap B) \neq cl(A) \bigcap cl(B),\ \mathrm{int}(cl(A)) \neq \mathrm{int}(A),\ cl(\mathrm{int}(A) \neq cl(A)$. მოიყვანეთ სათანადო მაგალითები.

სიმრავლის საზღვარი

ვთქვათ კვლავ $(X, \{U_i\}_{i \in I})$ ტოპოლოგიური სივცეა და A მისი ქვესიმრავლე.

განმარტება. წერტილს $x \in A$ ეწოდება A სიმრავლის საზღვრის წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს A-ს წერტილებსაც და A-ს დამატების წერტილებსაც, ანუ
$$\exists r > 0\ \ D(x,r) \bigcap A \neq \varnothing,\ D(x,r) \bigcap A^c \neq \varnothing.$$

განმარტება. A სიმრავლის საზღვარი ∂A ეწოდება მისი ყველა საზღვრის წერტილთა სიმრავლეს.

მაგალითი
$\partial(0,1)=\partial(0,1]=\partial[0,1)=\partial[0,1])=\{0,1\}$.

თეორემა. $\partial A = cl(A)-\operatorname{int}(A),\ \partial A = cl(A)\bigcap cl(A^c)$.

ბაზა და პრებაზა

ვთქვათ კვლავ და კვლავ $(X,\{U_i\}_{i\in I})$ ტოპოლოგიური სივცეა. როგორც ვიცით ტოპოლოგიის შემქმნელ ღია სიმრავლეებს მოეთხოვებათ სამი რამ:

1. ცარიელი სიმრავლე და მთელი სივრცე - ორივე ღიაა;
2. ღიების ნებისმიერი გაერთიანება ღიაა;
3. ღიების სასრული თანაკვეთა ღიაა.

განმარტება. ღია სიმრავლეთა ქვეოჯახს ეწოდება ტოპოლოგიის ბაზა, თუ მათი ნებისმიერი გაერთიანებები ჰქმნიან მოცემულ ტოპოლოგიას.

განმარტება. ღია სიმრავლეთა ქვექვეოჯახს ეწოდება პრებაზა, თუ მათი სასრული თანაკვეთები ჰქმნიან მოცემული ტოპოლოგიის ბაზას.

მაგალითები

R -ის სტანდარტული ტოპოლოგიის ბაზას ჰქმნიან ღია ინტერვალები
$$(a,b),\ a,b\in R,\ a\le b.$$

R -ის სტანდარტული ტოპოლოგიის პრებაზას ჰქმნიან ღია სხივები
$$(-\infty,a),\ (a,+\infty),\quad a\in R.$$

ქვესივრცე

ვთქვათ $(X,\{U_i\}_{i\in I})$ ტოპოლოგიური სივცეა, ხოლო $Y\subset X$ ქვესიმრავლე.

თეორემა. Y -ს ქვესიმრავლეთა ოჯახი $\{V_i = Y\bigcap U_i\}_{i\in I}$ ჰქმნის ტოპოლოგიას Y -ზე (რომელსაც ინდუცირებული ტოპოლოგია ჰქვია).

განმარტება. ტოპოლოგიურ სივრცეს $(Y,\{V_i\}_{i\in I})$ ეწოდება $(X,\{U_i\}_{i\in I})$ ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე.

სეპარაბელური სივრცე

განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეს $Y \subset X$ ეწოდება მკვრივი X-ში თუ $cl(Y) = X$.

განმარტება. ტოპოლოგიურ სივრცეს ჰქვია სეპარაბელური, თუ მას აქვს თვლადი მკვრივი ქვესიმრავლე.

თეორემა. თუ ტოპოლოგიურ სივრცეს აქვს თვლადი ბაზა, მაშინ ის სეპარაბელურია.

მაგალითი. R^n მეტრული ტოპოლოგიით სეპარაბელური სივრცეა.

უწყვეტობა

განმარტება. $(X, \{U_i\}_{i\in I})$ და $(Y, \{V_i\}_{i\in I})$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება უწყვეტი თუ Y-ის ყოველი ღია ქვესიმრავლის წინასახე ღიაა X-ში.

ეს განმარტება ექვივალენტურია შემდეგის

განმარტება. $(X, \{U_i\}_{i\in I})$ და $(Y, \{V_i\}_{i\in I})$ მეტრულ სივრცეთა ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება უწყვეტი თუ Y-ის ყოველი ჩაკეტილი ქვესიმრავლის წინასახე ჩაკეტილია X-ში.

თეორემა. უწყვეტ ასახვათა კომპოზიცია უწყვეტია.

განმარტება. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება ჰომეომორფიზმი, თუ მას გააჩნია უწყვეტი შებრუნებული. ამ შემთხვევაში X -ს და Y-ს ჰომეომორფულ სივრცეებს უწოდებენ.

თეორემა. ნებისმიერი ასახვა დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრციდან უწყვეტია.

თეორემა. ნებისმიერი ასახვა ანტიდისკრეტულ ტოპოლოგიურ სივრცეში უწყვეტია.

კომპაქტურობა

განმარტება. ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეს $Y \subset X$ ეწოდება კომპაქტური, თუ Y -ის ნებისმიერი ღია დაფარვიდან აირჩევა სასრული ქვედაფარვა.

თეორემა. R^n-ის ქვესიმრავლე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ $f : X \subset R^n \to R$ უწყვეტი ასახვაა X ტოპოლოგიური სივრციდან R-ში. X-ის რა თვისებები განაპირობებენ ამ ასახვის მინიმუმის და მაქსიმუმის არსებობას?

ეს არ არის X -ის მხოლოდ შემოსაზღვრულობა, სინჯეთ $f(x)=\frac{1}{x}$ $X=(0,1)$ -ზე.

ეს არ არის X -ის მხოლოდ ჩაკეტილობა, სინჯეთ $f(x)=2^x$ $X=[0,\infty)$ -ზე.

ეს არის ჩაკეტილობა და შემოსაზღვრულობა ერთად.

თეორემა. კომპაქტურ X სივრცეზე განსაზღვრული უწყვეტი ასახვა $f: X \to R$ აღწევს მინიმუმსაც და მაქსიმუმსაც.