თორნიკე ქადეიშვილი

ჯაჭვური კომპლექსები

ჯაჭვური კომოლექსი ეწოდება აბელის ჯგიფთა და ჰოჰომორფიზმთა მიმდევრობას

$$(C_*, d_*) = C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} \dots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} \dots$$

ერთადერთი პირობით $d_n d_{n+1} = 0$.
აღნიშვნები:
ციკლების ქვეჯგუფი $Z_n = Ker\,(d_n: C_n \to C_{n-1}) \subset C_n$,
საზღვრების ქვეჯგუფი $B_n = Im\,(d_{n+1}: C_{n+1} \to C_n) \subset C_n$

ლემა. პირობიდან $d_n d_{n+1} = 0$ გამოდის, რომ $B_n \subset Z_n$.
დამტკიცება. ვთქვათ $b \in B_n$, ანუ $b = d_{n+1}c$. მაშინ $d_n b = d_n d_{n+1} c = 0$, ე.ი. $b \in Z_n$.

Z_n-ის ელემენტებს ეწოდებათ *ციკლები*, B_n-ისას კი *საზღვრები*.

ციკლი $z \in Z_n$ *ნულის ჰომოლოგიურია* თუ ის ეკუთვნის საზღვრების ჯგუფს $B_n \subset Z_n$, ანუ $z = d_{n+1}(c)$, $c \in C_{n+1}$.

ორ ციკლი z, $z' \in Z_n$ *ერთმანეთის ჰომოლოგიურია* თუ მათი სხვაობა ეკუთვნის საზღვრების ჯგუფს $B_n \subset Z_n$, ანუ $z - z' = d_{n+1}(c)$, $c \in C_{n+1}$.

განმარტება. (C_*, d_*) ჯაჭვური კომპლექსის n-ური ჰომოლოგიის ჯგუფი ეწოდება ფაქტორჯგუფს $H_n(C_*) = Z_n/B_n$.

თეორემა. მიმდევრობა $0 \leftarrow H_n(C_*) \leftarrow Z_n \leftarrow B_n \leftarrow 0$ ზუსტია.
დამტკიცება. თვითონ სცადეთ!

თეორემა. მიმდევრობა

$$\dots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} \dots$$

ზუსტია წევრში C_n მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $H_n(C_*) = 0$.

დამტკიცება. $H_n(C_*) = \frac{Z_n}{B_n} = 0 \;\Leftrightarrow\; Z_n = B_n \;\Leftrightarrow$ მიმდევრობა ზუსტია C_n წევრში.

განმარტება. ჯაჭვურ კომპლექსს (C_*, d_*) ქვია აციკლური n-ურ წევრში, თუ $H_n(C_*) = 0$, სა საზოგადოდ აციკლური, თუ მისი ყველა ჰომოლოგიის ჯგუფი ნულოვანია.

სავარჯიშოები

მოკლე ზუსტი მიდევრობა $0 \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow 0$ გრძელდება აციკლურ ჯაჭვურ კომპლექსად $0 \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$. რატომ აციკლური?

ამ ჯაჭვურ კომპლექსში

$$0 \leftarrow Z \xleftarrow{d_2} Z \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

დიფერენციალი d_2 მოცემულია ტოლობით $d_2(1) = k$. გამოთვალეთ ამ კომპლექსის ჰომოლოგიები k-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, მაგ. $k = 0,1,2,3, \dots$.

კერძოდ, თუ $k = 2$, მაშინ $H_0 = 0,\ H_1 = \frac{Z}{2Z} = Z_2, H_i = 0,\ i > 1.$

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც $C_k = Z,\ d_{2k} = 0,\ \ d_{2k+1} = id.$

ამოხსნა.

კომპლექსია $Z \xleftarrow{0} Z \xleftarrow{id} Z \xleftarrow{0} Z \xleftarrow{id} Z \leftarrow \cdots$

ჰომოლოგიები $H_0 = \frac{Z}{Im\ 0} = \frac{Z}{0} = Z,\ H_1 = \frac{Ker\ 0}{Im\ id} = \frac{Z}{Z} = 0,\ H_2 = \frac{Ker\ id}{Im\ 0} = \frac{0}{0} = 0, \dots$

საზოგადოდ $H_{2k} = 0,\ \ H_{2k+1} = Z.$

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც $C_k = Z,\ d_{2k} = id,\ \ d_{2k+1} = 0.$

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც

$$C_{2k} = Z,\ C_{2k+1} = 0.$$

ამოხსნა.

კომპლექსია $Z \leftarrow 0 \leftarrow Z \leftarrow 0 \leftarrow Z \leftarrow \cdots$

ჰომოლოგიები $H_0 = \frac{Z}{Im\ 0} = \frac{Z}{0} = Z,\ H_1 = \frac{Ker\ 0}{Im\ 0} = \frac{0}{0} = 0,\ H_2 = \frac{Ker\ 0}{Im\ 0} = \frac{0}{0} = 0, \dots$

საზოგადოდ $H_0 = 0,\ \ H_{k>0} = 0.$

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც

$$C_{2k} = 0,\ C_{2k+1} = Z.$$

სიმპლექსური კომპლექსის ჯაჭვური კომპლექსი

ვთქვათ $V = (V_0, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots)$ სიმპლექსური კომპლექსია სკელეტონებით

$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, \dots \}$, 0-სიმპლექსები, ანუ წვეროები,
$V_1 = \{(v_{i_0}, v_{i_1}), \dots \}$, 1-სიმპლექსები, ანუ წიბოები,
$V_2 = \{(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2},), \dots \}$, 2-სიმპლექსები, ანუ სამკუთხა წახნაგები,
$\dots$
$V_n = \{(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots v_{i_n}), \dots \}$, n-სიმპლექსები,
$\dots$

დავაფიქსიროთ $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, \dots \}$ წვეროების ეს დალაგება და ვიგულისხმოთ, რომ ყველა მაღალგანზომილებიანი სიმპლექსი $\sigma_б = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots v_{i_n})$ ინარჩუნებს ამ დალაგებას.

სიმპლექსური კომპლექსი V განსაზღვრავს ჯაჭვურ კომპლექსს

$$0 \leftarrow C_0(V) \leftarrow C_1(V) \leftarrow C_2(V) \leftarrow \cdots \leftarrow C_{n-1}(V) \leftarrow C_n(V) \leftarrow \cdots$$

სადაც $C_n(V)$ არის თავისუფალი ჯგუფი, წარმოქმნილი V ჯაჭვური კომპლექსის n-სკელეტონით V_n ანუ $C_n(V) = \sum_{\sigma \in V_n} Z_\sigma$, ხოლო დიფერენციალ მოცემულია ტოლობით

$$d_n(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}, \dots v_{i_n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, \widehat{v_{i_k}}, v_{i_{k+1}}, \dots v_{i_n})$$

სადაც $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, \widehat{v_{i_k}}, v_{i_{k+1}}, \dots v_{i_n})$ აღნიშნავს *(n-1)*- განზომილებიან სიმპლექსს, რომელშიც გამოტოვებულია წვერო v_{i_k} .

თეორემა. d_n დიფერენციალია, ანუ $d_{n-1}d_n = 0$.
დამტკიცება. ვნახოთ მხოლოდ *n=2*-ისთვის

$$d_1 d_2(v_0, v_1, v_2) =$$
$$d_1[(v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1)] = (v_2 - v_1) - (v_2 - v_0) + (v_1 - v_0) = 0.$$

ზოგიერთი სიმპლექსური კომპლექსის ჰომოლოგიის ჯგუფები

თეორემა. *n*-განზომილებიანი დისკის ჰომოლოგიები

$$H_k(D^n) = Z \text{ თუ } k = 0 \text{ და } H_k(D^n) = 0 \text{ თუ } k \neq 0 .$$

თეორემა. *n*-განზომილებიანისფეროს ჰომოლოგიები

$$H_k(S^n) = Z \text{ თუ } k = 0, n \text{ და } H_k(S^n) = 0 \text{ თუ } k \neq 0 \text{ და } k \neq n \text{ .}$$

სიმპლექსურ კომპლექსს V ეწოდება ბმული, თუ მისი ნებისმიერი ორი წვეროსათვის არსებობს მათი შემაერთებელი 1-სიმპლექსებისგან შემდგარი გზა, ანუ

$$\forall u, w \in V_0 \quad \exists v_1, \dots, v_m \in V_0 \quad \text{ი.რ. } u{=}v_1, \;\; (v_k, v_{k+1}) \in V_1, \;\; v_1 = w.$$

თეორემა. ბმული სიმპლექსური კომპლექსისათვის $H_0(V) = Z$.

დამტკიცება. $Z_0 = C_0(V) = \sum_{v \in V_0} Z_v$, ე.ი. ყოველი წვერო ციკლია, ხოლო ბმულობის გამო ყოველი ორი წვერო (ციკლი) ერთმანეთის ჰომოლოგიურია

$$d_1(\sum_{k=1}^{m-1}(v_k, v_{k+1}) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_n - v_{n-1}) = v_n - v_1 = w - u.$$

თეორემა. თუ სიმპლექსური კომპლექსი V შედგება k ბმულობის კომპონენტისგან, მაშინ სიმპლექსური კომპლექსისათვის $H_0(V) = Z \oplus \dots (k - \text{ჯერ}) \dots \oplus Z$.

სავარჯიშოები

განმარტეთ n-განზომილებიანი სფერო S^n. განმარტეთ სტანდარტული სიმლექსი Δ^2. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრეწირის S^1.

განმარტეთ n-განზომილებიანი ბირთვი D^n. განმარტეთ სტანდარტული სიმლექსი Δ^2.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრის (დისკის) D^2.

განმარტეთ n-განზომილებიანი სფერო S^n. განმარტეთ სტანდარტული სიმლექსი Δ^3. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია სფეროსი S^2.

განმარტეთ n-განზომილებიანი ბირთვი D^n. განმარტეთ სტანდარტული სიმლექსი Δ^3.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ბირთვის D^3.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ლათინური ასოსი H. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია იგივე ასოსი H.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ლათინური ასოსი A. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია იგივე ასოსი A.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ციფრის 8. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია იგივე ციფრის 8.

აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ქართული ასოსი ნ. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია იგივე ასოსი ნ.

განმარტეთ ჯაჭვური კომპლექსი. აჩვენეთ, რომ პირობიდან $d_n d_{n+1} = 0$ გამოდის $B_n \subset Z_n$.

განმარტეთ ციკლებისა და საზღვრების ქვეჯგუფები. აჩვენეთ, რომ პირობიდან $d_n d_{n+1} = 0$ გამოდის $B_n \subset Z_n$.

განმარტეთ ჯაჭვური კომპლექსის n-ური ჰომოლოგიის ჯგუფი. აჩვენეთ, რომ თუ ჯაჭვური კომპლექსი ზუსტია წევრში C_n მაშინ $H_n(C_*) = 0$.

განმარტეთ ჯაჭვური კომპლექსის n-ური ჰომოლოგიის ჯგუფი. აჩვენეთ, რომ თუ $H_n(C_*) = 0$, მაშინ ჯაჭვური კომპლექსი ზუსტია წევრში C_n .

აჩვენეთ, რომ სიმპლიციალური კომპლექსის ჯაჭვურ კომპლექსში $d_1 d_2 = 0$.

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც $C_k = Z,\ d_{2k} = 0,\ \ d_{2k+1} = id$.

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა (C_*, d_*), რომლისთვისაც $C_k = Z,\ d_{2k} = id,\ \ d_{2k+1} = 0$.

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა რომლისთვისაც $C_{2k} = Z,\ C_{2k+1} = 0$.

გამოთვალეთ ჰომოლოგიები ჯაჭვური კომპლექსისა რომლისთვისაც $C_{2k} = 0,\ C_{2k+1} = Z$.

აღწერეთ 5-განზომილებიანი სფეროს ჰომოლოგიის ჯგუფები.

აღწერეთ 0-განზომილებიანი ჰომოლოგიის ჯგუფი სიმპლექსური კომპლექსისა, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია გერმანული ასოსი Ä.

აღწერეთ 0-განზომილებიანი ჰომოლოგიის ჯგუფი სიმპლექსური კომპლექსისა, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია რუსული ასოსი Й.

აღწერეთ 0-განზომილებიანი ჰომოლოგიის ჯგუფი სიმპლექსური კომპლექსისა, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ლათინური ასოსი i .