თორნიკე ქადეიშვილი

თსუ ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი

ალგებრული ტოპოლოგიის შესავალი

სარჩევი

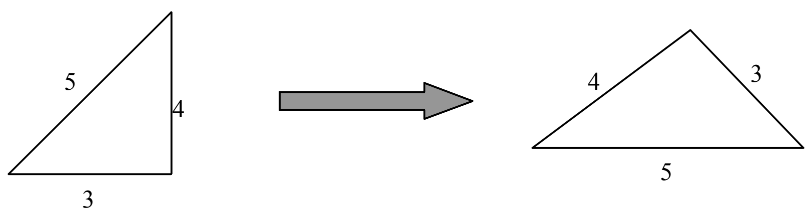
შესავალი

ანრი პუანკარეს ცნობილი ნაშრომით "Analysis Situs" (1895) საფუძველი დაედო მათემატიკის ახალ დარგს, რომელსაც დღეს ალგებრულ ტოპოლოგიას უწოდებენ.

ალგებრული ტოპოლოგია შეიძლება დახასიათდეს, როგორც გეომეტრიის ძალზე სპეციფიური დარგი. იგულისხმება შემდეგი.

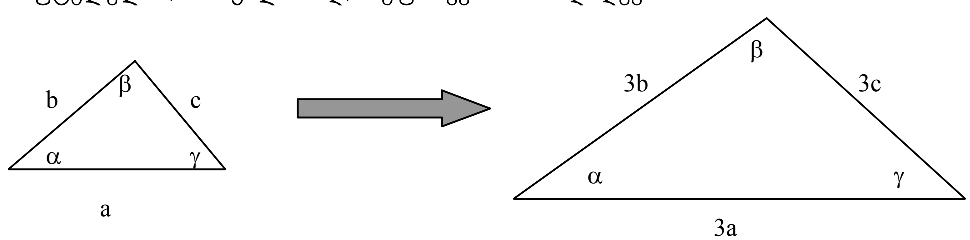
ფელიქს კლაინის ერლანგენის პროგრამის თანახმად სხვადასხვა გეომეტრიები ხსაითდებიან მათი სიმეტრიის ჯგუფებით.

ევკლიდური გეომეტრისათვის არაარსებითია ის, თუ დაფის ან ქაღალდის რომელ ნაწილში ხატია სამკუთხედი, ან რა მასალისგან არის ის დამზადებული, გეომეტრიას აინტერესებს სამკუთხედის გვერდთა სიგრძეები, კუთხეთა ზომები, პერიმეტრი, ფართობი და ა.შ. ევკლიდური გეომეტრია შეისწავლის ფიგურათა იმ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულნი არიან გადაადგილებების მიმართ.

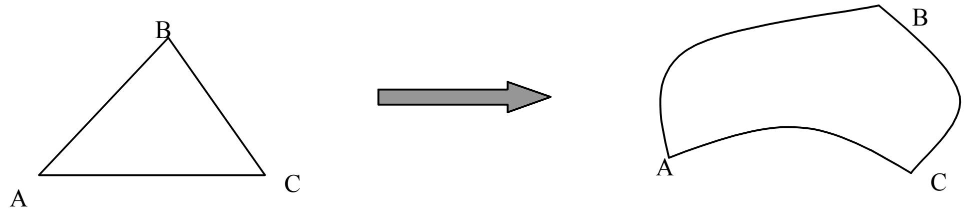


ეს ორი სამკუთხედი ევკლიდური გეომეტრიისათვის ერთი და იგივეა, თუმცა მათ სხვადასხვა მდებარეობა აქვთ: ერთი მეორესგან მიიღება გადაადგილებით

შეიძლება ვისაუბროთ გეომეტრიაზე, რომელიც შეისწავლის ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია არა მხოლოდ გადაადგილებების, არამედ პროპორციული გადიდება-შემცირების (ჰომოთეტიის) მიმართ. ცხადია, ასეთი გარდაქმნების დროს გვერდების სიგრძეები, პერიმეტრი, ფართობი არ ნარჩუნდება, მაგრამ უცვლელია, მაგალითად, კუთხეების სიდიდეები

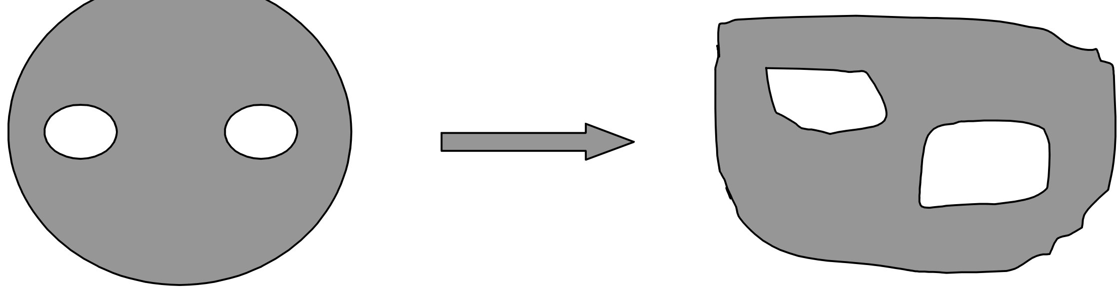


ტოპოლოგია კი შეისწავლის ფიგურათა იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლებიან კიდევ უფრო "უხეში" გარდაქმნებისას – *უწყვეტი დეფორმაციების* დროს. ასეთი გარდაქმნებისას არც ერთი ზემოთჩამოთვლილი თვისება (გვერდები, კუთხეები, პერიმეტრი, ფართობი) არ ნარჩუნდება, ე.ი. ეს თვისებები არ წარმოადგენენ ტოპოლოგიურ თვისებებს:

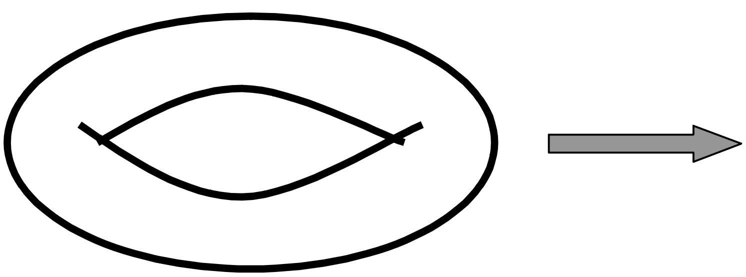
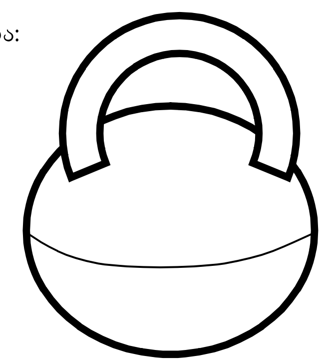


უნდა ვიფიქროთ, რომ თუ რომელიმე თვისება ინვარიანტულია ასეთი უხეში გარდაქმნის მიმართ, მაშინ ის ამ ფიგურის ძალიან ღრმა, ფუნდამენტურ თვისებას უნდა წარმოადგენდეს.

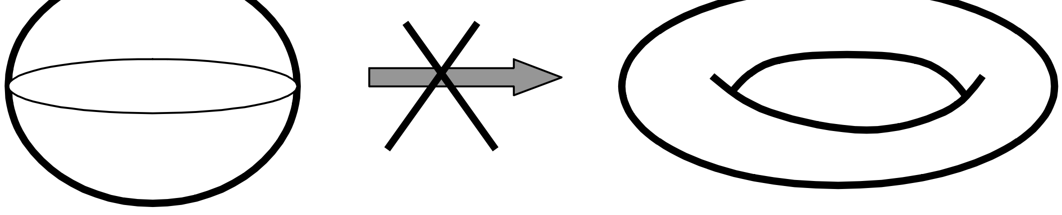
ბრტყელი ფიგურის ტოპოლოგიური თვისებაა, მაგალითად, მასში ხვრელების რაოდენობა:



შეკრული ზედაპირებისთვის – მათში ღრუების რაოდენობა:

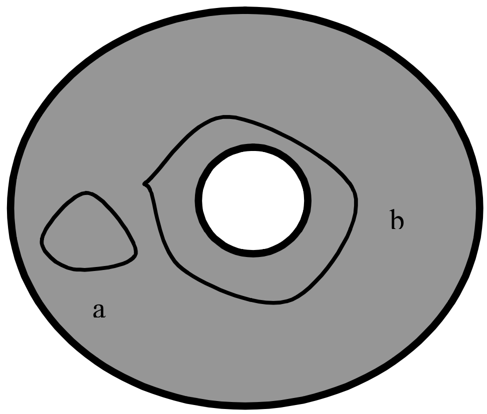
სფერო და ტორი არ არიან ექვივალენტურნი, რადგან მათ სხვადასხვა ტიპის ღრუები აქვთ:



ალგებრული ტოპოლოგიის ერთერთი მთავარი ამოცანაა ფიგურების ხვრელების (ღრუების, სიცარიელეების, ...) *რაობისა* და *რაოდენობის* დადგენა.

ნაშრომი “Analisys Situs” სწორედ ამ ამოცანას ეძღვნება. აქ შემოიტანილია ორი მნიშვნელოვანი ინვარიანტის - *ფუნდამენტური ჯგუფისა და ჰომოლოგიის ჯგუფების* ცნებები.

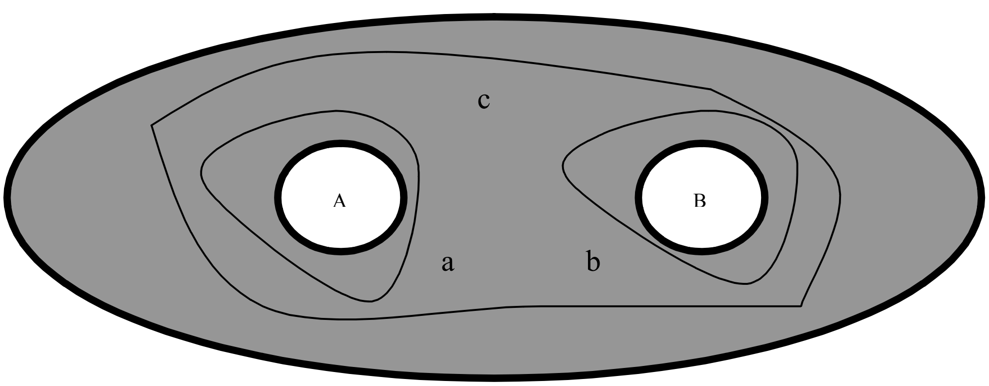
როგორ შეიძლება ბრტყელი ფიგურის ხვრელების გამოვლენა (დაჭერა)? დავაგდოთ ფიგურაზე თოკის მარყუჟი და შევეცადოთ მოვჭიმოთ ის, აი, ისე, როგორც მეთევზე წყალში გადააგდებს ბადეს და მერე ჭიმავს მას. მარყუჟი a მოიჭიმება ერთ წერტილში (ამ შემთხვევაში მას 0-ის ჰომოტოპიური ეწოდება), ხოლო მარყუჟი b კი არა - მის ერთ წერტილში მოჭიმვას ხვრელი შეუშლის ხელს:



ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მარყუჟი a ნულის ჰომოტოპიურია, ხოლო b – არა.

ამრიგად ხვრელების აღმოჩენა შეიძლება არამოჭიმვადი, 0-ის არაჰომოტოპიური, მარყუჟებით.

შემდეგ ფიგურაში

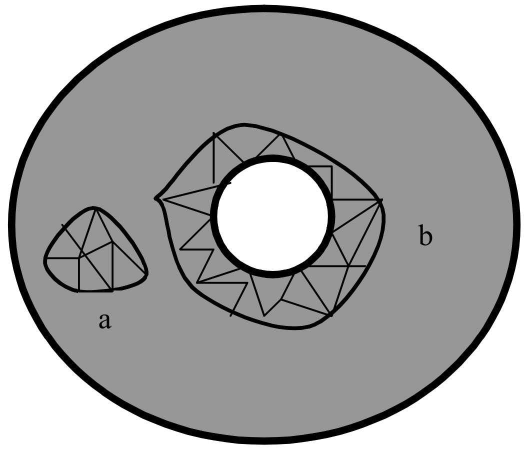


არამოჭიმვადი a მარყუჟი აღმოაჩენს A ხვრელს, b მარყუჟი აღმოაჩენს B ხვრელს. აქ არამოჭიმვადია c მარყუჟიც, მაგრამ ის ახალ ხვრელს არ აღმოაჩენს, მის მიერ “აღმოჩენილი” ხვრელი არსებითად A და B ხვრელების “ჯამად” შეიძლება ჩაითვალოს.
ამდენად, არამოჭიმვადი მარყუჟების საშუალებით ჩვენ ხვრელების რაოდენობას კი არ ვითვლით, არამედ ფიგურას შეუსაბამებთ გარკვეულ ჯგუფს, რომლის *წარმომქმნელებიც* ხვრელებს შეესაბამება. ამ ჯგუფს X ფიგურის ფუნდამენტური

ჯგუფი ეწოდება და ასე აღინიშნება - $\pi_1(X)$. სხვა ტერმინოლოგიით ამ ჯგუფს პირველი ჰომოტოპიის ჯგუფი ეწოდება. ანალოგიურად იმარტება მაღალი განზომილების ჰომოტოპიის ჯგუფები $\pi_n(X)$, $n=1,2,3,...$, რომლებიც მაღალგანზომილებიან ხვრელებს (თუ ღრუებს) აკონტროლებენ. ჰომოტოპიის ჯგუფები ინვარიანტებს წარმოადგენენ – ექვივალენტურ ფიგურებს (ტოპოლოგიურ სივრცეებს) ერთნაირი ჰომოტოპიის ჯგუფები აქვთ.

პუანკარეს შემოჰყავს ხვრელების აღწერის განსხვავებული მეთოდიც, რომელსაც მივყავართ სხვა ინვარიანტებამდე - ჰომოლოგიის ჯგუფებამდე. კვლავ განვიხილოთ სხვადასხვა მარყუჟები X ფიგურაში. მარყუჟს (სხვა ტერმინოლოგიით – ციკლს) 0-ის ჰომოლოგიური ჰქვია, თუ შესაძლებელია მისი “ამოქოლვა”, “ამოვსება” X-ში მოთავსებული სამკუთხედებით.

ამ ფიგურაში



ციკლი a ამოვსებადია სამკუთხედებით, ხოლო ციკლი b კი არა, ამას კვლავ ხვრელი უშლის ხელს. ისევე, როგორც ჰომოტოპიის ჯგუფის შემთხვევაში, არაამოვსებადი (არაამოქოლვადი) ციკლების მეშვეობით განიმარტება ფიგურის ჰომოლოგიის ჯგუფი $H_1(X)$. ანალოგიურად განიმარტება მაღალი განზომილებს ჰომოლოგიის ჯგუფები $H_n(X)$, $n=1,2,3,\ldots$, რომლებიც მაღალგანზომილებიან ხვრელებს (თუ ღრუებს) აკონტროლებენ.

თუ ციკლი ნულის ჰომოტოპიურია (მოჭიმვადია), მაშინ ის ნულის ჰომოლოგიურიცაა (ამოვსებადია). მაგრამ პირიქით კი არა - შესაძლოა ციკლი ნულის ჰომოლოგიური იყოს (ე.ი. აჩენდეს ნულოვან ელემენტს ჰომოლოგიის ჯგუფში), მაგრამ არ იყოს ნულის ჰომოტოპიური, ე.ი. აჩენდეს არანულოვან ელემენტს ჰომოტოპიის ჯგუფში.

პირველ ფიგურაში (უყურო ქოთანში), ციკლი a (ქოთნის ტუჩი) ამოვსებადიცაა და მოჭიმვადიც, ე.ი. ის ნულის ჰომოლოგიურიცაა და ნულის ჰომოტოპიურიც, ამიტომ ის აჩენს ნულოვან ელემენტს როგორც $H_1(X)$-ში, ასევე $\pi_1(X)$ –ში. მეორე ფიგურაში (ყურიან ქოთანში) კი ციკლი b ამოვსებადია, მაგრამ არამოჭიმვადი, ამიტომ ის აჩენს ნულოვან ელემენტს $H_1(X)$-ში, მაგრამ არანულოვანს $\pi_1(X)$ –ში.
საზოგადოდ ჰომოლოგიის და ჰომოტოპიის ჯგუფები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან. ჰომოტოპიის ჯგუფები, განსხვავებით ჰომოლოგიის ჯგუფებისგან, ძალიან ძნელი

გამოსათვლელია. დღესაც ურთულეს პრობლემად რჩება სფეროების ჰომოტოპიების გამოთვლა.

მნიშვნელოვანი მიღწევა იყო ე.წ. პუანკარეს ორადობის აღმოჩენა: n-განზომილებიანი მრავანაირობისათვის დამატებითი განზომილებების (კო)ჰომოლოგიები ერთმანეთს ემთხვევიან $H_k(X) = H^{n-k}(X)$.

მაღალგანზომილებიანი ჰომოლოგიის ჯგუფების განმარტებამ პუანკარეს მისცა საშუალება განეზოგადებია ეილერის მახასიათებელი $\aleph(X)$ = წვერ.-წიბ.+წახნ., რომელიც მხოლოდ ზედაპირებისათვის იყო ცნობილი, მაღალ განზომილებებზე. ეილერ-პუანკარეს მახასიათებელი განიმარტება როგორც პოლიედრის k-განზომილებიან ელემენტთა ალტერნირებული ჯამი $\aleph(X) = \Sigma\ (-1)^k\ c_k$. ყველაზე არსებითი აქ ის არის, რომ ეს მახასიათებელი ემთხვევა ჰომოლოგიის ჯგუფთა რანგების ალტერნირებულ ჯამს, ე.ი. $\aleph(X) = \Sigma\ (-1)^k\ \mathrm{rank}\ H_k(X)$, რაც ამტკიცებს მახასიათებლის ინვარიანტულობას, ანუ, რომ ტოპოლოგიურად ექვივალენტურ პოლიედრებს ერთი და იგივე ეილერ-პუანკარეს მახასიათებლები აქვთ.

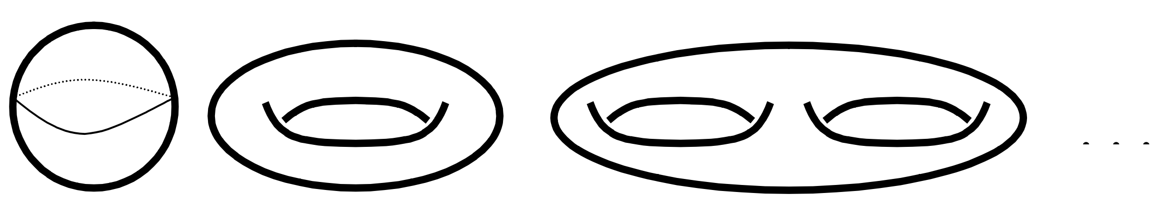
ჰომოლოგიების და კოჰომოლოგიების ინვარიანტულობა

ჰომოლოგიისა და ჰომოტოპიის ჯგუფები ინვარიანტებს წარმოადგენენ: თუ X და Y ფიგურები (სივრცეები) ექვივალენტუნი არიან, ანუ ერთი მეორეზე მიიყვანება უწყვეტი დეფორმაციით, მაშინ მათი ჰომოლოგიისა და ჰომოტოპიის ჯგუფები ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\mathbf{X \approx Y \ \Rightarrow\ H_n(X) = H_n(X),\ \pi_n(X) = \pi_n(X),\ n = 0,1,2,\dots\ .}$$

შებრუნებული იმპლიკაცია საზოგადოდ სწორი არ არის: ჰომოლოგიისა და ჰომოტოპიის ჯგუფების თანამთხვევა არ იწვევს სივრცეების ჰომოტოპიურად ექვივალენტურობას. ეს არც არის მოსალოდნელი: არ შეიძლება შედარებით მარტივმა ალგებრულმა ობიექტებმა – ჰომოტოპიისა და ჰომოლოგიის ჯგუფებმა სრულად აღწერონ რთული გეომეტრიული ობიექტები. სხვა სიტყვებით ეს ნიშნავს, რომ ჰომოლოგიისა და ჰომოტოპიის ჯგუფები, ერთად განხილულნიც კი, არ არიან სრულ ინვარიანტები. მაგრამ იქნებ ჰომოლოგიისა და ჰომოტოპიის ჯგუფები წარმოადგენენ სრულ ინვარიანტებს შედარებით მარტივი სივრცეებისათვის?

ჯერ კიდევ პუანკარემდე იყო ცნობილი ორგანზომილებიანი გლუვი ჩაკეტილი ზედაპირების სრული კლასიფიკაცია: ყოველი ასეთი ზედაპირი ექვივალენტურია ერთერთისა შემდეგი სერიიდან



სფრო, ტორი, ორხვრელიანი ტორი, და ა.შ. ეს სივრცეები კი ცალსახად ხასიათდება მათი ჰომოლოგიებით.

1900 წელს პუანკარემ გამოთქვა შემდეგი ჰიპოთეზა: თუ რაიმე n-განზომილებიანი მრავალნაირობის ჰომოლოგიის ჯგუფები ემთხვევა n-განზომილებიანი სფეროს ჰომოლოგიის ჯგუფებს, მაშინ ეს მრავალანაირობა სფეროა. 4 წლის შემდეგ მან თავად მოიყვანა ამ ჰიპოტეზის კონტრმაგალითი: მან ააგო 3-განზომილებიანი მრავალნაირობა X ისეთი, რომ $H_*(X) = H_*(S^3)$, მაგრამ $X \neq S^3$, ანუ X-ს აქვს ისეთი ჰომოლოგიები, როგორც სფეროს, მაგრამ ის არ არის ექვივალენტური სფეროსი. ამ მაგალითში $\pi_1(X) \neq \pi_1(S^3)$, ე.ი. X-ის ჰომოლოგიის ჯგუფები კი ემთხვევა სფეროსას, მაგრამ ფუნდემენტული ჯგუფები განსხვავდება.

ამის შემდეგ, უკვე 1904 წელს, პუანკარემ ჩამოაყალიბა შესწორებული ჰიპოთეზა: თუ რაიმე n-განზომილებიანი (ჩაკეტილი და ორიენტირებადი) მრავალნაირობის ჰომოლოგიის ჯგუფები ემთხვევა n-განზომილებიანი სფეროს ჰომოლოგიის ჯგუფებს და ემთხვევიან მათი ფუნდამენტური ჯგუფებიც, მაშინ ეს მრავალნაირობა სფეროა.

XX საუკუნეში იყო მრავალი ცდა ამ ჰიპოთეზის დამტკიცებისა და მიღწეული იყო მნიშვნელოვანი წარმატებებიც: 1960 წელს სტივენ სმეილმა აჩვენა, რომ ჰიპოთეზა სამართლიანია 4-ზე მეტი n-ებისათვის. 1981 წელს მაიკლ ფრიდმანმა აჩვენა ჰიპოთეზის სამართლიანობა n=4-თვის. დარჩა შემთხვევა n=3! მთელი XX საუკუნის განმავლობაში პრობლემა n=3-თვის გადაუჭრელი იყო.

როგორი მდგომარეობაა ამჟამად?

IX და XX საუკუნეების მიჯნაზე (1900 წელს) დავიდ ჰიბერტმა ჩამოაყალიბა თავისი ცნობილი პრობლემები. ამ პრობლემებმა მნიშვნელოვანწილად განსაზღვრეს მათემატიკის განვითარება XX საუკუნეში.

XX და XXI საუკუნეების მიჯნაზე წამყვანმა მატემატიკოსებმა (Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles, Edward Witten) ჩამოაყალიბეს პრობლემები XXI საუკუნისათვის, სახელწოდებით "ათასწლეულის პრიზის პრობლემები". სულ ჩამოყალიბებულია 7 პრობლემა, და მათ შორის არის პუანკარეს ჰიპოთეზაც. საგულისხმოა, რომ ამ 7 პრობლემიდან თითეულის ამოხსნისათვის დაწესებულია პრემია მილიონი დოლარის ოდენობით. სათანადო კომიტეტი შეუდგება ამოხსნის განხილვას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ეს ამოხსნა გამოქვეყნებული იქნება ავტორიტეტულ ჟურნალში და გამოქვეყნების შემდეგ 2 წელი იქნება გასული. ამით, ეტყობა, სურდათ აეცილებიათ მოყვარული მათემატიკოსების შემოტევები, როგორც ეს ფერმას თეორემის შემთხვევაში იყო.

გავრცელდა ცნობა, რომ ახალგაზრდა პეტერბურგელმა მათემატიკოსმა გრიგორი პერელმანმა გამოაქვეყნა (ჯერ პრეპრინტის სახით) პუანკარეს ჰიპოთეზის დამტკიცება. ეს დამტკიცება უკვე იყო მოხსენებული რამდენიმე ცნობილ სემინარზე და ისეთმა ავტორიტეტულმა მათემატიკოსმა, როგორიც ჯონ მილნორია, გამოხატა ენთუზიაზმი პერელმანის დამტკიცების მიმართ. ასე, რომ, მოსალოდნელია, რომ XXI საუკუნის 7 პრობლემათაგან ერთერთი საუკუნის დასაწყისშივე ჩაითვალოს გადაჭრილად.

პუანკარეს მიერ დაფუძნებული ალგებრული ტოპოლოგია ინტენსიურად ვითარდებოდა მთელი XX საუკუნის განმავლობაში, და ამაში როლი ქართველ ტოპოლოგებსაც აქვთ. ტოპოლოგიური სკოლა საქართველოში გიორგი ჭოღოშვილმა დააფუძნა. პუანკარეს დროს ტოპოლოგები ძირითადად განიხილავდნენ ე.წ. “კარგ” სივრცეებს, პოლიედრებსა და მრავანაირობებს. შემდეგ დადგა საჭიროება ჰომოლოგიის თეორიის უფრო ზოგად სივრცეებზე გავრცელებისა. ამ საქმიანობაში იყვნენ ჩართულნი ჩეხი, ალექსანდერი, ალექსანდროვი, კოლმოგოროვი, და მათ შორის გიორგი ჭოღოშვილიც. შემდგომ ამავე თემატიკაში ჩაერთვნენ მისი პირველი თაობის მოწაფეები – ნოდარ ბერიკაშვილი, ხვედრი ინასარიძე, და აგრეთვე შემდგომი თაობებიც – დურსუნ ბალაძე, ლეონარდ მძინარიშვილი, ლაზარე ზამბახიძე, გურამ ბერიშვილი, მიხეილ ბალავაძე, გურამ ლაითაძე. ამჟამად საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტის გეომეტრიისა და ტოპოლოგიის განყოფილებაში მიმდინარეობს გამოკვლევები ჰომოლოგიის და ჰომოტოპიის თეორიის სხვადასხვა საკითხებისა. გიორგი ჭოღოშვილის დაფუძნებულ ქართველ ტოპოლოგთა სკოლას დღესაც დიდი საერთაშორისო აღიარება და ავტორიტეტი აქვს.

თორნიკე ქადეიშვილი

ალგებრა

ჯგუფები

განმარტება. ჯგუფი ეწოდება სიმრავლეს G ოპერაციით

$$\mu : G\times G \to G, \ \mu(a,b) = a * b,$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1. ასოციატურობა: $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. ერთეული: $\exists\, e \in R$ ი.რ. ყოველი ელემენტისათვის $a \in R$ სრულდება პირობა $a * e = e * a = a$
3. მოპირდაპირე: $\forall a \in R\ \exists\, \hat{a}$ ი.რ. $a * \hat{a} = \hat{a} * a = e$;

ჯგუფი კომუტატურია (აბელისაა) თუ დამატებით სრულდება აქსიომა
4. $a * b = b * a$.

აბელის ჯგუფებისათვის გამოიყენება ადიტიური ჩაწერა:
$a*b=a+b$, $e = 0$, $\hat{a} = -a$,
ხოლო არააბელურებისთვის მულტიპლიკატური: $a *b=a\cdot b$, $e = 1$, $\hat{a} = a^{-1}$.

მაგალითები

1. ლუწი რიცხვები შეკრების მიმართ აბელის ჯგუფია, კენტები კი არა.
2. $(Z, +)$ ჯგუფია;
3. რაციონალური რიცხვები გამრავლების მიმართ არ არის ჯგუფი.
4. $(Q \setminus 0, \cdot)$ ჯგუფია.
5. $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ჯგუფია შემდეგი ოპერაციის მიმართ:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

6. $Z_n = \{0,1, \dots , n - 1\}$ ჯგუფია შემდეგი ოპერაციის მიმართ:

$$a+b=\begin{cases} a+b & if\ \ a+b<n \\ a+b-n & if\ \ a+b\geq n \end{cases}$$

7. არააბელური ჯგუფის მაგალითია არაგადაგვარებულ მატრიცთა ჯგუფი მატრიცთა გამრავლების მიმართ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}$$

ხოლო

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$$

თეორემა. ჯგუფში ნეიტრალური ელემენტი ერთადერთია.

თეორემა. ჯგუფში ყოველ ელემენტს გააჩნია მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე.
დამტკიცება.

ქვეჯგუფი

განმარტება. ჯგუფის ქვესიმრავლეს $H \subset G$ ეწოდება ქვეჯგუფი, თუ H თვითონ არის ჯგუფი იგივე ოპერაციის მიმართ, ანუ სრულდება პირობები

1. თუ $a,b \in H$, მაშინ $a * b \in H$;
2. $e \in H$;
3. თუ $a \in H$, მაშინ $\hat{a} \in H$

მაგალითები

1. $N \subset Z$ არ არის ქვეჯგუფი.
2. კენტი რიცხვების სიმრავლე არ არის Z-ის ქვეჯგუფი.
3. ლუწი რიცხვების სიმრავლე $2Z$ არის Z-ის ქვეჯგუფი.
4. n-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე nZ არის Z-ის ქვეჯგუფი.
5. $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5)$ ჯგუფის ქვესიმრავლეთაგან ქვეჯგუფებია მხოლოდ $\{0\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2,3,4,5)$.

თეორემა. $nZ \subset Z$ ქვეჯგუფია, პირიქითაც, Z-ის ნებისმიერი ქვეჯგუფი nZ სახისაა.

ჰომომორფიზმები

განმარტება. ჯგუფების ასახვას

$$f : G \to G'$$

ეწოდება ჰომომორფიზმი, თუ სრულდება შემდეგი პირობები

1. $f(e) = e'$ ($f(0) = 0$ ადიტიურ ჩაწერაში);
2. $f(a * b) = f(a) * f(b)$ ($f(a + b) = f(a) + f(b)$ ადიტიურ ჩაწერაში).

მაგალითები

1. ასახვა $f : Z \to Z$ მოცემული ტოლობით $f(k) = 3k+1$ არ არის ჰომომორფიზმი.

2. ასევე არ არის ჰომომორპიზმი ასახვა $f(k) = k^2$:

3. ასახვა $f : Z \to Z$ მოცემული ტოლობით $f(x) = 3x$ ჰომომორფიზმია.

5. ასახვა $f : Z \to Z$ მოცემული ტოლობით $f(x) = nx$ ჰომომორფიზმია, პირიქითაც, ნებისმიერი ჰომომორფიზმი $f : Z \to Z$ აუცილებლად $f(x) = nx$ ტიპისაა.
6. ასახვა $f : Z \to Z_2$ მოცემული ტოლობებით $f(2n) = 0, f(2n+1) = 1$ ჰომომორფიზმია.

7. აღწერეთ ჰომომორფიზმები $Z_2 \to Z$.

8. დაწერეთ ჰომომორფიზმი $(R,+) \to (R_+, \cdot)$, აქ ეს უკანასკნელი დადებით რიცხვთა მულტიპლიკატური ჯგუფია.

9. დაწერეთ ჰომომორფიზმი $(R_+, \cdot) \to (R,+)$.

ანასახი და ბირთვი

განმარტება. $f: G \to G'$ ჰომომორფიზმის ანასახი ეწოდება ქვესიმრავლეს

$$\mathrm{Im}\, f = \{g \in G',\ g = f(h)\}.$$

Im f ყოველთვის არაცარიელია: $e' = f(e) \in \mathrm{Im}\, f$.

განმარტება. $f: G \to G'$ ჰომომორფიზმის ბირთვი ეწოდება ქვესიმრავლეს

$$\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G,\ f(g) = e'\}$$

($f(g) = 0$ ადიტიურ ჩაწერაში). Ker f ყოველთვის არაცარიელია: $e \in \mathrm{Ker}\, f$.

მაგალითები

1. $f: Z \to Z$, $f(x) = 3x$ ჰომომორფიზმისთვის
$\mathrm{Im}\, f = \{ \ldots, -6,-3,0,3,6,\ldots\}$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
2. $f: Z \to Z_2$, $f(2x) = 0$, $f(2x+1) = 1$ ჰომომორფიზმისთვის
$\mathrm{Im}\, f = Z_2$, $\mathrm{Ker}\, f = \{ \ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots \}$.

თეორემა. Im f ქვეჯგუფია.

თეორემა. Ker f ქვეჯგუფია.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $f: H \to G$ ინექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mathrm{Ker}\, f = e$.

მონომორფიზმი, ეპიმორფიზმი, იზომორფიზმი

მოდით ამის შემდეგ მხოლოდ აბელის ჯგუფებზე ვილაპარაკოთ.

განმარტება.
მონომორფიზმი ქვია ინექციურ ჰომომორფიზმს.
ეპიმორფიზმი ქვია სიურექციულ ჰომომორფიზმს.
იზომორფიზმი ქვია ბიექციურ ჰომომორფიზმს.

განმარტება. ჰომომორფიზმს $f: H \to G$ აქვს მარჯვენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $g: G \to H$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარჯვენა შებრუნებული, მაშინ ის ეპიმორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ეპიმორფულობა არ იწვევს მარჯვენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარჯვენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს

ჰომომორფიზმი. მაგ. $f: Z \to Z_2$, $f(2n)=0$, $f(2n+1)=1$ (აქ საკმარისია ითქვას მხოლოდ $f(1)=1$).

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f}: \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ აქვს მარცხენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g}: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ $g \circ f = id_H$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარცხენა შებრუნებული, მაშინ ის მონომორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ინექციულობა არ იწვევს მარცხენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარცხენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს ჰომომორფიზმი. მაგ. $g: Z \to Z$, $g(n)=2n$.

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f}: \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ აქვს შებრუნებული (შებრუნებადია) თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g}: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G$, $g \circ f = id_H$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $\mathrm{f}: \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის შბრუნებადია.

ზუსტი მიმდევრობები

აბელის ჯგუფთა და ჰოჰომორფიზმთა მიმდევრობას

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ქვია ზუსტი, თუ $\operatorname{Im} f = Ker\, g$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ ეპიმორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ მონომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B.$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0.$.

მაგალითები

1. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1)=2$, $f(1)=1$).

2. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_n \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1)=n$, $f(1)=1$).

3. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_4 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1)=2,\ f(1)=1$).

3'. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_2 \times Z_2 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1)=(1,0),\ f(1,0)=0,\ f(0,1)=1$).
მიაქციეთ ყურადღება, $Z_4=\{0,1,2,3\}$ და $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ (კოორდინატობრივი შეკრებით) ორივე 4 ელემენტიანი, მაგრამ ერთმანეთისგან განსხვავებული ჯგუფია. ეს ფენომენი დასაბამს აძლევს გაფართოებათა თეორიას.

5. ფაქტორჯგუფი

ვთქვათ, A აბელის ჯგუფია, ხოლო $B \subset A$ მისი ქვეჯგუფი. შემოვიტანოთ A-ში ასეთი მიმართება: $a \sim b$ თუ $a-b \in B$.

თეორემა. ეს ექვივალენტობის მიმართებაა.

A/B იყოს შესაბამისი ფაქტორსიმრავლე. შემოვიტანოთ ამ ფატორსიმრავლეში ასეთი შეკრების ოპერაცია: ნებისმიერი ორი ექვივალენტობის კლასისათვის $\alpha, \alpha' \in A/B$ განვმარტოთ

$$\alpha + \alpha' := cl(a+a')$$

აქ $a \in \alpha,\ a' \in \alpha'$ ამ ექვივალენტობის კლასებიდან ამორჩეული ნებისმიერი ელემენტებია, ხოლო $cl(x)$ აღნიშნავს $x \in A$ ელემენტის ექვივალენტობის კლასს ფაქტორსიმრავლეში A/B.

თეორემა. ეს ოპერაცია კორექტულია და აქცევს ფაქტორსიმრავლეს A/B აბელის ჯგუფად.

ამ ჯგუფს ფატორჯგუფი ქვია.
განმარტება. $f: A \to B$ ჰომომორფიზმის კობირთვი $Co\ker f$ ეწოდება ფაქტორჯგუფს $B/\operatorname{Im} f$.

მაგალითები

1. ააგეთ იზომორფიზმი $Z/2Z$ ფაქტორჯგუფსა და Z_2-ს შორის.

2. ააგეთ იზომორფიზმი Z/nZ ფაქტორჯგუფსა და Z_n-ს შორის.

3. ნეტა რა არის R/Z?

4. ჰომომორფიზმისთვის $f: Z \to Z,\ f(1)=5$ აღწერეთ $Ker f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

5. ჰომომორფიზმისთვის $f: A \to A \times B,\ f(a)=(a,0)$ აღწერეთ $Ker f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

6. ჰომომორფიზმისთვის $f: Z_2 \to Z_4,\ f(1)=2$ აღწერეთ $Ker\, f, \operatorname{Im} f$ და $Co\ker f$.

რგოლები და ველები

განმარტება. რგოლი ეწოდება სიმრავლეს R აღჭურვილს ორი ოპერაციით, "შეკრებითა" და "გამრავლებით" a + b, a· b, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ აქსიომებს

1. (R, +) კომუტატური ჯგუფია;
2. შეკრება და გამრავლება დაკავშირებულნი არიან დისტრიბუციულობის კანონებით: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3. გამრავლება ასოციატურია: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

რგოლს ჰქვია *ერთეულიანი*, თუ დამატებით სრულდება აქსიომა

4. არსებობს ელემენტი $e \in R$, რომელიც გამრავლების მიმართ ნეიტრალურ ელემენტს წარმოადგენს: $a \cdot e = e \cdot a = a$;

რგოლს ჰქვია *კომუტატური*, თუ დამატებით სრულდება პირობა

5. $a \cdot b = b \cdot a$.

განმარტება. რგოლს $(R, +, \cdot)$ ეწოდება ველი, თუ ის ერთეულიანია, კომუტატურია და ყოველ არანულოვან ელემენტს გააჩნია შებრუნებული, ანუ $\forall$ a $\neq 0 \in R$ $\exists\, \hat{a} \in R$ ი.რ. $a \cdot \hat{a} = e$.

მაგალითები.

1. $(Z, +, \cdot)$ რგოლია, მაგრამ არ არის ველი.
2. $(Q, +, \cdot)$ ველია.
3. Z_4 რგოლია შემდეგი ოპერაციების მიმართ:

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	1	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

მაგრამ არ არის ველი:

4. Z_3 ველია.
5. **კომპლექსურ რიცხვთა ველი.** $R^2 = \{(a,b),\ a,b \in R\}$ შემდეგი ოპერაციებით $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$ ველია.

განმარტება. R რგოლის არანულოვან ელემენტს a ჰქვია 0-ის გამყოფი, თუ არსებობს არანულოვანი $b \in R$ ისეთი, რომ $a \cdot b = 0$. რგოლს ჰქვია უნულგაყოფო, თუ მას ნულის გამყოფები არ აქვს.

მაგალითები.

1. Z და Q უნულგამყოფო რგოლებია.
2. Z_4- ს აქვს ნულის გამყოფი: $2 \cdot 2 = 0$.

თეორემა. ველს არ შეიძლება ჰქონდეს ნულის გამყოფები.

თეორემა. Z_n უნულგამყოფოა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც n მარტივია.

თეორემა. Z_n ველია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც n მარტივია.

ამოცანები

1. 2+4 Z_5-ში არის
(ა) 6 (ბ) 0 (გ) 1 (დ) 3

2. Z_6-ში 4-ის მოპირდაპირე (შეკრების მიმართ) არის
(ა) 6 (ბ) 0 (გ) 1 (დ) 2

3. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z-ის ქვეჯგუფია
(ა) ნატურალური რიცხვები (ბ) კენტი რიცხვები
(გ) 3-ის ჯერადი რიცხვები (დ) სრული კვადრატები

4. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z-ის ქვეჯგუფია
(ბ) დადებითი რიცხვები (ბ) უარყოფითი რიცხვები
(გ) 0 (დ) 100-ზე ნაკლები რიცხვები

5. ამ ქვესიმრავლეთაგან Z_4-ის ქვეჯგუფია
(ა) {1,2,3} (ბ) {0,1,2} (გ) {2,4} (დ) {0,2}

6. ამ ასახვათაგან $f: R \to R$ რომელია ჰომომორფიზმი
(ა) $f(x) = x^2$ (ბ) $f(x) = \sin x$ (გ) $f(x) = 2^x$ (დ) $f(x) = 5x$

7. (2,4) და (1,3) კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლია
(ა) (2,12) (ბ) (-10,10) (გ) (10,-10) (დ) (14,10)

8. (0,1) კომპლექსური რიცხვის კვადრატია
(ა) (0,-1) (ბ) (1,0) (გ) (1,1) (დ) (-1,0)

9. (0,1) კომპლექსური რიცხვის შებრუნებულია
(ა) (1,0) (ბ) (0,0) (გ) (1,1) (დ) (0,-1)

10. ამ რგოლთაგან რომელი არ არის ველი
(ა) რაციონალური რიცხვები Q (ბ) მთელი რიცხვები Z
(გ) ნამდვილი რიცხვეები R (დ) კომპლექსური რიცხვები C

11. რომელია ამ რგოლთაგან ველი
(ა) Z_4 (ბ) Z_3 (გ) Z_6 (დ) Z

12. რომელია ამ რგოლთაგან უნულგამყოფო
(ა) Z_4 (ბ) Z_8 (გ) Z_6 (დ) Z

13. ამ რგოლთაგან რომელს აქვს 0-ის გამყოფები
(ა) Z_2 (ბ) Z_3 (გ) Z_6 (დ) Z

14. $3 \cdot 4$ Z_5-ში არის
(ბ) 12 (ბ) 2 (გ) 0 (დ) 3

15. Z_5-ში 4-ის შებრუნებული (გამრავლების მიმართ) არის
(ა) 0,25 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 3

16. Z_6-ში 0-ის გამყოფია
(ა) 3 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

17. Z_7 ში 2-ის მოპირდაპირე შეკრების მიმართ არის
(ა) -2 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

18. Z_7 ში 2-ის მოპირდაპირე გამრავლების მიმართ არის
(ა) 0.5 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

19. Z_7 ში 3 5 არის
(ა) 0 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

20. Z_7 ში 3:2 არის
(ბ) 0 (ბ) 4 (გ) 1 (დ) 5

თორნიკე ქადეიშვილი

კატეგორიები

განმარტება. კატეგორია $\mathbb{C}$ შედგება შემდეგი მონაცემებისგან:

1. ობიექტები $Ob(\mathbb{C}): A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$;
2. ობიექტთა ყოველი წყვილისთვის $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ მორფიზმთა სიმრავლე $Mor(A, B)$;
3. ყოველი ობიექტისთვის $A \in Ob(\mathbb{C})$ ელემენტი $id_A \in Mor(A, A)$;
4. კომპოზიციის კანონი: ობიექტთა ყოველი სამეულისთვის $A, B, C \in Ob(\mathbb{C})$ მოცემულია კომპოზიციის წესი - ასახვა
$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \to Mor(A, C), (f, g) \mapsto g \circ f$,

და სრულდება შემდეგი ორი პირობა

1. $id_B \circ f = f = f \circ id_A$;
2. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

მაგალითები

1. კატეგორია $Sets$: ობიექტებია სიმრავლეები, მორფიზმები - ასახვები
$Mor(A, B) = \{f : A \to B\}$, id_A იგივური ასახვა, კომპოზიცია - კომპოზიცია.

2. კატეგორია $Groups$: ობიექტები - ჯგუფები, მორფიზმები - ჰომომორფიზმები,
$$Mor(A, B) = \{f : A \to B, \ f(a * a') = f(a) * f(a')\},$$
id_A იგივური ჰმომორფიზმი, კომპოზიცია - კომპოზიცია.

3. კატეგორია $Posets$: ობიექტები - ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეები $(A, \leq)$, მორფიზმები - მონოტონური ასახვები
$$Mor(A, B) = \{f : A \to B, \ a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a')\},$$
id_A იგივური ასახვა, კომპოზიცია - კომპოზიცია.

4. კატეგორია Top : ობიექტები - ტოპოლოგიური სივრცეები, მორფიზმები - უწყვეტი ასახვები, id_A იგივური ასახვა, კომპოზიცია - კომპოზიცია.

5. კატეგორია Top_* : ობიექტები - პუნქტირებული (ფიქსირებულწერტილიანი) ტოპოლოგიური სივრცეები $(X, x_0), \ x_0 \in X$, მორფიზმები - ფიქსირებული წერტილის შემნახავი უწყვეტი ასახვები
$$Mor((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y, f(x_0) = y_0\},$$
id_A იგივური ასახვა, კომპოზიცია - კომპოზიცია.

6. ერთობიექტიანი კატეგორია: ერთი ობიექტი pt, მორფიზმები - სიმრავლე $M = Mor(pt, pt)$ აღჭურვილი ასოციატუტი ოპერაციით, ერთეულით, მაგრამ შებრუნებულების გარეში (მონოიდი - თითქმის ჯგუფი).

7. ნატურალური რიცხვები $\mathbb{N}$ კატეგორიაა ასეთი სტრუქტურით: ობიექტებია ნატურალური რიცხვები $1,2,3,\ldots,n,\ldots$, მორფიზმები: $Mor(m,n)$ არის ცარიელი, თუ $m > n$ და ერთწერტილიანი სიმრავლე, თუ $m \le n$. ასეთსავე კატეგორიას ქმნის ნებისმიერი (წინა) (ნაწილობრივ) დალაგებული სიმრავლე.

8. ვთქვათ $\mathbb{C}$ რაიმე kატეგორიაა. მისი *ორადული* კატეგორია $\mathbb{C}^{op}$ ასე იმარტება:

$$Ob(\mathbb{C}^{op}) = Ob(\mathbb{C}),\ Mor_{\mathbb{C}^{op}}(A,B) = Mor_{\mathbb{C}}(B,A).$$

იზომორფიზმი, ენდომორფიზმი, ავტომორფიზმი

მორფიზმს $f \in Mor(A,B)$ ეწოდება იზომორფიზმი თუ $\exists\ g \in Mor(B,A)$ ი.რ.

$$g \circ f = id_A \text{ და } f \circ g = id_B .$$

ორ ობიექტი $A, B \in Ob(C)$ *იზომორფულია* თუ არსებობს ერთი მაინც იზომორფიზმი $f \in Mor(A,B)$. იზომორფულობა ექვივალენტობის მიმართებაა (აბა დაამტკიცეთ!).

მორფიზმს $f \in Mor(A,A)$ ეწოდება ენდომორფიზმი. A ობიექტის ენდომორფიზმთა სიმრავლე ასე აღინიშნება $End(A) = Mor(A,A)$. ყოველი A ობიექტისათვის $End(A)$ მონოიდია (აბა დაამტკიცეთ!).

ენდომორფიზმს, რომელიც იზომორფიზმიცაა *ავტომორფიზმი* ქვია. A ობიექტის ავტომორფიზმთა სიმრავლე ასე აღინიშნება $Aut(A) \subset End(A)$. ყოველი A ობიექტისათვის $Aut(A)$ ჯგუფია (აბა დაამტკიცეთ! $End(A)$ რომ მონოიდია ხომ უკვე ვიცით, გვრჩება ვაჩვენოთ, რომ (ა) ორი ავტომორფიზმის კომპოზიცია ავტომორფიზმია, და (ბ) ყოველი ავტომორფიზმი შებრუნებადია).

სიურექცია, ინექცია, ბიექცია

განმარტება. სიმრავლეთა კატეგორიაში *Sets* მორფიზმს (ასახვას) $f : X \to Y$ ეწოდება სიურექცია (სხვაგვარად - ასახვა ”ზე”) თუ
$\operatorname{Im} f = Y$,
ანუ $\forall y \in Y\ \exists x \in X,\ f(x) = y$,
ანუ $\forall y \in Y\quad f^{-1}(y) \ne \varnothing$.

თეორემა. სიმრავლეთა კატეგორიაში *Sets* მორფიზმი $f : X \to Y$ სიურექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მისი მარჯვენა შებრუნებული - ასახვა $g : Y \to X$ ი.რ. $f \circ g = id_Y : Y \to Y$.

დავამტკიცოთ. ავაგოთ $g:Y\to X$ ასე: ავიღოთ რაიმე $y\in Y$, ხომ არის ჩვენი f სიურექცია, ამიტომ არსებობს წინასახე $x\in X$ ი.რ. $f(x)=y$, ჰოდა განვმარტოთ $g(y):=x$, აქედან $f\circ g=id_Y$ ავტომატურად გამოდის.

მიაქციეთ ყურადღება, ეს g ძალიან არაცალსახად აიგო, ჩვენ ხომ $g(y)$-ად ავიღეთ y-ის *ნებისმიერი* წინასახე. აქ კიდევ ერთი პრობლემაა სამომავლოდ: თუ იგივეს დამტკიცებას მოვისურვებთ კატეგორიაში $Groups$ (ან Top) არავითარი გარანტია არ გვექნება, რომ ასე ნებისმიერად აგებული g ჰომომორფიზმი (ან უწყვეტი) იქნება.

განმარტება. სიმრავლეთა კატეგორიაში $Sets$ მორფიზმს (ასახვას) $f:X\to Y$ ეწოდება ინექცია თუ
$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,
ანუ $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$,
ანუ $\forall y\in Y \quad f^{-1}(y)=\begin{cases}\varnothing\\ pt\end{cases}$.

თეორემა. სიმრავლეთა კატეგორიაში $Sets$ მორფიზმი (ასახვა) $f:X\to Y$ ინექცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მისი მარცხენა შებრუნებული - ასახვა $g:Y\to X$ ი.რ. $g\circ f=id_X:X\to X$.

დავამტკიცოთ. ავაგოთ $g:Y\to X$ ასე: ავიღოთ რაიმე $y\in Y$, ხომ არის ჩვენი f ინექცია, ამიტომ მისი წინსახე ან ცარიელია, ან ერთწერტილიანი. თუ არაცარიელია, მაშინ იყოს $g(y)$ ის ერთადერთი x რომლისთვისაც $f(x)=y$, ხოლო თუ ამ ჩვენს y-ს არ აქვს წინსახე, მაშინ იყოს $g(y)$ *რომელიმე* $x\in X$, სულ ერთია, რომელი, მაინც არ ექნება მნიშვნელობა. ამით ასახვა g უკვე განმარტებულია, დარჩა ვაჩვენოთ, რომ ასე აგებული g მართლაც მარცხენა შებრუნებულია. ეს თქვენ აჩვენეთ.

ისევ მიაქციეთ ყურადღება, ეს შებრუნებული კვლავ ძალიან არაცალსახადაა აგებული (ნებისმიერად არჩეული $g(y)$ როცა y-ს არ აქვს წინსახე), ამასთან კატეგორიებში $Groups$ ან Top კვლავ დადგება ჰომომორფიზმობის ან უწყვეტობის პრობლემა.

განმარტება. სიმრავლეთა კატეგორიაში $Sets$ მორფიზმს (ასახვას) $f:X\to Y$ ეწოდება ბიექცია თუ ის სიურექციაცაა და ინექციაც.

თეორემა. სიმრავლეთა კატეგორიაში $Sets$ მორფიზმი (ასახვა) $f:X\to Y$ ბიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მისი (ორმხრივი) შებრუნებული - ასახვა $g:Y\to X$ ი.რ. $f\circ g=id_Y:Y\to Y$ და $g\circ f=id_X:X\to X$.

(აბა დაამტკიცეთ! აქ ასეთი პრობლემა გაჩნდება: f-ის სიურექციულობის გამო მას აქვს მარჯვენა შებრუნებული, ვთქვათ g_{right}, ხოლო f-ის ინექციულობის გამო მას აქვს მარცხენა შებრუნებული g_{left}, მაგრამ ვინ თქვა, რომ ეს მარჯვენა და მარცხენა

შებრუნებულები ერთმანეთის ტოლია? კი, ტოლია, ამის საჩვენებლად განიხილეთ კომპოზიცია $g_{left} \circ f \circ g_{right}$)

როგორც ვხედავთ ეს განმარტებები ჩამოყალიბებულია ელემენტების ტერმინებში, ამიტომ ვერ გამოდგება ნებისმიერ კატეგორიაში, სადაც, საზოგადოდ, ელემენტებზე ვერ ვისაუბრებთ. აი, თეორემაში მოყვანილი ექვივალენტური პირობები (მარჯვენა - მარცხენა - ორმხრივი შებრუნებულების არსებობა) კი მხოლოდ მორფიზმების (ელემენტების გარეშე) ტერმინებშია ჩამოყალიბებული, ამდენად მათი გადატანა ნებისმიერ კატეგორიაში პრინციპში შესაძლებელია, მაგრამ როგორც ახლა ვნახავთ, მაინც არ ვარგა.

თეორემა. კატეგორიაში $Groups$ თუ ჰომომორფიზმს $f : X \to Y$ აქვს მარჯვენა (მარცხენა) შებრუნებული ჰომომორფიზმი, მაშინ ის სიურექციაა (ინექციაა).

აბა დაამტკიცეთ! თუმცა კარგი, დავამტკიცოთ. ვთქვათ f-ს აქვს მარჯვენა შებრუნებული g_{right}. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყოველ ელემენტს $y \in Y$ აქვს წინასახე. არ უნდა ბევრი ძებნა, ამ წინასახედ გამოდგება $x = g_{right}(y)$, მართლაც,

$$f(x) = f(g_{right}(y)) = (f \circ g_{right})(y) = id_Y(y) = y .$$

ახლა ვთქვათ f-ს აქვს მარცხენა შებრუნებული g_{left}. ვაჩვენოთ, რომ f ინექციაა. თქვენ გააგრძელეთ.

მაგრამ შებრუნებული თეორემა უკვე აღარ არის სამართლიანი - სიურექციულობა (ინექციურობა) არ იწვევს მარჯვენა (მარცხენა) შებრუნებული *ჰომომორფიზმის* არსებობას.

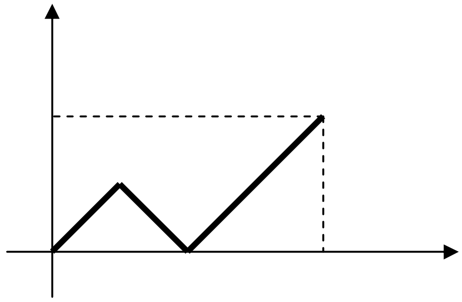
მაგალითი. ჰომომორფიზმი $f : Z \to Z_2$, $f(1) = 1$ სიურექციაა, მაგრამ მას მარჯვენა შებრუნებული ჰომომორფიზმი არ გააჩნია. (აბა დაამტკიცეთ! თუმცა რა დამტკიცება უნდა, ხომ ვიცით (ვიცით?), რომ ამ მიმართულების $g : Z_2 \to Z$ არანულოვანი ჰომომორფიზმი საერთოდ არ არსებობს, ნულოვანი კი ჩვენ არ გამოგვადგება მარჯვენა შებრუნებულად).

მაგალითი. ჰომომორფიზმი $f : Z \to Z$, $f(1) = 2$ ინექციაა, მაგრამ მას მარცხენა შებრუნებული ჰომომორფიზმი არ გააჩნია. (აბა დაამტკიცეთ!)

ორივე ამ მაგალითში არსებობს სიმრავლური შებრუნებული, მაგრამ ის არ არის ჰომომორფიზმი.

ასევეა კატეგორიაში Top, სიმრავლური შებრუნებული, რომლის არსებობა გარანტირებულია თეორემით შეიძლება არ იყოს უწყვეტი.

მაგალითად სიურექციულ უწყვეტ ასახვას $f : [0,4] \to [0,2]$ რომლის გრაფიკია



მარჯვენა შებრუნებული კი აქვს, მაგრამ ის ვერ იქნება უწყვეტი.

ბიექციებისთვის ყველაფერი წესრიგშია:

თეორემა. კატეგორიებში *Sets*, *Groups* მორფიზმი ბიექციურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას აქვს (ორმხრივი) შებრუნებული.

Sets-ში ეს უკვე დავამტკიცეთ. ახლა ვნახოთ *Groups*-ში. აქაც ერთი მხარე უკვე ნაჩვენებია. რჩება: თუ $f: X \to Y$ ბიექციური ჰომომორფიზმია, მაშინ არსებობს შებრუნებული *ჰომომორფიზმი.* მართლაც, ვთქვათ $g: Y \to X$ არის f-ის შებრუნებული *ასახვა* (რომელიც არსებობს, რადგან f ბიექციაა). ერთადერთი, რაც უნდა ვაჩვენოთ, არის g-ს *ჰომომორფულობა.* ავიღოთ რაიმე $y_1, y_2 \in Y$. შევნიშნოთ, რომ f-ის ბიექციურობის (უფრო სწორად სიურექციულობის) გამო არსებობს $x_1, x_2 \in X$ ი.რ. $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$.
ვნახოთ

$$g(y_1 + y_2) = g(f(x_1) + f(x_2)) = g(f(x_1 + x_2)) = id_X(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$$

აქ, მიაქციეთ ყურადღება, გამოვიყენეთ $g \circ f = id_X$, ანუ f-ის ინექციურობაც.
ახლა ვნახოთ

$$g(y_1) + g(y_2) = g(f(x_1)) + g(f(x_2)) = id_X(x_1) + id_X(x_2) = x_1 + x_2$$

იგივეა! რ.დ.გ.

მაგრამ კატეგორიაში *Top* კვლავ ცუდადაა საქმე: იგივური ასახვა $id_X : X_{disc} \to X_{antidisc}$ ბიექციური უწყვეტი ასახვაა, მაგრამ მისი სიმრავლური შებრუნებული $id_X : X_{antidisc} \to X_{disc}$ არ არის უწყვეტი.

მონომორფიზმი, ეპიმორფიზმი, იზომორფიზმი

განმარტება. $\mathbb{C}$ კატეგორიის მორფიზმს $f \in Mor(X,Y),\ f: X \to Y$ ეწოდება *ეპიმორფიზმი* თუ ნებისმიერი ობიექტისათვის Z და მორფიზმთა წყვილისთვის $j,k \in Mor(Y,Z),\ j,k: Y \to Z$ ტოლობა $j \circ f = k \circ f$ იწვევს $j = k$ (მარჯვნიდან შეკვეცის პირობა).

თეორემა. კატეგორიაში *Sets* მორფიზმი $f: X \to Y$ ეპიმორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის სიურექციაა.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ სიურექციულობა იწვევს ეპიმორფულობას. ვთქვათ $j \circ f = k \circ f$ მაგრამ არსებობს $y \in Y$ ისეთი, რომ $j(y) \neq k(y)$. f-ის სიურექციულობის გამო არსებობს $x \in X$ ისეთი, რომ $y = f(x)$. მაშინ $j(y) \neq k(y)$ იწვევს $j(f(x)) \neq k(f(x))$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $j \circ f = k \circ f$.

ახლა პირიქით, ვაჩვენოთ, რომ ეპიმორფულობა იწვევს სიურექციულობას. დავუშვათ, რომ f ეპიმორფიზმია, მაგრამ არაა სიურექციული, ანუ არსებობს $y_0 \in Y$ ისეთი, რომელსაც არ აქვს წინასახე f-ით. ახლა, ავიღოთ $Z = Y$, $j = id_Y$, ხოლო $k: Y \to Y$ განვმარტოთ ასე: $k(y) = y$ ყველა $y \in Y$ ელემენტისათვის, გარდა y_0-სა, ხოლო $k(y_0)$ იყოს რაც გინდა, ოღონდ არა y_0. ხომ ცხადია, რომ $j \neq k$, მაგრამ $j \circ f = k \circ f$, რაც ეწინააღმდეგება f-ის ეპიმორფულობას. რ.დ.გ.

განმარტება. $\mathbb{C}$ კატეგორიის მორფიზმს $f \in Mor(X,Y),\ f: X \to Y$ ეწოდება *მონომორფიზმი* თუ ნებისმიერი ობიექტისათვის Z და მორფიზმთა წყვილისთვის $j,k \in Mor(W,X),\ j,k: W \to X$ ტოლობა $f \circ j = f \circ k$ იწვევს $j = k$ (მარცხნიდან შეკვეცის პირობა).

თეორემა. კატეგორიაში *Sets* მორფიზმი $f: X \to Y$ მონომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ინექციაა.

დამტკიცება.
(ა) ინექციურობა $\Rightarrow$ მონომორფულობა
დავუშვათ, რომ $f: X \to Y$ ინექციაა, $f \circ j = f \circ k$, მაგრამ $j \neq k$, ანუ $\exists w \in W$ ი.რ. $j(w) \neq k(w)$. მაშინ f ის ინექციურობის გამო $f(j(w)) \neq f(k(w))$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $f \circ j = f \circ k$.

(ბ) მონომორფულობა $\Rightarrow$ ინექციურობა
დავუშვათ, რომ $f: X \to Y$ მონომორფიზმია, მაგრამ არაა ინექცია, ანუ $\exists\, x_1, x_2 \in X$ ი.რ. $f(x_1) = f(x_2)$. შევქმნათ ასეთი სიტუაცია: იყოს $W = \{a,b\}$ (ორწერტილიანი სიმრავლე), $j(a) = x_1, j(b) = x_2$, ხოლო $k(a) = x_2,\ k(b) = x_1$. მაშინ $f(j(a)) = f(x_1) = f(x_2) = f(k(a))$ და $f(j(b)) = f(x_2) = f(x_1) = f(k(b))$, ანუ $f \circ j = f \circ k$, მაგრამ $j \neq k$, რაც ეწინააღმდეგება f-ის მონომორფულობას.

თეორემა. ყოველი ეპიმორფიზმი კატეგორიაში $\mathbb{C}$ მონომორფიზმია კატეგორიაში $\mathbb{C}^{op}$ და პირიქით.

თეორემა. თუ $f \circ g$ ეპიმორფიზმია, მაშინ f-იც ეპიმორფიზმია.

თეორემა. თუ $f \circ g$ მონომორფიზმია, მაშინ g-იც ეპიმორფიზმია.

ესენი თვითონ ცადეთ.

მონომორფიზმი, ეპიმორფიზმი, იზომორფიზმი აბელის ჯგუფთა კატეგორიაში

მოდით ამის შემდეგ მხოლოდ აბელის ჯგუფებზე ვილაპარაკოთ.

განმარტება.
მონომორფიზმი ქვია ინექციურ ჰომომორფიზმს.
ეპიმორფიზმი ქვია სიურექციულ ჰომომორფიზმს.
იზომორფიზმი ქვია ბიექციურ ჰომომორფიზმს.

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f} : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ აქვს მარჯვენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარჯვენა შებრუნებული, მაშინ ის ეპიმორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ეპიმორფულობა არ იწვევს მარჯვენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარჯვენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს ჰომომორფიზმი. მაგ. $f : Z \to Z_2,\ f(2n) = 0,\ f(2n+1) = 1$ (აქ საკმარისია ითქვას მხოლოდ $f(1) = 1$).

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f} : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ აქვს მარცხენა შებრუნებული, თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ $g \circ f = id_H$.

თეორემა. თუ ჰომომორფიზმს აქვს მარცხენა შებრუნებული, მაშინ ის მონომორფიზმია.

მაგრამ არა პირიქით: ინექციულობა არ იწვევს მარცხენა შებრუნებულის არსებობას, სიმრავლური მარცხენა შებრუნებული შეიძლება არ იყოს ჰომომორფიზმი. მაგ. $g : Z \to Z,\ g(n) = 2n.$

განმარტება. ჰომომორფიზმს $\mathrm{f} : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ აქვს შებრუნებული (შებრუნებადია) თუ არსებობს ჰომომორფიზმი $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_G,\ g \circ f = id_H$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $\mathrm{f} : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის შბრუნებადია.

ზუსტი მიმდევრობები

აბელის ჯგუფთა და ჰოჰომორფიზმთა მიმდევრობას

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ქვია ზუსტი, თუ $\operatorname{Im} f = Ker\, g$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ ეპიმორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ მონომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B.$.

თეორემა. ჰომომორფიზმი $A \xrightarrow{f} B$ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზუსტია მიმდევრობა $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0.$.

მაგალითები

1. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = 2,\ f(1) = 1$).

2. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Z_n \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = n,\ f(1) = 1$).

3. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_4 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = 2,\ f(1) = 1$).

3'. მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{g} Z_2 \times Z_2 \xrightarrow{f} Z_2 \longrightarrow 0$$

ზუსტია ყველა წევრში (აქ $g(1) = (1,0),\ f(1,0) = 0,\ f(0,1) = 1$).

მიაქციეთ ყურადღება, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ და $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ (კოორდინატობრივი შეკრებით) ორივე 4 ელემენტიანი, მაგრამ ერთმანეთისგან განსხვავებული ჯგუფია. ეს ფენომენი დასაბამს აძლევს გაფართოებათა თეორიას.

ინიციალური და ტერმინალური ობიექტები

განმარტება. C კატეგორიის ობიექტს $I \in Ob(C)$ ეწოდება *ინიციალური*, თუ ნებისმიერი ობიექტისთვის $X \in Ob(C)$ არსებობს ზუსტად ერთი მორფიზმი $I \to X$, ანუ $Mor(I,X)$ ერთწერტილიანი სიმრავლეა (singleton).

განმარტება. C კატეგორიის ობიექტს $T \in Ob(C)$ ეწოდება ტერმინალური, თუ ნებისმიერი ობიექტისთვის $X \in Ob(C)$ არსებობს ზუსტად ერთი მორფიზმი $X \to T$, ანუ $Mor(X,T)$ ერთწერტილიანი სიმრავლეა.

ცხადია C ყოველი ინიციალური ობიექტი ტერმინალურია კატეგორიაში C^{op} და პირიქით.

თუ ობიექტი ერთდროუ;ად ინიციალურიცაა და ტერმინალურიც, მაშინ მას ნულოვან ობიექტს (კატეგორიის ნულს) უწოდებენ.

მაგალითები

კატეგორიაში $Sets$ ინიციალურია ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$ და ტერმინალურია ერთწერტილიანი სიმრავლე pt.

კატეგორიაში Top ინიციალურია ცარიელი ტოპლოგიური სივრცე $\varnothing$ და ტერმინალურია ერთწერტილიანი ტოპოლოგიური სივრცე pt.

კატეგორიაში $Groups$ ინიციალურიც და ტერმინალურიც (ანუ ნულოვანი) არის ტრივიალური ჯგუფი.

როგორც ვიცით ნებისმიერი (ნაწილობრივ) დალაგებული სიმრავლე $(P, \leq)$ შეიძლება განხილული იქნას, როგორც კატეგორია, რომლის ობიექტებია P-ს წერტილები, ხოლო მორფიზმები ასეა განმარტებული: $Mor(m,n)$ არის ერთწერტილიანი სიმრავლე, თუ $m \leq n$ და $Mor(m,n) = \varnothing$ წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ კატეგორიაში ინიციალური ობიექტია უმცირესი ელემენტი, ხოლო ტერმინალური - უდიდესი (თუკი ასეთები არსებობენ).

თეორემა. თუ კატეგორიაში არსებობს ინიციალური (ტერმინალური) ელემენტი, მაშინ ის ერთადერთია იზომორფიზმის სიზუსტით.
დამტკიცება. ვაჩვენოთ ტერმინალურის ერთადერთობა. ვთქვათ ორია (ან მეტი), T და T' გვინდა ვაჩვენოთ, რომ ისინი იზომორფულნი არიან.

T-ს ტერმინალურობის გამო არსებობს ერთადერთი მორფიზმი $f \in Mor(T',T)$, ხოლო T'-ს ტერმინალურობის გამო არსებობს ერთადერთი მორფიზმი $g \in Mor(T,T')$. ისღა დაგვღცენია $f \in Mor(T',T)$ და $g \in Mor(T,T')$ ურთიერთშექცეული მორფიზმებია. მართლაც, კომპოზიცია $f \circ g$ ეკუთვნის სიმრავლეს $Mor(T,T)$, მაგრამ T-ს ტერმინალურობის გამო ეს სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენს და ეს ელემენტია id_T, ამრიგად $f \circ g = id_T$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $g \circ f = id_{T'}$.

ინიციალურის ერთადერთობა თავად სცადეთ.

ნამრავლი და ჯამი კატეგორიაში

განმარტება. ვთქვათ $X,Y \in Ob(C)$. მათი (პირდაპირი) ნამრავლი ეწოდება სამეულს

$$X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y$$

ასეთი უნივერსალური თვისებით: ნებისმიერი ორი მორფიზმისთვის

$$f: R \to X,\ g: R \to Y$$

არსებობს ერთადერთი მორფიზმი $h: R \to X \times Y$ რომლისათვისაც კომუტატურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_X} & X \times Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ f \nwarrow & & h \uparrow & & \nearrow g \\ & & R & & \end{array}$$

ანუ $p_X \circ h = f$ და $p_Y \circ h = g$.

თეორემა. პირდაპირი ნამრავლი არის ტერმინალური ობიექტი შემდეგ კატეგორიაში: ობიექტები იყოს სამეულები $P \xleftarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} Q$, ხოლო მორფიზმები - კომუტატური დიაგრამები

$$\begin{array}{ccccc} P' & \xleftarrow{\alpha'} & R' & \xrightarrow{\beta'} & Q' \\ f \uparrow & & h \uparrow & & \uparrow g \\ P & \xleftarrow{\alpha} & R & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array} .$$

თეორემა. ამ უნივერსალური თვისების მქომე ობიექტი ერთადერთია იზომორფიზმის სიზუსტით.

ეს განმარტება ზოგადდება თანამამრავლთა უსასრულო რაოდენობისათვისაც $\prod_{i \in I} X_i$.

განმარტება. ვთქვათ $X,Y \in Ob(C)$. მათი კონამრავლი (ან ჯამი) ეწოდება სამეულს

$$X \xrightarrow{i_X} X \oplus Y \xleftarrow{i_Y} Y$$

ასეთი უნივერსალური თვისებით: ნებისმიერი ორი მორფიზმისთვის

$$f: X \to R,\ g: Y \to R$$

არსებობს ერთადერთი მორფიზმი $h: X \oplus Y \to R$ რომლისათვისაც კომუტატურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ f \nearrow & & h \uparrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{i_X} & X \oplus Y & \xleftarrow{i_Y} & Y \end{array} .$$

თეორემა. პირდაპირი ჯამი არის ინიციალური ობიექტი შემდეგ კატეგორიაში: ობიექტები იყოს სამეულები $P \xrightarrow{\alpha} R \xleftarrow{\beta} Q$, ხოლო მორფიზმები - კომუტატური დიაგრამები

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\alpha} & R & \xleftarrow{\beta} & Q \\ f\uparrow & & h\uparrow & & \uparrow g \\ P' & \xrightarrow{\alpha'} & R' & \xleftarrow{\beta'} & Q' \end{array}.$$

თეორემა. ამ უნივერსალური თვისების მქომე ობიექტი ერთადერთია იზომორფიზმის სიზუსტით.

ეს განმარტება ზოგადდება შესაკრებთა უსასრულო რაოდენობისათვისაც $\sum_{i\in I} X_i$.

ნამრავლი და ჯამი კატეგორიაში Sets

კატეგორიაში *Sets* ნამრავლია $X\times Y=\{(x,y), x\in X, y\in Y\}$ ბუნებრივი პროექციებით $p_X(x,y)=x,\ p_y(x,y)=y$ (შეამოწმეთ უნივერსალური თვისება), ხოლო ჯამი - დიზიუნქტური გაერთიანება $X\oplus Y=(X,0)\cup(Y,1)$. ბუნებრივი ჩადგმებით $i_X(x)=(x,0),\ i_y(y)=(y,1)$ (აქაც შეამოწმეთ უნივერსალური თვისება).

ნამრავლი და ჯამი კატეგორიაში Groups

კატეგორიაში *Groups* ნამრავლია $X\times Y=\{(x,y), x\in X, y\in Y\}$ ბუნებრივი ოპერაციით
$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
და ბუნებრივი პროექციებით $p_X(x,y)=x,\ p_y(x,y)=y$ რომლებიც ჰომომორფიზმებია (შეამოწმეთ უნივერსალური თვისება), ხოლო ჯამი - ასევე $X\times Y$ ბუნებრივი ჩადგმებით $i_X(x)=(x,0),\ i_y(y)=(0,y)$ რომლებიც ჰომომორფიზმებია (აქაც შეამოწმეთ უნივერსალური თვისება).

ნამრავლი და ჯამი კატეგორიაში Top

კატეგორიაში *Top* ნამრავლია $X\times Y=\{(x,y), x\in X, y\in Y\}$ მინიმალური ტოპოლოგიით, რომლისთვისაც ბუნებრივი პროექციები უწყვეტია, ხოლო ჯამი - დიზიუნქტური გაერთიანება ინდუცირებული მინიმალური ტოპოლოგიით, რომლისათვისაც ბუნებრივი ჩადგმები უწყვეტია.

კითხვები

კითხვა. სწორია თუ არა, რომ კატეგორიაში *Groups* ნამრავლი $X\times Y$ და ჯამი (კონამრავლი) ერთი და იგივეა?

კითხვა. როგორ განვავრცოთ ეს ცნებები - ნამრავლისა და ჯამის - თანამამრავლთა (შესაკრებთა) ნებისმიერი სასრული ოჯახებისათვის? შესაძლებელია აგრეთვე მათი

განმარტება უსასრულო ოჯახებისათვისაც, და აქ გამოჩნდება უფრო ცხადად განსხვავება ნარავლსა და ჯამს შორის ჯგუფთა კატეგორიაში.

კითხვა. რა არის ნამრავლი და ჯამი პუნქტირებულ კატეგორიაში Top_* ?

თორნიკე ქადეიშვილი

ჰომოტოპიის თეორია

ჰომოტოპია

განმარტება. ორ ასახვას $f,g:X\to Y$ ეწოდება ჰომოტოპიური თუ არსებობს უწყვეტი ასახვა (ჰომოტოპია) $F:X\times I\to Y$ ისეთი, რომ
$$F(x,0)=f(x),\ F(x,1)=g(x).$$
აღნიშვნა $f\underset{F}{\sim}g$.

სავარჯიშო. ნებისმიერი ორი ასახვა $f,g:X\to R$ ჰომოტოპიურია. ჰომოტოპიას ახორციელებს ასახვა $F:X\times I\to R,\ F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$ (შეამოწმეთ, რომ ეს F მართლაც ახორციელებს საჭირო ჰომოტოპიას $f\underset{F}{\sim}g$).

სავარჯიშო. ვთქვათ X წრფივადბმული სივრცეა, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შეერთდეს წირით, ანუ

$$\forall x_*,y_*\in X\ \exists\alpha:I\to X,\ \alpha(0)=x_*,\alpha(1)=y_*\ .$$

აჩვენეთ, რომ ამ შემთხვევაში მუდმივი ასახვები $f:X\to X,\ f(x)=x_*$ და $g:X\to X,\ g(x)=y_*$ ჰომოტოპიურია. მე მგონია ჰომოტოპია $F(x,t)=\alpha(t)$ გამოდგება. შეამოწმეთ.

თეორემა. ჰომოტოპია ექვივალენტობის მიმართებაა.

დამტკიცება.
რეფლექსურობა: $f\underset{F}{\sim}f$ ჰომოტოპიით $F(x,t)=f(x)$.
სიმეტრიულობა: $f\underset{F}{\sim}g\ \Rightarrow\ g\underset{G}{\sim}f$, სადაც $G(x,t)=F(x,1-t)$.
ტრანზიტულობა: $f\underset{F}{\sim}g,\ g\underset{G}{\sim}h\Rightarrow f\underset{H}{\sim}h$, სადაც
$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}.$$

$Map(X,Y)$ აღნიშნავს ყველა უწყვეტი ასახვის სიმრავლეს X-დან Y-ში

$$Map(X,Y)=\{f:X\to Y\}.$$

ჰომოტოპია ექვივალენტობის მიმართებაა ამ სიმრავლეში.

$[X,Y]=Map(X,Y)/\sim$ აღნიშნავს ექვივალენტობის (ჰომოტოპიის) კლასების სიმრავლეს.

ყოველ ასახვას $f \in Map(X,Y)$ შესაბამება მისი ჰომოტოპიის კლასი $[f] \in [X,Y]$ რაც აჩენს ასახვას

$$Map(X,Y) \to [X,Y].$$

თეორემა. თუ მოცემული უწყვეტი ასახვებისათვის

$$U \xrightarrow{h} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{k} V$$

გვაქვს $f \underset{F}{\sim} g$, მაშინ (ა) $kf \sim kg$ და (ბ) $fh \sim gh$.

დამტკიცება.

(ა) ჰომოტოპიას $kf \sim kg$ ახორციელებს $G(x,t) = kF(x,t)$. დამტკიცების დასრულებისათვის აჩვენეთ, რომ $G(x,0) = k(f(x))$ და $G(x,1) = k(g(x))$.

(ბ) ჰომოტოპიას $fh \sim gh$ ახორციელებს $H(u,t) = F(h(u),t)$. დამტკიცების დასრულებისათვის აჩვენეთ, რომ $H(u,0) = f(h(x))$ და . . . .

კატეგორია $hoTop$ *

კატეგორიის Top ობიექტებია ტოპოლოგიური სივრცეები, ხოლო მორფიზმები $Mor_{Top}(X,Y) = Map(X,Y)$. ახლა განვმარტოთ ახალი კატეგორია $hoTop$ (ჰომოტოპიზირებული Top): $ob(hoTop) = ob(Top)$, ხოლო $Mor_{hoTop}(X,Y) = [X,Y]$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ $hoTop$ კორექტულად განმარტებული კატეგორიაა. აქ საჭიროა განიმარტოს კომპოზიცია “ახალი” მორფიზმებისა $[f] \in [X,Y]$, $[g] \in [Y,Z]$. განვმარტოთ კომპოზიცია ასე: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, მაგრამ აქ კორექტულობა იქნება საჩვენებელი.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ კატეგორიაში $hoTop$ ჰომოტოპიურად ექვივალენტურობა იზომორფულობას ნიშნავს. (ტრივიალურია, უბრალოდ კარგად გაიაზრეთ, რას ნიშნავს ეს ცნებები).

ჰომოტოპიური ექვივალენტობა

განმარტება. უწყვეტ ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება *ჰომეომორფიზმი* თუ არსებობს შებრუნებული უწყვეტი ასახვა $g : Y \to X$ ისეთი, რომ

$$f \circ g = id_Y \quad \text{და} \quad g \circ f = id_X.$$

განმარტება. X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეები *ჰომეომორფულია*, თუ არსებობს ჰომეომორფიზმი $f : X \to Y$. აღნიშვნა $X \approx Y$.

სხვა სიტყვებით $X \approx Y$. თუ არსებობს ურთიერთშექცეულ უწყვეტ ასახვათა წყვილი

$$(f,g),\ f : X \to Y,\ g : Y \to X,\ f \circ g = id_Y,\ g \circ f = id_X.$$

თეორემა. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჰომეომორფულობა ექვივალენტობის მიმართებაა.

დამტკიცება.
(1) რეფლექსურობა $X \approx Y$. აქ ჰომეომორფიზმის ახორციელებს წყვილი (id_X, id_X)..

(2) სიმეტრიულობა $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$. ვთქვათ ჰომეომორფულობას $X \approx Y$ ახორციელებს წყვილი $(f : X \to Y, g : Y \to X)$. მაშინ ჰომეომორფულობას $Y \approx X$ განახორციელებს წყვილი . . . .

(3) ტრანზიტულობა $X \approx Y$, $Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$. ვთქვათ ჰომეომორფულობას $X \approx Y$ ახორციელებს წყვილი $(f : X \to Y, g : Y \to X)$, ხოლო ჰომეომორფულობას $Y \approx Z$ ახორციელებს წყვილი $(h : Y \to Z, k : Z \to Y)$. მაშინ ჰომეომორფულობას $X \approx Z$ განახორციელებს წყვილი . . . .
რ.დ.გ.

განმარტება. უწყვეტ ასახვას $f : X \to Y$ ეწოდება *ჰომოტოპიური ექვივალენტობა* თუ არსებობს მისი ჰომოტოპიური შებრუნებული უწყვეტი ასახვა $g : Y \to X$ ისეთი, რომ $f \circ g \sim id_Y$ და $g \circ f \sim id_X$.

სავარჯიშო. ყოველი ჰომეომორფიზმი ჰომოტოპიური ექვივალენტობაა. (გამოიყენეთ მარტივი ფაქტი: ტოლი ასახვები ჰომოტოპიურებიც არიან, ანუ თუ $\beta = \alpha : X \to Y$, მაშინ $\beta \underset{F}{\sim} \alpha$, .სადაც $F(x,t) = . . .$).

მაგრამ პირიქით არა. მაგალითად, $f : R \to pt$ (აქ pt ერთწერტილიანი სიმრავლეა) არ არის ჰომეომორფიზმი (რატომ?), მაგრამ არის ჰომოტოპიური ექვივალენტობა: $g : pt \to R$ იყოს ასახვა $g(pt) = 0 \in R$, მაშინ $f \circ g = id_{pt}$ ხოლო $g \circ f \underset{F}{\sim} id_X$ ასეთი ჰომოტოპიით $F(x,t) = (1-t)x$ (ნახეთ, რომ მართლაც ასეა).

განმარტება. X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეები *ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია*, თუ არსებობს ჰომოტოპიური ექვივალენტობა $f : X \to Y$. სხვა ტერმინოლოგიით X და Y-ს აქვთ ერთნაირი *ჰომოტოპიური ტიპი.* აღნიშვნა $X \sim Y$.

სხვა სიტყვებით $X \sim Y$. თუ არსებობს უწყვეტ ასახვათა წყვილი
$$(f,g),\ f : X \to Y,\ g : Y \to X,\ f \circ g \sim id_Y,\ g \circ f \sim id_X.$$

თეორემა. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჰომოტოპიური ექვივალენტობა ექვივალენტობის მიმართებაა.

დამტკიცება ანალოგიურია წინა თეორემის დამტკიცებისა, უბრალოდ სხვადასხვა ასახვათა ტოლობების ნაცვლას მათ ჰომოტოპიურობას ახსენებთ. დაამტკიცეთ თვითონ.

განმარტება. ტოპოლოგიურ სივრცეს X ქვია *მოჭიმვადი*, თუ $X \sim pt$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ R მოჭიმვადი სივრცეა. თუმცა ეს ზემოთ უკვე დავამტკიცეთ. აბა ნახეთ, სად.

თეორემა. X მოჭიმვადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $id_X : X \to X$ ჰომოტოპიურია მუდმივი ასახვისა $c : X \to X,\ c(x) = x_*$.

დამტკიცება. კარგი, არ გინდათ.

რეტრაქცია*

განმარტება. ქვესივრცეს $A \subset X$ ეწოდება X-ის რეტრაქტი, თუ არსებობს უწყვეტი ასახვა $r : X \to A$ ი.რ. ნებისმიერი წერტილისთვის $a \in A$ გვაქვს $r(a) = a$. სხვაგვარად, თუ $i : A \to X$ აღნიშნავს ჩადგმას $A \subset X$, მაშინ $r \circ i = id_A$.

განმარტება. რეტრაქციას

$$A \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} X$$

ეწოდება დეფორმაციული, თუ $r \circ i = id_A$ ტოლობასთან ერთად დამატებით სრულდება $i \circ r = id_X$

ფარდობითი ჰომოტოპია*

ვთქვათ $A \subset X$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე (ქვესიმრავლე ინდუცირებული ტოპოლოგიით), $f, g : X \to Y$ და ვთქვათ ეს ასახვები ერთმანეთს ემთხვევა A-ზე: $f \mid A = g \mid A$.

განმარტება. ვიტყვით, რომ $f \sim g\, rel\, A$ თუ არსებობს $F : X \times I \to Y$ ისთი, რომ $f \underset{F}{\sim} g$ და $F(a,t) = F(a,0)$, $\forall\ a \in A, t \in I$.

სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ ეს მიმართებაც ექვივალენტობაა.

ფარდობითი ჰომოტოპიურობის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა $A = x_* \in X$. ამ შემთხვევაში $f \sim g\, rel\, x_*$ თუ $F(x_*, t) = F(x_*, 0) = F(x_*, 1) = f(x_*) = g(x_*)$.

ტოპოლოგიური სივრცეების წყვილთა კატეგორია*

ამ კატეგორიის ობიექტები იყოს ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილები (სივრცე-ქვესივრცე) (X, A), $A \subset X$, ხოლო წყვილთა მორფიზმი $f:(X,A) \to (Y,B)$ ასე იმარტება $f: X \to Y,\ f(A) \subset B$.

ფარდობითი ჰომოტოპია $f \sim g\ rel\, A$ მორფიზმთა სიმრავლეში $Map((X,A),(Y,B))$ განმარტავს ექვივალენტობას და ე.ი. ფაქტორსიმრავლეს (ფარდობითი ჰომოტოპიური კლასების სიმრავლეს $[(X,A),(Y,B)]$.

მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა ე.წ. პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორია. აქ ობიექტებია წყვილები (სივცე-დაფიქსირებული წერტილი) (X, x_*), $x_* \subset X$, ხოლო მორფიზმი $f:(X,x_*) \to (Y,y_*)$ არის ასახვა $f: X \to Y,\ f(x_*) = y_*$. ფარდობითი ჰომოტოპია $f \sim g\ rel\, x_*$ განმარტავს ფარდობითი ჰომოტოპიური კლასების სიმრავლეს $[(X,x_*),(Y,y_*)]$.

ფუნდამენტური ჯგუფი $\pi(X, x_*)$

$\pi(X, x_*)$ როგორც სიმრავლე

ვთქვათ (X, x_*) პუნქტირებული ტოპოლოგიური სივრცეა. როგორც ყოველთვის, $I = [0,1]$, ხოლო მისი საზღვარი აღვნიშნოთ ასე $\dot{I} = \{0,1\}$. განვმარტოთ სიმრავლე

$$\pi(X, x_*) = [(I, \dot{I}), (X, x_*)]$$

ამით სიმრავლე $\pi(X, x_*)$ კორექტულადაა განმარტებული. მაინც დავაზუსტოთ.

ასახვას $\alpha: I \to X$ ჰქვია *გზა* X-ში.

ასახვა $\alpha:(I,\dot{I}) \to (X,x_*)$ დამატებით აკმაყოფილებს პირობას $\alpha(0) = \alpha(1) = x_*$, მას ჰქვია *მარყუჟი* (X, x_*)-ში.

ორი მარყუჟი $\alpha, \beta:(I,\dot{I}) \to (X,x_*)$ ფარდობითად ჰომოტოპიურია თუ არსებობას ასახვა (ჰომოტოპია) $F: I \times I = I^2 \to X$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$F(s,0) = \alpha(s), \quad F(s,1) = \beta(s), \quad F(0,t) = F(1,t) = x_*.$$

საბოლოოდ, $\pi(X, x_*) = [(I, \dot{I}), (X, x_*)]$ არის მარყუჟთა ფადობითი ჰომოტოპიის კლასები. მისი ელემენტებია მარყუჟთა კლასები $[\alpha] \in \pi(X, x_*)$.

მრავალფეროვნებისთვის მოვიყვანთ $\pi(X, x_*)$-ის კიდევ ერთ განმარტებას. როგორც ყოველთვის, S^1 იყოს წრეწირი (ერთგანზომილებიანი სფერო, ხოლო $s_* \in S^1$ მისი რომელიმე ფიქსირებული წერტილი. მაშინ

$$\pi(X, x_*) = [(S^1, s_*), (X, x_*)].$$

როგორმე თვითონ დაინახეთ, რომ $\pi(X,x_*)$ სიმრავლის ეს ორი განმარტება მონაკვეთის და წრეწირის ტერმინებში ერთმანეთს ემთხვევა.

$\pi(X,x_*)=[(I,\dot{I}),(X,x_*)]$ როგორც ჯგუფი

$\pi(X,x_*)$ არ არის მხოლოდ სიმრავლეა, ის ჯგუფია ოპერაციის მიმართ, რომელსაც ახლა განვმარტავთ.

ყოველი მარყუჟი $\alpha:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ არის გზა, რომელიც იწყება $s=0$ მომენტში წერტილში x_* , 1 წუთის განმავლობაში ($s=0$ მომენტიდან $s=1$ მომენტამდე) შემოირბენს გარკვეულ ტრაექტორიას და $s=1$ მომენტში დაბრუნდება ისევ x_* წერტილში.

ახლა ვთქვათ გვაქვს ორი მარყუჟი $\alpha,\beta:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$. ჩვენი მიზანია განვმარტოთ მათი “ნამრავლი”, ახალი მარყუჟი $\beta\cdot\alpha$. უხეშად ეს ასე ავხსნათ: $\beta\cdot\alpha$-მ პირველი ნახევარი წუთის განმავლობაში შემოიაროს α და მეორე ნახევარი წუთის განმავლობაში შემოიაროს β.

უფრო ზუსტად,

$$\beta\cdot\alpha(s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}.$$

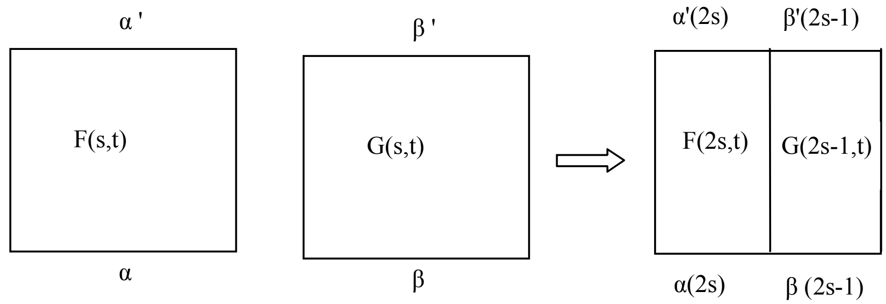
მარყუჟთა გამრავლება განმარტავს გამრავლებას $\pi(X,x_*)$-ში: ამ სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის $[\alpha],[\beta]\in\pi(X,x_*)$ განვმარტოთ

$$[\beta]\cdot[\alpha]=[\beta\cdot\alpha].$$

ეს გამრავლება გადააქცევს სიმრავლეს $\pi(X,x_*)$-ს ჯგუფად, მაგრამ ამისათვის ჯერ უამრავი რაღაცის დამტკიცება დაგვჭირდება.

კორექტულობა. კლასების ნამრავლი არ არის დამოკიდებული კლასებიდან მარყუჟების ამორჩევაზე, ანუ, თუ $\alpha\sim\alpha'\ rel\,\dot{I}$ და $\beta\sim\beta'\ rel\,\dot{I}$, მაშინ $\beta\cdot\alpha\sim\beta'\cdot\alpha'\ rel\,\dot{I}$ ანუ $[\beta\cdot\alpha]=[\beta'\cdot\alpha']$.

დამტკიცება.



ვთქვათ $\alpha \underset{F}{\sim} \alpha'$ და $\beta \underset{G}{\sim} \beta'$. მაშინ $\beta\cdot\alpha \underset{H}{\sim} \beta'\cdot\alpha'$ სადაც ჰომოტოპია $H: I\times I \to X$ ასეა იყოს განმარტებული

$$H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t), & 0\le s\le \dfrac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & \dfrac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}.$$

აქ რა არის შესამოწმებელი?

(1) H უწყვეტია, ანუ $s=\frac{1}{2}$-თვის $F(2s,t)=G(2s-1,t)$;

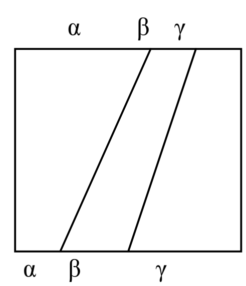
(2) $H(s,0)=\beta\cdot\alpha(s)$;

(3) $H(s,1)=\beta'\cdot\alpha'(s)$.

შეამოწმეთ!

ასოციატურობა. საზოგადოდ მარყუჟების ნამრავლი არ არის ასოციატური - $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\ne(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha$, მაგრამ $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\sim(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha \; rel\, \dot{I}$, რაც ნიშნავს, რომ $[\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)]=[(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha]$.

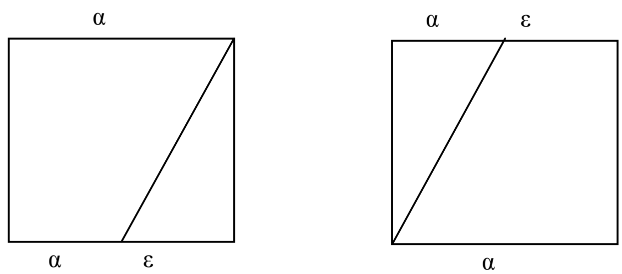
დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია. სჯობს დავხატოთ



ერთეული. ნეიტრალური ელემენტის როლს ასრულებს მუდმივი მარყუჟის ჰომოტოპიის კლასი; აღვნიშნოთ $\varepsilon:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$, $\varepsilon(s)=x_*$. კვლავ, ეს არ არის ნეიტრალური ელემენტი მარყუჟთა გამრავლებისთვის: $\varepsilon\cdot\alpha\ne\alpha$, $\alpha\cdot\varepsilon\ne\alpha$, ანუ

$$\varepsilon\cdot\alpha(s)=\begin{cases}\alpha(2\cdot s), & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ x_0, & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}\ne\alpha(s),\qquad \alpha\cdot\varepsilon(s)=\begin{cases}x_0, & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \alpha(2\cdot s-1), & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}\ne\alpha(s),$$

მაგრამ $\varepsilon\cdot\alpha\sim\alpha\ rel\,\dot{I}$, $\alpha\cdot\varepsilon\sim\alpha\ rel\,\dot{I}$, რაც ნიშნავს, რომ $[\varepsilon]\cdot[\alpha]=[\alpha], [\alpha]\cdot[\varepsilon]=[\alpha]$. დამტკიცება გრძელია, უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.



მოდი დავწერ ერთ ჰომოტოპიას: $\varepsilon\cdot\alpha\underset{F}{\sim}\alpha$ სადაც

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha(\frac{2}{t+1}\cdot s), & 0\le s\le\frac{t+1}{2}\\ x_0, & \frac{t+1}{2}\le s\le 1\end{cases}.$$

აქ რა არის შესამოწმებელი?

(1) F უწყვეტია, ანუ $F(\frac{t+1}{2},t)=x_0$;

(2) $F(s,0)=\varepsilon\cdot\alpha(s)$;

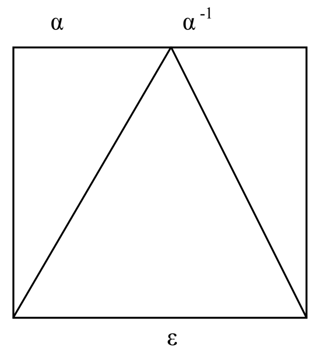
(3) $F(s,1)=\alpha(s)$.

შეამოწმეთ.

ცადეთ დაწეროთ ჰომოტოპია $\alpha\cdot\varepsilon\underset{G}{\sim}\alpha$.

მოპირდაპირე. ყოველი მარყუჟისათვის $\alpha:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ განვმარტოთ მარყუჟი $\alpha^{-1}:(I,\dot{I})\to(X,x_*)$ ასე: $\alpha^{-1}(s)=\alpha(1-s)$. ისევ და ისევ, საზოგადოდ $\alpha\cdot\alpha^{-1}\ne\varepsilon$, მაგრამ $\alpha\cdot\alpha^{-1}\sim\varepsilon\ rel\,\dot{I}$, რაც იძლევა $[\alpha]\cdot[\alpha^{-1}]=[\varepsilon]$. ანალოგიურად, $[\alpha^{-1}]\cdot[\alpha]=[\varepsilon]$. ეს კი ნიშნავს, რომ $[\alpha]$ ჰომოტოპიის კლასის მოპირდაპირეს როლს ასრულებს $[\alpha^{-1}]$, ანუ $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$. დამტკიცება უნდა დაიწეროს შესაბამისი ჰომოტოპია.

ჯერ დავხატოთ



ახლა დავწეროთ ეს ჰომოტოპია $\alpha^{-1}\cdot\alpha \underset{F}{\sim} \varepsilon \; rel\, \dot{I}$

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\le s\le \frac{t}{2}\\ \alpha(t), & \frac{t}{2}\le s\le 1-\frac{t}{2}.\\ \alpha(2-2s), & 1-\frac{t}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

შეამოწმეთ, რომ ეს F უწყვეტია (კარგადაა გადაკერებული), და რომ ის მართლაც ახორციელებს საჭირო ჰომოტოპიას (ანუ გამოთვალეთ $F(s,0)$ და $F(s,1)$).

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $\pi(X,x_*)$ ჯგუფია.

დამოკიდებულება წერტილის არჩევაზე

საზოგადოდ ფუნდამენტური ჯგუფი $\pi(X,x_*)$ დამოკიდებულია $x_*\in X$ წერტილის არჩევაზე, ანუ თუ $x_*\neq y_*$, მაშინ შესაძლებელია $\pi(X,x_*)\neq\pi(X,y_*)$, მაგრამ

თეორემა. თუ X წრფივადბმული სივრცეა, მაშინ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(X,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

დამტკიცება. წრფივადბმულობის გამო არსებობს x_* და y_* წერტილების შემაერთებელი გზა $\gamma: I\to X,\ \gamma(0)=x_*,\ \gamma(1)=y_*$. დაგვჭირდება აგრეთვე y_* და x_* წერტილების შემაერთებელი გზა $\gamma^{-1}: I\to X,\ \gamma^{-1}(0)=y_*,\ \gamma^{-1}(1)=x_*$, რომელიც ასე შეიძლება განვმარტოთ: $\gamma^{-1}(s)=\gamma(1-s)$.

განვმარტოთ ორი ასახვა

$$\varphi:\pi(X,x_*)\to\pi(X,y_*),\ \ \psi:\pi(X,y_*)\to\pi(X,x_*)$$

ტოლობებით $\varphi([\alpha])=[\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1}]$, $\psi([\beta])=[\gamma^{-1}\cdot\beta\cdot\gamma]$. კვლავ გრძელი შემოწმება მოგვცემს, რომ ორივე ასახვა კორექტულად განმარტებული ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, ამასთან $\varphi\circ\psi=id_{\pi(X,y_*)}$ da $\psi\circ\varphi=id_{\pi(X,x_*)}$, რაც ნიშნავს, რომ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(X,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

ინდუცირებული ჰომომორფიზმი, ანუ ფუნქტორულობა

მოყვანილი კონსტრუქცია შეუთანადებს პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეს (X,x_*) მის ფუნდამენურ ჯგუფს $\pi(X,x_*)$. ახლა ვაჩვენებთ, რომ მეტიც, პუნქტირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნებისმიერ ასახვა

$$f:(X,x_*)\to(Y,y_*)$$

აჩენს (ინდუცირებს) შესაბამის ფუნდამენტურ ჯგუფთა ჰომომრფიზმს

$$\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Y,y_*).$$

ეს $\pi(f)$ ასე იმარტება $\pi(f)([\alpha]=[f\circ\alpha]$.

აქ რაღაა შესამოწმებელი? კორექტულობა და ჰომომორფულობა.

ამას გარდა, ადვილი სანახავია, რომ $\pi(id_X)=id_{\pi(X,x_*)}$.

და კიდევ ერთი რამ: ორი უწყვეტი ასახვისათვის

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$$

კომპოზიციის შესაბამისი ჰომომორფიზმი არის ამ ასახვათა შესაბამისი ჰომომრფიზმების კომპოზიცია, ანუ

$$\pi(g\circ f)=\pi(g)\circ\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Z,z_*).$$

ეს ყველაფერი იმას ნიშნავს, რომ $\pi:Top_*\to Groups$ არის ფუნქტორი პუნქტირებული ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიიდან ჯგუფთა კატეგორიაში.

სავარჯიშო. ვთქვათ $f,g:(X,x_*)\to(Y,y_*)$ და $f\sim g\ rel\,x_*$, მაშინ

$$\pi(f)=\pi(f):\pi(X,x_*)\to\pi(Y,y_*).$$

სავარჯიშო. თუ (X,x_*) და (X,x_*) ჰომოტოპიურად ექვივალენტური პუნქტირებული სივრცეებია, მაშინ $\pi(X,x_*)$ და $\pi(Y,y_*)$ იზომორფული ჯგუფებია.

სავარჯიშო. თუ X მოჭიმვადი სივრცეა, მაშინ ის ცალადბმულია, რაც მიშნავს, რომ $\pi(X,x_*)=0$ (მაგრამ არაპირიქით, ამის მაგალითია ორგანზომილებიანი სფერო S^2).

გამოყენება ბრაუერის უძრავი წერტილის თეორემა

დავეყრდნობით ინტუიტიურ ფაქტს $\pi(S^1,s_*)=Z$ და ორგანზომილებიანი დისკის (წრის) მოჭიმვადობას $\pi(D^2,x_*)=0$.

თეორემა 1. არ არსებობს წრის უწყვეტი რეტრაქცია მის საზღვარზე $r:D^2\to S^1$.

დამტკიცება. ვთქვათ ასეთი რეტრაქცია არსებობს, ე.ი. გავქვს ასახვა $r:D^2\to S^1$ ისეთი, რომ კომპოზიცია $S^1\xrightarrow{i}D^2\xrightarrow{r}S^1$ არის id_{S^1}. ვიმოქმედოთ ამ დიაგრამაზე ფუნქტორით π

$$\pi(S^1)=Z\xrightarrow{\pi(i)}\pi(D^2)=0\xrightarrow{\pi(r)}\pi(S^1)=Z\,.$$

ჰომომორფიზმთა ეს კომპოზიცია ნულოვანია (რატომ?), რაც ეწინააღმდეგება პირობას $\pi(id_{S^1})=id_Z$.

თეორემა 2. ყოველ უწყვეტ ასახვას $f:D^2\to D^2$ აქვს უძრავი წერტილი, ანუ არსებობს ისეთი $x^*\in D^2$, რომ $f(x^*)=x^*$.

დამტკიცება. დავუშვათ ყოველი $x\in D^2$ წერტილისთვის $f(x)\neq x$. განვმარტოთ ასახვა $r:D^2\to S^1$ ასე: შევაერთოთ წერტილი $f(x)\in D^2$ სხივით წერტილთან $x\in D^2$. $r(x)$ იყოს ამ სხივის წრეწირთან თანაკვეთის წერტილი. ცოტა დაფიქრდით, და დაინახავთ, რომ ეს r რეტრაქციაა, რაც ეწინააღმდეგება წინა თეორემას.

თორნიკე ქადეიშვილი

სიმპლექსური კომპლექსი

ალგებრულ ტოპოლოგიაში უფრო მეტი წარმატებით ხერხდება "კარგი" ტოპოლოგიური სივრცეების შესწავლა. ეს "კარგი" სივრცეები ორი ტიპისაა: ე.წ. *მრავალნაირობები* და *პოლიედრები.*

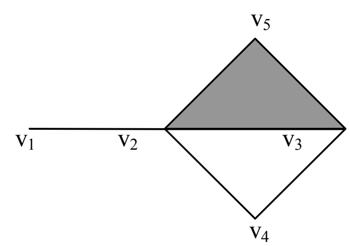
პირველი "კარგი" ტიპი მრავალნაირობა არის ტოპოლოგიური სივრცე რომელიც ლოკალურად გამოიყურება როგორც ევკლიდური სივრცე R^n. უფრო ზუსტად, ტოპოლოგიური სივრცე M არის n-განზომილებიანი მრავალნაირობა, თუ მისი ყოველი წერტილისათვის $x \in M$ არსებობს ღია მიდამო $x \in U \subset M$ რომელიც ჰომეომორფულია R^n-ის ან, რაც იგივეა, მისი რაიმე ბმული ღია ქვესიმრავლისა.

1-მრავანაირობათა მაგალითებია: ღერძი R^1, ინტერვალი (0,1), წრეწირი S^1.

2-მრავანაირობათა მაგალითებია სიბრტყე R^2, ღია დისკი $D^2 - S^1$, სფერო S^2, ტორი $T^2 = S^1 \times S^1$.

მეორე ტიპი "კარგი" სივრცეებისა არის ე.წ. პოლიედრები, სხვა ტერმინია *სიმპლექსური კომპლექსები.* ეს არის ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აშენებულია სტანდარტული აგურებისგან სიმპლექსებისგან. 1-განზომილებიანი სიმპლექსია წერტილი, 2-განზომილებიანი მონაკვეთი, 2-განზომილებიანი სამკუთხედი, 3-განზომილებიანი ტერაედრი, და ა.შ.

პოლიედრის მაგალითია ეს ტოპოლოგიური სივრცე



მისი აგებისას გამოყენებულია შემდეგი აგურები:

5 წერტილი $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

6 მონაკვეთი $\{(v_1v_2), (v_2v_3), (v_2v_4), (v_3v_4), (v_2v_5), (v_3v_5)\}$;

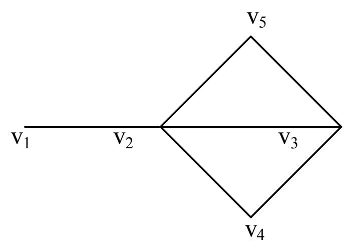
1 სამკუთხედი $\{(v_2v_3v_5)\}$.

ამ სამშენებლო მასალას უნდა ახლდეს პროექტი, აღწერა, როგორ უნდა დაკავშირდეს ეს ელემენტები ერთმანეთთან. ჩვენს შემთხვევაში პროექტი, სამშენებლო ინსტრუქცია, ასეთია:

განალაგეთ წერტილები (წვეროები, 0-სიმპლექსები) v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. როგორ ამას მნიშვნელობა არ აქვს, ჩვენ ხომ ტოპოლოგიაში ვართ და არა გეომეტრიაში,

ფორმას და ზომებს მნიშვნელობა არ აქვს. წარმოიდგინეთ, რომ მონაკვეთები, სამკუთხედები და სხვა სამშენებლო აგურები რეზინისაა და მათი გაჭიმვა-შეკუმშვა შეიძლება.

ამის შემდეგ პირველი მონაკვეთი (წიბო, 1-სიმპლექსი) v_1v_2 ერთი ბოლოთი მიამაგრეთ v_1 წვეროს, მეორე კი v_2 წვეროს. ასე გააგრძელეთ დანარჩენი 1-სიმპლექსების ჩამაგრება. შედეგად მივიღებთ ასეთ კარკასს



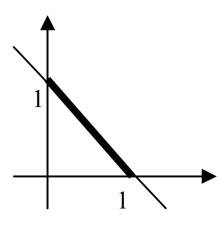
ახლა ამ კარკასში ჩავამაგროთ დარჩენილი 2-განზომილებიანი აგური სამკუთხედი (წახნაგი, 2-სიმპლექსი) $(v_2v_3v_5)$ აი ასე: ამ სამკუთხედის შესაბამისი გვერდი მივამაგროთ უკვე კარკასში ჩადგმულ 1-სიმპლექსს v_2v_3, მეორე გვერდი 1-სიმპლექსს v_2v_5, მესამე გვერდი 1-სიმპლექსს v_3v_5, და პოლიედრიც აშენდა!

დროა ამ ყველაფრის ფორმალიზებისა.

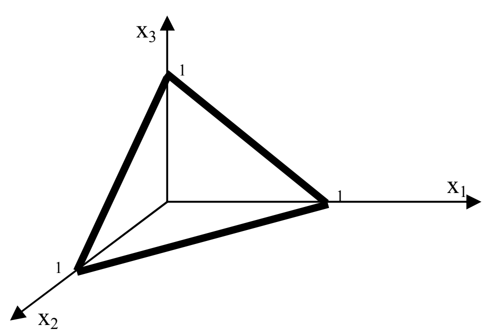
განმარტება. სტანდარტული n სიმპლექსი Δ^n ეწოდება R^{n+1}-ის ქვესიმრავლეს

$$\Delta^n = \{(x_1,...,x_{n+1}) \in R^{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1, \quad x_k \ge 0, \ k = 1,...,n+1\}.$$

კერძოდ



$$\Delta^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2, \ x_1 + x_2 = 1, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0\}$$



$$\Delta^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0\}$$

სამშენებლო პროექტის ფორმალიზებაა შემდეგი

განმარტება. *აბსტრაქტული სიმპლექსური კომპლექსი* ეწოდება სიმრავლეს V და მის სასრულ ქვესიმრავლეთა (სიმპლექსების) ოჯახს $S=\{\delta \subset V\}$ ისე, რომ სრულდება ორი პირობა

$$(i)\ v\in V \Rightarrow \{v\}\in S, \quad (ii)\ \sigma\in S, \tau\subset\sigma \Rightarrow \tau\in S.$$

V სიმრავლის ელემენტებს (V,S) სიმპლექსური კომპლექსის *წვეროებს* უწოდებენ, გამოყოფილ სასრულ ქვესიმრავლეებს *სიმპლექსებს*. სიმპლექსის $\sigma\in S$ განზომილება ერთით ნაკლებია მასში ელემენტების რაოდენობაზე

$$\dim\sigma = card(\sigma)-1.$$

ამრიგად წვეროები 0-სიმპლექსებია. თუ $\sigma\in S$ და $\tau\subset\sigma$, მაშინ τ ს ქვია σ ს *წახნაგი*.

ამ ტერმინებში სიმპლექსური კომპლექსის განმარტებაში მოცემული აქსიომები ასე ჟღერს:
(i) ყოველი წვერო სიმპლექსია,
(ii) ყოველი სიმპლექსის წახნაგი ასევე სიმპლექსია.

სიმპლექსური კომპლექსის ყველა n-სიმპლექსის სიმრავლეს

$$V_n=\{\sigma\in S, \dim\sigma = n\}$$

ქვია *n-სკელეტონი* (ჩონჩხი). ცხადია $V_0=V$.

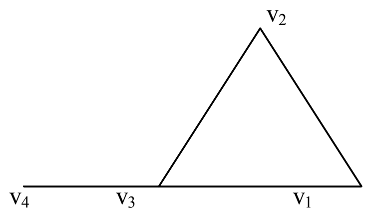
სიმპლექსური კომპლექსების ასახვა $f:(V,S)\to(V',S')$ ეწოდება წვეროების ასახვას $f:V_0\to V_0'$ რომელიც ინახავს სიმპლიციალურ სტრუქტურას, ანუ სიმპლექსი გადაჰყავს სიმპლექსში, ანუ

$$\sigma\in S \Rightarrow f(\sigma)\in S'.$$

ყოველ სიმპლექსურ კომპლექსს (V,S) შეესაბამება მისი *რეალიზაცია*, პოლიედრი $|V|$ - ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც მიიღება სტანდარტული Δ^n სიმპლექსების შეწებებით (V,S)-ის სიმპლიციალური სტრუქტურის მიხედვით, აი დაახლოებით ისე, როგორც ზემოთ მოყვანილ მაგალითში იყო. სიმპლიციალური ასახვა იწვევს რეალიზაციების უწყვეტ ასახვას და რეალიზაცია ხდება ფუნქტორი სიმპლიციალური კომპლექსების კატეგორიიდან ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიაში.

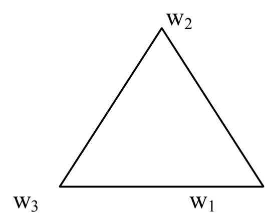
მაგალითები

1. ქართული ასო ნ *ჰომეომორფულია* ასეთი პოლიედრისა



მისი სიმპლექსური კომპლექსია
$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$V_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$.

2. იგივე ქართული ასო ნ *ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია* ასეთი პოლიედრისა



მისი სიმპლექსური კომპლექსია
$W_0 = \{w_1, w_2, w_3\}$
$W_1 = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_2)\}$.

3. ასო ნ-ს ზემოთ აღწერილი ორი სიმპლექსური მოდელების წვეროების ასახვა

$$f : W \to V,\ f(w_1) = v_3,\ f(w_2) = v_2,\ f(w_3) = v_3$$

სიმპლიციალური ასახვაა, ხოლო

$$g : W \to V,\ g(w_1) = v_3,\ g(w_2) = v_2,\ g(w_3) = v_4$$

- არა (რატომ?).

სავარჯიშოები

1. დახაზეთ პოლიედრი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი სიმლექსური კომპლექსის რეალიზაციას
$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
$V_1 = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_4, v_7)\}$
$V_2 = \{(v_3, v_4, v_5), (v_4, v_5, v_6), (v_4, v_5, v_7), (v_4, v_5, v_6), (v_5, v_6, v_7), (v_4, v_6, v_7)\}$
$V_3 = \{(v_4, v_5, v_6, v_7)\}$

2. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრეწირის S^1.

3. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია წრის (დისკის) D^2.

4. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია სფეროსი S^2.

5. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსი, რომლის რეალიზაცია ჰომეომორფულია ბირთვის D^3.

6. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსები, რომელთა რეალიზაციები ჰომეომორფულია ამ ლათინური ასოებისა

A BC D E F G H I J K L M N PQ R S T V W X Y Z .

რომელი ასოებია ერთმანეთის ჰომეომორფული? რამდენი ჰომეომორფიზმის კლასია ამ ალფაბეტში? გააკეთეთ იგივე ქართული ასოებისთვისაც.

7. აღწერეთ სიმპლექსური კომპლექსები, რომელთა რეალიზაციები ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია ამ ლათინური ასოებისა

A B C D E F G H I J K L M N P R S T V W X Y Z .

რომელი ასოებია ერთმანეთის ჰომოტოპირად ექვივალენტური? რამდენი ჰომოტოპიის ტიპია ამ ალფაბეტში? გააკეთეთ იგივე ქართული ასოებისთვისაც.

8. ჩამოთვალეთ ის ლათინური ასოები, რომელთაც აქვთ 0-ის, 1-ის და 8-ის ჰომოტოპიური ტიპი.

9. ჩამოთვალეთ ის ქართული ასოები, რომელთაც აქვთ 0-ის, 1-ის და 8-ის ჰომოტოპიური ტიპი.

10. გაიხსენეთ ასო ნ-ს ზემოთ აღწერილი ორი სიმპლექსური მოდელი V და W. აჩვენეთ, რომ მათი წვეროების ნებისმიერი ასახვა $V \to W$ ავტომატურად სიმპლიციალურია.

თორნიკე ქადეიშვილი

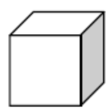
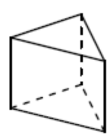
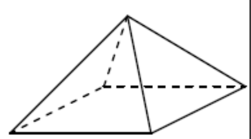
ეილერის მახასიათებელი

დამოკიდებულება ამოზნექილი მრავალკუთხედის წვეროებისა და გვერდების (წიბოების) რაოდენობებს შორის მარტივია   წვეროების რაოდენობა უდრის წიბოების რაოდენობას, ანუ კომბინაცია, რომელსაც მრავალკუთხედის *ეილერის მახასიათებლი* ჰქვია

$$e = (\#\ \text{წვეროები}) - (\#\ \text{წიბოები})$$

უდრის ნულს.

ვნახოთ, როგორია დამოკიდებულება მრავალწახნაგების ელემენტების წვეროების, წიბოების, წახნაგების   რაოდენობებს შორის?

მრავაწახნაგა		წვეროები	წიბოები	წახნაგები	e
სამკუთხა პირამიდა (ტეტრაედრი)		4	6	4	
კუბი		8	12	6	
სამკუთხა პრიზმა		6	9	5	
ოთხკუთხა პირამიდა		5	8	5	

ყველა ეს ფიგურა ტოპოლოგიურად სფეროს ექვივალენტურია.

რა აქვთ მათ ერთნაირი?

ეილერის მახასიათებელი

$$e = (\#\ \text{წვეროები}) - (\#\ \text{წიბოები}) + (\#\ \text{წახნაგები}) = 2.$$

ინგლისურად წვეროა Vertex, წიბო Edge, წახნაგი Face, ანუ

$$e = V - E + F$$

(სამწუხაროდ ქართულად გამოგვდის $e =$ წ წ + წ).

ზოგადად, სიმპლექსური კომპლექსის ეილერ - პუანკარეს მახასიათებელი ასე განიმარტება

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \ldots = \sum_i (-1)^i k_i$$

აქ k_i აღნიშნავს სიმპლექსური კომპლექსის i-განზომილებიანი სიმპლექსების რაოდენობას.

ეილერის თეორემა. შეკრული ამოზნექილი მრავაწახნაგას ეილერის მახასიათებელი 2-ის ტოლია.

დამტკიცების იდეა (კოში):

1. წახნაგების ტრიანგულაციით დიაგონალების გატარებით - მივაღწიოთ იმას, რომ ყოველი წახნაგი გახდება სამკუთხედი. ამ მანიპულაციით ეილერის მახასიათებელი არ იცვლება (რატომ?).

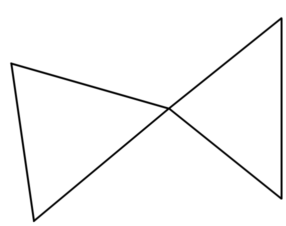
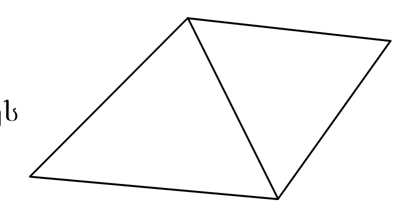
2. ამოვჭრათ ერთი სამკუთხედი. ამით მრავალწახნაგა (ტოპოლოგიურად) გადაიქცევა მრავალკუთხედად ხოლო ეილერის მახასიათებელი 1-ით შემცირდება (რატომ?).

3. ამ მრავალკუთხედს რიგრიგობობით მოვკვეთოთ საზღვართან მდებარე სამკუთხედები (სულ 3 ტიპისაა). ასეთი მოკვეთებით ეილერის მახასიათებელი არ იცვლება (რატომ?).

4. საბოლოოდ მივალთ ერთ სამკუთხედამდე, რომლის ეილერის მახასეიათებელი ერთია. რ.დ.გ.

მრავალწახნაგები, რომელთათვისაც $e \neq 2$

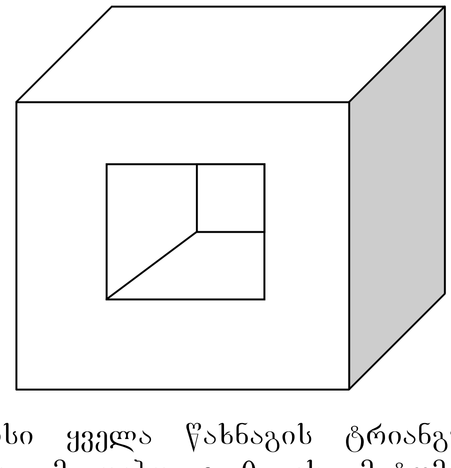
ხომ არ გგონიათ, რომ ყოველი *მრავალკუთხედის* ეილერის მახასიათებელი ნულია?

ნახეთ ეს  ან ეს 

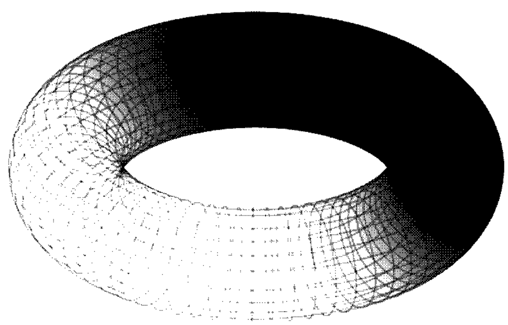
მათთვის $e = 1$. ეს იმიტომ მოხდა, რომ არც ერთი ეს ფიგურა არ არიან წრეწირის ჰომეომორფული.

სავარჯიშო
იქნებ შეთხზათ მრავალკუთხედი, რომლისთვისაც $e=0$, $e=-1$ და ა.შ.

ახლა ნახეთ ეს *მრავალწახნაგა*



გააკეთეთ მისი ყველა წახნაგის ტრიანგულაცია და დათვალეთ ეილერის მახასიათებელი. მიიღებთ $e=0$. ეს იმიტომ ხდება, რომ ეს ფიგურა არ არის სფეროს ჰომეომორფული, ის ჰომეომორფულია ტორისა



.

ამ სამშენებლო ბლოკისთვის

$e=-2$. ეს მრავალწახნაგა ჰომეომორფულია ასეთ “2-ტორისა”

.

სავარჯიშო
იქნებ დახაზოთ მრავარწახნაგა, რომლისთვისაც $e=-4$, $e=-6$ და ა. შ.

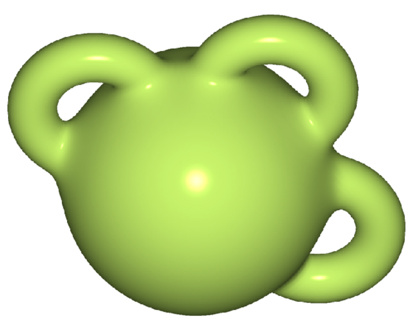
საზოგადოდ, ეილერის მახასიათებელი *ტოპოლოგიური ინვარიანტია*: ჰომეომორფულ ტოპოლოგიურ სივრცეებს ერთნაირი ეილერ-პუანკარეს მახასიათებელი აქვთ, ანუ თუ $X \approx Y$, მაშინ $\chi(X)=\chi(Y)$.

უფრო მეტიც, ეილერის მახასიათებელი *ჰომოტოპიური ინვარიანტიცაა*: ჰომოტოპიურად ექვივალენტურ ტოპოლოგიურ სივრცეებს ერთნაირი ეილერ-პუანკარეს მახასიათებელი აქვთ, ანუ თუ $X \sim Y$, მაშინ $\chi(X)=\chi(Y)$.

გვარი

ცნობილია (ორიენტირებული) შეკრული ზედაპირების სრული კლასიფიკაცია: თითეული ასეთი ზედაპირი ჰომეომორფულია სფეროსი რამდენიმე სახელურით. ზედაპირის *გვარი* g (genus) ეწოდება ამ სახელურების რაოდენობას.

კერძოდ, თავად სფეროს გვარია 0, ტორისა 1, ზემოთ ნაჩვენები სამშენებლო ბლოკისა 2, აი ამ ზედაპირის კი - 3



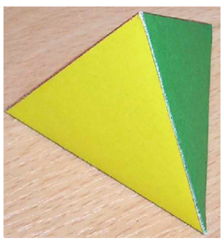
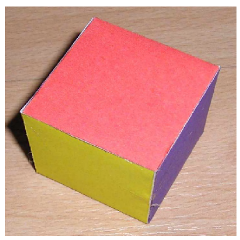
ზედაპირის გვარი უდრის ასეთ რიცხვს: მაქსიმუმ რამდენი შეკრული მარტივი წირის ამოკვეთაა შესაძლებელი ისე, რომ ზედაპირი არ დაიშალოს არაბმულ კომპონენტებად.

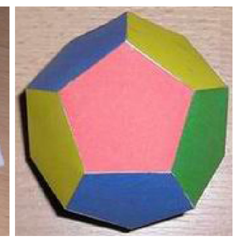
სავარჯიშო
აბა, დაინახეთ, რომელი სამი შეკრული მარტივი წირის ამოკვეთაა შესაძლებელი ამ 3-ტორიდან დაუსჯელად.

დამოკიდებულება ეილერის მახასიათებელს და გვარს შორის ასეთია $\chi = 2-2g$.

პლატონის სხეულები

ეილერის თეორემის შედეგია, რომ არსებობს მხოლოდ 5 წესიერი მრავალწახნაგა (ე.წ. პლატონის სხეულები)

ტეტრაედრი	**კუბი ანუ ჰექსაედრი**	**ოქტაედრი**	**იკოსაედრი**	**დოდეკაედრი**

რატომ 5?

აღვნიშნოთ:

k - ერთ წვეროში თავმოყრილ წიბოთა რიცხვი, ცხადია $k \geq 3$
n - წახნაგის კუთხეთა რაოდენობა, ცხადია $n \geq 3$
x წახნაგთა რაოდენობა

მაშინ: წიბოთა რაოდენობაა $\dfrac{n \cdot x}{2}$;

წვეროთა რაოდენობაა $\dfrac{n \cdot x}{k}$.

ეილერის თეორემით $\dfrac{n \cdot x}{k} - \dfrac{n \cdot x}{2} + x = 2$. აქედან

$$x = \frac{4k}{2n + 2k - nk}.$$

შემდეგ ცხრილში გამოთვლილია x სხვადასხვა n და k-სთვის

k n	3	4	5	6	7	8
3	4	8	20		-28	-16
4	6		-10	-6	-4.66	-4
5	12	-8	-4	-3	-2.5	-2.3
6		-4	-2.5	-2	-1.75	-1.6
7	-12	-2.6	-1.8	-1.5	-1.3	-1.2
8	-6	-2	-1.4	-1.2	-1.07	-1

როგორც ვხედავთ x-ის მთელი დადებითი მნიშვნელობა გამოდის მხოლოდ 5 შემთხვევაში. თითეული ამ შემთხვევათაგანი შეესაბამება პლატონის სხეულს.

მაგალითად, ცხრილიდან ჩანს, რომ $k=3,\ n=4$ შემთხვევაში $x=6$. ვნახოთ რომელ მრავალწახნაგას ვიღებთ ამ შემთხვევაში. ამისათვის გამოხითვალოთ წვეროების, წიბოების და წახნაგების რაოდენობა:

$$V=\frac{n\cdot x}{k}=\frac{4\cdot 6}{3}=8,\quad E=\frac{n\cdot x}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12,\quad F=x=6,$$

აბა თუ მიხვდით, ეს რომელია?

სავარჯიშო

გამოიკვლიეთ ხუთივე შემთხვევა, რომელ მრავალწახნაგას შეესაბამება თითეული მათგანი

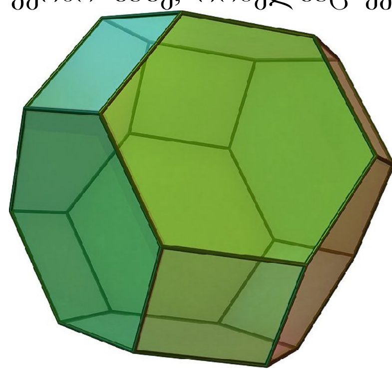
$$(k=3,\ n=3);\quad (k=3,\ n=4);\quad (k=4,\ n=3);\quad (k=3,\ n=5);\quad (k=5,\ n=3);$$

ამის გამოყენებით ახსენით რას ნიშნავს სიტყვები tetra, hexa, octa, dodeca, icosa (წესით ბერძნულად უნდა ეწეროს).

ნახევრადწესიერი მრავალწახნაგები

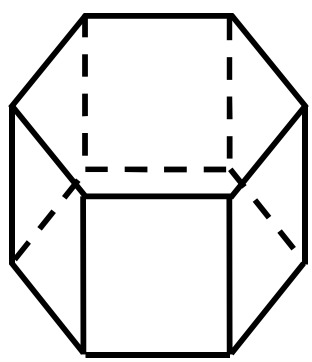
ამ 5 წესიერი მრავალწახნაგას გარდა არსებობს სხვადასხვა ტიპის ნახევრადწესიერები:

არქიმედის სხეულები ყველა წახნაგი წესიერი მრავალკუთხედია (მაგრამ შეიძლება არაერთსახელა) ხოლო წვეროები *ერთგვაროვანი.* მაგ. წაკვეთილი ოქტაედრი (პერმუტაედრის კერძო სახე, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ)



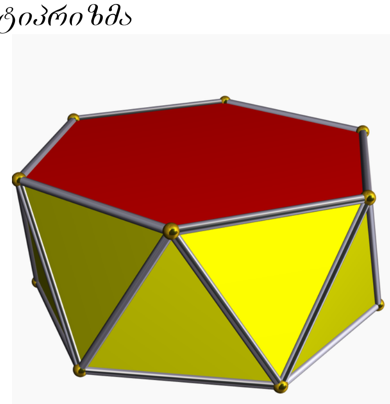
რომელსაც აქვს წახნაგებად კვადრატები და წესიერი ექვსკუთხედები. მიაქციეთ ყურადღება: აქ თითეული წვერო 3-ვალენტიანია (ტერმინი ქიმიიდან) ანუ 3 წიბო გამოდის.

ასეთია აგრეთვე *ექვსკუთხა პრიზმა*



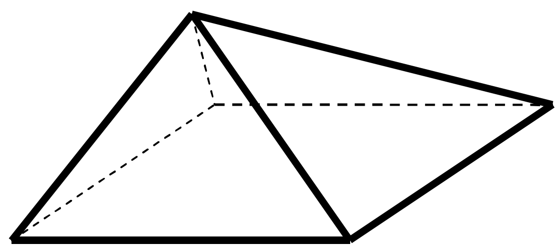
რომელის წახნაგები აგრეთვე კვადრატები და წესიერი ექვსკუთხედებია და ყველა წვერო აგრეთვე 3-ვალენტიანია.

არსებობს კიდევ ასეთი *ანტიპრიზმა*



გასაგებია, რომ პრიზმებისა და ანტიპრიზმების რაოდენობა უსასრულოა (რატომ?), მაგრამ არქიმედეს სხეულები პლატონის სხეულების გამოკლებით სულ 13 ცალია, ნახეთ ვიკიპედიაში **Archimedean solid.**

ჯონსონის სხეულები - ყველა წახნაგი წესიერი მრავალკუთხედია მაგრამ შეიძლება არაერთსახელა, ხოლო წვეროების ერთგვაროვნება აღარ მოითხოვება. მაგ. ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძე კვადრატია, ხოლო გვერდითი წახნაგები წესიერი სამკუთხედები



აქ ოთხი წვერო 3-ვალენტიანია, ერთი კი 4-ვალენტიანი.

ასეთები 92 ცალია.

ეკზოტიკური მრავალწახნაგები

ადიდასის ფეხბურთის ბურთი

ეს ბურთი არქიმედის სხეულია: ზოგი მისი წახნაგი ექვსკუთხედია (Hexagon), ზოგი ხუთკუთხედი (Pentagon), ამასთან თითეული წვეროდან გამოდის სამი წიბო. ეილერის მახასიათებელი გვაძლევს საშუალებას დავთვალოთ ხუთკუთხედების რაოდენობა.

დავუშვათ გვაქვს H ექვსკუთხედი და P ხუთკუთხედი. მაშინ

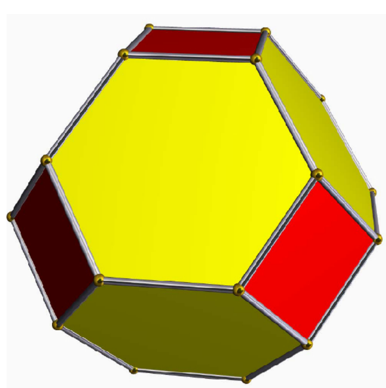
$$V=\frac{5P+6H}{3}, \quad E=\frac{5P+6H}{2}, \quad F=P+H$$

და ეილერის თეორემით ვიღებთ

$$e=V-E+F=\frac{5P+6H}{3}-\frac{5P+6H}{2}+P+H=\frac{P}{6}=2,$$

ე.ი. $P=12$, ანუ საჭიროა ზუსტად 12 ხუთკუთხედი. ექვსკუთხა წახნაგების რაოდენობის დადგენა უფრო ძნელია, მხოლოდ ეილერის მახასიათებელი არ კმარა.

პერმუტოედრი

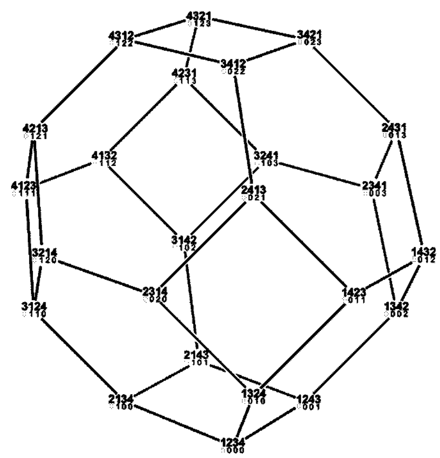


სავარჯიშო

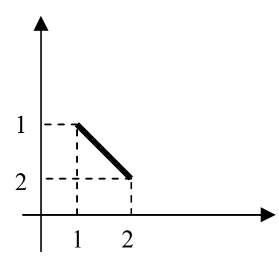
პერმუტაედრის წახნაგებია რამდენიმე კვადრატი (Square) და რამდენიმე ექვსკუთხედი (Hexagon) წახნაგი. დაადგინეთ (ისევე, როგორც ადიდასის შემთხვევაში) რამდენია კვადრატი?

ცადეთ დახაზოთ სხვა, პერმუტოედრისგან განსვავებული არქიმედის სხეული, რომელსაც წახნაგებად ასევე კვადრატები და ექვსკუთხედები აქვს.

ზოგადად პერმუტოედრი P_4 არის ამოზნექილი 3-განზომილებიანი მრავალწახნაგა R^4-ში, რომლის წვეროების კოორდინატებია $1,2,3,4$ რიცხვების ყველა გადანაცვლება (ე.ი. სულ $4!=24$ წვერო). ეს R^4-ის ქვესიმრავლე ძნელი დასახატია



ვცადოთ დავხატოთ ერთგანზომილებიანი პერმუტოედრი P_2: ეს არის R^2-ის ამოზნექილი ქვესიმრავლე, რომლის წვეროებია $(1,2)$ და $(2,1)$



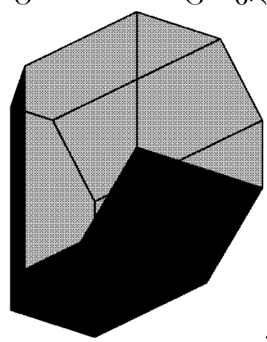
სავარჯიშო

ორგანზომილებიანი პერმუტოედრი $P_3 \subset R^3$ თქვენ თვითონ დახატეთ. რა ფიგურა გამოვიდა?

განმარტეთ n-განზომილებიანი პერმუტოედრი $P_{n+1} \subset R^{n+1}$, ნუ დახატავთ.

ასოციაედრი

კიდევ ერთი ეკზოტიკური პოლიტოპი ასოციაედრი K_5

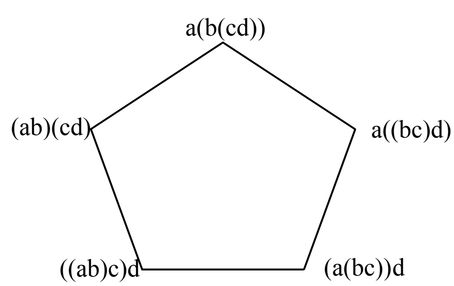


მისი ერთგანზომილებიანი ანალოგია K_3 რომლის წვეროები ასეა აღწერილი: განვიხილოთ რაიმე სამი სიმბოლო, ვთქვათ a,b,c. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ამ სამი ასოს გადამრავლება არაასოციატური გამრავლებით რიგის შენარჩუნებით? ეს შესაძლებლობებია $a(bc)$ და $(ab)c$. ამრიგად K_3 არის მონაკვეთი, რომლის წვეროებია $a(bc)$ და $(ab)c$

ახლა ვნახოთ რა იქნება K_4. ეს არის უკვე 2-განზომილებიანი ფიგურა მრავალკუთხედი, რომლის წვეროები ასეა აღწერილი: განვიხილოთ ოთხი სიმბოლო ვთქვათ a,b,c,d. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ამ ოთხი ასოს გადამრავლება არაასოციატური გამრავლებით რიგის შენარჩუნებით?
ეს შესაძლებლობებია

$$a(b(cd)),\ a((bc)d),\ (a(bc))d,\ ((ab)c)d,\ (ab)(cd).$$

ამრიგად K_4 არის ხუთკუთხედი. მიაქციეთ ყურადღება, ორი წვერო ადგებს წიბოს, თუ ერთი მეორედან მიიღება ასოციატურიბის წესით გადასვლით $x(yz)\leftrightarrow(xy)z$



K_4 უკვე არის მრავალწახნაგა, რომლის წვეროებია ხუთი ასოს a,b,c,d,e რიგის შენარჩუნებით გადამრავლების (ფრჩხილების დასმის) ვარიანტები. ასეთი ვარიანტებია 14, თუ არ მეშლება.

სავარჯიშო

დათვალეთ! დააწერეთ პერმუტოედრის ნახაზს შესაბამისი კომბინაციები

$$a(b(c(de))),\ a(b((cd)e),\ \ldots\ .$$

თორნიკე ქადეიშვილი

მარტივი წინადადების ეილერის მახასიათებელი

ქართული გრამატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოში ერთი ასეთი წესია მოყვანილი

მარტივ წინადადებაში წევრთა რაოდენობა ერთით მეტია სინტაქსურ ბმათა რაოდებობაზე.

ძალიან მათემატიკურად ჟღერს, არა?

მაგრამ ჯერ ვცადოთ გარკვევა აქ გამოყენებულ ცნებებში "წინადადების წევრი" და "სინტაქსური ბმა". სახელმძღვანელოებშიI ასეთი განმარტებები ვნახე:

"წინადადებაში შემავალ სრულმნიშვნელოვან სიტყვას წინადადების წევრი ჰქვია"
"წინადადების ორი წევრი სინტაგმას ადგენს, თუ ისინი აზრობრივ კავშირში არიან".

მათემატიკოსის თვალსაზრისით მთლად მკაცრი განმარტებები არ არის: რას ნიშნავს ცნებები **"სრულმნიშვნელოვანი"** ან **"აზრობრივი კავშირი"**? მაშინ მათ ცალკე განმარტება სჭირდება, და ა.შ. მაგრამ გრამატიკა არ არის მათემატიკასავით ზუსტი მეცნიერება. დავკმაყოფილდეთ ინტუიციური გაგებით.

წინადადების ყოველი სიტყვა არ ითვლება წინადადების წევრად. ასეთებად არ თვლიან კავშირებს, ნაწილაკებს სხვა ამგვარ მეორეხარისხოვან სიტყვებს: "და", "ან", "კი", "მაგრამ" და ა.შ.

სინტაქსური ბმის, ანუ სხვაგვარად სინტაგმის ცნებაში კი მოდით მაგალითებით გავერკვეთ.

ბავშვი მიდის სკოლაში

ამ წინადადებაში 3 წევრია. სიტაგმებს ადგენენ: *ბავშვი მიდის; მიდის-სკოლაში.* მესამე წყვილი *ბავშვი სკოლაში* არ არის სინტაგმა. ამრიგად ამ წინადადებაში 3 წევრია და 2 სინტაგმა, ე.ი. წესი შესრულებულია. ვფიქრობ ინტუიციურად გასაგებია რა არის სინტაგმა, მაგრამ მაინც მინდოდა მეტ-ნაკლებად დამაკმაყოფილებელი განმარტება მენახა.

მაგალითად ასეთი დინამიური განმარტება:

წინადადების ორი წევრი სინტაგმას ადგენს, თუ ერთის ფორმის ცვლილება (დრო, ბრუნვა, რიცხვი,) მეორის ცვლილებას იწვევს

მაგ. ბავშვი-მიდის და ბავშვები-მიდიან; მიდის-სკოლაში და მოდის- სკოლიდან.

მაგრამ, სამწუხაროდ, აღმოჩნდა, რომ არსებობს სინტაქსური ბმის ისეთი სახე (მირთვა), როცა ერთი წევრის ცვლილება *არ იწვევს* მეორის ცვლილებას, მაგ. ცხრა-ძმა, ცხრა-ძმას, ცხრა-ძმით. ასე, რომ, ამ განმარტებამ არ ივარგა. დავკმაყოფილდეთ ისევ ინტუიციური განმარტებით.

ჩავწეროთ ზემოთ მოტანილი წესი ფორმულის სახით:

(წინადადების წევრთა რიცხვი)   (სინტაგმათა რიცხვი) = 1

აი ახლა კი მათემატიკოსისთვის ცხადი უნდა იყოს რომ ამ წესს რაღაც კავშირი აქვს ცნობილ *ეილერის მახასიათებალთან.*

მაგრამ ჯერ მინდა დავსვა სამი კითხვა:

1. შეიძლება თუ არა, რომ წინადადებას დავუმატოთ ახალი წევრი ისე, რომ მან სინტაგმა შეადგინოს ორ ძველ წევრთან?

2. შეიძლება თუ არა, რომ წინადადებაში არსებობდეს ტრიადა, ანუ წევრთა სამეული, რომელშიც ყოველი ორი სინტაგმას ადგენს? ამ კითხვის უფრო ზოგადი სახე ასეთია: შეიძლება თუ არა, რომ წინადადებაში არსებობდეს ციკლი, ანუ წევრთა ისეთი მიმდევრობა, რომელშიც პირველი წევრი სინტაგმას აგდენს მეორესთან, მეორე მესამესთან, და ა.შ., უკანასკნელი პირველთან?

3. წინადადების ზოგი წევრი ქვემდებარესთანაა სინტაგმოთ დაკავშირებული უშუალოდ, ან რომელიმე სხვა წევრებზე (შემასმენლის გარდა) გავლით, მათ ქვედებარის კლასის წევრები ვუწოდოთ. ასევე შესაძლებელია განვმარტოთ შემასმენლის კლასი. მაგალითად წინადადებში

ბეჯითი ბავშვი სკოლაში ადრე მიდის

სიტყვა ბეჯითი ქვემდებარის კლასშია, ხოლო ადრე შემასმენლის. მაშ ასე, კითხვა: შეიძლება თუ არა, რომ ქვემდებარის კლასის წევრი სინტაგმას ადგენდეს შემასმენლის კლასის წევრთან?

შესძლებთ უპასუხოთ ამ კითხვებს მათემატიკის გარეშე? არ ვიცი, სცადეთ!

პასუხი პირველ კითხვაზე უარყოფითია და ის ადვილად გამოდის ჩვენი წესიდან: ასეთი დამატებისას წევრთა რიცხვი 1-ით იზრდება, ხოლო სინტაგმათა

რიცხვი კი 2-ით. მაშინ ახალ წინადადებაში სხვაობა ერთი კი არ იქნება, როგორც ამას წესი მოითხოვს, არამედ 0, რაც წესს ეწინააღმდეგება.

აი, მე-2 და მე-3 კითხვებზე პასუხი კი, ჩემის აზრით, ცოტა უფრო ღრმა მათემატიკას მოითხოვს, რაზეც ახლა გადავალ.

დაგვჭირდება რამდენიმე ცნება და ფაქტი გრაფთა თეორიიდან.

გრაფი ეწოდება წერტილთა სასრულ სიმრავლეს, რომელთაგან ზოგიერთი წყვილი მონაკვეთითაა შეერთებული. ამ წერტილებს გრაფის წვეროებს უწოდებენ, ხოლო მონაკვეთებს წიბოებს. *ტეხილი* ეწოდება წიბოთა მიმდევრობას, რომლისთვისაც ყოველი შემდეგი წიბო იწყება წინა წიბოს ბოლოში. *ციკლი* ეწოდება შეკრულ ტეხილს. გრაფს ეწოდება *ბმული*, თუ მისი ნებისმიერი ორი წვერო ტეხილით შეიძლება შეერთდეს.

ბავშვობაში გინახავთ ალბათ ამოცანები გრაფების შესახებ. მაგალითად კონვერტის დახაზვა ხელის აუღებლად, ან სამი სახლის სამ ჭასთან ბილიკებით შეერთება, ისე, რომ ბილიკები ერთმანეთს არ კვეთდნენ. ამაზე, ალბათ, როდისმე მოგიყვებით. ახლა კი დავუბრუნდეთ ჩვენს თემას.

გრაფის *ეილერის მახასიათებელი* ეწოდება სხვაობას

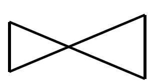
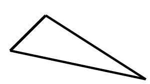
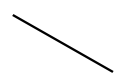
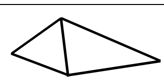
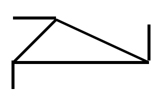
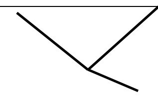
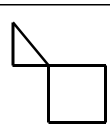
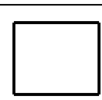
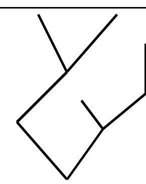
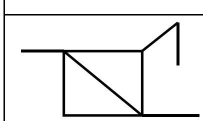
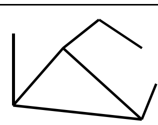
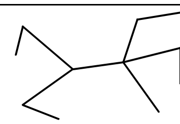
e = (წვეროთა რიცხვი)   (წიბოთა რიცხვი)

(ეს არის კერძო შემთხვევა ზოგადი ცნებისა

$$e = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

სადაც a_k არის k-განზომილებიან წახნაგთა რიცხვი).

ამ ცხრილში ბმული გრაფები დახარისხებულია ეილერის მახასიათებლების მიხედვით:

e = -1	**e = 0**	**e = 1**
		
		
		
		

აქ **e = 0** სვეტში ერთციკლიანი გრაფებია, **e = -1** სვეტში კი გრაფებია ორი *მთავარი* ციკლით.

განსაკუთრებული ყრადღება მივაქციოთ **e = 1** სვეტს. აქ ყველა გრაფი *აციკლურია*, რაც ნიშნავს ციკლების არარსებობას, აციკლურ გრაფებს სხვაგვარად "ხეებს" უწოდებენ (გავს, არა?). ცხადია, ეს არ არის შემთხვევითი, არსებობს ასეთი

თეორემა. *ბმული გრაფი აციკლურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ეილერის მახასიათებელი 1-ის ტოლია.*

ამ თეორემას, როგორც ყველ "მაშინ და მხოლოდ მაშინ" ან "აუცილებელ და საკმარის" თეორემას, ორი მხარე აქვს.

პირველის

აციკლური ბმული გრაფის ეილერის მახასიათებელი 1-ის ტოლია

დამტკიცება ადვილია: დაიწყეთ ამ გრაფის *გასხლვა* - კიდურა წიბოების მოწყვეტა, ყოველი მოწყვეტის შემდეგ გრაფს მოაკლდება ერთი წვერო და ერთი წიბო, ანუ ეილერის მახასიათებელი არ შეიცვლება, საბოლოოდ დაგვრჩება ერთი წერტილი, რომლის ეილერის მახასიათებალი, ცხადია, ერთია.

აი მეორე მხარე

თუ ბმული გრაფის ეილერის მახასიათებელი ერთია, მაშინ ის აციკლურია

ცოტა უფრო ძნელი დასამტკიცებელია. სცადეთ!

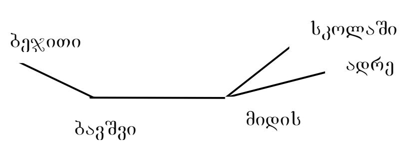
ახლა დროა დავუბრუნდეთ გრამატიკას.

ყოველ წინადადებას შეიძლება შევუსაბამოთ გრაფი, რომელშიც იმდენი წვეროა, რამდენი წევრიც არის წინადადებაში და წიბოთი შეერთებულია ის წვეროები, რომელთა შესაბამისი წინადადების წევრები სინტაგმას ადგენენ.

მაგალითად წინადადებას

ბეჯითი ბავშვი სკოლაში ადრე მიდის

ასეთი გრაფია შეესაბამება



ახლა უკვე შეგვიძლია პასუხი გავცეთ ჩვენს კითხვებს.

2. აქვს თუ არა მარტივ წინადადებას ციკლები?

არა. ჩვენი გრამატიკული წესის თანახმად მარტივი წინადადების შესაბამისი გრაფის ეილერის მახასიათებელი 1-ის ტოლია. მაგრამ ეჭვს არ იწვევს ერთი გარემოებაც: *მარტივი წინადადება ბმულია* (აქ წინადადების მარტივობაა მნიშვნელოვანი). თუ ამ გარემოებას გავიზიარებთ, მივიღებთ:

რადგან მარტივი წინადადების შესაბამისი გრაფი ბმულია და წესის თანახმად მისი ეილერის მახასიათებელი 1-ის ტოლის, ამიტომ, თეორემის გამო, ის აციკლურია, ანუ მასში არ შეიძლება არსებობდეს ციკლები.

3. შეიძლება თუ არა ქვემდებარის კლასის წევრი სინტაგმას ადგენდეს შემასმენლის კლასის წევრთან?

არა. ქვემდებარე ყოველთვის სინტაგმაშია შემასმენელთან. თუ ქვემდებარის კლასის რომელიმე წევრი სინტაგმას ადგენს შემასმენლის კლასის წევრთან, მაშინ, ცხადია, შეიკვრება ციკლი, რაც, როგორც უკვე ვიცით, მარტივ წინადადებაში არ შეიძლება.