თორნიკე ქადეიშვილი

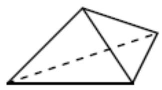
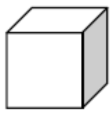
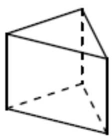
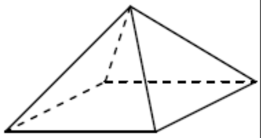
ეილერის მახასიათებელი

დამოკიდებულება ამოზნექილი მრავალკუთხედის წვეროებისა და გვერდების (წიბოების) რაოდენობებს შორის მარტივია წვეროების რაოდენობა უდრის წიბოების რაოდენობას, ანუ კომბინაცია, რომელსაც მრავალკუთხედის *ეილერის მახასიათებლი* ჰქვია

e = (# წვეროები) – (# წიბოები)

უდრის ნულს.

ვნახოთ, როგორია დამოკიდებულება მრავალწახნაგების ელემენტების წვეროების, წიბოების, წახნაგების რაოდენობებს შორის?

მრავაწახნაგა		წვეროები	წიბოები	წახნაგები	e
სამკუთხა პირამიდა (ტეტრაედრი)		4	6	4	
კუბი		8	12	6	
სამკუთხა პრიზმა		6	9	5	
ოთხკუთხა პირამიდა		5	8	5	

ყველა ეს ფიგურა ტოპოლოგიურად სფეროს ექვივალენტურია.

რა აქვთ მათ ერთნაირი?

ეილერის მახასიათებელი

e = (# წვეროები) – (# წიბოები) + (# წახნაგები) = 2.

ინგლისურად წვეროა Vertex, წიბო Edge, წახნაგი Face, ანუ

$$e = V - E + F$$

(სამწუხაროდ ქართულად გამოგვდის $e =$ წ წ + წ).

ზოგადად, სიმპლექსური კომპლექსის ეილერ - პუანკარეს მახასიათებელი ასე განიმარტება

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \ldots = \sum_i (-1)^i k_i$$

აქ k_i აღნიშნავს სიმპლექსური კომპლექსის i-განზომილებიანი სიმპლექსების რაოდენობას.

ეილერის თეორემა. შეკრული ამოზნექილი მრავაწახნაგას ეილერის მახასიათებელი 2-ის ტოლია.

დამტკიცების იდეა (კოში):

1. წახნაგების ტრიანგულაციით დიაგონალების გატარებით - მივაღწიოთ იმას, რომ ყოველი წახნაგი გახდება სამკუთხედი. ამ მანიპულაციით ეილერის მახასიათებელი არ იცვლება (რატომ?).

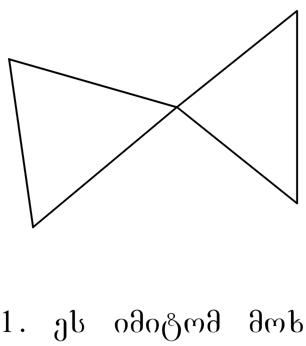
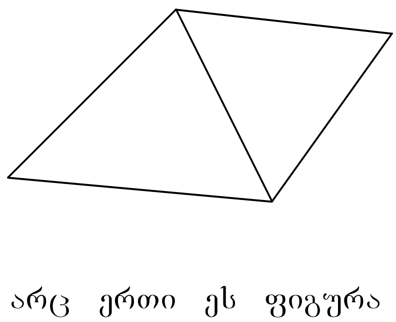
2. ამოვჭრათ ერთი სამკუთხედი. ამით მრავალწახნაგა (ტოპოლოგიურად) გადაიქცევა მრავალკუთხედად ხოლო ეილერის მახასიათებელი 1-ით შემცირდება (რატომ?).

3. ამ მრავალკუთხედს რიგრიგობობით მოვკვეთოთ საზღვართან მდებარე სამკუთხედები (სულ 3 ტიპისაა). ასეთი მოკვეთებით ეილერის მახასიათებელი არ იცვლება (რატომ?).

4. საბოლოოდ მივალთ ერთ სამკუთხედამდე, რომლის ეილერის მახასეიათებელი ერთია. რ.დ.გ.

მრავალწახნაგები, რომელთათვისაც $e \neq 2$

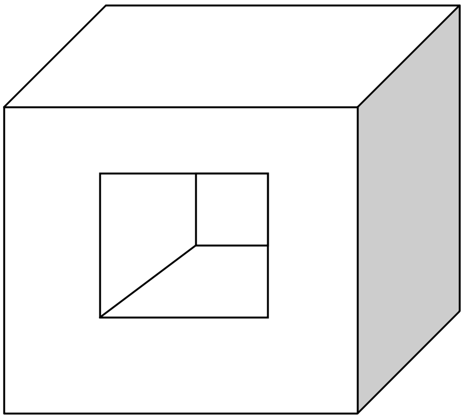
ხომ არ გგონიათ, რომ ყოველი *მრავალკუთხედის* ეილერის მახასიათებელი ნულია?

ნახეთ ეს  ან ეს 

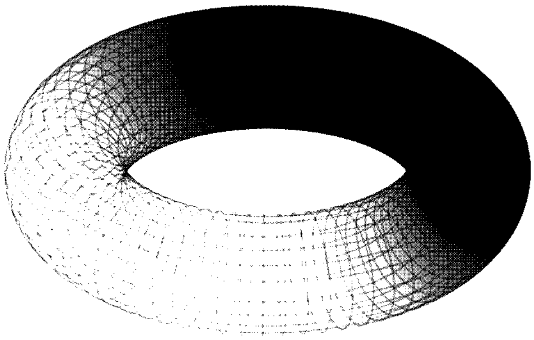
მათთვის $e = 1$. ეს იმიტომ მოხდა, რომ არც ერთი ეს ფიგურა არ არიან წრეწირის ჰომეომორფული.

სავარჯიშო
იქნებ შეთხზათ მრავალკუთხედი, რომლისთვისაც $e=0$, $e=-1$ და ა.შ.

ახლა ნახეთ ეს *მრავალწახნაგა*



გააკეთეთ მისი ყველა წახნაგის ტრიანგულაცია და დათვალეთ ეილერის მახასიათებელი. მიიღებთ $e=0$. ეს იმიტომ ხდება, რომ ეს ფიგურა არ არის სფეროს ჰომეომორფული, ის ჰომეომორფულია ტორისა



ამ სამშენებლო ბლოკისთვის

$e=-2$. ეს მრავალწახნაგა ჰომეომორფულია ასეთ "2-ტორისა"

.

სავარჯიშო
იქნებ დახაზოთ მრავარწახნაგა, რომლისთვისაც $e=-4$, $e=-6$ და ა. შ.

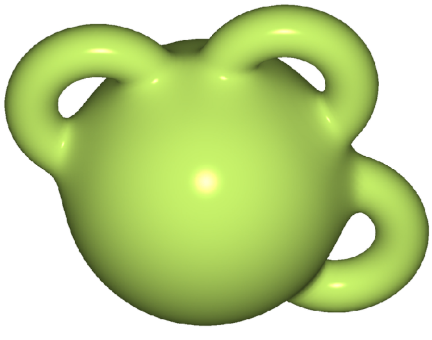
საზოგადოდ, ეილერის მახასიათებელი *ტოპოლოგიური ინვარიანტია*: ჰომეომორფულ ტოპოლოგიურ სივრცეებს ერთნაირი ეილერ-პუანკარეს მახასიათებელი აქვთ, ანუ თუ $X \approx Y$, მაშინ $\chi(X)=\chi(Y)$.

უფრო მეტიც, ეილერის მახასიათებელი *ჰომოტოპიური ინვარიანტიცაა*: ჰომოტოპიურად ექვივალენტურ ტოპოლოგიურ სივრცეებს ერთნაირი ეილერ-პუანკარეს მახასიათებელი აქვთ, ანუ თუ $X \sim Y$, მაშინ $\chi(X)=\chi(Y)$.

გვარი

ცნობილია (ორიენტირებული) შეკრული ზედაპირების სრული კლასიფიკაცია: თითეული ასეთი ზედაპირი ჰომეომორფულია სფეროსი რამდენიმე სახელურით. ზედაპირის *გვარი* g (genus) ეწოდება ამ სახელურების რაოდენობას.

კერძოდ, თავად სფეროს გვარია 0, ტორისა 1, ზემოთ ნაჩვენები სამშენებლო ბლოკისა 2, აი ამ ზედაპირის კი - 3



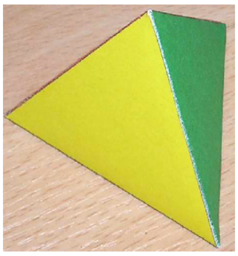
ზედაპირის გვარი უდრის ასეთ რიცხვს: მაქსიმუმ რამდენი შეკრული მარტივი წირის ამოკვეთაა შესაძლებელი ისე, რომ ზედაპირი არ დაიშალოს არაბმულ კომპონენტებად.

სავარჯიშო
აბა, დაინახეთ, რომელი სამი შეკრული მარტივი წირის ამოკვეთაა შესაძლებელი ამ 3-ტორიდან დაუსჯელად.

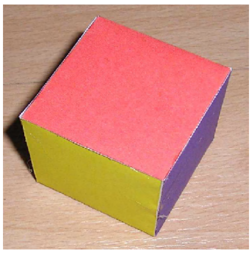
დამოკიდებულება ეილერის მახასიათებელს და გვარს შორის ასეთია $\chi = 2-2g$.

პლატონის სხეულები

ეილერის თეორემის შედეგია, რომ არსებობს მხოლოდ 5 წესიერი მრავალწახნაგა (ე.წ. პლატონის სხეულები)



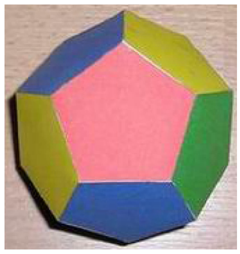
ტეტრაედრი



კუბი
ანუ ჰექსაედრი

ოქტაედრი

იკოსაედრი



დოდეკაედრი

რატომ 5?

აღვნიშნოთ:

k - ერთ წვეროში თავმოყრილ წიბოთა რიცხვი, ცხადია $k \ge 3$
n - წახნაგის კუთხეთა რაოდენობა, ცხადია $n \ge 3$
x წახნაგთა რაოდენობა

მაშინ: წიბოთა რაოდენობაა $\frac{n \cdot x}{2}$;

წვეროთა რაოდენობაა $\frac{n \cdot x}{k}$.

ეილერის თეორემით $\frac{n \cdot x}{k} - \frac{n \cdot x}{2} + x = 2$. აქედან

$$x = \frac{4k}{2n+2k-nk}.$$

შემდეგ ცხრილში გამოთვლილია x სხვადასხვა n და k-სთვის

k / n	3	4	5	6	7	8
3	4	8	20		-28	-16
4	6		-10	-6	-4.66	-4
5	12	-8	-4	-3	-2.5	-2.3
6		-4	-2.5	-2	-1.75	-1.6
7	-12	-2.6	-1.8	-1.5	-1.3	-1.2
8	-6	-2	-1.4	-1.2	-1.07	-1

როგორც ვხედავთ x-ის მთელი დადებითი მნიშვნელობა გამოდის მხოლოდ 5 შემთხვევაში. თითეული ამ შემთხვევათაგანი შეესაბამება პლატონის სხეულს.

მაგალითად, ცხრილიდან ჩანს, რომ $k=3, n=4$ შემთხვევაში $x=6$. ვნახოთ რომელ მრავალწახნაგას ვიღებთ ამ შემთხვევაში. ამისათვის გამოხითვალოთ წვეროების, წიბოების და წახნაგების რაოდენობა:

$$V=\frac{n\cdot x}{k}=\frac{4\cdot 6}{3}=8,\quad E=\frac{n\cdot x}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12,\quad F=x=6,$$

აბა თუ მიხვდით, ეს რომელია?

სავარჯიშო

გამოიკვლიეთ ხუთივე შემთხვევა, რომელ მრავალწახნაგას შეესაბამება თითეული მათგანი

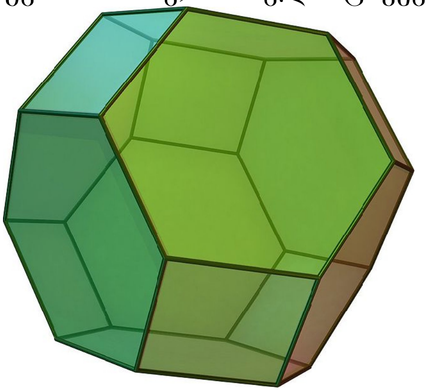
$$(k=3,\ n=3);\quad (k=3,\ n=4);\quad (k=4,\ n=3);\quad (k=3,\ n=5);\quad (k=5,\ n=3);$$

ამის გამოყენებით ახსენით რას ნიშნავს სიტყვები tetra, hexa, octa, dodeca, icosa (წესით ბერძნულად უნდა ეწეროს).

ნახევრადწესიერი მრავალწახნაგები

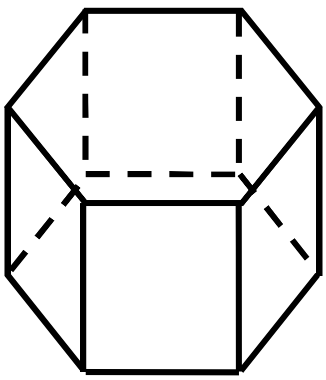
ამ 5 წესიერი მრავალწახნაგას გარდა არსებობს სხვადასხვა ტიპის ნახევრადწესიერები:

არქიმედის სხეულები ყველა წახნაგი წესიერი მრავალკუთხედია (მაგრამ შეიძლება არაერთსახელა) ხოლო წვეროები *ერთგვაროვანი*. მაგ. წაკვეთილი ოქტაედრი (პერმუტაედრის კერძო სახე, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ)



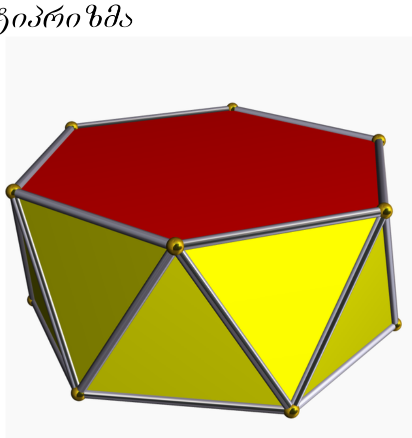
რომელსაც აქვს წახნაგებად კვადრატები და წესიერი ექვსკუთხედები. მიაქციეთ ყურადღება: აქ თითეული წვერო 3-ვალენტიანია (ტერმინი ქიმიიდან) ანუ 3 წიბო გამოდის.

ასეთია აგრეთვე *ექვსკუთხა პრიზმა*



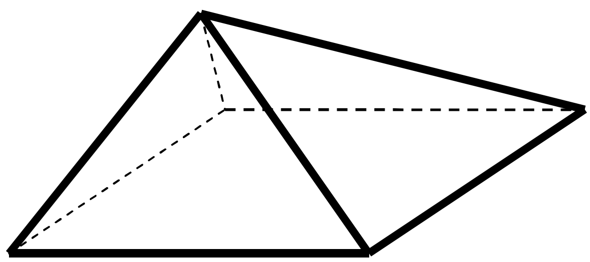
რომელის წახნაგები აგრეთვე კვადრატები და წესიერი ექვსკუთხედებია და ყველა წვერო აგრეთვე 3-ვალენტიანია.

არსებობს კიდევ ასეთი *ანტიპრიზმა*



გასაგებია, რომ პრიზმებისა და ანტიპრიზმების რაოდენობა უსასრულოა (რატომ?), მაგრამ არქიმედეს სხეულები პლატონის სხეულების გამოკლებით სულ 13 ცალია, ნახეთ ვიკიპედიაში **Archimedean solid.**

ჯონსონის სხეულები - ყველა წახნაგი წესიერი მრავალკუთხედია მაგრამ შეიძლება არაერთსახელა, ხოლო წვეროების ერთგვაროვნება აღარ მოითხოვება. მაგ. ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძე კვადრატია, ხოლო გვერდითი წახნაგები წესიერი სამკუთხედები



აქ ოთხი წვერო 3-ვალენტიანია, ერთი კი 4-ვალენტიანი.

ასეთები 92 ცალია.

ეკზოტიკური მრავალწახნაგები

ადიდასის ფეხბურთის ბურთი

ეს ბურთი არქიმედის სხეულია: ზოგი მისი წახნაგი ექვსკუთხედია (Hexagon), ზოგი ხუთკუთხედი (Pentagon), ამასთან თითეული წვეროდან გამოდის სამი წიბო. ეილერის მახასიათებელი გვაძლევს საშუალებას დავთვალოთ ხუთკუთხედების რაოდენობა.

დავუშვათ გვაქვს H ექვსკუთხედი და P ხუთკუთხედი. მაშინ

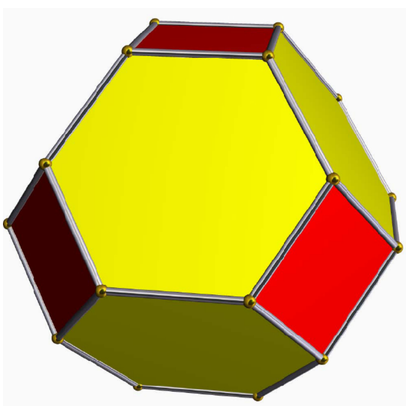
$$V=\frac{5P+6H}{3},\quad E=\frac{5P+6H}{2},\quad F=P+H$$

და ეილერის თეორემით ვიღებთ

$$e=V-E+F=\frac{5P+6H}{3}-\frac{5P+6H}{2}+P+H=\frac{P}{6}=2,$$

ე.ი. $P=12$, ანუ საჭიროა ზუსტად 12 ხუთკუთხედი. ექვსკუთხა წახნაგების რაოდენობის დადგენა უფრო ძნელია, მხოლოდ ეილერის მახასიათებელი არ კმარა.

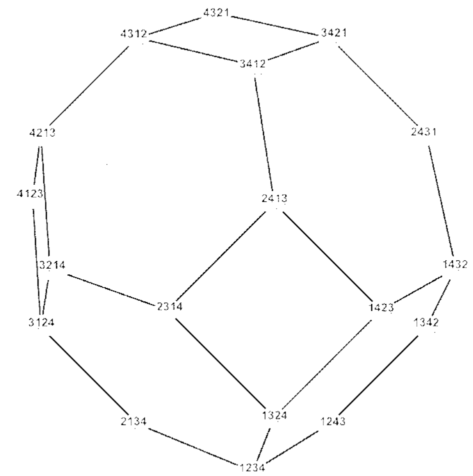
პერმუტოედრი



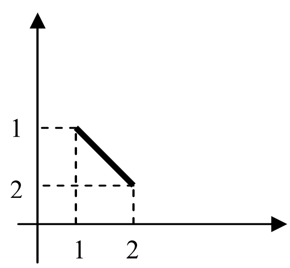
სავარჯიშო

პერმუტაედრის წახნაგებია რამდენიმე კვადრატი (Square) და რამდენიმე ექვსკუთხედი (Hexagon) წახნაგი. დაადგინეთ (ისევე, როგორც ადიდასის შემთხვევაში) რამდენია კვადრატი?
ცადეთ დახაზოთ სხვა, პერმუტოედრისგან განსვავებული არქიმედის სხეული, რომელსაც წახნაგებად ასევე კვადრატები და ექვსკუთხედები აქვს.

ზოგადად პერმუტოედრი P_4 არის ამოზნექილი 3-განზომილებიანი მრავალწახნაგა R^4-ში, რომლის წვეროების კოორდინატებია $1,2,3,4$ რიცხვების ყველა გადანაცვლება (ე.ი. სულ $4!=24$ წვერო). ეს R^4-ის ქვესიმრავლე ძნელი დასახატია



ვცადოთ დავხატოთ ერთგანზომილებიანი პერმუტოედრი P_2: ეს არის R^2-ის ამოზნექილი ქვესიმრავლე, რომლის წვეროებია $(1,2)$ და $(2,1)$

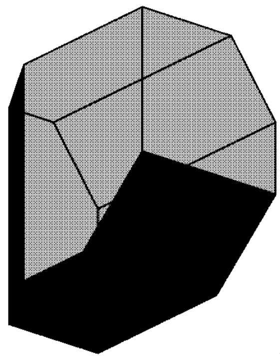


სავარჯიშო

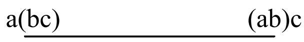
ორგანზომილებიანი პერმუტოედრი $P_3 \subset R^3$ თქვენ თვითონ დახატეთ. რა ფიგურა გამოვიდა?
განმარტეთ n-განზომილებიანი პერმუტოედრი $P_{n+1} \subset R^{n+1}$, ნუ დახატავთ.

ასოციაედრი

კიდევ ერთი ეკზოტიკური პოლიტოპი ასოციაედრი K_5



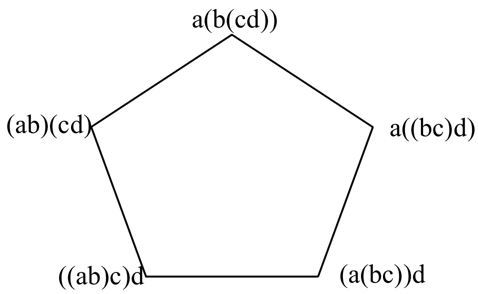
მისი ერთგანზომილებიანი ანალოგია K_3 რომლის წვეროები ასეა აღწერილი: განვიხილოთ რაიმე სამი სიმბოლო, ვთქვათ a,b,c. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ამ სამი ასოს გადამრავლება არაასოციატური გამრავლებით რიგის შენარჩუნებით? ეს შესაძლებლობებია $a(bc)$ და $(ab)c$. ამრიგად K_3 არის მონაკვეთი, რომლის წვეროებია $a(bc)$ და $(ab)c$



ახლა ვნახოთ რა იქნება K_4. ეს არის უკვე 2-განზომილებიანი ფიგურა მრავალკუთხედი, რომლის წვეროები ასეა აღწერილი: განვიხილოთ ოთხი სიმბოლო ვთქვათ a,b,c,d. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ამ ოთხი ასოს გადამრავლება არაასოციატური გამრავლებით რიგის შენარჩუნებით?
ეს შესაძლებლობებია

$$a(b(cd)),\ a((bc)d),\ (a(bc))d,\ ((ab)c)d,\ (ab)(cd).$$

ამრიგად K_4 არის ხუთკუთხედი. მიაქციეთ ყურადღება, ორი წვერო ადგებს წიბოს, თუ ერთი მეორედან მიიღება ასოციატურობის წესით გადასვლით $x(yz)\leftrightarrow(xy)z$



K_4 უკვე არის მრავალწახნაგა, რომლის წვეროებია ხუთი ასოს a,b,c,d,e რიგის შენარჩუნებით გადამრავლების (ფრჩხილების დასმის) ვარიანტები. ასეთი ვარიანტებია 14, თუ არ მეშლება.

სავარჯიშო

დათვალეთ! დააწერეთ პერმუტოედრის ნახაზს შესაბამისი კომბინაციები

$$a(b(c(de))),\ a(b((cd)e),\ \dots\ .$$