ო ქ მ ი # 8

თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს 2023 წლის 19 ივლისის სხდომისა

სხდომას ესწრებოდნენ:

სამეცნიერო საბჭოს წევრები: თ. ქადეიშვილი, გ. ბერიკელაშვილი, თ. ბუჩუკური, მ. ელიაშვილი, ლ. ეფრემიძე, ა. კვინიხიძე, ი. კიღურაძე, გ. ლავრელაშვილი, მ. მანია, ა. მესხი, ს. სანებლიძე, ნ. ფარცვანია, ნ. შავლაყაძე, ო. ჭკადუა, ს. ხარიბეგაშვილი, ო. ჯოხაძე (სამეცნიერო საბჭო შედგება 29 წევრისაგან, სხდომას ესწრებოდა 16 წევრი).

დ ღ ი ს წ ე ს რ ი გ ი:

1. თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის 2024-2028 წლების სამოქმედო გეგმის შემუშავება-განხილვა.

მ ო ი ს მ ი ნ ე ს : ინსტიტუტის დირექტორის ნინო ფარცვანიას გამოსვლა, რომელმაც დამსწრეებს მოახსენა, რომ ინსტიტუტი 2023 წლის 31 დეკემბერს ასრულებს თავის 5-წლიან (2018-2023 წწ.) სამოქმედო გეგმას, და საჭიროა შემდგომი წლებისთვის ახალი სამოქმედო გეგმის შემუშავება.

მ ო ი ს მ ი ს ნ ე ს : ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს თავმჯდომარის თორნიკე ქადეიშვილის გამოსვლა, რომელმაც წარმოადგინა განყოფილებებთან ერთად შემუშავებული ინსტიტუტის 2024-2028 წლების სამოქმედო გეგმა.

საბჭომ განიხილა წარმოდგენილი სამოქმედო გეგმა და

დ ა ა დ გ ი ნ ა : თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის 2024-2028 წლების სამოქმედო გეგმა მოწონებულ იქნეს წარმოდგენილი სახით (გეგმა ოქმს თან ერთვის) და გადაეცეს თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორს დასამტკიცებლად და შემდგომი რეაგირებისათვის.

საბჭოს თავმჯდომარე თ. ქადეიშვილი

სწავლული მდივანი ო. ჯოხაძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

ანდრია რაზმაძის სახელობის

მათემატიკის ინსტიტუტის

2024-2028 წლების

ს ა მ ო ქ მ ე დ ო   გ ე გ მ ა

„ფუნდამენტური კვლევები მათემატიკასა და თეორიულ ფიზიკაში,
მათი გამოყენებები“

ინსტიტუტის დირექტორი

ნინო ფარცვანია

ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს თავმჯდომარე

თორნიკე ქადეიშვილი

თბილისი

ივლისი, 2023 წელი

ს ა რ ჩ ე ვ ი

1.1. **პროექტის დასახელება:** ფუნდამენტური კვლევები მათემატიკასა და თეორიულ ფიზიკაში, მათი გამოყენებები

1.2. **პროექტის ხელმძღვანელი:** თორნიკე ქადეიშვილი

1.3. **მონაწილე ინსტიტუტი:** ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი

1.4. **პროექტის ხანგრძლივობა:** 5 წელი (2024 – 2028 წწ.)

1.5. **პროექტის მოკლე შინაარსი**

თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი არის ქვეყნის წამყვანი სამეცნიერო დაწესებულება, რომელიც აწარმოებს სამეცნიერო კვლევებს მათემატიკის ფუნდამენტურ და გამოყენებით დარგებში და თეორიულ ფიზიკაში. ინსტიტუტის მეცნიერთა სამეცნიერო შედეგები კარგადაა ცნობილი და აღიარებული საერთაშორისო სამეცნიერო საზოგადოების მიერ, რასაც ადასტურებს ინსტიტუტის თანამშრომელთა მიერ მიღებული საერთაშორისო გრანტები, საერთაშორისო გამომცემლობებში გამოქვეყნებული მონოგრაფიები, მაღალრეიტინგულ სამეცნიერო ჟურნალებში გამოქვეყნებული სამეცნიერო სტატიები. კერძოდ:

- ინსტიტუტს მოპოვებული აქვს 70-ზე მეტი გრანტი საერთაშორისო სამეცნიერო ფონდებიდან (INTAS, CRDF, ISF, DFG, Tubitak, The Royal Society, EPSRC (Engineering and Physics Research Council Grant, UK), NATO Science Fellowships Program, Eurasia Foundation, Australian Research Council, SCOPE, Swiss National Science Foundation, Volkswagen Foundation, Heisenberg-Landau Program, Grant Lagrange-CRT Foundation - ISI Foundation (France), ICER (Grant of International Centre for Economic Research, Italy), Grant of the Government of Italy for Young Scientists, King's College London Mathematics Department Research Scholarship for Outstanding Students, STCU, PEER, GNAMPA, Horizon 2020, Erasmus+, etc.) და შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის 40-ზე მეტი გრანტი;
- ინსტიტუტის თანამშრომლებს წლების განმავლობაში მიღებული აქვთ შემდეგი საერთაშორისო პრემიები და აღიარებები: ჰუმბოლდტის საზოგადოების სტიპენდიები და პრემიები, მერკატორის პროფესორი გერმანიაში, თეორიული ფიზიკის საერთაშორისო ცენტრის (იტალია) არჩეული ასოცირებული წევრები, გერმანიის მათემატიკური ასოციაციის ეილერის პრემია, ბოლცანოს საპატიო მედალი (ჩეხეთის მეცნიერებათა აკადემია), ლოძის უნივერსიტეტის (პოლონეთი) რექტორის ჯილდო;
- ინსტიტუტის თანამშრომლების მიერ გამოქვეყნებულია 130-ზე მეტი მონოგრაფია (North-Holland, Pitman, P. Noordhoff-Groninger-Holland, Longman, Birkhauser, Kluwer, World Scientific, Cambridge University Press, etc.), და ბოლო 10 წელიწადში 900-ზე მეტი სამეცნიერო სტატია, მათ შორის თითქმის ნახევარი იმფაქტ-ფაქტორიან ჟურნალებში;
- ინსტიტუტის თანამშრომლებს მჭიდრო სამეცნიერო კონტაქტები აქვთ აშშ-ის, იაპონიისა და დასავლეთ ევროპის 30-ზე მეტ სამეცნიერო ცენტრთან (მათ შორის, საარბრიუკენის, შტუტგარტის, ბერლინის, ფრანკფურტის, ჰაიდელბერგის უნივერსიტეტები (გერმანია), ლილის, გრენობლის, ტურის, სტრასბურგის უნივერსიტეტები (საფრანგეთი), დუბლინის ტრინიტი კოლეჯი (ირლანდია), ბანგორის, სასექსის, ბრუნელის, რედინგის უნივერსიტეტები (დიდი ბრიტანეთი), თეორიული ფიზიკის საერთაშორისო ცენტრი, პალერმოს, პადუას უნივერსიტეტები (იტალია), ჩიკაგოს, პენსილვანიის, ჩრდილო კაროლინის უნივერსიტეტები,

ფლორიდის ტექნოლოგიური ინსტიტუტი (აშშ), ოკაიამას უნივერსიტეტი (იაპონია), ლიუვენის უნივერსიტეტი (ბელგია), სევილიის, პონტევედრას, სანტიაგო დე კომპოსტელას უნივერსიტეტები (ესპანეთი), ციურიხის, ბერნის, ჟენევის უნივერსიტეტები (შვეიცარია), პრაღის, მასარიკის, ბრნოს ტექნოლოგიური უნივერსიტეტები (ჩეხეთი), ერკუეს, ოსმანგაზის უნივერსიტეტები (თურქეთი), და სხვ.), რაც გულისხმობს ერთობლივი სამეცნიერო პუბლიკაციების გამოქვეყნებას, სამეცნიერო ვიზიტებს, ერთობლივი კონფერენციების მოწყობას და ა. შ.

წინამდებარე პროექტი წარმოადგენს თსუ ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის 2019-2023 წლების პროექტის „კვლევები მათემატიკის ფუნდამენტურ და გამოყენებით დარგებში, თეორიულ ფიზიკაში“ გაგრძელებას. პროექტის ფარგლებში გათვალისწინებულია სამეცნიერო კვლევები თანამედროვე მათემატიკისა და თეორიული ფიზიკის აქტუალურ დარგებში სხვადასხვა მიმართულებებით.

პროექტის დეტალური აღწერა - კვლევის ობიექტების, აქტუალობის, სიახლის, მეთოდოლოგიის, შემსრულებელთა მიერ ადრე მიღებული შედეგების, არსისა და სამეცნიერო ღირებულების - მოცემულია პროექტის ძირითად ნაწილში თითოეული თემისათვის.

1.6. პროექტის სამეცნიერო თემები

1) თანამედროვე ასპექტები ახალი ფუნქციური სივრცეების, ინტეგრალური ოპერატორების, გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზის, ფურიეს ანალიზის და ინვარიანტულ და კვაზი-ინვარიანტულ ზომათა თეორიის მიმართულებებით. გამოყენებები მონათესავე დარგებში;

2) ალგებრული ობიექტების ჰომოლოგიური, ჰომოტოპიური და კატეგორიული თვისებები;

3) მოდალური და ინტუიციონისტური ლოგიკის სემანტიკური ასპექტები;

4) ტოპოლოგიური ობიექტების ახალი ალგებრული მოდელები და მათი გამოყენებები გეომეტრიის, ტოპოლოგიის, ალგებრის და ფიზიკის საკითხებში;

5) სასაზღვრო ამოცანები ჩვეულებრივი დიფერენციალური, ფუნქციონალურ-დიფერენცია-ლური და ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებისთვის;

6) 6.1. ინტეგრალური ოპერატორები ლის ჯგუფებზე; 6.2. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანები თხელი სხეულებისთვის; 6.3. პოტენციალთა მეთოდის გამოყენება განზოგადებული თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის თეორიის შერეულ და ბზარის ტიპის დინამიკის ამოცანებში; 6.4. თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების სამგანზომილებიანი ამოცანები; 6.5. ტალღის გავრცელების ამოცანები კრისტალებსა და მეტამასალებში; 6.6. ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის ამოცანები ხახუნის ეფექტის გათვალისწინებით;

7) უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ზოგიერთი საკონტაქტო და შერეული სასაზღვრო ამოცანა;

8) თეორიული ფიზიკის აქტუალური საკითხების კვლევა თანამედროვე მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით (კვანტური ველების თეორიის, ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკის, დაბალგანზომილებიანი ფიზიკური სისტემების და გრავიტაციის ამოცანები);

9) მარტინგალური მეთოდები და მათი გამოყენება ფინანსურ მათემატიკაში, სტატისტიკურ შეფასებათა თეორიაში, ფუნქციონალურ განტოლებებში და მათემატიკურ ბიოლოგიაში.

1.7. არსებული აღჭურვილობა და დანადგარები

დასახელება	რაოდენობა	ექსპლუატაციაში შესვლის წელი
მაგიდის კომპიუტერი	3	2010
მაგიდის კომპიუტერი	5	2015
მაგიდის კომპიუტერი	10	2016
მაგიდის კომპიუტერი	13	2018
მაგიდის კომპიუტერი	1	2019
მაგიდის კომპიუტერი	7	2022
ნოუთბუქი	3	2010
ნოუთბუქი	5	2013
ნოუთბუქი	1	2014
ნოუთბუქი	1	2015
ნოუთბუქი	2	2018
ნოუთბუქი	2	2019
ნოუთბუქი	1	2022
სერვერი	1	2015
პრინტერი	3	2010
პრინტერი	2	2013
პრინტერი	4	2015
პრინტერი	3	2016
პრინტერი	1	2017
პრინტერი	1	2018
პრინტერი	1	2022
პრინტერი კომბაინი	1	2013
პრინტერი კომბაინი	2	2015
სკანერი	3	2015
სკანერი	1	2018
პროექტორი	2	2009
პროექტორი	1	2010
პროექტორი	1	2011
პროექტორი	1	2018

1.8. პროექტის სავარაუდო ღირებულება

ღირებულება (ლარი)	I წელი	II წელი	III წელი	IV წელი	V წელი	ჯამი
ხ ე ლ ფ ა ს ი						
ა) სამეცნიერო პერსონალი						
მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი (მათ შორის, 7 უვადო) (29.5 საშტატო ერთ.)	322,140.00	386,568.00	463,881.60	556,657.92	667,989.50	2,397,237.02
უფროსი მეცნიერი თანამშრომელი (21 საშტატო ერთ.)	196,560.00	235,872.00	283,046.40	339,655.68	407,586.82	1,462,720.90
მეცნიერი თანამშრომელი (5.5 საშტატო ერთ.)	42,900.00	51,480.00	61,776.00	74,131.20	88,957.44	319,244.64
ბ) ადმინისტრაცია და დამხმ. პერსონალი						
დირექტორი (1 საშტატო ერთ.)	19,500.00	21,450.00	23,595.00	25,954.50	28,549.95	119,049.45
დირექტორის მოადგილე (1 საშტატო ერთ.)	15,600.00	17,160.00	18,876.00	20,763.60	22,839.96	95,239.56
განყოფილების ხელმძღვანელი (9 საშტატო ერთ.)	14,040.00	15,444.00	16,988.40	18,687.24	20,555.96	85,715.60
უფროსი ლაბორანტი (5.5 საშტატო ერთ.)	34,320.00	37,752.00	41,527.20	45,679.92	50,247.91	209,527.03
ლაბორანტი (1 საშტატო ერთ.)	5,070.00	5,577.00	6,134.70	6,748.17	7,422.99	30,952.86
სწავლული მდივანი (1 საშტატო ერთ.)	3,120.00	3,432.00	3,775.20	4,152.72	4,567.99	19,047.91
დირექტორის თანაშემწე სამეურნეო საკითხებში (1 საშტატო ერთ.)	11,700.00	12,870.00	14,157.00	15,572.70	17,129.97	71,429.67
კადრების მენეჯერი (1 საშტატო ერთ.)	6,630.00	7,293.00	8,022.30	8,824.53	9,706.98	40,476.81
სექტორის გამგე (1 საშტატო ერთ.)	10,140.00	11,154.00	12,269.40	13,496.34	14,845.97	61,905.71
ბიბლიოთეკის გამგე (1 საშტატო ერთ.)	9,360.00	10,296.00	11,325.60	12,458.16	13,703.98	57,143.74
უფროსი ბიბლიოთეკარი (1 საშტატო ერთ.)	7,800.00	8,580.00	9,438.00	10,381.80	11,419.98	47,619.78
მთარგმნელ-რედაქტორი (2 საშტატო ერთ.)	12,480.00	13,728.00	15,100.80	16,610.88	18,271.97	76,191.65
კომპიუტერული ქსელის უფროსი ადმინისტრატორი (1 საშტატო ერთ.)	7,800.00	8,580.00	9,438.00	10,381.80	11,419.98	47,619.78
დამლაგებელი (1 საშტატო ერთ.)	6,240.00	6,864.00	7,550.40	8,305.44	9,135.98	38,095.82
ჯამი:	725,400.00	854,100.00	1,006,902.00	1,188,462.60	1,404,353.34	5,179,217.94
გ) დამხმარე პერსონ. (ხელშეკრულებით)						
"საქართველოს მათემატიკური ჟურნალის" პასუხისმგებელი რედაქტორი	5,226.00	5,748.60	6,323.46	6,955.81	7,651.39	31,905.26
ჟურნალის "მემუარები დიფ. განტ. მათ. ფიზიკაში" პასუხისმგებელი რედაქტორი და "საქართველოს მათემატიკური ჟურნალის" ტექნიკური რედაქტორი (კომპიუტ. უზრუნველყოფა)	6,240.00	6,864.00	7,550.40	8,305.44	9,135.98	38,095.82
ჟურნალის "ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები" პასუხისმგებელი რედაქტორი	5,226.00	5,748.60	6,323.46	6,955.81	7,651.39	31,905.26

"საქართველოს მათემატიკური ჟურნალის" ტექნიკური რედაქტორი (მთარგმნელი)	4,602.00	5,062.20	5,568.42	6,125.26	6,737.79	28,095.67
ჟურნალების "მემუარები დიფ. განტ. მათ. ფიზიკაში" და "ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები" ტექნიკური რედაქტორი (მთარგმნელი)	4,602.00	5,062.20	5,568.42	6,125.26	6,737.79	28,095.67
ჟურნალის "მემუარები დიფ. განტ. მათ. ფიზიკაში" ტექნიკური რედაქტორი (კომპიუტ. უზრუნველყოფა)	4,602.00	5,062.20	5,568.42	6,125.26	6,737.79	28,095.67
ჟურნალის "ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები" ტექნიკური რედაქტორი (კომპიუტ. უზრუნველყოფა)	4,602.00	5,062.20	5,568.42	6,125.26	6,737.79	28,095.67
ჯამი:	35,100.00	38,610.00	42,471.00	46,718.10	51,389.91	214,289.01
სულ სახელფასო ფონდი:	760,500.00	892,710.00	1,049,373.00	1,235,180.70	1,455,743.25	5,393,506.95
სხვა ხარჯები						
მივლინება	25,000.00	30,000.00	35,000.00	40,000.00	45,000.00	175,000.00
წარმომადგენლობითი ხარჯები	10,000.00	10,000.00	15,000.00	15,000.00	15,000.00	65,000.00
საკანცელარიო საქონლისა და საწერ-საბეჭდი ქაღალდის შეძენა	2,000.00	2,000.00	2,000.00	3,000.00	3,000.00	12,000.00
მცირეფასიანი საოფისე ტექნიკის შეძენა	1,000.00	1,000.00	1,000.00	2,000.00	2,000.00	7,000.00
საოფისე ინვენტარის შეძენა და დამონტაჟების ხარჯი	0.00	3,000.00	3,000.00	0.00	3,000.00	9,000.00
რეცხვის, ქიმწმენდის და სანიტარული საგნების შეძენის ხარჯი	500.00	500.00	500.00	500.00	500.00	2,500.00
შენობა-ნაგებობების დაცვის ხარჯი	30,000.00	33,000.00	33,000.00	36,300.00	36,300.00	168,600.00
საფოსტო მომსახურების ხარჯი	7,000.00	7,000.00	7,000.00	7,000.00	7,000.00	35,000.00
ჯამი:	75,500.00	86,500.00	96,500.00	103,800.00	111,800.00	474,100.00
ზედნადები ხარჯები						
ელექტროენერგიის ხარჯი, წყლის ხარჯი, ბუნებრივი აირის ხარჯი, შენობა-ნაგებობების დასუფთავების ხარჯი, მიმდინარე რემონტის ხარჯი და ა. შ.	30,000.00	32,000.00	33,000.00	34,000.00	35,000.00	164,000.00
სულ ჯამი:	866,000.00	1,011,210.00	1,178,873.00	1,372,980.70	1,602,543.25	6,031,606.95

შენიშვნა: სახელფასო ფონდი სამეცნიერო პერსონალისთვის ყოველწლიურად იზრდება 20%-ით, ხოლო ადმინისტრაციისა და დამხმარე პერსონალისთვის (მათ შორის, ხელშეკრულებით მომუშავეთათვის) - 10%-ით.

2. პროექტის აღწერილობა

<u>თემა 1:</u> თანამედროვე ასპექტები ახალი ფუნქციური სივრცეების, ინტეგრალური ოპერატორების, გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზის, ფურიეს ანალიზის და ინვარიანტულ და კვაზი-ინვარიანტულ ზომათა თეორიის მიმართულებებით. გამოყენებები მონათესავე დარგებში

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ანალიზის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: ალექსანდრე მესხი (თემის ხელმძღვანელი), ალექსანდრე ხარაზიშვილი, შაქრო ტეტუნაშვილი, ომარ ძაგნიძე, ლაშა ეფრემიძე, ალექსი კირთაძე, ეთერ გორდაძე, გიორგი იმერლიშვილი.

1.1. პროექტის მოკლე შინაარსი

პროექტით გათვალისწინებულია კვლევები ახალი ფუნქციური სივრცეების, ოპერატორთა თეორიის, გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზის, ფურიეს ანალიზის, აბსტრაქტული და არასტანდარტული ანალიზისა, და ზომის თეორიის მიმართულებებით. დაგეგმილია მიღებული შედეგების გამოყენებები ისეთ მონათესავე დარგებში, როგორიცაა მაგალითად, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებები, ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანები, სითხეთა მექანიკა, სიგნალთა დამუშავების თეორია და ა.შ.

პროექტით დაგეგმილია ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალურ ოპერატორთა შემოსაზღვრულობისა და კომპაქტურობის თვისებების შესწავლა ახალ ფუნქციურ სივრცეებში, ისეთი როგორიცაა გრანდირებული და ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეები, მორის ტიპის სივრცეები, შერეულნორმიანი ფუნქციური სივრცეები და ა.შ. ოპერატორები და სივრცეები განსაღვრული იქნება, ზოგადად კვაზიმეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე, თუმცა მიღებული შედეგები ახალი იქნება ევკლიდეს სივრცეებისთვისაც. დაგეგმილია ოპერატორთა ნორმების როგორც რაოდენობრივი შეფასებების მიღება, ასევე ახალი მიდგომების განვითარება წონათა თეორიის თვალსაზრისითაც, რასაც ჩვენი ვარაუდით, მოჰყვება კონცეპტუალური ორწონიანი ამოცანების, მათ შორის კვალის უტოლობის ამოხსნა წრფივი და მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალებისათვის. ჩვენს კვლევებში მნიშვნელოვანი ადგილი დაეთმობა მრავლად(ნახევრად)წრფივი ინტეგრალური ოპერატორების შესწავლას როგორც შემოსაზღვრულობის, ასევე კომპაქტურობის თვალსაზრისითაც. ჩვენს მიერ შეფასებული იქნება მრავლად(ნახევრად)წრფივი ოპერატორების არაკომპაქტურობის ზომა (არსებითი ნორმა) კლასიკურ და არასტანდარტულ წონიან ფუნქციურ სივრცეებში, დამტკიცებული იქნება რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა მრავლადწრფივი დასმით სხვადასხვა ახალ ფუქციურ სივრცეში. დადგენილი იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობა ზომაზე, რომლისთვისაც ადგილი აქვს სობოლევის უტოლობას ზომიანი წილადური ინტეგრალისათვის ლორენცის სივრცეებში, გამოკვლეული იქნება ინტეგრალურ ოპერატორთა ასახვის თვისებები იმ ფუნქიათა კლასებში, რომლებიც მნიშვნელობებს იღებენ ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში, მიღებულ იქნება ორწონიანი კრიტერიუმები მრავლადწრფივი გულიანი ინტეგრალური ოპერატორებისათვის, ოპერატორთა შემოსაზღვრულობის მიმართულებით მიღებული შედეგები ფართოდ იქნება გამოყენებული ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებების ამონახსნთა რეგულარობისა დასადგენად, შტრიჰარცის ტიპის შეფასებების მისაღებად არაწრფივი ტალღის განტოლებებისათვის, რეგულარობის შედეგების დასამტკიცებლად პუასონისა და სტოქსის ამოცანებში, სიგნალის დამუშავების ამოცანების შესასწავლად გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში.

პროექტით გათვალისიწნებულია კვლევები ვეივლეტებისა და მატრიცთა სპექტრალური ფაქტორიზაციის საკითხებში. ვეივლეტები აგებული იქნება კოეფიციენტებით სასრულ ველებში, რასაც უშუალო გამოყენებები აქვს კომპიუტერებში. ამ მიმართულებით ჩვენ მოველით მნიშვნელოვან გარღვევებს. მრავალგანზომილებიანი მატრიცის ფაქტორიზაციის ალგორითმის

გამოყენება განზრახულია თავის ტვინში ინფორმაციის ნაკადთა ანალიზისათვის გრეინჯერის მიზეზ-შედეგობრივი ტესტით, ეპილეფსიის მკურნალობის მეთოდების ჩათვლით ბიომედიცინაში.

წარმოდგენილი პროექტის მნიშვნელოვანი ნაწილი ითვალისწინებს ზომის თეორიის საკითხების გამოკვლევას, სახელდობრ, ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომებისა და მათი გამოყენებების შესწავლას. ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები არიან ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური საშუალება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების (როგორც აბსტრაქტული სისტემების, ასევე მეტ-ნაკლებად კონკრეტული სისტემების, რომლებიც ბუნებრივად წარმოიშვებიან პრაქტიკაში) თანამედროვე თეორიის შესასწავლად. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თეორია არის მნიშვნელოვანი თავისთავად, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის მეტად მნიშვნელოვანი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების სხვადასხვა თვისებების შესწავლა.

ამ თვალსაზრისით გამოვყოფთ შემდეგ ოთხ ძირითად მიმართულებას:

1) გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების შინაგანი თვისებები და ამ თვისებების ზოგიერთი გამოყენება.

2) გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ აბსტრაქტულ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ± -სასრული « ზომის გაგრძელებათა აგება « ზომის ძირითადი თვისებების შენარჩუნებით.

3) მცირე სიმრავლეების თვისებების შესწავლა სიმრავლურ-თეორიული თვალსაზრისით.

4) ზომათა გარკვეული კლასების მიმართ ზოგიერთი კლასიკური წერტილოვანი სიმრავლის ზომადობის საკითხის გამოკვლევა.

1.2. თემის სამეცნიერო და ტექნოლოგიური დარგები

მრავალგანზომილებიანი და გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზი, ფუნქციური სივრცეებისა და ინტეგრალურ ოპერატორების თეორია, ინტეგრალურ ოპერატორთა წონითი თეორია, აბსტრაქტული ანალიზი, ზომათა თეორია, ფურიეს ანალიზი, გამოყენებები კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში, სიგნალთა დამუშავების თეორიაში.

1.3. თემის აღწერილობა

პროექტი ითვალისწინებს კვლევებს ინტეგრალური და დიფერენციალური ოპერატორების, ახალი ფუნქციური სივრცეების, აბსტრაქტული და არასტანდარტული ანალიზის, გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზის, ფურიეს ანალიზისა და ზომის თეორიის მიმართულებებით. დაგეგმილია აგრეთვე მიღებული ზოგიერთი შედეგის გამოყენებები მონათესავე დარგებში, ისეთი როგორიცაა მაგალითად, მათემატიკური ფიზიკის ამოცანები და სიგნალთა დამუშავების თეორია.

პროექტით გათვალისწინებულია ჰარმონიული ანალიზის ინტეგრალურ ოპერატორთა ასახვის თვისებების შესწავლა ისეთ არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში, როგორიცაა: გრანდ და ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეები, მორის ტიპის სივრცეები, შერეულნორმიანი სივრცეები და ა.შ.. გათვალისწინებულია ოპერატორთა ნორმების რაოდენობრივი შეფასებების მიღება, წონითი ექსტრაპოლაციისა და წონითი კრიტერიუმების დადგენა მრავლადწრფივი გულიანი ინტეგრალური ოპერატორებისათვის, რომლებიც მოიცავენ, მაგალითად, მრავლადწრფივ წილადურ ინტეგრალებს.

აღსანიშნავია, რომ მრავლადწრფივი ოპერატორების ასახვის თვისებების შესწავლა დაიწყო გასული საუკუნის 90-ია წლებში გრაფაკოსის, კალტონის, სტეინის, კენიგისა და სხვათა ნაშრომებში. ერთწონიან უტოლობა სრულად აღწერა კ. მოენმა 2008 წელს მრავლადწრფივი პოტენციალებისათვის. კვალის ამოცანა მრავლადწრფივი რისის ტიპის პოტენციალებისათვის ამოხსნილი იყო ვ. კოკილაშვილის, მ. მასტილოსა და ა. მესხის მიერ 2014 წელს. ოლსენის უტოლობის

ოპტიმალური ფორმა აღნიშნული ოპერატორებისათვის დადგენილი იყო ა. მესხისა და ლ. გრაფაკოსის მიერ 2022 წელს. მათ მიერ მიღებული შედეგი ახალი იყო წრფივ შემთხვევაშიც.

პროექტის ზოგიერთი ამოცანა ეძღვნება მრავლადნახევრადწრფივი ოპერატორების არაკომპაქტურობის ზომების შეფასებებს კლასიკურ და არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. ასეთი ოპერატორები მოიცავს მაგალითად, მაქსიმალურ ოპერატორებს. მსგავსი ამოცანები წრფივ შემთხვევაში შესწავლილი იყო დ. ედმუნდსისა და ა. მესხის (Math. Nachr,., 2002), ა. მესხის (J. Funct. Spaces, 2003) მიერ, ხოლო მრავლადწრფივი დასმით ვ. კოკილაშვილის, მ. მასტილოსა და ა. მესხის (Nonlinear Anal. 2019) და ა. მესხის (*Commentationes Mathematicae*, 2019) მიერ.

ჩვენ ვგეგმავთ მივიღოთ რუბიო დე ფრანსიას ტიპის ექსტრაპოლაციის თეორემა მრავლადწრფივი დასმით სხვადასხვა ახალ ფუნქციურ სივრცეში. რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემას ცენტრალური ადგილი უჭირავს ოპერატორთა წონით თეორიაში. ბოლო ორ დეკადაში მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა ამ თეორემის მიღებას სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეში. მათ შორის აღსანიშნავია ვ. კოკილაშვილისა და ა. მესხის 2014-2022 წლების ნაშრომები.

პროექტის ფარგლებში გათვალისწინებულია დადგინდეს კრიტერიუმები ზომაზე, რომლისთვისაც ადგილი აქვს სობოლევის უტოლობას ზომის მიმართ განსაზღვრული წილადური ინტეგრალებისათვის ლორენცისა და გრანდ ლორენცის სივრცეებში. ანალოგიური ამოცანა ლებეგის და გრანდ ლებეგის სივრცეებში ამოხსნილი იყო ვ. კოკილაშვილისა და ა. მესხის მიერ (2002, 2016 წწ). ეს ამოცანა შესწავლილი იქნება მრავლადწრფივი დასმითაც.

განზრახულია გამოვიკვლიოთ ორწონიანი კლასიკური და გრანდ მორის სივრცეების დუალური სივრცეები და დავამტკიცოთ საინტერპოლაციო თეორემები აღნიშნულ სივრცეებში. უწონო გრანდ მორის სივრცეები შემოღებული იყო ა. მესხი მიერ 2010 წელს, მოგვიანებით ვ. კოკილშვილმა, ა. მესხმა და ჰ. რაფეირომ ერთწონიან გრანდ მორის სივრცეებში მაკენჰაუპტის წონებით მიიღეს ჰარმონიული ანალიზის მთელი რიგი ოპერატორების შემოსაზღვრულობა წონებზე მაკენჰაუპტის პირობის ქვეშ.

ზოგიერთი მიღებული შედეგები ფართოდ იქნება გამოყენებული ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებების ამონახსნთა რეგულარობისა დასადგენად, შტრიჰარცის ტიპის შეფასებების მისაღებად არაწრფივი ტალღის განტოლებებისათვის, რეგულარობის შედეგების დასამტკიცებლად პუასონისა და სტოქსის ამოცანებში, სიგნალის დამუშავების ამოცანების შესასწავლად. აღნიშნული ამოცანები შესწავლილ იქნება ახალი ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში. აღსანიშნავია, ზ. კოკილაშვილისა და ვ. პაატაშვილის ნაშრომები ანალიზურ ფუნციათა სასაზრვრო ამოცანების გამოკვლევების კუთხით ცვლადმაჩვენებლიან და გრანდ ფუნქციურ სივრცეებში.

საპროექტო წინადადება მიზნად ისახავს განავითაროს ინოვაციური მიდგომები მრავალგანზომილებიან ჰარმონიულ ანალიზისა და ფურიეს ანალიზის მიმართულებებით. ნავარაუდევია მთელი რიგი ღია პრობლემების გადაჭრა. სახელდობრ, დაგეგმილია ორთოგონალური მწკრივების ზოგიერთი ახალი თვისების დადგენა. ჩვენი მიზანია ისეთი ამოცანების გადაწყვეტა, რომლებიც ავლენენ რადემახერის მწკრივების ახალ თვისებებსა და ურთიერთკავშირებს რადემახერის მწკრივებსა და ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივებს შორის.

საპროექტო წინადადებაში გათვალისწინებულია აგრეთვე ფატუს პრობლემის შესწავლა პუასონის ასოცირებული ინტეგრალებისთვის, ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორიაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფატუს (1906 წ.) მიერ დასმული და გადაწყვეტილი პრობლემა იმის შესახებ, რომ თუ ერთი ცვლადის ჯამებად ფუნქციას გააჩნია სასრული წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული წარმოადგენს კუთხურ ზღვარს ამ ფუნქციის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალის კერძო წარმოებულისთვის.

მომავალ ხუთწლიან პერიოდში გათვალისწინებულია გამოქვეყნდეს მონოგრაფია გრანდ ფუნქციურ სივრცეებზე, რომელთა ავტორებიც იქნებიან: ვ. კოკილაშვილი, ა. მესხი, ჰ. რაფეირო და ს. სამკო. აღნიშნული მონოგრაფია იქნება მე-3 ტომი ამავე ავტორების მიერ დაწერილი ორტომეული მონოგრაფიისა, რომელიც გამოქვეყნდა პრესტიჟულ გამომცემლობა ბირკჰოიზერ-შპრინგერში (Birkhäuser-Springer) 2016 წელს.

საპროექტო წინადადების ფარგლებში დაგეგმილია ახალი სახელმძღვანელოს გამოქვეყნება ფურიეს მწკრივთა თეორიაში: ო. ძაგნიძე, „ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის“ 2015 წელს თსუ-ს გამომცემლობაში გამოქვეყნებული სახელმძღვანელოს „ფურიეს მწკრივები“ გაფართოებულ ვარიანტს.

მომდევნო ხუთიწლიან პერიოდში დაგეგმილია აგრეთვე გამოქვეყნდეს მონოგრაფია მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისთვის: ომარ ძაგნიძე, კვატერნიონული ანალიზის საფუძვლები. აღსანიშნავია, რომ ავტორის მიერ დადგენილია კვატერნიონული ანალიზის ძირითადი შედეგები, რომელნიც შეესაბამებიან ერთი კომპლექსური ცვლადის ანალიზური (ჰოლომორფული) ფუნქციების თვისებებს.

გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზის მიმართულებით საპროექტო წინადადება ითვალისწინებს კვლევებს ვეივლეტებისა და მატრიცთა სპექტრალური ფაქტორიზაციის საკითხებში.

პროექტში წარმოდგენილი თემატიკა შეიცავს ახალ იდეებს და მიდგომებს ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომის თეორიაში. პროექტის ყოველი ამოცანა შეიცავს მეცნიერულ სიახლეს იდეოლოგიური თვალსაზრისით. ამ ამოცანებში განხილული იქნება სიმრავლეთა კლასის განზოგადებული ზომადობის ცნება და შესწავლილი იქნება ისეთი სიმრავლეთა კლასების (აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეთა კლასი, უგულებელყოფადი სიმრავლეთა კლასი, არაზომადი სიმრავლეთა კლასი თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეთა კლასი, ვიტალის სიმრავლეთა კლასი, ბერნშტეინის სიმრავლეთა კლასი, ჰამელის ბაზისები) ზომადობა განზოგადებული აზრით, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ არა მარტო ზომის თეორიისათვის, არამედ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიისათვის. აგრეთვე, პროექტში განხილული იქნება უსასრულო განზომილებიან პოლონურ სივრცეებში ინვარიანტული $\pm$ -სასრული ბორელის ზომების არსებობის საკითხი და ასეთი ზომებისათვის გამოკვლეული იქნება როგორც მათი თვისებები, ასევე ასეთი ზომების გაგრძელების ისეთი თვისებები, როგორიცაა: ერთადერთობა, ძლიერი ერთადერთობა, ნორმალური გაგრძელების არსებობა, შტეინჰაუსის თვისება და სხვ.

1.4. შესავალი (კვლევის ობიექტი, პრობლემის აქტუალობა, კვლევის სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია)

ამ პუნქტის შინაარსი გადმოცემული იქნება ცალ-ცალკე ორი ქვეთემის შესაბამისად: I. მრავალგანზომილებიანი და გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზი, ახალ ფუნქციურ სივრცეებში მოქმედი ინტეგრალური და დიფერენციალური ოპერატორები და გამოყენებები მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებში. II. აბსტრაქტული ანალიზი, ზომის თეორიის აქტუალური პრობლემები

I. მრავალგანზომილებიანი და გამოყენებითი ჰარმონიული ანალიზი, ახალ ფუნქციურ სივრცეებში მოქმედი ინტეგრალური და დიფერენციალური ოპერატორები, გამოყენებები მათემატიკური ფიზიკისა და სიგნალთა ამუშავების ამოცანებში.

ამ ქვეთემის ფარგლებში დაგეგმილი კვლევის ობიექტებია: არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეები და მათში მოქმედი ინტეგრალური და დიფერენციალური ოპერატორები, მრავლადწრფივი გულიანი (მათ შორის წილადური ინტეგრალური) ოპერატორები, ორწონიანი და კვალის უტოლობები, გრანდ სივრცეთა დუალური სივრცეები, გრანდ და მორის სივრცეთა საინტერპოლაციო სივრცეები, ნამრავლიანი მაკენჰაუპტის წონები, ოპერატორთა არსებითი ნორმები (არაკომპაქტურობის ზომა), ბანახის ფუნქციური მესერები; არადივერგენციული ფორმის ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, არაწრფივი ტალღის განტოლება, პუასონისა და სტოქსის ამოცანები, კორნის უტოლობა, სიგნალის დამუშავების ამოცანები.

პროექტის ძირითადი ამოცანაა გამოიკვლიოს თანამედროვე ანალიზის კონცეპტუალური ამოცანები ისეთი, როგორიცაა: დიფერენციალური და ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის სრული აღწერა არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში, განავითაროს ინოვაციური მიდგომები მრავალგანზომილებიან და გამოთვლით ჰარმონიულ ანალიზში, ფურიეს ანალიზში, ზომის თეორიაში, და მიღებული ზოგიერთი შედეგი გამოიყენოს მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებსა და ინფორმაციის დამუშავების თეორიაში.

აღსანიშნავია, რომ ოპერატორები და სივრცეები, რომლებსაც შევისწავლით განსაზღვრულია ზომიან მეტრიკულ სივრცეებზე. ამ მხრივ დასმული ამოცანების გზით თანამედროვე ჰარმონიულმა ანალიზმა შესამჩნევად გააფართოვა ანალიზური პრობლემების კვლევების არეალი (მატილა, ჰეინენონი, ჰიტიონენი, ჰაილაში, კოსკელა და სხვა).

პრობლემის აქტუალობის დასტურია ის ფაქტი, რომ პროექტით გათვალისწინებულ თემატიკაში ინტენსიური კვლევები მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებში, ისეთებში, როგორიცაა: ჩიკაგოს დე პოლის, მისურის, რადგერსის, ნიუ-იორკისა და ალაბამას უნივერსიტეტები (აშშ), სასექსისა და კარდიფის უნივერსიტეტები (დიდი ბრიტანეთი), მიუნხენისა და იენის უნივერსიტეტების მათემატიკური ინსტიტუტები (გერმანია), ჰელსინკის უნივერსიტეტი (ფინეთი), ავეიროსა და ლისაბონის უნივერსიტეტები (პორტუგალია), ტოკიოს მეტროპოლიტენ, ჩუოს, ნაგოიას, ოსაკასა და ჰიროშიმას უნივერსიტეტები (იაპონია), ნეაპოლის ფედერიკო II, ფლორენციისა და კატანიის უნივერსიტეტები (იტალია), პარიზის დ'ორსეისა და პოლტიერის უნივერსიტეტები (საფრანგეთი), პეკინის სახელმწიფო უნივერსიტეტი (ჩინეთი), ჩარლზის უნივერსიტეტი (ჩეხეთი), პოზნანის ადამ მიცკევიჩის უნივერსიტეტი (პოლონეთი), პეკინის ნორმალური უნივერსიტეტი (ჩინეთი), და ა.შ.. პროექტის თემატიკის ირგვლივ უკანასკნელ ორ-სამ დეკადაში გამოქვეყნდა მრავალი მონოგრაფია წამყვან საერთაშორისო გამომცემლობებში.

ქვემოთ განვიხილავთ კონკრეტულად თუ რატომ არის აქტუალური წარმოდგენილი პროექტის თემატიკა.

უკანასკნელ წლებში ცხადი გახდა, რომ კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებს აღარ ძალუძთ მთელი რიგი თანამედროვე პრობლემების გადაწყვეტა, რომლებიც ბუნებრივად იჩენენ თავს გამოყენებითი მეცნიერებების სხვადასხვა მათემატიკურ მოდელში. ნათელი გახდა ახალი არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეების შემოღების აუცილებლობა სხვადასხვა თვალასაზრისით. უკანასკნელ ხანს ინტენსიურად შეისწავლებოდა შემდეგი ახალი ფუნქციური სივრცეები: ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა და სობოლევის სივრცეები, ე. წ. გრანდირებული ანუ „გრანდ" სივრცეები და შერეულნორმიანი ფუნქციური სივრცეები. ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა და სობოლევის სივრცეების ინტენსიური შესწავლა განპირობებულია მათი არსებითი გამოყენებებით ელექტრორეოლოგიურ მოდელებში (აკერბი და მინიონი, რუჟიჩკა), სხვადასხვა ფიზიკური მოვლენების შესწავლისას (ჟიკოვი) და სახეთა ამოცნობის პრობლემებში (აბოლაიჰი, მესკინე და სუისი, ჰარიულეხტო, ჰესტო, ლატვალა და ტოივანენი, რაჯაგაპონი და რუჟიჩკა). გრანდ ლებეგის სივრცეების შემოღება (ივანიეცი და სბორდონე) და ინტენსიური გამოკვლევა განპირობებული იყო მათი არსებითი როლით კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში (გრეკო), სობოლევის თეორიაში (ფუსკო, პ. ი. ლიონსი და სბორდონე), ბანახის ფუნქციურ სივრცეთა თეორიაში (ფიორენცა და რაკოტოსონი). როგორც აღმოჩნდა გრანდ ლებეგისა და გრანდ მორის სივრცეები სწორედ ის სივრცეებია, სადაც შესაძლებელია ფართო კლასის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების სიღრმისეული გამოკვლევა ამონახსნების არსებობის, ერთადერთობისა და რეგულარობის თვალსაზრისით. ამ ორი არასტანდარტული სივრცის, ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა და გრანდ ლებეგის სივრცეების ცნებების კომბინაციას მივყავართ ახალი, ამ ორი სივრცის გამაერთიანებელი გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეების შემოღების იდეამდე. ასეთი სივრცეები შემოღებული და შესწავლილი იყო მათში ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის თვალსაზრისით 2014 წელს ვ. კოკილაშვილისა და ა. მესხის მიერ. აღსანიშნავია, რომ რომ გრანდ ლებეგის სივრცეები (უწონო შემთხვევაში) წარმოადგენენ გადანაცვლებების მიმართ ინვარიანტულ სივრცეებს მაშინ, როცა ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებს ეს თვისება არ გააჩნიათ, ამიტომ ერთი სივრცის მიმართ გამოყენებული ტექნიკა ვერ იქნება ადაპტირებული მეორე სივრცის მიმართ. პროექტით დაგეგმილია ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორთა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის შესწავლა ამ სივრცეებში. შერეულნორმიან სივრცეებს მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს კერძოწარმოებულეაბინ დიფერენციალურ განტოლებებში (იხ., მაგალითად, ნ. ვ. კრილოვის 2020 წლის მომიხილვითი სტატია). ეს სივრცეები შემოღებული იყო ბენედეკისა და პანზონეს მიერ 1961 წელს. პროექტით დაგეგმილია წონითი ამოცანების შესწავლა გრანდირებულ შერეულნორმიან ფუნქციურ სივრცეებშიც. კერძოდ, ჩვენ შევისწავლით წონით ექსტრაპოლაციის ამოცანას გრანდ შერეულნორლიან ფუნქციურ სივრცეებში, სადაც ერთ-ერთი

სივრცე ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეა, ხოლო მეორე კი წონიანი ლებეგის სივრცე. აღნიშნულ სივრცეებში მიღებული იქნება ძლიერი ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური და ჯერადი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა, აგრეთვე სობოლევის უტოლობა ნამრავლიანგულიანი წილადური ინტეგრალებისათვის. მსგავსი ამოცანები გრანდ ლებეგისა და ლორენცის სივრცეებში გამოკვლეული იყო ვ. კოკილაშვილისა და ა. მესხის მიერ 2019, 2022 წლების ნაშრომებში.

არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეები ინტენსიურად მუშავდება მსოფლიოს მრავალ სამეცნიერო ცენტრში. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია შემდეგ ავტორთა წიგნები: ლ. დიენინგი, პ. ჰარჯულეჰტო, პ. ჰასტო და მ. რუჟიჩკა (2012); დ. კრუზ-ურიბე და ა. ფიორენცა (2013); ვ. კოკილაშვილი, ა. მესხი, ჰ. რაფეირო და ს. სამკო (ტომები 1, 2, 2016).

პროექტის ერთ-ერთი მიზანია გამოვიკვლიოთ ორწონიანი კლასიკური და გრანდ მორის სივრცეთა დუალურობა და საინტერპოლაციო თეორემები. ასევე შესწავლილ იქნას ინტეგრალურ ოპერატორთა ასახვის თვისებები ცენტრალურ მორის სივრცეებში. მორის $L^{p,a}$ სივრცეები შემოღებული იყო მორის მიერ 1938 წელს კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნების რეგულარობის გამოსაკვლევად. გრანდ მორის სივრცეები $L^{p),a,-}$ შემოღებული იყო პროექტის მონაწილის ა. მესხის მიერ 2010 წელს. მოგვიანებით ჰ. რაფეირომ განიხილა გრანდ მორის სივრცეები, სადაც გრანდირება მოხდენილია a მაჩვენებლის მიმართაც. ჩვენს მიერ წარმოდგენილი საპროექტო წინადადებით კი გათვალისწინებულია ყველაზე ზოგადი, გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი მორის სივრცეების კვლევები მათში ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობისა და ექსტრაპოლაციის პრობლემების კვლევების თვალსაზრისით. მორის სივრცეები თამაშობენ უმნიშვნელოვანეს როლს ნავიე-სტოქსის განტოლებების რეგულარობის საკითხებში. როგორც ცნობილია, ნავიე-სტოქსის განტოლებების პრობლემა კლეის მათემატიკური ინსტიტუტის მიერ კლასიფიცირებულია, როგორც ათასწლეულის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი პრობლემა. ამ განტოლებების ამოხსნა იწვევს სითხის სიჩქარის და მისი წნევის პროგნოზირებას. ეს გადამწყვეტია ამ განტოლებით აღწერილი მრავალი მოვლენის ასახსნელად რეალური ცხოვრებიდან, როგორიცაა, მაგალითად წყლის დინება (მდინარის და ოკეანის დინება) , ჰაერის ნაკადი (მოძრაობა თვითმფრინავის ფრთის ირგვლივ, ტურბულენტობა, ამინდის პროგნოზი ან ბიოლოგიური სითხეები (სისხლის ნაკადი).

უკანასკნელ წლებში ამ თემატიკაში გამოქვეყნდა რამდენიმე მნიშვნელოვანი მონოგრაფია, მათ შორის აღსანიშნავია ლ. დიენინგის, პ. ჰარჯულეხტოს, პ. ჰასტოსა და მ. რუჟიჩკას მონოგრაფია (შპრინგერი), დ. კრუზ-ურიბესა და ა. ფიორენცას (შპრინგერი), ვ. კოკილაშვილის, ა. მესხის, ჰ. რაფეიროსა და ს. სამკოს (ტომი 1,2), (შპრინგერი, ბირკჰოიზერი), ი. სავანოს, ჯ. დი ფაციოსა და დ. ი. ჰაკიმის (ტომი 1,2, “Taylor and Frances”) მონოგრაფიები.

გასული საუკუნის მიჯნასა და მიმდინარე საუკუნის დასაწყისიდან მკვლევართა მნიშვნელოვანი ყურადღება მიპყრობილი იყო ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორთა ასახვის თვისებების შესწავლაზე მეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე, სადაც ზომაზე გაორმაგების პირობა შეიძლება არ სრულდებოდეს. ასეთ სივრცეებს არაერთგვაროვან სივრცეებსაც უწოდებენ. აღნიშნული მიმართულებით აღსანიშნავია ფ. ნაზაროვის, ს. ტრეილისა და ა. ვოლბერგის (1997, 2003), ვ. კოკილაშვილისა და ა. მესხის (2001), ტ. ჰიუტონენის (2010) ნაშრომები.

პროექტის ერთ-ერთი მიზანია დავადგინოთ მრავლადწრფივი დადებითგულიანი ოპერატორების შემოსაზღვრულობის კრიტერიუმები წონიან ფუნქციურ სივრცეებში. დავამტკიცოთ წონითი ექსტრაპოლაციის ამოცანა მრავლადწრფივი დასმით ზოგიერთ ახალ ფუნქციურ სივრცეში, გამოვიკვლიოთ ინტეგრალური ოპერატორები მორის ტიპის სივრცეებში, დავამტკიცოთ ჩართვის თეორემები მეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრული ჰაილაშ სობოლევის ტიპის სივრცეებში, გამოვიკვლიოთ წილადური ინტეგრალების რეგულარობის თვისებები ახალი ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში, მივიღოთ ინტეგრალურ ოპერატორთა ნორმების რაოდენობრივი შეფასებები არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში და აღნიშნული შედეგები გამოვიყენოთ სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანებში, დავადგინოთ არაკომპაქტურობის ზომის (არსებითი ნორმის) შეფასებები ორწონიანი დასმით მრავლადნახევრადწრფივი ოპერატორებისათვის, სრულად აღვწეროთ ის ზომები, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს სობოლევის უტოლობას ზომიანი წილადური

ინტეგრალებისათვის ზომიან ლორენცის სივრცეებსა და კიდევ უფრო ზოგად სივრცეებში, დადგენილი ზოგიერთი შედეგის გამოყენებით გამოვიკვლიოთ პუასონისა და სტოქსის ამოცანები, სიგნალთა დამუშავების ამოცანები ახალი ფუქნციური სივრცეების ჩარჩოებში. საპროექტო წინადადების მნიშვნელოვანი ნაწილი ეძღვნება წონების თეორიას. წონები წარმოადგენენ მძლავრ იარაღს კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში. მათ ძალუძთ, მაგალითად, გააქრონ განსაკუთრებულობები, უხეში კოეფიციენტები და გადაგვარებები (ფეიფსი, ჯერისონი და კენიგი). უკანასკნელ წლებში მთელი რიგი პრობლემების გადაჭრა კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში შესაძლებელი გახდა წონების თეორიაში მიღწეული პროგრესის შედეგად, მაგალითად, განტოლებებში, რომლებშიც ჩნდებიან სასრული დეფორმაციის კვაზიკომფორმულ ასახვებში. ეს უკანასკნელი მჭიდროდ არის დაკავშირებული გამოყენებითი მეცნიერებების პრობლემებთან (სამედიცინო გამოსახულებები, მასალათა გამძლეობა, სხვადასხვა ფიზიკური მოვლენები). ხაზგასასმელია ის ფაქტი, რომ წონების თეორია დიდ როლს თამაშობს შრედინგერის ოპერატორის საკუთრივი რიცხვების განაწილებებში (ჩ. ფეფერმანი და ფონგი), ამავე ოპერატორის განსაზღვრის არისა და არსებითი სპექტრის გამოკვლევაში (კერმანი და სოიერი), ნახევრადწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებების დადებითი ამონახსნების არსებობის იმ აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენაში, რომელიც გამოხატულია კოეფიციენტებით წარმოქმნილი წონებით (ვ. მაზია და ი. ვერბიცკი). წონების თეორიის მიმართულებით საპროექტო წინადადება მიზნად ისახავს ამოიხსნას მნიშვნელოვანი და რთული ორწონიანი ამოცანები და დადგინდეს დაზუსტებული მუდმივების შეფასებები წონიან უტოლობებში ინტეგრალური ოპერატორებისათვის. ორწონიანი ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს, დადგენილ იქნას ერთი წონიანი ფუნქციური სივრციდან მეორეში ოპერატორის შემოსაზღვრულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. მაკენჰაუპტის წონების ტერმინებში წონიან უტოლობებში ზუსტი მუდმივების დადგენის ამოცანა სათავეს იღებს ს. ბაკლის შრომებში (1993). ზუსტი საზღვრების დადგენა გულისხმობს წონიან უტოლობებში ნორმების წონებზე ოპტიმალური რაოდენობრივი დამოკიდებულების განსაზღვრას. კალდერონ-ზიგმუნდის ოპერატორისათვის ბაკლის ტიპის თეორემის სრული დამტკიცება ეკუთვნის ტ. პ. ჰიუტიონენს (A_2 ჰიპოთეზა). უპრიანია აგრეთვე მოვიხსენიოთ ლ. გრაფაკოსის ცნობილი მონოგრაფია „კლასიკური ფურიეს ანალიზი“, მე-3 გამოცემა, შპრინგერი, 2014, თავი 7. სინგულარული ინტეგრალებისათვის ზემოხსენებული ზუსტი საზღვრების დადგენა მოტივირებულია მათი გამოყენებების პერსპექტივით კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში, მაგალითად, იგი იძლევა საშუალებას ამოიხსნას ბელტრამის განტოლების რეგულარობის პრობლემა (ასტალა, ივანიეცი, საკსმანი, ჰიტიონენი). კალდერონ-ზიგმუნდის თეორიის მრავლადწრფივი ასპექტების შესწავლამ მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში. საპროექტო წინადადების ერთ-ერთი არსებითი სიახლეა ახალი მიდგომების განვითარება ექსტრაპოლაციის თეორიაში. რუბიო დე ფრანციას ექსტრაპოლაციის თეორემა წარმოადგენს ერთ-ერთ ულამაზეს და სასარგებლო შედეგს თანამედროვე ანალიზში. მან სტიმული მისცა ექსტრაპოლაციის თეორიის შექმნას სხვადასხვა თვალსაზრისით, თავდაპირველად ექსტრაპოლაციის თეორემები ეხებოდა ოპერატორებს, მაგრამ მოგვიანებით ცხადი გახდა, რომ ფაქტიურად საქმე გვაქვს უტოლობათა წყვილების ექსტრაპოლაციასთან. ჩვენი მიზანია ამ სულისკვეთებით ექსტრაპოლაციის თეორემის დადგენა ზომადი ფუნქციების მიმართ განსაზღვრულ გრანდ მორის სივრცეებში.

2014 წელს პროექტის ზოგიერთი მონაწილის მიერ შემოღებული და შესწავლილი იყო გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები $L^{p(x),\theta}$, რომლებიც დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე: $p(x)$ და θ-ზე. ეს სივრცე აერთიანებს ორ არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეს: ცვლადმაჩვენებლიან და გრანდ ლებეგის სივრცეებს. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ პუასონისა და სტოქსის ამოცანები; დავადგინოთ დივერგენტული განტოლების ამოხსნადობა და დავამტკიცოთ კორნის უტოლობა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეების ჩარჩოებში. აღნიშნული ამოცანები კლასიკური ლებეგის სივრცეების შემთხვევაში მიეკუთვნება სითხეთა დინამიკის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა კლასიკური ამოცანების რიცხვს. ჩვენ განვიხილავთ სტოქსის ამოცანას და ამ სისტემისათვის დავამტკიცებთ ძლიერი ამონახსნის არსებობას გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში (იხ. ლ. დიენინგის, პ. ჰარჯულეტოს, პ.

ჰასტოსა და მ. რუჟიჩკას 2011 წლის მონოგრაფია). აღნიშნული ამოცანის შესახებ კლასიკურ და ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში). სტოქსის ამოცანა ფუნდამენტურად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სითხეთა დინამიკის მათემატიკურ ნაწილში. ეს დამოკიდებულება ეფუძნება სინგულარული ინტეგრალებისათვის კალდერონ-ზიგმუნდის თეორიასა და აგმონ-დუგლის-ნირენბერგის ოპერატორთა თეორიას ნახევარსივრცეზე. ჩვენი მიზანია ამოცანა შევისწავლოთ ორივე შემთხვევაში: (a) როცა სივრცის მაჩვენებლი $p(.)$ აკმაყოფილებს ლოგ-ჰელდერის უწყვეტობის პირობას; (b) $p(.)$ მაჩვენებელი არის ლოგ-ჰელდერის უწყვეტობის თვისების მქონე მაჩვენებელთა კლასის გარეთ. აღსანიშნავია, რომ (b) შემთხვევაში შედეგები იქნება ახალი კლასიკურ ცვლადმაჩვენებლიალ ლებეგის სივრცეებშიც (ე.ი., როცა $\theta = 0$).

პროექტის ფარგლებში დაგეგმილია სიგნალის დამუშავების ამოცანების შესწავლა ბაიესიანისა და ნახევარჯგუფების თეორიის ჩარჩოებში, როცა განსახილველი ბანახის ფუნქციური სივრცე არის არასეპარაბელური და არარეფლექსური. ასეთი ფუნქციური სივრცეებია, მაგალითად, მორის ტიპის სივრცეები, გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ფუნქციური სივრცეები. ჩვენ ფოკუსირებული ვიქნებით ძირითადად გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან მორის სივრცეებზე. ეს განსაკუთრებული შემთხვევაა, ვინაიდან აქ აპროქსიმაციას ხსენებული სივრცის ნორმით არ აქვს ადგილი. ამ ამოცანების აღწერისას საქმე გვაქვს აბსტრაქტულ კოშის ამოცანასთან ევოლუციური განტოლებისათვის და განვიხილავთ დიფუზიურ განტოლებას საწყისი მონაცემებით ისეთ გრანდ ფუნქციურ სივცეებში, როგორიცაა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი მორის სივრცე. გავიხსენოთ მაგ. მ. ჰაირერის, ა. სტიუარტის და ჟ. ვოსის 2011 წლის ნაშრომი ბაიესიანის მიდგომისათვის სიგნალის დამუშავების ამოცანის შესწავლისას, როცა სიგნალი გარკვეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია (იხ. აგრეთვე ნ. სამკოსა და ჰ. სინგის 2023 წლის ნაშრომი მსგავსი ამოცანებისათვის). ჩვენი მთავარი მოდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ ხდება ალბათური ზომების შესწავლა შესაფერის ფუნქციურ სივრცეში, რომელსაც მივყავართ სიგნალის დამუშავების სწორად დასმულ ამოცანამდე. როგორც ცნობილია, მარკოვის სტოქასტური პროცესები წარმოადგენენ ბუნებრივ წყაროს ზოგიერთი პარაბული განტოლებისათვის. ამ დროს ხდება პარაბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების განხილვა. ცნობილი ფაქტია, რომ პარაბოლური განტოლებები დაკავშირებულია ფუნქციონალური ანალიზის საკითხებთან, კერძოდ კი ევოლუციურ განტოლებებთან ბანახის სივრცეებში შემოუსაზღვრელი ოპერატორებით, და ნახევარჯგუფების თეორიასთან. ჩვენ შევისწავლით ამ განტოლების ამონახსენთა თვისებებს ზოგიერთ არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეში. გავიხსენოთ, რომ ერთ-ერთი მთავარ მიდგომა ევოლუციურ განტოლებებთან მიმართებაში დაკავშირებულია ოპერატორთა ნახევარჯგუფების თეორიასთან (იხ. მაგალითად, დ. აპელბაუმის (2019), პ. ლ. ბუტცერისა და ჰ. ბერენსის (1967) მონოგრაფიები აღნიშნული თეორიისათვის).

პროექტის ერთ-ერთი ამოცანაა გამოიკვლიოს ფურიეს ანალიზის აქტუალური პრობლემები. ჩვენი აზრით ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სიახლეა ჩანაფიქრი ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ზოგიერთი კლასის ფუნქციათა ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულების დადგენის შესახებ. ჩვენ იმედი გვაქვს, რომ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნა მოხერხდება რადემახერის მწკრივების ჯამების მოშველიებით, რის შედეგადაც, როგორც ერთ, ასევე მრავალჯერადი ფურიეს მწკრივებისათვის აგებული იქნება ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელი უმარტივესი ფორმულები მაშინაც კი, როცა ცნობილი ინტეგრალური ფორმულები არ მუშაობს.

ამ მიმართულებით დაგეგმილია რადემახერის უნივერსალური მწკრივების არსებობის დადგენა ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ყველგან მკვრივ სიმრავლეებზე წარმოდგენის თვალსაზრისით. რადემახერის მწკრივების ყოველი კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულის დადგენას ამ მწკრივის ჯამის საშუალებით, თუ ცნობილია მწკრივის ჯამის მნიშვნელობა სათანადოდ შერჩეულ ორ ცალ წერტილში. ჩვენი ერთ-ერთი მიზანია L და L_2 კლასის ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ რადემახერის მწკრივების ჯამების გამოყენებით. დადგენილ იქნება ფორმულები, რომლებიც არსებითად გაამარტივებს ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელ ცნობილ ინტეგრალურ ფორმულებს. პროექტის გარკვეული ნაწილი დაეთმობა ორი ცვლადის ფუნქციათა ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა რადემახერის ორმაგი მწკრივების

გამოყენებით, ტრიგონომეტრიული მწკრივების აბსოლუტურად კრებადობის კრიტერიუმის დადგენას რადემახერის მწკრივების გამოყენებით.

ერთ-ერთი მიმართულება, რომელიც განზრახულია პროექტში გამოსაკვლევად, არის ვეივლეტების თეორია. ვეივლეტების თეორია წინა საუკუნის ადრეული 80-იანი წლებიდან ჩამოყალიბდა ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ მიმართულებად (დებიოში, კოიფმანი, მეიერი, მალატი). ვეივლეტთა მწკრივები საშუალებას იძლევა, რომ ის ფუნქციები და განაწილებები, რომლებიც მანამდე შესწავლილი იყო ფურიეს მწკრივებისა და ინტეგრალების საშუალებით გაანალიზდეს უფრო მარტივად და ნაყოფიერად. დღეისათვის ვეივლეტების ანალიზი თამაშობს უმნიშვნელოვანეს როლს გამოყენებათა ფართო სპექტრში, როგორიცაა სიგნალთა დამუშავება, მონაცემთა და გამოსახულებათა შეკუმშვა, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნა, მრავალფაქტორიან მოვლენათა მოდელირება, სტატისტიკა და სხვა. ფაქტიურად ძნელია დასახელდეს დარგი, რომელშიც ვეივლეტების თეორიას არ აქვს გამოყენება.

ვეივლეტებისა და მატრიცთა სპექტრალური ფაქტორიზაციის საკითხებს შორის არსებითი კავშირის დაგენით შესაძლებელი ხდება ვეივლეტ მატრიცების აგება კოეფიციენტებით სასრულ ველებში. როგორც მოგეხსენებათ სასრულ ველებში არითმეტიკა თავისუფალია დამრგვალების შეცდომებისაგან, ამიტომ ასეთ კონსტრუქციებს მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს თანამედროვე კომპიტერების არქიტექტურის შექმნაში.

შემუშავებული სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმი გამოყენებულ იქნება ნეირომეცნიერებაში, კერძოდ ელექტრო ენცილოფოგრამების ჩანაწერების მიხედვით ეპილეფსიური კერების დადგენისთვის არაპარამეტრული გრეინჯერის მიზეზ-შედეგობრიობის გზით.

სიახლე. რატომ არის საპროექტო წინადადება ინოვაციური, რითი განსხვავდება დღეისათვის ცნობილი შედეგებისგან? პროექტის ერთ-ერთი სიახლეა გამოვიკვლიოთ ექტრაპოლაციის თეორემები და ინტეგრალურ ოპერატორთა ასახვის თვისებები შერეულნორმიან ფუნქციურ სივრცეებში; გამოვიკვლიოთ ჰაილაშ-სობოლევ-მორის სივრცეები და მათში ჩართვის თეორემები; სრულად აღვწეროღ ის ზომები, რომლებისთვისაც ზომის მიმართ განსაზღვრული წილადური ინტეგრალები შემოსაზღვრულია ზომიან ლორენცის სივრცეებში. გამოვიკვლოთ მრავლადწრფივი წონითი ექსტრაპოლაცია გრანდ სივრცეებში; რეგულარობის შედეგების მიღება პუასონისა და სტოქსის ამოცანებში ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეების ჩარჩოებში. კორნის უტოლობისმიღება გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეში; შევისწავლოთ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომები; შევისწავლოთ რადემახერის უნივერსალური მწკრივების არსებობის დადგენა ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ყველგან მკვრივ სიმრავლეებზე წარმოდგენის თვალსაზრისით. ლიტერატურაში არსებობს მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის უამრავი სხვადასხვა ალგორითმი. მიუხედავად ამისა, არსებობენ პრაქტიკული ამოცანები, რომელთა დაყვანა ხდება ფაქტორიზაციის ისეთ ამოცანაზე, რომელთა რეალიზაციას ვერც ერთი არსებული ალგორითმი ვერ ახერხებს. ჩვენ ვიმედოვნებთ, რომ სპექტრალური ფაქტორიზაციის შემოთავაზებული ახალი ალგორითმი და მისი შესაბამისი განვითარებები რიცხვითი რეალიზაციის თვალსაზრისით მნიშვნელოვან წვლილს შეიტანს ამგვარი ამოცანების გადაწყვეტაში.

კვლევის მეთოდოლოგია. ჩვენი კვლევებისას გამოყენებული იქნება უკვე ცნობილი და პროექტის განხორციელებისას შემუშავებული ახალი მეთოდები, განვითარებული იქნება ახალი იდეები ჰარმონიულ ანალიზში, ფუნქციათა სივრცეების თეორიაში, მრავალგანზომილებიან ფურიეს ანალიზსა და მატრიცთა სპექტრალურ ფაქტორიზაციაში. კვლევები დაფუძნებული იქნება პროექტის მონაწილეთა მდიდარ გამოცდილებაზე და მნიშვნელოვან შედეგებზე, მიღებული მთელი რიგი თანამედროვე პრობლემების ამოხსნისას. ფართოდ გამოყენებული იქნება აგრეთვე უკანასკნელ ხანს პროექტის თემატიკაში სხვადასხვა საერთაშორისო კვლევით ცენტრებში მიღწეული პროგრესი.

ჩვენ მტკიცედ ვაცნობიერებთ იმ სიძნელეებს, რაც მოსალოდნელია რთული ბუნების პრობლემების გადაწყვეტის პროცესში, იმ ფაქტს, რომ თავს იჩენს ახალი მათემატიკური მეთოდებისა

და ინოვაციური მიდგომების შემუშავების აუცილებლობა. კვლევები დაგეგმილია პროექტის მონაწილეთა მჭიდრო ურთიერთთანამშრომლობით, რომელიც უზრუნველჰყოფს პროექტის წარმატებით შესრულებას.

კვლევების პროცესში ჩვენ მოველით შემდეგ სიძნელეებს: კლასიკური ფუნქციური სივრცეებისგან განსხვავებით არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეები წარმოადგენენ არარეფლექსურ, არასეპარაბელურ და არაინვარიანტულს გადანაცვლებების მიმართ, სადაც მთელი რიგი კლასიკური ფუნდამენტური დებულებები ძალას კარგავს; კარგად ცნობილია, თუ რამდენად რთულია ზუსტი მუდმივების დადგენის ამოცანა ნორმების უტოლობებში; ჩვენს კვლევებში ერთ-ერთ სიძნელეს წარმოადგენს ისეთი ამოცანების შესწავლა, რომლებიც ურთიერთკავშირებს რადემახერის მწკრივებსა და ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივებს შორის. ჯერად სინგულარულ ინტეგრალებში განსაკუთრებულობები, განსხვავებით ერთგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალებისა, ერთ წერტილში კი არ არის თავმოყრილი, არამედ განფენილია ჰიპერსიბრტყეზე. სხვადასხვა სიძნელეები მოსალოდნელია აგრეთვე მრავალგანზომილებიანი მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის ეფექტური ალგორითმის შემუშავებისას.

მოცემული დეტერმინანტით სპექტრალური ფაქტორის ერთადერთობის პრობლემა სერიოზულად გამოსაკვლევია. სიძნელეა მოსალოდნელი კოეფიციენტთა ველის იდენტიფიცირებისას, მაშინ, როცა ეს მნიშვნელოვანი ნაბიჯია იმისათვის, რომ მრავალცვლადიანი მატრიცი სპექტრალურად გაფაქტორდეს.

ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ საჭირო გახდება აგრეთვე სიძნელის დაძლევა ჩოლესკის ტიპის სამკუთხა მატრიცის ფაქტორიზაციისას.

ჩვენ მტკიცედ გვჯერა, რომ პროექტის მონაწილეებს ძალუძთ ზემოხსენებული სიძნელეების დაძლევა. წარმოდგენილი პროექტის წარმატებით განხორციელებისათვის გამოვიყენებთ მთელი რიგი ნოუ-ჰაუს კომბინაციას.

როგორ ვაპირებთ მოსალოდნელი ბარიერების გადალახვას.

ექსტრაპოლაციისა და გამოყენებითი ამოცანების შესასწავლად დაგეგმილი გვაქვს ინტეგრალურ ოპერატორთა (სინგულარული ინტეგრალები, წილადური ინტეგრალები, მაქსიმალური ოპერატორები) რაოდენობრივი წონითი შეფასებების დადგენა; მრავლადწრფივი გულიანი ოპერატორებისათვის ორწონიანი კრიტერიუმების დასადგენად დაგვჭირდება შესაბამისი ჰარდის ტიპის უტოლობების შესწავლა; ჯერადი ინტეგრალური გარდაქმნების ასახვის თვისებების დასადგენად დაგვჭირდება შესაბამისი ექსტრაპოლაციის თეორემების დამტკიცება; მეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრული ჰაილაშ-სობოლევის ტიპის სივრცეების ჩართვის თეორემების დასადგენად დაგვჭირდება ზომიან სივრცეებზე მორგებული ჰარმონიული ანალიზის მეთოდების დამუშავება და გამოყენება. ექსტრაპოლაციის პრობლემების ამოხსნისას ჩვენ დაგვჭირდება ინტეგრალური ოპერატორების ნორმებისათვის რაოდენობრივი წონითი შეფასებების დადგენა. კოშის ჯერადი სინგულარული ოპერატორების შემოსაზღვრულობის გამოკვლევის პროცესში ჩვენ ვვარაუდობთ კარლესონის წირთა ნამრავლზე განსაზღვრული „დაზუსტებული" ძლიერი მაქსიმალური ფუნქციების თვისებების გამოკვლევისათვის შესაბამისი მეთოდის გამომუშავებას. კვაზიმეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრული ინტეგრალური გარდაქმნების გამოკვლევისას კლასიკური მეთოდები აღარ მუშაობენ, ამიტომ მეტრიკულ სივრცეებში ანალიზის მეთოდების გამოყენებასთან ერთად ჩვენ ვვარაუდობთ გამოვიყენოთ ორადული „გაცხრილული" და „გაიშვიათებული" ინტეგრალური გარდაქმნები, რომლებიც განსაზღვრულია კვაზიმეტრიკულ სივრცეებზე გაორმაგების პირობით. გრანდირებულ სივრცეებში შედეგების მისაღებად საჭირო იქნება შესაბამისი ფაქიზი რაოდენობრივი შეფასებების დადგენა და გამოყენება. კვაზიმეტრიკულ სივრცეებზე ზედა გაორმაგების პირობით განსაზღვრული ინტეგრალური გარდაქმნების შესწავლის პროცესში დაგვჭირდება სივრცის ბურთის ზომების გეომეტრიული თვისებების დადგენა როგორც გაორმაგების პირობებში, ასევე იმ სიტუაციაში, როცა გაორმაგების პირობა დარღვეულია. კლასიკური ფუნქციური სივრცეებისაგან განსხვავებით, არასტანდარტული ფუნქციური სივრცეები წარმოადგენენ არარეფლექსურ, არასეპარაბელურ და გადანაცვლებების მიმართ არაინვარიანტულს, რის გამოც

მთელი რიგი ფუნდამენტური კლასიკური დებულება აღარ არის მართებული. ამ მიმართულებით მთელი რიგი მოსალოდნელი სიძნელე დაძლეული იქნება წონიანი ნორმების უტოლობებში ზუსტი მუდმივების დადგენის გზით. ჩვენი ერთ-ერთი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ სტოქსის ამოცანას $\Delta \boldsymbol{v} - \nabla\pi = \boldsymbol{f} \ \ in \ \Omega, \ div \ \boldsymbol{v} = g \ \ in \ \Omega, \ \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} \ \ on \ \partial\Omega,$ აქვს ერთადერთი ძლიერი ამონახსნი გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან სობოლევის სივრცეებში მონაცემთა გარკვეული რეგულარობის ქვეშ. დივერგენციის ამოცანა ყალიბდება შემდეგნაირად: მოცემული ფუნქციისათვის f, რომლის საშუალო მნიშვნელობა 0-ის ტოლია, ვეძებთ $\mathrm{div}\ \mathbf{u} = f \ \ \mathrm{in}\ \Omega$ განტოლების $\mathbf{u}$ ამონახსნს 0-ის ტოლი სასაზღვრო მნიშვნელობით, სადაც Ω შემოსაზღვრული არეა. ამ ამოცანას მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება არაკუმშვითი სითხეებისათვის. მოსალოდნელია, რომ ძირითადი შედეგებიდან მივიღოთ საინტერესო დებულებები, როგორიცაა უარყოფითი ნორმის თეორემა და კორნის უტოლობა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცეების ფარგლებში. $\boldsymbol{L^s}$–თეორია ლიფშიცის არეებში ეყრდნობა ბოგოვსკის ცხადად წარმოდგენის ფორმულას (იხ. ბოგოვსკის 1979 და 1980 წლების ნაშრომები). ჩვენ მოველით კალდერონ-ზიგმუნდის ოპერატორთა თეორიის გამოყენებით განვაზოგადოთ ეს შედეგები ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის და შემოსაზღვრული ჯონის არეებისათვის. რადემახერის მწკრივების თვისებების შესწავლისას მოველით დავადგინოთ უნივერსალური მწკრივების არსებობა ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ყველგან მკვრივ სიმრავლეებზე წარმოდგენის თვალსაზრისით. მივიღოთ რადემახერის მწკრივების ყოველი კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულები ამ მწკრივის ჯამის საშუალებით, თუ ცნობილია მწკრივის ჯამის მნიშვნელობა სათანადოდ შერჩეულ ორ ცალ წერტილში.

II. აბსტრაქტული ანალიზი, ზომის თეორიის აქტუალური პრობლემები

ზომის თეორიის თვალსაზრისით აღსანიშნავია, რომ სხვადასხვა სიმრავლეთა ოჯახების ზომადობის თვისებების კვლევა საჭიროებს მძლავრ მეთოდებს აბსტრაქტული სიმრავლეთა თეორიიდან, დესკრიფციული სიმრავლეთა თეორიიდან, ზოგადი ტოპოლოგიიდან და ჯგუფთა თეორიიდან (მაგალითად, ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდი, კონტინუუმის ჰიპოთეზა (CH), მარტინის აქსიომა (MA), ლუზინის განზოგადებული სიმრავლეების თვისებები, ბერნშტეინის ტიპის პათოლოგიურ სიმრავლეთა კონსტრუქციები, განზოგადებული სერპინსკის სიმრავლეების თვისებები, ჰამელის ბაზისების ტექნიკა, თეორემები კომუტატიური და ამოხსნადი ჯგუფების სტრუქტურების შესახებ და ა.შ.). ეს მეთოდები მეტად სასარგებლოა და მათ მივყავართ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების თეორიის ობიექტების უფრო სიღრმისეულ გაგებამდე. ამგვარად, წარმოიშვება ბევრი საინტერესო და მნიშვნელოვანი ამოცანა. შემოთავაზებულ პროექტში დასახულია ამ ტიპის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა. წარმოდგენილი პროექტში გამოვიკვლევთ უგულებელყოფადი სიმრავლეების, აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეების, აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლეების, თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეების თვისებებს არათვლად ჯგუფებში (არათვლად ტოპოლოგიურ ჯგუფებში, უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში) და გამოვიყენებთ მათ ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების ნორმალური გაგრძელების ამოცანებში, ზომის შტეინჰაუსის თვისების განსხვავებული ვერსიებში, კლასიკური წერტილოვანი სიმრავლეების განზოგადებული არაზომადობის კონცეპციაში და ინვარიანტული ზომების ერთადერთობის თვისებაში. აგრეთვე, ზოგიერთი შედეგი, რომელიც ეხება არათვლადი G ჯგუფის დაყოფებს სასრულ ან თვლად მცირე სიმრავლეებად (უგულებელყოფადი სიმრავლეებად, აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეებად) მიიღება წმინდა სიმრავლურ-თეორიული და კომბინატორული მეთოდების გამოყენებით.

სიმრავლეთა და ფუნქციათა ზომადობის ფუნდამენტურ კონცეფციებთან დაკავშირებული სხვადასხვა საკითხების კვლევა არის აუცილებელი თანამედროვე მათემატიკის მთელი რიგი ისეთი დარგების შემდგომი განვითარებისათვის, როგორიცაა: ნამდვილი და კომპლექსური ანალიზი, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი, ტოპოლოგიური ჯგუფების ზოგადი თეორია, ერგოდულობის თეორია, ალბათობის თეორია, შემთხვევით პროცესთა თეორია, უსასრულო თამაშთა თეორია, სიმრავლურ-თეორიული ტოპოლოგია და ა.შ. ჩამოთვლილი დარგების განსახილველი ამოცანების სპეციფიკიდან გამომდინარე, ზომადობის ცნება შეიძლება შემოღებულ იქნას განსხვავებული სახით.

ამრიგად, ზომის თეორია თანამედროვე მათემატიკის მრავალი მიმართულებისათვის წარმოადგენს დამხმარე მათემატიკურ დისციპლინას და არსებითად ხელს უწყობს მათ შემდგომ განვითარებას. ამ თეორიას აქვს მდიდარი მეთოდოლოგიური ბაზა, რომელიც განპირობებულია სხვადასხვა კონცეფციებით და სათანადო მიდგომებით. ზომის თეორიის საკითხების კვლევის პროცესში გამოყენებული მეთოდები არის საკმაოდ რაფინირებული და სიღრმისეული.

ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები არიან ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური საშუალება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების (როგორც აბსტრაქტული სისტემების, ასევე მეტ-ნაკლებად კონკრეტული სისტემების, რომლებიც ბუნებრივად წარმოიშვებიან პრაქტიკაში) თანამედროვე თეორიის შესასწავლად. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თეორია არის მნიშვნელოვანი თავისთავად, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის მეტად მნიშვნელოვანი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების სხვადასხვა თვისებების შესწავლა.

სხვადასხვა სიმრავლეთა ოჯახების ზომადობის თვისებების კვლევა საჭიროებს მძლავრ მეთოდებს აბსტრაქტული სიმრავლეთა თეორიიდან, დესკრიფციული სიმრავლეთა თეორიიდან, ზოგადი ტოპოლოგიიდან და ჯგუფთა თეორიიდან (მაგალითად, ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდი, კონტინუუმის ჰიპოთეზა (CH), მარტინის აქსიომა (MA), ლუზინის განზოგადებული სიმრავლეების თვისებები, ბერნშტეინის ტიპის პათოლოგიურ სიმრავლეთა კონსტრუქციები, განზოგადებული სერპინსკის სიმრავლეების თვისებები, ჰამელის ბაზისების ტექნიკა, თეორემები კომუტატიური და ამოხსნადი ჯგუფების სტრუქტურების შესახებ და ა.შ.). ეს მეთოდები მეტად სასარგებლოა და მათ მივყავართ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების თეორიის ობიექტების უფრო სიღრმისეულ გაგებამდე. ამგვარად, წარმოიშვება ბევრი საინტერესო და მნიშვნელოვანი ამოცანა. შემოთავაზებულ პროექტში დასახულია ამ ტიპის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა. წარმოდგენილი პროექტში გამოვიკვლევთ უგულებელყოფადი სიმრავლეების, აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეების, აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლეების, თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეების თვისებებს არათვლად ჯგუფებში (არათვლად ტოპოლოგიურ ჯგუფებში, უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში) და გამოვიყენებთ მათ ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების ნორმალური გაგრძელების ამოცანებში, ზომის შტეინჰაუსის თვისების განსხვავებული ვერსიებში, კლასიკური წერტილოვანი სიმრავლეების განზოგადებული არაზომადობის კონცეპციაში და ინვარიანტული ზომების ერთადერთობის თვისებაში. აგრეთვე, ზოგიერთი შედეგი, რომელიც ეხება არათვლადი G ჯგუფის დაყოფებს სასრულ ან თვლად მცირე სიმრავლეებად (უგულებელყოფადი სიმრავლეებად, აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეებად) მიიღება წმინდა სიმრავლურ-თეორიული და კომბინატორული მეთოდების გამოყენებით.

1.5. არსებული ლიტერატურული მონაცემები (რა არის გაკეთებული, როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს)

წინა საანგარიშო პერიოდში (2019-2023 წლები) პროექტის მონაწილეებმა გამოაქვეყნეს შემდეგი მონოგრაფიები და სახელმძღვანელოები:

1. **A. Kharazishvili**. *Notes on Real Analysis and Measure Theory*, Springer Monographs in Mathematics, ISBN 978-3-031-17032-4; ISBN 978-3-031-17033-1. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2022, 260 pp.
2. **ა. ხარაზიშვილი,** სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, ნაწილი 3, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 2019, 250 გვ.
3. **ა. ხარაზიშვილი,** კომბინატორული გეომეტრიის ელემენტები, ნაწილი 2, (ინგლისურ ენაზე), საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის გამომცემლობა, თბილისი, 2020, 280 გვ.

4. ნ. ნუცუბიძე, **ო. ძაგნიძე**, შ. კირთაძე. მათემატიკური ცნობარი, ქუთაისი, აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2022 წ,. 677 გვ.
5. **ა. კირთაძე,** ლებეგის ზომა, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2019, 350 გვ.
6. ნ. ნუცუბიძე, **ო. ძაგნიძე**, შ. კირთაძე, მათემატიკური ცნობარი (მეორე გაფართოებული გამოცემა), აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2022, ქუთაისი, 676 გვ.

ამასთანავე წინა საანგარიშო პერიოდში (2019-2023 წლები) პროექტის მონაწილეებმა გამოაქვეყნეს **101** სტატია (*-ით აღნიშნულია იმპაქტ-ფაქტორიან ჟურნალებში გამოქვეყნებული სტატიები) (იხილეთ დანართი 1 და დანართი 2).

ქვემოთ მოვიყვანთ იმის მოკლე მიმოხილვას, თუ ხსენებული პუბლიკაციების საფუძველზე რა არის გაკეთებული, როგორ არის გამოყენებული მიღებული შედეგები. პროექტის ზოგიერთმა მონაწილემ გასული 2019-2023 წლების საანგარიშო პერიოდში მიიღო მნიშვნელოვანი სედეგი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებების გამოკვლევის გზაზე როგორც კლასიკურ, ასევე არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. გამოვყოფთ შემდეგ მიღებულ შედეგებს: დადგენილია კვალის უტოლობათა სრული აღწერა წილადური ინტეგრალებისათვის გარკვეული აზრით ლებეგის სივრცეებთან ახლო მდგომ ფუქნციურ სივრცეებში წონაზე დ. ადამსის პირობის ქვეშ; სრულად მოხდა იმ ზომების სრული აღწერა, რომელთათვისაც მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალები შემოსაზღვრულია ლებეგის სივრცეებში; დადგინდა არაკომპაქტურობის ზომების შეფასებები ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრულ სიმეტრიულ სივრცეებში; გამოკვლეულ იქნა ცალმხრივი მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალების შემოსაზღვრულობა; შემოღებულ იყო ახალი ფუნქციური სივრცეები, სახელდობრ, წონიანი გრანდ ლებეგის სივრცეები შერეული ნორმებით და შესწავლილია მათი ექსტრაპოლაციისა და სხვა ასახვის თვისებები; სხვა შედეგებს შორის დადგენილია სობოლევისა და ადამსის კვალის უტოლობის კრიტერიუმები გრანდ სერეულნორმიან ლებეგის სივრცეებში; დადგენილია აუცილებელი საკმარისი პირობები ზომაზე რომლებიც უზრუნველყოფს კვაზიმეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრული წილადური ინტეგრალური ოპერატორის კომპაქტურობას ზომის მიმართ განსაზღვრული ერთი ლებეგის სივრციდან მეორე სივრცეში; დადგენილია ნახევრადწრფივ ოპერატორთა კომუტატორების შემოსაზღვრულობა წონიან გრანდ მორის სივრცეებში წონაზე მაკენჰაუპტის პირობის ქვეშ. ოპერატორები და სივრცეები განსაზღვრულია გაორმაგების თვისების მქონე ზომიან კვაზიმეტრიკულ სივრცეებზე. შედეგები ახალია ევკლიდეს სივრცეებისათვისაც; დამტკიცებულია მაქსიმალური და კალდერონ-ზიგმუნდის სინგულარული ოპერატორების შემოსაზღვრულია წონიან გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში ხარისხოვანი ტიპის წონებისათვის. შემოსაზღვრულობა დადგენილია სივრცის მაჩვენებელზე ლოგარითმული პირობის ქვეშ. სივრცეები და მათში მოქმედი ოპერატორები განსაზღვრულია ერთგვაროვანი ტიპის სივრცეებზე. შედეგები ახალია ევკლიდეს სივრცეებისათვის; ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის $L^{p(x)}$ კრიტიკული მაჩვენებლის $(min\, p(x) = 1)$ შემთხვევაში დადგენილია სივრცის ის ქვეკლასი, რომელიც ინვარიანტულია ლიაპუნოვის და სასრული ბრუნვის წირებზე განსაზღვრული კოშის სინგულარული ინტეგრალების მიმართ; შესწავლილია ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორების ასახვის თვისებები აბსტრაქტულ ექტრაპოლაციურ ბანახის მესერებში და მათ კოტეს დუალურ სივრცეებში, სადაც ექსტრაპოლაცირი სივრცეები გენერირებულია ერთგვაროვან ზომიან კვაზი-მეტრიკულ სივრცეებზე განსაზღვრული ბანახის ფუნქციური მესერების თავსებადი ოჯახით; შემოღებულია ცვლადმაჩვენებლიანი ჰაილაშ-სობოლევის სივრცის ახალი შკალა. მიღებულია ჩართვის თეორემები აღნიშნულ სივრცეებს შორის სივრცის მაჩვენებლებისათვის ლოგ-ჰელდერის უწყვეტობის პირობის ქვეშ; დადგენილია იმ ზომათა სრული აღწერა, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს ზომიანი წილადური ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობას გრანდ ლებეგის სივრცეებში; მიღებულია რელიხის ტიპის უტოლობები ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებში. მათ ღორის ამოცანა შესწავლილია მრავლადწრფივი დასმითაც. დადგენილია ოლსენის ტიპის უტოლობის ოპტიმალური ფორმა მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალებისათვის. აღნიშნული შედეგიდან მიღებულია კვალის უტოლობის სრული აღწერა წილადური ინტეგრალებისათვის მორის

სივრცეებში; დადგენილია რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა წონიან გრანდ მორის სივრცეებში ისეთი წონებისთვისაც, რომლებიც მაკენჰაუპტის კლასის გარეთ არიან. მანამდე ცნობილი იყო ექსტრაპოლაცია წონიან გრანდ მორის სივრცეებში მაკენჰაუპტის პირობის ქვეშ. შესწავლილია ექსტრაპოლაცია და შემოსაზღვრულობა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში სივრცეზე ლოგ ჰელდერ უწყვეტობის პირობის გარეშე.

შიდა გამოყენებები: მორის ტიპისა და შერეულნორმიან სივრცეებში შედეგების მიღებისას შემუშავებულია ისეთი მიდგომები, რომლებიც ფრიად სასარგებლო და იმპულსის მიმცემია ახალი საპროექტო წინადადების წარმატებით განხორციელებისათვის. აღსანიშნავია, რომ ექტრაპოლაციის ამოცანის ამოხსნა წონიან გრანდ მორის სივრცეებში წარმატებით იქნა გამოყენებუული არადივერგენტული სახით მოცემული ელიფსური ტიპის განტოლების ამონახსნის რეგულარობის შესწავლისას, წირებზე განსაზღვრული ინტეგრალურ ოპერატორთა შემოსაზღვრულობის კრიტერიკუმები გამოყენებულ იქნა დირიხლეს, რომან-ჰილბერტისა და რიმან-ჰილბერტ-პუანკარეს სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ანალიზური და განზოგადებული ანალიზური ფუნქციენბისათვის არეებში არაგლუვი საზღვრებით. ამ მიმართულებით განვითარებული ახალი ასპექტები, არასტანდარტული დასმებით ამოცანების ამოხსნა ასევე იძლევა კარგ პერსპექტივას ამჯერად წარმოდგენილ საპროექტო წინადადებების განსახორციელებლად.

მრავალგანზომილებიანი ფურიეს ანალიზის მიმართულებით აღსანიშნავია წინა საანგარიშო წლის შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგები: განხილულია ფუნქციათა ერთმაგი და ჯერადი მწკრივების Λ შეჯამებადობის საკითხები. შემოტანილია კანტორის Λ ფუნქციონალთა მიმდევრობის ცნება.

დადგენილია ფუნქციათა ჯერადი მწკრივების კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულები კანტორის ფუნქციონალების განმეორებითი გამოყენების საშუალებით. ეს ფორმულები წარმოადგენენ ფურიეს ფორმულების განზოგადებას; ლებეგისა და რისის ცნობილი თეორემებით დადგენილია კავშირი ფუნქციათა მიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობასა და ზომით კრებადობას შორის. ლებეგის თეორემა არის ზომით კრებადობის საკმარისი პირობა, ხოლო რისის თეორემა კი იძლევა ზომით კრებადობის აუცილებელ პირობას; დადგენილია თეორემა, რომელიც არის აუცილებელი და საკმარისი იმისთვის, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა იყოს ზომით კრებადი; შემოტანილია პერიოდულად შერეული ხარისხოვანი მწკრივის ცნება. დადგენილია პერიოდულად შერეული უნივერსალური ხარისხოვანი მწკრივის არსებობა, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მრავალი ცვლადის ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის თანაბარი აპროქსიმაცია; ე. წ. ε-ერთადერთობის

ჯერადი ფუნქციათა მწკრივებისათვის დადგენილია კავშირი ამ მწკრივების პრინგსჰეიმის აზრით კრებადობასა და კერძო ჯამების განმეორებით კრებადობას შორის. კერძოდ, დადგენილია ფუბინის ტიპის თეორემა ε-ერთადერთობის ჯერადი მწკრივებისათვის; დადგენილია დებულება, რომლის

თანახმად რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობის ყველა წევრი ორი უნივერსალური მწკრივის სათანადო კოეფიციენტების ნამრავლის ტოლია; დადგენილია ფუნქციათა მწკრივების ერთადერთობის თეორემები; დადგენილია ლაკუნების მქონე უოლშის მწკრივების კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულები.

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიღწევა გასული პროექტის შესრულების გზაზე იყო ის ფაქტი, რომ ჯგუფის წევრმა ლ. ეფრემიძემ კოლეგებთან ერთად განაზოგადა მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმი (დაპატენტებული აშშ-ში 2016 წელს, No.: 9,318,232 B2) მრავალპარამეტრიანი სისტემებისატვის, რომელსაც მიენიჭა კიდევ ერთი ამერიკული პატენტი 2021 წელს: „მრავალცვლადიანი მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაცია“ No.: US 10,951,919 B2.

მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალების ასახვის თვისებებზე მომზადდა დისერტაცია (დისერტანტი გ. იმერლიშვილი, ხელმძღვანელები ა. მესხი და შ. ტეტუნაშვილი) რომელიც იქნა წარმატებით დაცული საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

I ქვეთემით შესრულებული სამუშაოების ავტორების შედეგები ფართოდ არის ციტირებული შემდეგ მონოგრაფიებში:

1) Y. Sawano, G. Di Fazio, D. I. Hakim, Morrey Spaces Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volume I, CRC Press, Taylor and Francis, 2020.
2) Y. Sawano, G. Di Fazio, D. I. Hakim, Morrey Spaces Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volume I, CRC Press, Taylor and Frances, 2020.
3) Y. Sawano, Theory of Besov Spaces, Springer, Singapore, 2018.
4) L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Third Edition, *Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London*, 2014(http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4939-1230-8).
5) D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Birkäuser, Springer, Basel, 2013 (http://www.springer.com/la/book/9783034805476).
6) L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ružička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011(https://books.google.ge/books?hl=en&lr=&id=5qX7CAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR3&dq=#v=onepage&q&f=false)
7) Frederic W. King, Hilbert Transforms, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 124, *Cambridge University Press*, 2009 (https://books.google.ge/books?id=spGVZqZk-L4C&dq)
8) Frederic W. King, Hilbert Transforms, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 125, Cambridge University Press, 2009. (https://books.google.ge/books?id=HcbaAAAAMAAJ&dq
9) A. Kufner, L. Maligrahda and L.-E. Persson, The Hardy inequality, About its History and Some Related Results, *Pilsen,* 2007.(https://books.google.ge/books?id=0t6KGQAACAAJ&dq)
10) Y. Sawano, A Handbook of Harmonic Analysis, 2014, http://www.comp.tmu.ac.jp/yosihiro/teaching/harmonic-analysis/harmonic-analysis-textbook.pdf
11) D. E. Edmunds, W. D. Evans, Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2004.(https://books.google.ge/books?id=UiH4CAAAQBAJ&pg)
12) A. Kufner and L.-E. Persson, Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co, Singapure, London, 2003.(https://books.google.ge/books?id=4SqMH8Drl40C&pg)
13) P.L. Butzer and U. Westphal, An Introduction to Fractional Calculus, in: *Applications of fractional calculus in Physics, Edited by R Hilfer* (Universität Mainz & Universität Stuttgart, Germany), *World Scientific*, 2000 http://www.worldscibooks.com/physics/3779.html
14) W. Johnston, The Lebesgue Integral for Undergraduates, *The Mathematical Association of America (MAA), Washington*, 2015.(http://www.maa.org/press/ebooks/the-lebesgue-integral-for-undergraduates)
15) A. Kufner, L.-E. Persson and N. Samko, Weighted inequalities of Hardy type, *World Scientific, New Jersey, London,* 2017.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ის ფართო გამოხმაურება, რაც გამოიწვია გასულ საანგარიშო პერიოდში ჯგუფის წევრების მიერ ჩატარებული კვლევის შედეგებმა გამოყენებით ჰარმონიულ ანალიზში, სახელდობრ, ვეივლეტებისა და მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის საკითხებში. ამის დასტურია შემდეგი პუბლიკაციები:

1. Puoya Tabaghi, Ivan Dokmani´c , and Martin Vetterli, "Kinetic Euclidean Distance Matrices", IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 68, 2020, 452-463.
2. J. N. MacLaurin and P. A. Robinson, „Determination of effective brain connectivity from activity correlations", PHYSICAL REVIEW E 99, 042404 (2019)
3. Yanyang Xiao, Songting Li, and Douglas Zhou, "Representing conditional Granger causality by vector auto-regressive parameters", Commun. Math. Sci., 2019, vol. 17, no. 5, pp. 1353–1386

მეთოდები, რომლებიც უკვე გამოიყენეს ამ პროექტში მონაწილე წევრებმა ზომის თეორიის მიმართულებით, აღმოჩნდა იმდენად ნაყოფიერი, რომ მიღებული შედეგები გამოდგება პროექტით გათვალისწინებულ ამოცანებში (მაგალითად, უსასრულოგანზომილებიან ბანახის სივრცეებში ახალი ტიპის ბორელის ინვარიანტული ზომები, ზომების გაგრძელებათა ფართო კლასები, კვაზი-ინვარიანტული ზომების მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების ახალი გამოყენებები, და ა. შ.).

პროექტის წევრების მიერ მიღებულმა შედეგებმა ბოლო ოცი წლის მანძილზე მოიპოვა აღიარება და ციტირებულია სპეციალისტებისა და ექსპერტების პუბლიკაციებში.

1.6. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

I ქვეთემა

პროექტით გათვალისწინებული პრობლემების გამოკვლევების შედეგები იქნება პიონერული ხასიათის. ჩვენ მიზნად ვისახავთ მოვახდინოთ გარღვევა შემდეგი მიმართულებებით: გაფართოვდება იმ სივრცეების და ოპერატორების კლასები, რომლებიც შემოსაზღვრულია ახალ ფუნქციურ სივრცეებში; დადგენილი იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები წონაზე, რომლისთვისაც ადგილი აქვს კვალის უტოლობას დადებითგულიანი მრავლადწრფივი ოპერატორებისათვის, სიღრმისეულად გამოკვლეული იქნება ზომიან მეტრიკულ სივრცეებზე განსაზღვრული ჰაილაშ-სობოლევისა და ჰაილაშ-მორის სივრცეების მეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრული ჰელდერის სივრცეებში ჩართვის თეორემები; გამოკვლეულ იქნება ორწონიანი კლასიკური და გრანდ მორის სივცრეების დუალურობა და საინტერპოლაციო თვისებები, შესწავლილ იქნება მრავლად(ნახევრად)წრფივი ინტეგრალური ოპერატორების მეტრული თვისებები; დადგენილი იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები ზომაზე, რომელთათვისაც ადგილი აქვს ზომის მიმართ განსაზღვრული წილადური ინტეგრალების შემოსაზღვრულობას ზომიან ლორენცის სივრცეებში, დადგენილ იქნება ორწონიანი კრიტერიუმები მრავლადწრფივი ჯერადი ჰარდის გარდაქმნებისათვის, გამოკვლეული იქნება ინტეგრალურ ოპერატორთა ასახვის თვისებები იმ ფუნციურ სივრცეებში, რომლებშიც შემავალი ფუნქციები მნიშვნელობებს იღებენ ბანახის სივრცეებში. პროექტის

დაგეგმილი კვლევების სამეცნიერო ღირებულება იმითაც არის განპირობებული, რომ განვითარებული იქნება სრულიად ახალი მიდგომები ექსტრაპოლაციის ამოცანების ამოსახსნელად არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში, მატრიცთა სპექტრალური ფაქტორიზაციის ამოცანებში, სიღრმისეულად გამოკვლეული იქნება რთული ბუნების სტრუქტურებზე განსაზღვრული ინტეგრალური გარდაქმნების ასახვის თვისებები, სხვადასხვა ოპერატორებისათვის გადაწყვეტილი იქნება ზუსტი მუდმივების დადგენის ამოცანა წონიან უტოლობებში.

პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობები. პროექტის დასრულების შემდეგ დაწყებული საქმიანობის გაგრძელების პერსპექტივა და სხვ. ჩვენს მიერ შემუშავებული მრავალგანზომილებიანი ეფექტური ალგორითმის გამოყენება განზრახულია თავის ტვინში ინფორმაციის ნაკადთა ანალიზისთვის გრეინჯერის მიზეზ-შედეგობრიობის ტესტით, ეფილეფსიის მკურნალობის მეთოდების ჩათვლით ბიომედიცინაში.

ჩვენ ვიმედოვნებთ, რომ პროექტით გათვალისნებული კვლევები ხელს შეუწყობს თანამედროვე ანალიზში ფუნდამენტური ცნებებისა და მიდგომების უფრო ღრმა გაგებას და გააჩენს ახალ პერსპექტივებს ოპერატორთა ინტერპოლაციისა და ექსტრაპოლაციის თეორიაში, მრავალგანზომილებიან ფურიეს ანალიზში, გამოყენებით ჰარმონიულ ანალიზსა და ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანების თეორიაში.

II ქვეთემა

პროექტში წარმოდგენილი II ქვეთემის თემატიკა შეიცავს ახალ იდეებს და მიდგომებს ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომის თეორიაში. პროექტის ყოველი ამოცანა შეიცავს მეცნიერულ სიახლეს იდეოლოგიური თვალსაზრისით. ამ ამოცანებში განხილული იქნება სიმრავლეთა კლასის განზოგადებული ზომადობის ცნება და შესწავლილი იქნება ისეთი სიმრავლეთა კლასების (აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლეთა კლასი, უგულებელყოფადი სიმრავლეთა კლასი, არაზომადი სიმრავლეთა კლასი თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეთა კლასი, ვიტალის სიმრავლეთა კლასი, ბერნშტეინის სიმრავლეთა კლასი, ჰამელის ბაზისები) ზომადობა განზოგადებული აზრით, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ არა მარტო ზომის თეორიისათვის, არამედ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიისათვის. აგრეთვე, პროექტში განხილული იქნება

უსასრულო განზომილებიან პოლონურ სივრცეებში ინვარიანტული $\pm$ -სასრული ბორელის ზომების არსებობის საკითხი და ასეთი ზომებისათვის გამოკვლეული იქნება როგორც მათი თვისებები, ასევე ასეთი ზომების გაგრძელების ისეთი თვისებები, როგორიცაა: ერთადერთობა, ძლიერი ერთადერთობა, ნორმალური გაგრძელების არსებობა, შტეინჰაუსის თვისება და სხვ.

ჩვენ გვჯერა, რომ პროექტის განხორციელების შედეგად შემუშავებული ახალი მიდგომები და შედეგები მიცემს იმპულსს თანამედროვე ანალიზში და მის გამოყენებებში მომუშავე მკვლევარებსა და დოქტორანტებს აღნიშნულ დარგში შემდგომი კვლევებისათვის.

პროექტის მონაწილეები ეწევიან ინტენსიურ სამეცნიერო თანამშრომლობას ცნობილ უცხოელ მათემატიკოსებთან (იხ. დანართი 3).

1.7. პროექტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით, პროექტში ახალგაზრდა მეცნიერების ჩართულობა, აკადემიური დოქტორის ხარისხის მოსაპოვებლად სადისერტაციო ნაშრომების მომზადება და სხვა.

I ეტაპი

- დადგენილი იქნება რუბიო დე ფრანსიას ტიპის ექსტრაპოლაციის თეორემა გრანდ შერეულნორმიან ფუნქციურ სივრცეებში. მიღებულ იქნება ჰარმონიული ანალიზის ოპერატორთა ნორმების რაოდენობრივი შეფასებები შერეულნორმიან ფუნქციურ სივრცეებში (შეასრულებს ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი).
- ნაპოვნი იქნება ორწონიანი კლასიკური და გრანდ მორის სივრცეთა დუალური სივრცე და დამტკიცებული იქნება საინტერპოლაციო თეორემა აღნიშნულ სივრცეებში (შეასრულებს ა. მესხი).
- დადგენილ იქნება წონითი ექსტრაპოლაციის თეორემები გრანდ ცვლადმჩვენებლიანი და წონიანი ლებეგის სივრცეების შერეულნორმიან სივრცეებში (შეასრულებს ა. მესხი).
- გამოკვლეულ იქნება ჩართვის თეორემები მეტრიკულ ზომიან სივრცეებზე განსაზღვრულ გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან ჰაილაშ-მორის სივრცეების ჩარჩოებში. (შეასრულებს ა. მესხი და ე. გორდაძე).
- ზომათა გარკვეული კლასების მიმართ ფარდობითად ზომადი ან აბსოლუტურად არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლეების სტრუქტურის კვლევა (შემსრულებლები: ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე)
- უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ზომათა ისეთი ინვარიანტული გაგრძელებების არსებობა, რომლებიც არ იქნებიან ნორმალური, მაგრამ ფლობენ ძლიერი ერთადერთობის თვისებას. (შემსრულებლები: ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე)
- რადემახერის უნივერსალური მწკრივების არსებობის დადგენა ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ყველგან მკვრივ სიმრავლეებზე წარმოდგენის თვალსაზრისით. (შემსრულებელი შ. ტეტუნაშვილი)
- ფატუს პრობლემის შესწავლა პუასონის ასოცირებული ინტეგრალებისთვის, რომელნიც შეესაბამებიან ჩემს მიერ 2017 წელს შემოღებულ ფურიეს ასოცირებულ მწკრივებს. (შემსრულებელი ომარი ძაგნიძე)
- მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმის გადატანა უწყვეტი სისტემებისათვის ნამდვილ ღერძზე (შემსრულებელი ლ. ეფრემიძე).

ყველა ზემოთ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის შედეგები მომზადდება სტატიების სახით და წარდგენილი იქნება დასაბეჭდად მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში, მომზადდება აგრეთვე მოხსენებები საერთაშორისო კონფერენციებზე წარსადგენად. შესაძლებელია მონოგრაფიის მომზადებაც.

II ეტაპი

- მიღებულ იქნება იმ ზომების სრული აღწერა, რომლისთვისაც ადგილი აქვს სობოლევის ტიპის უტოლობას ზომიანი წილადური ინტეგრალური ოპერატორისათვის ლორენცის სივრცეებში. აგრეთვე, დადგენილ იქნება იმ ზომების სრული აღწერა, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ზომიანი წილადური ინტეგრალური ოპერატორის კომპაქტურობას ლორენცის სივრცეებში (შეასრულებს ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი).
- მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალისნორმის რაოდენობრივი შეფასების გამოკვლევა დაზუსტებული (ოპტიმალური) შეფასებების მიღება მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალებისათვის (ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი).
- ჰარდის ტიპის, მაქსიმალური დაწილადური ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის დამტკიცება (წონიან) ცენტრალურ მორის სივრცეში. აღნიშნული ოპერატორებისასახვის თვისებების დადგენა გრანდ ცენტრალურ მორის სივრცეებში (ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი).
- რაოდენობრივი შეფასებების მიღება (ზაკლის ტიპის თეორემა) მრავლადწრფივი წილადური ინტეგრალებისათვის. (შეასრულებს ა. მესხი).
- $\mathbf{R}^2$ ევკლიდურ სიბრტყეში უნივერსალური ნულზომის მქონე მაზურკევიჩის სიმრავლეების არსებობა და მაზურკევიჩის სიმრავლეები, რომლებიც შეიცავენ გარკვეული სერპინსკი-ზიგმუნდის ფუნქციის გრაფიკს. (შეასრულებს ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე).
- რადემახერის მწკრივების ყოველი კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულის დადგენა ამ მწკრივის ჯამის საშუალებით, თუ ცნობილია მწკრივის ჯამის მნიშვნელობა სათანადოდ შერჩეულ ორ ცალ წერტილში (შემსრულებელი შ. ტეტუნაშვილი)
- ფატუს პრობლემის განხილვა პუასონის სფერული ინტეგრალისთვის (შეასრულებს ო. ძაგნიძე).
- მატრიცის სპექტრალური ფაქტორიზაციის არსებულ ალგორითმში კრებადობის რიგის დადგენა (შემსრულებელი ლ. ეფრემიძე).

ყველა ზემოთაღნიშნული ამოცანის ამოხსნის შედეგები მომზადდება სტატიების სახით და წარდგენილი იქნება დასაბეჭდად მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში, მომზადდება აგრეთვე მოხსენებები საერთაშორისო კონფერენციებზე წარსადგენად.
დაგეგმილია აგრეთვე ორტომეული მონოგრაფიის გამოცემა.

III ეტაპი
- თანაბარი აპროქსიმაციის თვისებისმქონე ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში მოქმედი მრავლადნახევრადწრფივი ოპერატორების არაკომპაქტურობის ზომის შეფასებების დადგენა. მრავლადნახევრადწრფივი ჰარდი-ლიტლვუდისა დაწილადური მაქსიმალური ოპერატორის არსებით ნორმათა (წონითი) შეფასებების დადგენა ლებეგის სივრცეებში.(შეასრულებს ა. მესხი).
- წონითი ექტრაპოლაციის თეორემების მიღება მრავლადწრფივი ანალიზის ჩარჩოებში გრანდ ფუნქციურ სივრცეებში. აღნიშნული შედეგის გამოყენება ჰარმონიული მრავლადწრფივი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებების დასადგენად. (შეასრულებს ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი).
- ნორმების რაოდენობრივი შეფასებების დადგენა ექსტრაპოლაციის თეორემებში. ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებების დადგენა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. კალდერონ-ზიგმუნდის უტოლობის მიღება ამ სივრცეებში.(შეასრულებს ა. მესხი).
- ორწონიანი ამოცანების გამოკვლევა მრავლადწრფივი ცალმხრივი ინტეგრალური გარდაქმნებისათვის. (შეასრულებს ა. მესხი).
- მრავლადწრფივი ჯერადი ჰარდის გარდაქმნის წონითი კრიტერიუმების დადგენა ლებეგის სივრცეებში.

- სიურექციული ან თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის გამოყენებით არათვლადი არაკომუტატიური (G,·) ჯგუფის G-უგულებელყოფად სიმრავლეებად დაშლა და გამოყენებები.(შეასრულებს ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე).
- L და L_2 კლასის ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ რადემახერის მწკრივების ჯამების გამოყენებით. დადგენილი ფორმულები არსებითად გაამარტივებს ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელ ცნობილ ინტეგრალურ ფორმულებს (შემსრულებელი შ. ტეტუნაშვილი).
- ორგანზომილებიან სფეროზე ფურიეს ანალიზის ზოგიერთი საკითხის განხილვა-შესწავლა (შემსრულებელი ო. ძაგნიძე)
- ვეივლეტ მატრიცებისა და მრავალარხიანი პარაუნიტარული ფილტრების თეორიის განვითარება სასრული ველებისთვის (შემსრულებელი ლ. ეფრემიძე)

ყველა ზემოთაღნიშნული ამოცანის ამოხსნის შედეგები მომზადდება სტატიების სახით და წარდგენილი იქნება დასაბეჭდად მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში, მომზადდება აგრეთვე მოხსენებები საერთაშორისო კონფერენციებზე წარსადგენად.

IV ეტაპი

- რაოდენობრივი შეფასებების მიღებაშესაბამისი კალდერონ-ზიგმუნდის ოპერატორისათვის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში (შეასრულებს ა. მესხი).
- რეგულარობის შედეგების მიღება პუასონისა და სტოქსის ამოცანებში ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეების ჩარჩოებში. კორნის უტოლობისმიღება გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეში. (შეასრულებს ა. მესხი და ე. გორდაძე).
- დავადგინოთ დივერგენტული განტოლების ამოხსნადობა და დავამტკიცოთ კორნის უტოლობა გრანდ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების ჩარჩოებში. (შეასრულებს ა. მესხი და ე. გორდაძე).
- შტრიჰარცის ტიპის შეფასებების მიღება სხვადასხვა ახალ ფუნქციურ სივრცეებში. (შეასრულებს ა. მესხი)
- ბანახის სივრცეთა მნიშვნელა გრანდ ფუნქციურ სივრცეებში ოპერატორთა ასახვის თვისებების შესწავლა (შეასრულებს ა. მესხი).
- ურთიერთკავშირების დადგენა გარკვეულ სიმრავლეთა კლასებს შორის განსხვავებული H და H' ქვეჯგუფებისათვის და ასეთი ურთიერთმიმართებების დამოკიდებულება H და H'-ს ალგებრულ სტრუქტურის მიმართ. (შეასრულებს ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე).
- ორი ცვლადის ფუნქციათა ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა რადემახერის ორმაგი მწკრივების გამოყენებით. (შემსრულებელი შ. ტეტუნაშვილი).
- გაუსის ველებში აღებული კოეფიციენტებით ორთოგონალური მატრიცების გენერირების ახალი მეთოდის შემუშავება (შემსრულებელი ლ. ეფრემიძე).

ყველა ზემოთ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის შედეგები მომზადდება სტატიების სახით და წარდგენილი იქნება დასაბეჭდად მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში, მომზადდება აგრეთვე მოხსენებები საერთაშორისო კონფერენციებზე წარსადგენად.

V ეტაპი

- სიგნალთა დამუშავების ამოცანის შესწავლა გრანდ ცვლადმაჩვებელიან ლებეგის სივრცეებში. (შემსრულებელი ა. მესხი)
- არაკომპაქტურობის ზომის შეფასებები ძლიერი მაქსიმალური ფუნქციებისა და ჯერადი ჰილბერტის გარდაქმნებისათვის (შემსრულებელი ა. მესხი).

- იმ ზომების სრული აღწერა, რომელთათვისაც ზომის მიმართ განსაზღვრული წილადური ინტეგრალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია გრანდ ფუნციურ სივრცეებში. (შემსრულებელი ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი)
- გამოკვლეულ იქნება შტეინჰაისის თვისების სხვადასხვა ვარიანტი:

  (ა) როცა ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომა μ არის ლებეგის ზომის გაგრძელება სასრულგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში;
  (ბ) როცა μ არის E უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ბორელის ზომა E-ში. (შეასრულებს ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე).
  - ტრიგონომეტრიული მწკრივების აბსოლუტურად კრებადობის კრიტერიუმის დადგენა რადემახერის მწკრივების გამოყენებით. (შეასრულებს ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე).
- სასრული ველებისთვის ვეივლეტ მატრიცების შევსების პრობლემის ამოხსნა: აიგოს პარაუნიტარული მატრიცი მოცემული პირველი სტრიქონით (შემსრულებელი ლ. ეფრემიძე).

ყველა ზემოთ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის შედეგები მომზადდება სტატიების სახით და წარდგენილი იქნება დასაბეჭდად მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში, მომზადდება აგრეთვე მოხსენებები საერთაშორისო კონფერენციებზე წარსადგენად.

ა. მესხი ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტის პროფესორია. ის ჩართულია აღნიშნული უნივერსიტეტის სადოქტორო პროგრამაში. ის არის აგრეთვე საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის პრეზიდენტი და საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მიერ ორგანიზებული ყოველწლიური საერთაშორისო კონფერენციის საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე.

ა. ხარაზიშვილი და ა. კირთაძე სტუ-ში ხელმძღვანელობენ დოქტორანტ ხაჩიძე მარიკას; ა. ხარაზიშვილი არის აგრეთვე დოქტორანტ ლიკა ბერაიას სამეცნიერო ხელმძღვანელი.

პროექტში წარმოდგენილი საკითხების ირგვლივ მაგისტრანტებისა და დოქტორანტების მონაწილეობით ტარდება ყოველკვირეული სასწავლო-სამეცნიერო სემინარები:
თსუ ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი (ხელმძღვანელი ა. ხარაზიშვილი);
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი (ხელმძღვანელი ა. კირთაძე).

ამჟამად, ა. ხარაზიშვილისა და ა. კირთაძის ხელმძღვანელობით სადოქტორო პრაგრამებზე სწავლობს ორი დოქტორანტი.

შემდგომ საანგარიშო პერიოდში დაგეგმილია ორი სადოქტორი დისერტაციის დასრულებული თემის წარდგენა სადისერტაციო საბჭოებზე.

დანართი 1

I ქვეთემით 2019-2023 წლებში გამოქვეყნებული შრომების სია

1. * **A. Meskhi**, Extrapolation in New Weighted Grand Morrey Spaces Beyond the Muckenhoupt Classes, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2023, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127181.
2. * E. Gordadze, **A. Meskhi** and M. A. Ragusa, On some extrapolation in generalized grand Morrey spaces and applications to PDEs, *Electronic Research Archive*, 2023 (accepted).
3. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Boundedness of operators of Harmonic Analysis in grand variable exponent Morrey spaces. *Mediterr. J. Math.* **20**, **71** (2023). https://doi.org/10.1007/s00009-023-02267-8
4. * L. Grafakos and **A. Meskhi**, On sharp Olsen's and trace inequalities for multilinear fractional integrals. *Potential Analysis* (2022). https://doi.org/10.1007/s11118-022-09991-y.
5. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Rubio de Franc\'ia's weighted extrapolation in mixed norm spaces and applications, *Mathematische Nachrichten* (accepted).
6. ***G. Imerlishvili** and **A. Meskhi**, Weighted inequalities for one-sided multilinear fractional integrals. *Positivity* **27**, 1 (2023). https://doi.org/10.1007/s11117-022-00954-6.
7. **A. Meskhi,** Boundedness weighted criteria for multilinear Riemann-Liouville integral operators, *Trans.*

A. Razmadze Math. Inst. **177** (2023), No. 1, 147–148.
8. **A. Meskhi**, H. Rafeiro and **Ts. Tsanava**, Duality and interpolation for weighted grand Morrey spaces, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **177** (2023), issue 1, 149–155
9. **V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, Compactness of fractional type integral operators on spaces of homogeneous type, *J. Math. Sci.* **268** (2022), No. 3, 368-375. DOI 10.1007/s10958-022-06202-2.
10. **E. Gordadze, A. Meskhi and** M. A. Ragusa**,** On some extrapolation in generalized grand Morrey spaces and applications to partial differential equations, *Trans. Razmadze. Math. Inst.* 176 (2022), no. 3, 435-441.
11. ***D. E. Edmunds, **V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, Embeddings in grand variable exponent function spaces, *Results in Math.* **76**, 137 (2021). https://doi.org/10.1007/s00025-021-01450-1
12. **A. Meskhi,** Weighted extrapolation in grand Morrey spaces beyond the Muckenhoupt range, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **176** (2022), no. 2, 285-289
13. **V. Kokilashvili and A. Meskhi**, Operators of harmonic analysis in grand variable exponent Morrey spaces, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **176** (2022), no. 1, 147-152.
14. * **V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, Extrapolation and the boundedness in grand variable exponent Lebesgue spaces without assuming the log-Hölder continuity condition, and Applications, *Journal of Fourier Analysis and Applications.* **28** (2022). https://doi.org/10.1007/s00041-022-09919-5.
15. **Sh. Tetunasvili** and T. Tetunashvili, On reconstruction of coefficients of Walsh series with gaps, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.,* **176**(2022), No 1, 159-162.
16. ***L. Ephremidze** and I. Spitkovsky, On the generalization of Janashia-Lagvilava method for arbitrary fields. *Georgian Math. J.* 29 (2022), 353-362.
17. * **L. Ephremidze** and I. Spitkovsky, On multivariable matrix spectral factorization method, *J. Math. Anal. Appl.* 514 (2022), 126300.
18. **L. Ephremidze***,* I. Spitkovsky and A. Saatashvili, On J-unitary matrix polynomials, *J. Math Sci.* (2022), 266:196–209.
19. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Maximal and singular integral operators in weighted grand variable exponent Lebesgue spaces. *Ann. Funct. Anal.* **12**, 48 (2021). https://doi.org/10.1007/s43034-021-00135-8
20. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, On the boundedness of integral operators in weighted grand Morrey spaces (Russian), *Trudy MIAN*, 312(2021), 203–215, DOI: https://doi.org/10.4213/tm4134; English Translation: *Proc. Steklov Inst. Math.* **12**(2021), 194–206; DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543821010119
21. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Boundedness of integral operators in generalized weighted grand Lebesgue spaces with non-doubling measures, *Mediterranean J. Math.* **18: 50** (2021). https://doi.org/10.1007/s00009-020-01694-1
22. * D. E. Edmunds and **A. Meskhi**, A Multilinear Rellich Inequality, *Mathematical Inequalities and Applications* (MIA), 24(2021), 265–274, DOI: doi:10.7153/mia-2021-24-19.
23. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Weighted Sobolev inequality in grand mixed norm Lebesgue spaces, *Positivity,* **25**(2021), 273–288. DOI: 10.1007/s11117-020-00764-8.
24. * V. Kokilashvili and **A. Meskhi**, Fractional integrals with measure in grand Lebesgue and Morrey spaces, *Int. Transf. Spec. Funct.* **32**(2021). 9, DOI:10.1080/10652469.2020.1833003.
25. V. Kokilashvili and **A. Meskhi,** Weighted extrapolation in mixed norm function spaces, *Transactions of A. Razmadze Math. Inst.* **175** (2021), no. 2, 287-291.
26. **E. Gordadze and V. Kokilashvili.** On the boundedness of pseudodifferential operators defined by amplitudes in generalized weighted grand Lebesgue spaces, *Transactions of A. Razmadze Math. Inst.*, **175**(2021), No 3, 431-432.
27. **V. Kokilashvili.** Boundedness criteria for Calderón singular integral operator in some grand function spaces. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, **15**(2021), No 2, 7-13.
28. L. Grafakos and **A. Meskhi**, Sharp Olsen's inequality for multilinear Riesz potentials, *Transactions of A. Razmadze Math. Inst.* **175** (2021), no. 3, 433-43.

29. **L. Ephremidze** and A. Saatashvili, A simple derivation of the key equation in Janashia-Lagvilava method, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **175** (2021), 43-47.
30. * **V. Kokilashvili** and **A. Meskhi,** Trace inequalities for fractional integrals in mixed norm grand Lebesgue spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis,* **23**(2020), No. 5, 1451-1471. DOI: https://doi.org/10.1515/fca-2020-0072.
31. * ***V. Kokilashvili***, M. Mastylo and **A. Meskhi,** Calderón-Zygmund singular operators in extrapolation spaces, *Journal of Functional Analysis,* 279(2020), Issue 10, 108735.
32. **V. Kokilashvili.** On the boundedness in generalized weighted grand Lebesgue spaces of some integral operators associated to the Schrȍdinger operators, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* **174**(2020), No 3, 419-421.
33. **V. Kokilashvili.** On the boundedness of multiple Cauchy singular and fractional integrals defined on the product of rectifiable curves, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, **174**(2020), No 2, 251-255.
34. **V. Kokilashvili** and Ts. Tsanava. A note on the multiple fractional integrals defined on the product of nonhomogeneous measure spaces, Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, **174**(2020), No 2, 257-259.
35. **V. Kokilashvili** and D. Makharadze. On extension of some Calderón-Zygmund inequality, *Bulletin of Georgian National Academy of Sciences,* **14**(2020), No 3, 14-16.
36. ***V. Kokilashvili.** Weighted grand mixed-norm Lebesgue spaces and boundedness criteria for integral operators. *Georgian Math. J.,* **27**(2020), No 4, https://doi.org/10.1515/gmj_2020-2071, 1-7.
37. * **V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, On integral operators in weighted grand Lebesgue spaces of Banach-valued functions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* **https://doi.org/10.1002/mma.6779 .**
38. * **V. Kokilashvili**, M. Mastylo and **A. Meskhi**, Singular integral operators in some variable exponent Lebesgue spaces, *Georgian Math. J.* DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2020-2065.
39. * **V.Kokilashvili** and **A. Meskhi,** Extrapolation in weighted classical and grand Lorentz spaces. Application to the boundedness of integral operators, *Banach Journal of Mathematical Analysis,* **14** (2020), 1111–1142, DOI: 10.1007/s43037-020-00054-1.
40. ***** V. Kokilashvili, M. Mastylo and **A.Meskhi**, On the Boundedness of Multilinear Fractional Integral Operators, *The Journal of Geometric Analysis,* **30**(2020), 667-679*,* https://doi.org/10.1007/s12220-019-00159-6.
41. ***G. Imerlishvili** and **A.Meskhi**, A Note on the trace inequality for Riesz potentials, *Georgian Math.J.* **DOI:** 10.1515/gmj-2020-2077
42. **A.Meskhi**, Essential norm estimates for multilinear singular and fractional integrals, *Commentationes Mathematicae* **59**(2019), No. 1-2, 81–93. **DOI:** 10.14708/cm.v59i1-2.652.
43. D. E. Edmunds and **A. Meskhi,** Weighted multilinear Hardy and Rellich inequalities, *Trans. A. Razmadze Math. Inst*, **174**(2020) , No 3, 395-398.
44. **G. Imerlishvili** and **A. Meskhi,** Weighted norm estimates for one-sided multilinear integral operators, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **174** (2020), No 3, 399-403
45. **G. Imerlishvili**, **A. Meskhi** and Q. Xue, Multilinear Fefferman-Stein type inequality and its generalizations, *Trans. A. Razmadze Math. Inst,* **174** (2020), no. 1, 83-92.
46. ***L. Ephremidze** and I. Spitkovsky, On explicit Wiener-Hopf factorization of 2x2 matrices in a vicinity of a given matrix, *Proceedings of the Royal Society*, A 476: 20200027. https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0027.
47. ***L. Ephremidze**, E. Shargorodsky, and I. Spitkovsky, Quantitative results on continuity of the spectral factorization mapping, *J. Lond. Math. Soc.* (2) **101**(2020), 60–81.
48. **Sh. Tetunashvili.** On the existence of universal series with special properties, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, **174**(2020), No 3, 435-436.
49. **Sh. Tetunashvili** and T. Tetunashvili. On sets of uniqueness of some function series, *Transactions of A.*

Razmadze Mathematical Institute, **174**(2020), No 3, 437-439.

50. * V. Kokilashvili, M. Mastylo and **A.Meskhi**, Compactness criteria for fractional integral operators*, Fractional Calculus and Applied Analysis,* **22** (2019), No 5, 1259-1283.
51. *** V. Kokilashvili**, M. Mastylo and **A.Meskhi**, The measure of noncompactness of multilinear operators, *Nonlinear Analysis,* **188** (2019), 70–79, https://doi.org/10.1016/j.na.2019.05.011.
52. ***** D. E. Edmunds and **A.Meskhi**, Two-weighted Hardy operator in $L^{p(x)}$ spaces and applications, *Studia Math*. **249** (2019), 143-162, DOI: 10.4064/sm180204-20-8.
53. *** V.Kokilashvili**, **A. Meskhi** and H. Rafeiro, Commutators of sublinear operators in grand Morrey space". *Studia Sci. Math. Hungarica*, **56 (2)**(2019), 211-232. DOI: 10.1556/012.2019.56.2.1425.
54. *** V. Kokilashvili**, **A.Meskhi** and M. A. Raguza Weighted Extrapolation in Grand Morrey Spaces and Applications to Partial Differential Equations, Rendiconti *Lincei Matematica e Applicazioni Rend. Lincei Mat. Appl.* **30** (2019), 67–92 DOI 10.4171/RLM/836*.*
55. ***** D. E. Edmunds, **V. Kokilashvili** and **A.Meskhi**, Sobolev-type inequalities for potentials in grand variable exponent Lebesgue spaces, *Mathematische Nachrichten,* **292**(2019), No.10. 2174-2188. DOI: 10.1002/mana.201800239.
56. **V. Kokilashvili,** Ts. Tsanava, Angular trigonometric approximation in the framework of new scale of function spaces, Trans. A. Razmadze Math. Inst., **173**(2019), No 2, 133-136.
57. **V. Kokilashvili**, Ts. Tsanava, Trigonometric approximation by angle in classical weighted Lorentz spaces and grand Lorentz spaces, Trans. A. Razmadze Math. Inst., **173** (2019), no. 3, 163-166.
58. **V. Kokilashvili,** Approximation by trigonometric polynomials in the framework of weighted fully measurable grand Lorentz spaces, Trans. A.Razmadze Math. Inst., **173**(2019), No 3, 161-162.
59. **V. Kokilashvili,** On trigonometric approximation by angle of multivariable functions in weighted variable exponent mixed-norm Lebesgue spaces, Bulletin of the Georgian National Academy of Sci., **13**(2019), No 3, 7-11.
60. ***V. Kokilashvili,** Weighted grand Lebesgue spaces with mixed norms and integral operators, Dokl. RAN (in Russian), **489**(2019), No 4. Engl. Translation in: Doklady Mathematics, **100**(2019), No 3, 344-346.
61. **V. Kokilashvili and A. Meskhi,** Maximal and Calder\'on--Zygmund operators in weighted grand variable exponent Lebesgue spaces, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **173** (2019), no. 2, 127-131.
62. **L. Ephremidze**, E. Shargorodsky, and I. Spitkovsky, Quantitative results on continuity of the spectral factorization mapping, *J. Lond. Math. Soc*. (2) (2019), Volume 101, Issue1, 60-81.
63. **L. Ephremidze**, N. Salia, and I. Spitkovsky, On a parametrization of non-compact wavelet matrices by Wiener-Hopf factorization, Trans. A.Razmadze Math. Inst., vol. **173**(2019), №3, 31-36.
64. **Sh. Tetunashvili**. Periodically mixed series and approximations of multivariate functions, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* **173**(2019), No 3, 173-176.
65. **Sh. Tetunashvili** and T. Tetunashvili. Fubini's type phenomenon for convergent in Pringsheim sense multiple function series, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* **173** (2019), No 3, 177-178.
66. **Sh. Tetunashvili** and T. Tetunashvili. On Cantor's Λ functionals and the reconstruction of coefficients of multiple function series, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, **173** (2019), No 2, 169-172.
67. **Sh. Tetunashvili** and T. Tetunashvili. On criteria of convergence in measure of a sequence of functions, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* **173** (2019), no. 2, 173-174.
68. ***Sh. Tetunashvili**. Universal series and subsequences of functions. (Russian); *translated from Mat. Sb.* **209**(2018), No 10, 89-125; *Sb. Math.* **209**(2018), No 10, 1498-1532, Steklov Mathematical Institute of Russian, https://doi.org/10.1070/SM8965
69. ***A.Meskhi,** H. Rafeiro and M. A. Zaighum, Central Calderon-Zygmund operators on Herz type Hardy spaces of variable smoothness and integrability, *Annals of Functional Analysis*, **9**(2018), No.3, 310-321. http://dx.doi.org/10.1215/20088752-2017-0030.
70. ***** D. E. Edmunds **and A.Meskhi,** On the Rellich inequality in $L^{p(x)}$ spaces, *Georgian Mathematical*

Journal, **25**(2018), No. 2, 207–216, **DOI:** https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0024.

71. *** V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, One-sided operators in grand variable exponent Lebesgue spaces, *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen,* **37**(2018), No.3, 251-375. DOI: 10.4171/ZAA/1614.
72. *** V. Kokilashvili, A.Meskhi** and M. A. Zaighum Sharp weighted bounds for fractional integrals via the two-weight theory, *Banach Journal of Mathematical Analysis,* **12** (2018), No. 3, 673-692, doi:10.1215/17358787-2017-0063.
73. *** V. Kokilashvili and A. Meskhi**, Extrapolation results in grand Lebesgue spaces defined on product sets, *Positivity,* **22**(2018), No.4, 1143-1163, DOI: https://doi.org/10.1007/s11117-018-0564-7.
74. ***A.Meskhi,** H. Rafeiro and M. A. Zaighum, Interpolation of an analytic family of operators on variable exponent Morrey spaces, *Hiroshima Mathematical Journal*, **48**(2018), No.3, 335-346 https://projecteuclid.org/all/euclid.hmj .
75. ***A. Meskhi** and Y. Sawano, Density, Duality and preduality in grand variable exponent Lebesgue and Morrey spaces *Mediterranean Journal of Mathematics, Mediterr. J. Math.* **15,** 100 (2018), https://doi.org/10.1007/s00009-018-1145-5.
76. *** V. Kokilashvili** and **A. Meskhi**, Extrapolation in grand Lebesgue spaces with A_∞ weights (Russian) *Mat. Zametki*, **104**(2018), No.4, 539–551, English Translation: *Math. Notes,* **104**(2018), No. 4, 518–529.

დანართი 2

II ქვეთემით (აბსტრაქტული ანალიზი, ზომის თეორია) 2019-2023 წლებში გამოქვეყნებული შრომების სია

77. M. Beriashvili, M. Khachidze and **A. Kirtadze.** Absolutely negligible sets and their algebraic sums, **177**(2023), no. 1, 131-133.
78. **A. Kharazishvili,** On some version of random variables, *Trans A. Razmadze Math*. Inst. **177**(2023), no. 1, 143-146.
79. **A. Kirtadze**, The method of almost surjective homomorphisms and the relative measurability of functions, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.,* 176 (2022), no. 1, 143-145.
80. **A. Kharazishvili**. An abstract version of sup-measurability, *Trans. of A. Razmadze Math. Inst.*, 176(2022), no. 1, 135-138.
81. **A. Kharazishvili**. Mazurkiewicz sets of universal measure zero, *Trans. of A. Razmadze Math. Inst.*, 176(2022), no. 1, 139-141.
82. **A. Kharazishvili**. Sierpinski-Zygmund functions and omega-powers, *Trans. of A. Razmadze Math. Inst.*, 176(2022), no. 2, 281-284.
83. ***A. Kharazishvili**. On a geometric statement of Ramsey type, *Georgian Math. J.*, 29(2022), n. 2, 229-232.
84. ***A. Kharazishvili**. On rainbow isosceles n-simplexes, *Georgian Math. J.*, 29(2022), n. 4, 543-549.
85. **A. KharaziShvili**, On oscillations of real-valued functions, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **175**(2021), No 1, 63-67.
86. **A. Kharazishvili**, On the generalized non-measurability of some classical point sets, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **175**(2021), No 1, 151-153.
87. **A. Kharazishvili**, On non-measurable uniform subsets of the Euclidean plane, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **175**(2021), No 2, 285-286.
88. **A. Kharazishvili**, On T_2-negligible S_2-absolutely non-measurable sets in the Euclidean plane, *Bulletin of TICMI,* **25**(2021), No 1, 77-81.
89. ***A. Kharazishvili**, On the generalized non-measurability of Vitali sets and Bernstein sets, *Georgian Math. J.*, **28**(2021), No 4, 575-579.
90. **A. Kirtadze.** On uniform distribution for invariant extensions of the lebesgue measure, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **175**(2021), No 3, 391-400.

91. *A. Kharazishvili. On finite sums of periodic functions. *Georgian Math. J.,* **27**(2020), No 2, 265-269.
92. *A. Kharazishvili. Some remarks on Sierpinski-Zygmund functions in the strong sense, *Georgian Math. J.,* **27**(2020), No 4, 569-575.
93. A. Kharazishvili. A measure zero set in the plane with absolutely nonmeasurable linear sections. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, **174**(2020), No 3, 359-362.
94. A. Kirtadze, A. Khachidze. The strong uniqueness property of invariant measures in infinite dimensional topological vector spaces, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, **174**(2020), No 1, 117-119.
95. A. Kirtadze and T. Kasrashvili. On some extensions of volume type functionals on the space $\mathbf{R}^n$, which are invariant (quasi-invariant) with respect to various groups of transformations of $\mathbf{R}^n$, Journal of Geometry **111**(2020), Issue 2.
96. A. Kharazishvili. On (n+1)-colorings of the n-space and associated isosceles simplexes, *Journal of Geometry* **111**(2020), Issue 2.
97. A. Kharazishvili, On projective functions with bad measurability properties, Bulletin of TICMI, **23**(2019), No 1, 77–81.
98. A. Kharazishvili, On some applications of almost invariant sets, Bulletin of TICMI, **23**(2019), No 2, 115–124.
99. A. Kharazishvili, On the Steinhaus property and ergodicity via the measure-theoretic density of sets, Real Analysis Exchange, v. 44(2019), No 1, 217-228.
100. *A. Kharazishvili, On orbits without the Baire property, *Georgian Math. J.*, **26**(2019), No 4, 625-628.
101. *A. Kirtadze, On Kharazishvili's type measures in infinite-dimensional Polish vector spaces, *Georgian Math. J.*, **26**(2019), No. 4, 537-543.

დანართი 3

თანამშრომლობა უცხოეთის სამეცნიერო ცენტრებთან

პროექტის მონაწილეთა მიერ საერთაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობის მაღალ ხარისხს ადასტურებს შემდეგი მაგალითები: ა. მესხი მრავალი წლის მანძილზე თანამშრომლობს ფუნქციონალური ანალიზის მსოფლიოში აღიარებულ ექსპერტთან დ. ედმუნდსთან (სასექსის უნივერსიტეტი, დიდი ბრიტანეთი). მათ გამოაქვეყნეს ვ. კოკილაშვილთან ერთად) ერთობლივი მონოგრაფია Kluwer-ის გამომცემლობაში 2022 წელს და მთელი რიგი ერთობლივი სტატია მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში. ბოლო 5 წელიწადში მათ გამოქვეყნებული აქვთ 6 ერთობლივი სამეცნიერო სტატია მაღალავტორიტეტულ ჟურნალებში. ა. მესხი თანამშრომლობს მისურის (აშშ) უნივერსიტეტის პროფესორთან ლ. გრაფაკოსთან. მათ გამოქვეყნებული აქვთ 2 ერთობლივი სამეცნიერო სტატია. აღსანიშნავია ა. მესხის ერთობლივი კვლევები შესაბამისი დარგის ცნობილ ექსპერტთან პროფესორ ფიორენცასთან (ნეაპოლი, ფედერიკო II უნივერსიტეტი). მათ გამოაქვეყნეს ორი ერთობლივი სტატია მაღალავტორიტეტულ საერთაშორისო ჟურნალებში. ა. მესხი თანამშრომლობს სან-დიეგოს უნივერსიტეტის (აშშ) პროფესორ ჯ. ჯილესთან. მათ გამოაქვეყნებული ერთობლივი სტატია. 20 წელზე მეტია ა. მესხი თანამშრომლობს პროფესორ ს. სამკოსთან (პორტუგალია, ალგარვეს უნივერსიტეტი) და ჰ. რაფეიროსთან (ალ აინი, არაბთა გაერთიანებული საემიროების უნივერსიტეტი). 2016 წელს მათ ვ. კოკილაშვილთან თანაავტორობით Birkhäuser-Springer-ის გამომცემლობაში გამოაქვეყნეს ერთობლივი მონოგრაფია ორ ტომად 1000-ზე მეტი გვერდის მოცულობით. ა. მესხი ხანგრძლივი დროის განმავლობაში თანამშრომლობს პროფესორ მ. მასტილოსთან (პოზნანის უნივერსიტეტი, პოლონეთი). მათ შეასრულეს არაერთი ერთობლივი

პროექტი და გამოაქვეყნეს 12 სტატია ისეთ მაღალავტორიტეტულ ჟურნალებში, როგორიცაა J. Funtional Analysis, Nonlinear Analysis, J. Geometric Analysis, Frac. Calculus Appl. Anal., J. Math. Ana. Appl. და ა.შ. ა. მესხმა ლ. ე. პერსონთან (ლულეოს უნივერსიტეტი, შვედეთი) და ვ. კოკილაშვილთან ერთად გამოაქვეყნა ერთობლივი მონოგრაფია. ა. მესხი თანამშრომლობს ჩუოს უნივერსიტეტის (იაპონია) პროფესორთან ი. სავანოსთან. მათ გამოქვეყნებული აქვთ ერთობლივი სტატია. ა. მესხი და გ. იმერლიშვილი ინტენსიურად თანამშრომლობს პეკინის (ჩინეთი) ნორმალური უნივერსიტეტის პროფესორთან ქ. შუესთან. მათ უკვე გამოაქვეყნეს 2 ერთობლივი სამეცნიერო სტატია. ასევე, ა. მესხს გაფორმებული აქვს ხელშეკრულება პეკინის ნორმალური უნივერსიტეტთან, რომლის მიხედვითაც ის აღნიშნული უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის პერიოდულად კითხულობს ლექციებს დოქტორანტებისათვის. ა. მესხს ინტენსიური თანამშრომლობა აქვს კატანიის (იტალია) უნივერსიტეტის პროფესორ მ. ა. რაგუზასთან, მათ გამოაქვეყნეს რამდენიმე ერთობლივი ნაშრომი.

შ. ტეტუნაშვილი ნაყოფიერად თანამშრომლობს პროფ. ეშთან (დეპოლის უნივერსიტეტი, ჩიკაგო, აშშ). მათ გამოქვეყნებული აქვთ ორი ერთობლივი სტატია ამერიკის მათემატიკური საზოგადოების შრომებში.

ლ. ეფრემიძე უკვე წლების მანძილზე ინტენსიურად თანამშრომლობს ნიუ-იორკის უნივერსიტეტის პროფესორ ი. სპიტკოვსკისთან (აბუ დაბის ფილიალში). მათ გამოქვეყნებული აქვთ 15 ერთობლივი სტატია და მიღებული აქვთ ერთი ამერიკული პატენტი.

ადგილობრივი თანამშრომლობის მაგალითებად შეგვიძლია მოვიყვანოთ ჯგუფის წევრების აქტიური მონაწილეობა ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების ფაკულტეტისა და ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის გაერთიანებულ სემინარზე.

<u>თემა 2:</u> ალგებრული ობიექტების ჰომოლოგიური, ჰომოტოპიური და კატეგორიული თვისებები

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ალგებრის განყოფილება.

მკვლევარები: ხვედრი ინასარიძე (თემის ხელმძღვანელი), თამარ დათუაშვილი, ნიკოლოზ ინასარიძე, ბაჩუკი მესაბლიშვილი, ემზარ ხმალაძე, დალი ზანგურაშვილი, ალექს პაჭკორია, გურამ დონაძე.

2.1. მეცნიერული კვლევის თემატიკა 2024 - 2028 წლებისათვის: ჰომოტოპიური ალგებრა, K-თეორია, ჯგუფების და ალგებრების (კო)ჰომოლოგია, არაკომუტაციური გეომეტრია, კატეგორიათა თეორია.

ალგებრის ყველა ეს დარგი ინტენსიურად ვითარდება მსოფლიოს წამყვან უნივერსიტეტებსა და მათემატიკურ ცენტრებში (საფრანგეთი, გერმანია, ამერიკის შეერთებული შტატები, ინგლისი, დანია, ესპანეთი, ჰოლანდია).

2.2. საკვლევი საკითხები:

1. ჩვენს მიერ შემოტანილი ჰომოლოგიური ალგებრის ახალი მიმართულების შემდგომი განხილვა, რომელსაც Γ- ჰომოლოგიური ალგებრა ეწოდება. კერძოდ გაგრძელდება სხვადასხვა კატეგორიებზე (მოდულების, ჯგუფების, რგოლების, ალგებრების) დისკრეტული Γ- ჯგუფის მოქმედების გამოკვლევა და შესაბამისი ექვივარიანტული ობიექტების თვისებების დადგენა (ხ.ინასარიძე).
2. გაგრძელდება მუშაობა კატეგორიული ჯგუფებისა და შესაბამისად c-ჯგუფების თეორიაში. სასურველია კატეგორიული ჯგუფების აღწერა ჩვენს მიერ განმარტებული cssc-ჯვერედინი მოდულების ტერმინებში.ეს გარკვეულ იმედს იძლევა დავადგინოთ კატეგორიული ჯგუფების ზოგიერთი თვისება, როგორც ეს მოხდა შინაგანი კატეგორიების შემთხვევაში. შემდეგი მიმართულებაა თავის თავზე მოქმედი ანუ თვითმოქმედი ჯგუფების თეორია.ეს ობიექტები ჩემს მიერ იყო განმარტებული და განვითარებული შესაბამისი თეორია, რამაც გადამწყვეტი როლი შეასრულა ფრანგი მათემატიკოსის (სტრასბურგის უნივერსიტეტი) პროფესორ ჯ.ლ. ლოდეის ორი პრობლემის ამოხსნაში. სასურველია და საინტერესო აიგოს ლაიბნიცის ალგებრა თვითმოქმედი ჯგუფის საშუალებით როგორც ეს მოხდა ჯგუფისა და ჯგუფური რგოლის კარგად ცნობილ შემთხვევაში. ჩემს მიერ ადრე იყო მიღებული გარკვეული შედეგები ამ მიმართულებით რაც მოითხოვს სრულყოფას და განვითარებას. (თ.დათუაშვილი).
3. ჯგუფების და ალგებრების არააბელური ტენზორული ნამრავლების და ჰომოლოგიების შესწავლა კომპიუტერული ალგებრის მეთოდებით; კრიპოტოგრაფიული ცალმხრივი ჯგუფური და რგოლური ჰომომორფიზმების შესწავლა და გამოყენება სხვადასხვა კრიპტოგრაფიული პროტოკოლების აგებისათვის, კერძოდ ცალმხრივი ჯვარედინი მოდულები. ჯგუფები და გრაფები ნეირონულ ქსელებში (ნ.ინასარიძე).
4. ალგებრული სტრუქტურების ფაქტორიზაციის პრობლემის ერთიანი კატეგორიული მიდგომის შემუშავება, რომელიც მდგომარეობს სხვადასხვა ალგებრული სტრუქტურების ფაქტორიზაციის პრობლემების შესასწავლი საერთო საფუძვლის მონახვაში. (ბ.მესაბლიშვილი).
5. ჯვარედინა მოდულებისთვის ჰომოტოპიურად ინვარიანტული ცენტრის აგება ასოციური, ლაიბნიცის, ლი-რაინჰარტის და სხვა ალგებრებისთვის. ჯვარედინა მოდულების სხვადასხვა კოჰომოლოგიების შედარება. ჯვარედინა მოდულებისთვის ჰომოტოპიურად ინვარიანტული ცენტრის გამოთვლა. ჯვარედინა მოდულების (კო)ჰომოლოგიების ზუსტი მიმდევრობები დაბალ განზომილებებში. ჯვარედინა მოდულების ლაიბნიცის და ციკლური ჰომოლოგიების შედარება. შეზღუდული ლაიბნიცის ალგებრების არააბელიური ტენზორული ნამრავლი და დაბალგანზომილებიანი ჰომოლოგია. ლის სამეულის სისტემებისა და n-ური ლაიბნიცის ალგებრების (კო)ჰომოლოგია. (ე.ხმალაძე).
6. ტერმების გადაწერის გაღრმავებული მეთოდების გამოყენებით შესწავლილი იქნება უნივერსალური ალგებრების მრავალნაირობებში ეფექტური კოდაწევის მორფიზმების დახასიათების საკითხი. მიღებული შედეგები გადატანილი იქნება ტოპოლოგიური ალგებრების

შემთხვევაზე. შესწავლილი იქნება მარცხნიდან მემკვიდრეობითი QF-3^{+} რგოლები გრეხვის თეორიის ჭრილში (დ.ზანგურაშვილი).

7. გამოვიკვლევთ ნახევრადმოდულების შრაიერის ტიპის მოკლე ზუსტ მიმდევრობებთან ასოცირებული ჰომოლოგიის და კოჰომოლოგიის მონოიდების გრძელი მიმდევრობების სიზუსტის საკითხს. განვმარტავთ და შევისწავლით სასრული ჯგუფის ტეიტის კოჰომოლოგიის მონოიდებს კოეფიციენტებით ნახევრადმოდულებში. გარდა ამისა, გავაგრძელებთ აბელის ჯგუფების ნახევრადმესერების საშუალებით ჯგუფების გაფართოებების შესწავლას (ა. პაჭკორია).
8. ლის ალგებრების ჯვარედინი მოდულების კოჰომოლოგიები. შერისა და ბერის თეორემები ლის და ლეიბნიცის ალგებრებისთვის. n-შთანმთქმნელი იდეალების თვისებები. პრუფერის რგოლების სუსტი გლობალური განზომილებები. ნეიმანის თეორემის განზოგადოება სხვადასხვა ტიპის ალგებრებისთვის. (გ. დონაძე).

მიმართულების ხელმძღვანელი ხ.ინასარიძე არის რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის ალგებრის განყოფილების გამგე და საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი. გარდა ამისა, ის ხელმძღვანელობს არასამთავრობო, აკადემიურ ორგანიზაციას “თბილისის მათემატიკური მეცნიერებების ცენტრი“ (http://www.tcms.org.ge), რომელსაც გააჩნია ორი საერთაშორისო მნიშვნელობის მათემატიკური ჟურნალი „Journal of Homotopy and Related Structures“ და “Advanced Studies: Euro-Tbilisi Matematical Journal”, რომელთაგან პირველს გააჩნია იმპაქტ ფაქტორი, მეორე კი მიიღებს მას ამ წლის ივნისის ბოლოს და რომელთა მთავარი რედაქტორია ხ.ინასარიძე. პირველი მათგანი იბეჭდება Springer - ის მიერ (Germany), ხოლო მეორე Project Euclid Publishers of Cornell University Library and Duke University Press-ის მიერ (USA).

ხ. ინასარიძე არის მსოფლიოში აღიარებული პირველი ხარისხის ექსპერტი ჰომოლოგიურ ალგებრასა და K-თეორიაში. მას მიღებული აქვს ფუნდამენტური შედეგები ამ დარგებში. სახელდობრ, მის მიერ განისაზღვრა სავსებით რეგულარული სივრცის სასრული რიგის გაფართოება და სასრული რიგის ნაზრდი. ამან შემდგომში წარმოშვა სივრცის ახალი განზომილების ფუნქცია და გარდა ამისა მიღებულ იქნა კომპაქტური და ლოკალურად კომპაქტური სივრცეების მნიშვნელოვანი განზოგადება. აიგო ფუნქტორების სატელიტების თეორია ზოგად კატეგორიებში. განისაზღვრა პროექციული კლასების მიმართ ფუნქტორის არააბელური წარმოებული ფუნქტორები. ამასთან დაკავშირებით საჭირო გახდა სიმპლიციური სიმრავლის ცნების განზოგადება და ფსევდოსიმპლიციური სიმრავლეების შემოტანა და გამოყენება. GL ფუნქტორის არააბელური წარმოებული ფუნქტორების საშუალებით დახასიათდა ალგებრული და ტოპოლოგიური K-თეორიები. უარყოფით განზომილებებში აიგო არატრივიალური სარულ კოეფიციენტებიანი ალგებრული K-ჯგუფები, რომლებიც ბუნებრივად აგრძელებენ ქუილენის K-თეორიას. აიგო ჯგუფების ექვივარიანტული ჰომოლოგიისა და კოჰომოლოგიის თეორია. მისი საშუალებით დამტკიცდა უერთეულო რგოლებისათვის მილნორის ფორმულა, რომელიც აკავშირებს მილნორის მეორე K_2 ალგებრულ K-ფუნქტორს ელემენტარული ჯგუფის მეორე ინტეგრალურ ჰომოლოგიასთან და რომლის დროსაც გამოყენებულ იქნა სტეაინბერგის ჯგუფის მოქმედება. გარდა ამისა, ექვივარიანტული ინტეგრალური ჰომოლოგიისათვის მიღებულ იქნა მაღალი რიგის ჰოპფის ფორმულები (ე.ხმალაძესთან ერთად). აიგო ნორმირებული ალგებრების K-თეორია ქვილენის კონსტრუქციის გამოყენებით. რამაც გააერთიანა ალგებრული და ტოპოლოგიური K- თეორიები ერთ K-თეორიად. აიგო არატრივიალური სასრულ კოეფიციენტებიანი უარყოფითი ალგებრული K-ჯგუფები, რომლებიც გადაება არსებულ სასრულ კოეფიციენტებიან დადებით ალგებრულ K-ჯგუფებს გრძელი ზუსტი მიმდევრობის სახით. ლოკალურად ამოზნექილი ალგებრებისათვის დამტკიცდა კარუბის ჰიპოტეზა ალგებრული და ტოპოლოგიური K-ჯგუფების იზომორფიზმის შესახებ. ამისათვის საჭირო შეიქმნა (თ.კანდელაკთან ერთად) ახალი უფრო ფაქიზი ტოპოლოგიური ინვარიანტის შემოტანა ვიდრე არის ტოპოლოგიური K-თეორია, მას გლუვი K-თეორია ეწოდა და ნაჩვენები იქნა, რომ ალგებრული და გლუვი K-ჯგუფები ერთმანეთის იზომორფულია კვაზი სტაბილური ლოკალურად ამოზნექილი ალგებრების ფართო კლასისათვის, რომელიც შეიცავს ზევრ მნიშვნელოვან ფუნქციონალურ ალგებრებს. (თ.კანდელაკთან

ერთად) განიმარტა ახლებურად რაციონალური ბივარიანტული K-ჯგუფები და აიგო ბივარიანტული K-თეორიის გრეხვის ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს სასრულ კოეფიციენტებიანი ბივარიანრული K-ჯგუფების პირდაპირ ზღვარს. გარდა ამისა ამ ჯგუფების დაკავშირება ბივარიანტულ K-ჯგუფებთან მოხდა გრძელი ზუსტი მიმდევრობის სახით, რომელიც შემდგომში განზოგადდა ტრიანგულირებადი კატეგორისათვის ლოკალიზაციის და კოლოკალიზაციის გრძელი ზუსტი მიმდევრობის სახით. დამტკიცდა რომ საკუთრივად უნიფორმულად შემოსაზღვრული აპროქსიმაციული ერთეულის მქონე სტაბილურ ფრეშეს ალგებრებს გააჩნიათ K-რეგულარობის თვისება.

ეს არის ჯგუფების ჰომოლოგიური თვისებების შემდგომი გამოკვლევა, როდესაც მათზე მოქმედებს რაიმე ფიქსირებული დისკრეტული Γ ჯგუფი, განსაკუთრებით Γ-ეკვივარიანტული ჰომოლოგიისა და კოჰომოლოგიის გამოყენებით. ამ ახალ მიმართულებას ვუწოდეთ Γ-ჰომოლოგიური ალგებრა, ხოლო მისი კვლევის საბაზისო ობიექტებს Γ-ჯგუფები და Γ-რგოლები. გამოკვლეულია Γ-ჯგუფების როგორც აბელური ასევე არააბელური გაფართოებები. აგებულია უნივერსალური Γ-ცენტრალური გაფართოება სრულყოფილი Γ-ჯგუფისთვის და შესაბამისი ჰოპფის ფორმულა. აგებულია Γ-ეკვივარიანტული ჰოხშილდის ჰომოლოგია, როგორც ჰომოლოგია ჰოხშილდის კომპლექსის, რომელზეც მოქმედებს ჯგუფი Γ ინდუცირებული მისი მოქმედებით საბაზისო რგოლზე. დამყარებულია მისი კავშირი კელერის დიფერენციალებთან, მორიტა ექვივალენტობასთან და წარმოებულ ფუნქტორებთან. მიღებულია გამოყენებები ალგებრულ K-თეორიაში, კერძოდ ალგებრული K-ფუნქტორების აგებით Γ-რგოლებითვის, გალუას თეორიაში, ჯგუფის განზომილების თეორიაში, და აგრეთვე მილნორის ალგებრულ K-თეორიაში.

ხ. ინასარიზის პუბლიკაციები

მონოგრაფიები:

წლები	
1995	Algebraic K-theory, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 440 pages.
1997	Non-Abelian Homological Algebra and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 270 pages.

თემატიკასთან დაკავშირებული ძირითადი სტატიები:

წლები	
1965	Universal functors, *Bull. Georgian Acad. Sci. 38, No3 (in Russian).*
1965	Extensions of regular semigroups, *Bull. Georgian Acad. Sci. 39, No1 (in Russian).*
1969	Alexander-Kolmogorov cohomology with coefficients in commutative inverse semigroups, *Bull. Georgian Acad. Sci. 54, No2 (in Russian).*
1972	Exact homology and linking for Steenrod duality, *Doklady Acad. Nauk USSR 206, No1 (in Russian).*
1972	On exact homology, *Proc. A.Razmadze Math. Institute, 41 (in Russian).*
1974	Exact homology and Tate cohomology of locally compact zerodimensional groups, *Bull. Georgian Acad. Sci. 74, No1 (in Russian)*
1975	On algebraic K-functors, *Bull. Georgian Acad. Sci. 77, No1 (in Russian).*
1975	Generalization of Milnor sequence for inverse limits, *Bull. Georgian Acad. Sci. 79, No1 (in Russian).*
1975	Homotopy of pseudosimplicial groups, nonabelian derived functors and algebraic K-theory, *Matem. Sbornik 98, No3, 339 – 362.*
1975	Some topics of homological and homotopical algebra and their applications, *Proc. A.Razmadze Math. Institute 48, 140 pages (in Russian).*
1983	On Swan-Gersten K-functor K3, *Bull. Georgian Acad. Sci. 111, No3, 29-31 (in Russian).*
1985	K-theory of special normed algebras, *Uspehi Mat. Nauk 40, No4, 169-170.*
1990	K-theory of special normed rings, *Lecture Notes in Math., Springer verlag, 1437, 95 -156.*

1997	Nonabelian cohomology of groups, *Georgian Math. J. 4, No4, 313 - 332.*
1997	Nonabelian cohomology with coefficients in crossed bimodules , *Georgian Math. J. 4, No6, 509 - 522.*
1997	Universal property of Kasparov bivariant K-theory, *Bull. Georgian Acad. Sci. 156, No2 , 185 - 189.*
1998	*(with N.Inassaridze)* New descriptions of the nonabelian homology of groups, *Bull. Georgian Acad. Sci. 157, No2, 196 - 200.*
1998	*(with N.Inassaridze)* The second and the third nonabelian homology of groups, *Bull. Georgian Acad. Sci. 158, No3 (1998).*
1999	*(with N.Inassaridze)* Nonabelian homology of groups, *K-Theory J. 378, 1-17.*
2000	Algebraic K-theory of normed algebras, *K-Theory 21, No 1, 25-56.*
2001	(with D.Conduché and N.Inassaridze) Mod q cohomology and Tate cohomology of groups, *Prepublication 01-29, Institute de Recherche Mathematique de Rennes.*
2001	(with A.Garzon) Semidirect products of categorical groups. Obstruction theory and derivations, *Homology, Homotopy and Applications 3 (1), 111-138.*
2002	Higher nonabelian cohomology of groups, *Glasgow Math. J. 44, 497-520.*
2002	(with T.Kandelaki) K-theory of stable generalized operator algebras , *K-Theory 27, 103-110.*
2004	(with D.Conduché and N.Inassaridze) Mod q cohomology and Tate-Vogel cohomology of groups, *J. Pure Appl. Algebra 189, 61-87.*
2004	(with A.M.Cegarra) Homology of groups with operators, *Intern. Math. J. 5 (1), 29-48.*
2005	More about (co)homology of groups and associative algebras, *Homology, Homotopy and Applications 7 (1), 87-108.*
2005	Equivariant homology and cohomology of groups, *Topology and its Applications 153, 66-89.*
2005	(with D.Arlettaz) Finite K-theory spaces, *Proc. Cambridge Phil. Soc. 139, 261-286.*
2006	(with T.Kandelaki) Smooth K-theory of locally convex algebras, *preprint), arXiv: math.KT/0603095.*
2008	(with T.Kandelaki) La conjecture de Karoubi pour la K-theorie lisse, *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 346, 1129-1132.*
2010	(with E.Khmaladze) Hopf formulas for the equivariant integral homology of groups, *Proc. Amer. Math. Soc. 138 (9), 3037-3046.*
2011	(with T.Kandelaki) Smooth K-theory of locally convex algebras, Communications in Contemporary Mathematics 13 (4), 553-577.
2011	(with T.Kandelaki and R.Meyer) Localisation and colocalisation of KK-theory at sets of primes, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg, 81 (1) 19-34 .*
2012	(with T.Kandelaki and R.Meyer) Localisation and colocalisation of triangulated categories at thick subcategories, Mathematica Scandinavica, *110, 59-74.*
2015	Smooth K-groups for monoid algebras and K-regularity, Mathematics 2015, 3(3), 891-896, doi: 10. 3390/math.3030891.
2016	K-regularity of locally convex algebras, *Journal of Homotopy and Related Structures, Springer Verlag,* 11 (4), 869-884.
2020	Extensions and (co)homology of gamma-groups, arXi: 2006.02083
2022	(CO)HOMOLOGY OF Γ-GROUPS AND Γ-HOMOLOGICAL ALGEBRA, *European Journal of Mathematics,* 2022) 8 (Suppl 2): S720–S763.
2023	Algebraic K-functors for Γ-rings, *European Journal of Mathematics, submitted.*

ხ.ინასარიძეს მიღებული აქვს

1998 წელს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის რაზმაძის სახელობის პრემია

1999 წელს ირანის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიის საერთაშორისო ხორიზმის სახელობის პირველი პრემია

თ. დათუაშვილმა მიიღო რგოლის ბიმოდულის საშუალებით ტრივიალური წრფივი ტოპოლოგიური გაფართოების გლობალური ჰომოლოგიური განზომილების ფორმულა, როცა ბიმოდული არის ტოპოლოგიურად კოჰერენტული მარცხენა მოდული. ამ შედეგის გამოყენებით მან აღწერა გროთენდიკის კატეგორიათა სტაბილური გაფართოებების Ebტ ფუნქტორი და მიიღო გაფართოების კატეგორიის გლობალური ჰომოლოგიური განზომილების ფორმულა. გარკვეულ შეზღუდვებში შეაფასა რგოლის ბიმოდულის საშუალებით არატრივიალური გაფართოების გლობალური ჰომოლოგიური განზომილება. ამ შედეგებით თ.დათუაშვილმა ბუნებრივ პირობებში დადებითი პასუხი გასცა ი. პალმერისა და ი.-ე. რუსის (სტოკჰოლმი,შვედეთი) მიერ დასმულ ორ პრობლემას. მან აგრეთვე განმარტა აბელური კატეგორიის ფუნქტორით არატრივიალური გაფართოება, მიიღო გლობალური განზომილების ფორმულა, და ამასთან გლობალური განზომილების შეფასება, რითაც არსებითად განაზოგადა უცხოელი მათემატიკოსების შედეგები. მან განავითარა შინაგანი კატეგორიათა თეორიის საკითხები ოპერატორებიან ჯგუფთა კატეგორიაში და ასეთი შინაგანი კატეგორიების კოჰომოლოგიის თეორია. მან სრულად აღწერა კოჰომოლოგიის შესაბამისი კომპლექსი, გამოთვალა კოჰომოლოგიის ჯგუფები, დაახასიათა კოჰომოლოგიურად ტრივიალური შინაგანი კატეგორიები, მიიღო შინაგანი კანის გაფართოების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რაც ჩვეულებრივი კატეგორიებისთვის საზოგადოდ არ გვაქვს. თ.დათუაშვილმა განავითარა შინაგანი კატეგორიათა თეორიის საკითხები ოპერატორებიან ჯგუფთა კატეგორიაში და ასეთი შინაგანი კატეგორიების კოჰომოლოგიის თეორია. მან სრულად აღწერა კოჰომოლოგიის შესაბამისი კომპლექსი, გამოთვალა კოჰომოლოგიის ჯგუფები, დაახასიათა კოჰომოლოგიურად ტრივიალური შინაგანი კატეგორიები, მიიღო შინაგანი კანის გაფართოების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რაც ჩვეულებრივი კატეგორიებისთვის საზოგადოდ არ გვაქვს.

თ. დათუაშვილის მიერ ესპანელ მათემატიკოსებთან ხ.-მ. კაზასთან და მ. ლადრასთან ერთად შესწავლილია მოქმედების საკითხი ინტერესის კატეგორიებში. ასეთი კატეგორიის ნებისმიერი A ობიექტისთვის მათ შემოიტანეს უნივერსალური მკაცრი ზოგადი ექთორის (USGA(A)) და ექთორის ცნებები. უკანასკნელი ექვივალენტურია გახლეჩად გაფართოებათა მაკლასიფიცირებელი ობიექტის ცნებისა, რომელიც განმარტებული იყო ფრ. ბორსეუს, გ. ჯანელიძისა და გ.მ. კელის მიერ იმავე პერიოდში უფრო ზოგადი ტიპის კატეგორიის შემთხვევაში. მიღებულია ინტერესის კატეგორიაში ნებისმიერი A ობიექტის ექთორის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა U USGA(A)--ისUტერმინებში. მიღებულია USGA(A)-ის კონსტრუქცია და დადგენილია მისი თვისებები. მიღებული იქნა ექთორის კონსტრუქცია წინაჯვარედინი მოდულების კატეგორიაში და ექთორის არსებობის საკმარისი პირობა ალტერნაციული ალგებრების კატეგორიაში და შესაბამისი კონსტრუქცია. კაზასისა და დათუაშვილის მიერ შესწავლილია არაკომუტაციური ლაიბნიც-პუასონის ალგებრები (NLP-ალგებრები). მათ მოგვცეს თავისუფალი NLP-ალგებრების კონსტრუქცია, განმარტეს NLP-ალგებრების კოჰომოლოგია, შეისწავლეს მისი თვისებები, მისი კავშირი ცნობილ ჰოხშილდისა და Lლაიბნიცის კოჰომოლოგიებთან. Mეს კოჰომოლოგია კერძო შენთხვევაში იძლევა კლასიკური პუასონის ალგებრების ახალ კოჰომოლოგიას. შემდგომში კაზასმა, დათუაშვილმა და ლადრამ განამრტეს და გამოიკვლიეს ორმხრივი (მარჯვენა-მარცხენა) არაკომუტაციური პუასონის ალგებრები და მათი კოჰომოლოგიები. თ.დათუაშვილის ორი შრომა ეძღვნება ორი პრობლემის ამოხსნას, რომელიც ფრანგმა მათემატიკოსმა ჯ.-ლ. ლოდემ მას პირადად დაუსვა, და რომელიც აგრეთვე ჩამოყალიბებულია ლოდეს შრომებში. პრობლემები ეხება ლაიბნიცის ალგებრებს, რომელიც გარკვეული აზრით განიხილება როგორც ლის ალგებრის არაკომუტაციური ანალოგი. ეს შედეგები და თავის თავზე მომქმედი ჯგუფების მიღებული თეორია იძლევა საფუძველს გამოვიყენოთ იგივე მიდგომა ლოდეს მესამე პრობლემის ამოსახსნელად, რომელიც გარკვეული აზრით გაგრძელებაა პირველი ორისა, და რომლის ამოხსნას ლოდეს აზრით მივყავართ რგოლის ლაიბნიცისK K-თეორიის ახალ ცნებამდე. თ.დათუაშვილისა და გერმანელი მათემატიკოსის ფ.უ. ბაუერის მიერ მათ ერთობლივ შრომებში შესწავლილი იქნა ჯაჭვური ფუნტორების Ch კატეგორიის ჰომოტოპიური და კატეგორიული თვისებები. ჯაჭვური ფუნქტორების ცნება შემოტანილი იყო ბაუერის მიერ და ასეთი

სახის კვლევა შემოთავაზებული იყო აგრეთვე მის მიერ. მათ განმარტეს ფიბრაციები, კოფიბრაციები და სუსტი ექვივალენტობები ამ კატეგორიაში, და დაამტკიცეს, რომ კმაყოფილდება დ. ქუილენის ჩაკეტილი მოდელ კატეგორიის CM2)-CM5) აქსიომები.

შემოტანილია მოდიფიცირებული ინტერესის კატეგორიის ცნება, მასში აგებულია უნივერსული მკაცრი ზოგადი ექტორი, რომლის ტერმინებში მიღებულია ექტორის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. ეს შედეგები გამოყენებულია ზოგიერთი ჯვარედინი მოდულების კატეგორიის შემთხვევაში, რომლებიც არ წარმოადგენენ ინტერესის კატეგორიას. მონახულია ალტერნაციულიალგებრების მაგალითები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჩემს მიერ ადრე მიღებული თეორემის პირობებს ექტორის არსებობის შესახებ. კერძოდ, განმარტებულია ალტერნაციული (შესაბამისად. g-ალტერნაციული) ალგებრის მარტივი იდეალი და სრულყოფილი ალტერნაციული ((შესაბამისად. g-ალტერნაციული) ალგებრა. მიღებულია ასეთი ალგებრების დამახასიათებელი თვისებები, რაც გამოყენებულია ალტერნაციული ალგებრების კატეგორიაში ექტორის არსებობის საკმარისი პირობების დასადგენად. განვითარებულია თვითმოქმედი ჯგუფების კოჰომოლოგიის თეორია. კოეფიციენტს წარმოადგენს ჩემს მიერ განმარტებული მოდული ასეთი სახის ჯგუფზე. აგებულია კომპლექსი იგივე იდეის მიხედვით, რომელიც წარმატებული იყო განზოგადებული ლაიბნიც - პუასონის ალგებრების შემთხვევაში. ასეთი კოჰომოლოგიები დაკავშირებულიაშესაბამისი ჯგუფების კოჰომოლოგიებთან და ახალი ობიექტების - თვითმოქმედი მაგმების კოჰომოლოგიებთან. შესწავლილია კოჰომოლოგიების სხვა თვისებებიც.

სულ უფრო სრულყოფილ სახეს იღებს შედეგები კატეგორიულ ჯგუფებსა და ჩემს მიერ შემოტანილ c -ჯვარედინ მოდულებს შორის. ასეთ ჯვარედინ მოდულებს საწყისი მისცა ჩემს მიერ განმარტებულმა და შესწავლილმა c-ჯგუფებმა, ეს ობიექტები წარმოადგენენ ჯგუფებს კონგრუ-ენტულობანდე სიზუსტით. სასურველი იყო შესაბამისი კონსტრუქციების მონახვა და კოჰერენტული კატეგორიული ჯგუფებისა და c -ჯვარედინინი მოდულების კატეგორიებს შორის ექვივალემტობის დამტკიცება. დადგინდა, რომ ზოგადად ამ კატეგორიებს შორის არ მყარდება ექვივალენტობა; გვაქვს ექვივალენტობა გარკვეული აზრით კონგრუენტულობამდე სიზუსტით. თურქ კოლეგებთან ერთად პროფესორები ო.მუჯუკი. ნ.ალემდარი (ერჯის უნივერსიტეტი) და თ.შაჰანი (აქსარაის უნივერსიტეტი) შევისწავლეთ კატეგორიული ჯგუფიდან მიღებული c -ჯვარედინი მოდულების თვისებები. შემოვიტანეთ ბმული, საგანგებო და მკაცრი c -ჯვარედინი მოდულების ცნებები და შესაბამისი აღნიშვნა cssc-ჯვერედინი მოდულები. რთული და საინტერესო აღმოჩნდა ასეთი სახის ჯვარედინი მოდულიდან კატეგორიული ჯგუფის აგება. მტკიცდება, რომ ეს კავშირები განსაზღვრავენ ფუნქტორებს შესაბამის კატეგორიებს შორის. იმედს ვიტოვებთ, რომ ეს ფუნქტორები მოგვცემენ ამ კატეგორიებს შორის ზუსტ ექვივალენტობას, კონგრუენტულობამდე სიზუსტის გარეშე.

პროფესორ თ. შაჰანთან ერთად დავიწყეთ ერთობლივი კვლევა მოქმედებების თეორიის მიმართულებით. ამჯერად ეს საკითხი განიხილება თვითმოქმედი ჯგუფების კატეგორიაში, რომელიც ჩემს მიერ იყო განმარტებული და გადამწყვეტი როლი შეასრულა ჟ.-ლ. ლოდეს პრობლემის ამოხსნაში. აქ პრობლემას წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ ეს კატეგორია არ წარმოადგენს ორზეხის აზრით ინტერესის კატეგორიას, სადაც ჩემს მიერ ესპანელ კოლეგებთან ერთად განვითარებული იყო მოქმედების თეორია და აგებული იყო უნივერსლური, მკაცრი, ზოგადი ექთორი. ეს კატეგორია არც პორტერის აზრით ოპერატორებიანი ჯგუფების კატეგორიაა, მაგრამ არის ომეგა-ჯგუფების კატეგორია კუროშის აზრით. განმარტებული და აღწერილია წარმოებული მოქმედებები თვითმოქმედი ჯგუფების კატეგორიაში. შემოტანილია დაყვანილი ობიექტის ცნება ამ კატეგორიაში, რომელიც ორ დამატებით პირობას აკმაყოფილებს. განხილულია ასეთი ობიექტების სრული ქვეკატეგორია ზემოთ აღნიშნულ კატეგორიაში. აღწერილია წარმოებული მოქმედების პირობები ამ კატეგორიაში. ეს კატეგორია არ არის ორზეხის აზრით ინტერესის კატეგორია, მაგრამ მას აქვს თვისებები იმის მსგავსი, რომელიც გამოყენებული იყო ინტერესის კატეგორიაში უნივერსული მკაცრი ზოგადი ექთორის კონსტრუქციაში. მიღებულია ნახევრად-პირდაპირი ნამრავლის კონსტრუქცია ორივე აღნიშნულ კატეგორიაში და ამ კონსტრუქციის ტერმინებში მიღებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა რომ მოქმედება იყოს წარმოებული მოქმედება ამ კატეგორიებში. მოყვანილია მაგალითები დაყვანილი თვითმოქმედი ჯგუფისა და წარმოებული მოქმედებისა ორივე კატეგორიაში. მიღებული შედეგები გამოიყენება მოქმედების წარმოდგენადობის

პრობლემის გადაწყვეტაში დაყვანილი თვითმოქმედი ჯგუფების კატეგორიაში. აღნიშნული შედეგები მიღებულია პროფესორ თ. შაჰანთან ერთად. წარმოდგენილია ახალი კატეგორიის მაგალითი, სადაც მოძებნილია ობიექტების თვისებები, რომლებიც გვაძლევს მოქმედების წარმოდგენადობის პრობლემის გადაწყვეტის საშუალებას. კერძოდ, ობიექტებს ასეთი თვისებებით აქვთ მოქმედების წარმოდგენადობის თვისება. ეს არის დაყვანილი თვითმოქმედი ჯგუფების კატეგორია. მოქმედებისა და წარმოდგენადობის ცნებები თანხვედრაშია ცნებებთან, რომელიც შემოტანილი იყო ნახევრად-აბელური კატეგორიების შემთხვევაში. განმარტებულია ფუნქციების ხუთეული პენტექშონ Pentact(A), გამამყარებლისა Stab(A) და სუსტი გამამყარებლის wStab(A) ცნებები ნებისმიერი დაყვანილი თვითმოქმედი A ჯგუფისთვის; აგრეთვე სრულყოფილი ობიექტის ცნება ამ კატეგორიაში. მოყვანილია მაგალითი ობიექტისა, რომელიც არის სრულყოფილი და დამატებითი თვისებით wStab (A)=0. დამტკიცებულია, რომ თუ ობიექტი არის სრულყოფილი და wStab (A)=0, მაშინ Pentact (A) არის დაყვანილი თვითმოქმედი ჯგუფი. განმარტებულია Pentact(A)-ის მოქმედება A-ზე და დამტკიცებულია, რომ თუ A აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ ორ პირობას, მაშინ ეს მოქმეება არის წარმოებული მოქმედება შესაბამის კატეგორიაში. დამტკიცებულია, რომ იგივე პირობებში A-ს აქვს წარმოდგენადი მოქმედება და Pentact(A) წარმოადგენს ყველა მოქმედებას A ობიექტზე.

თ. დათუაშვილის პუბლიკაციები:

1. On the cohomological dimension of categories, Bull. Georgian Acad. Sci., 88 (1977), No.1,17-20.
2. On the cohomology of categories, Proc. Math. Inst. Georgian Acad. Sci., LXII (1979), 28-37.
3. On Hilbert's theorems for polinomial extensions of additive categories, Abstracts of the talks of the VIII Conference of Georgian Mathematicians, Kutaisi, 1979, 58-59.
4. On the computation of the global homological dimension of certain linear topological matrix rings, Abstracts of the All-Union Symposium on the Theory of Rings, Algebras and Modules,1980, Kishenev (Moldavia).
5. On the global homological dimension of extensions of rings, Bull.Georgian Acad. Sci. 100 (1980), No. 2, 301-304.
6. On the global homological dimensions of trivial linear topological extensions of linear topological rings, Bull. Georgian Acad. Sci. 100 (1980), No.3, 537-540.
7. On the homological dimension of extensions of abelian categories and rings, Bull. Georgian Acad. Sci. 101 (1981), No.1, 37-40.
8. On the homological dimension of extensions of abelian categories, Proc. Math. Inst. Georgian Acad. Sci. LXX (1982), 24-41.
9. The global homological dimension of trivial linear topological extensions of rings, Proc. Math. Inst. Georgian Acad. Sci. LXXIV (1983), 26-38.
10. On the global dimension of the category of functors, Abstracts of the talks of the XI Conference of Georgian Mathematicians, Kutaisi, 1986.
11. Coherence of nontrivial extensions of abelian categories, Proc. Math. Inst. Georgian Acad. Sci. 91 (1988), 3-11.
12. Cohomology of internal categories in categories of groups with operations, in Categoprical Topology and its Relation to Analysis, Algebra and Combinatorics, Editors: J. Adamek and S. Mac Lane, Proc. Conf. Categorical Topology, Prague 1988, World Scientific, 1989, 270-283.
13. Homological dimension of extensions of abelian categories and rings, Lecture Notes in Math. 1437 (1990), 1-35.
14. Cohomologically trivial internal categories in categories of groups with operations, Applied Categorical Structures, 3 (1995), No.3, 221-237.
15. Whitehead homotopy equivalence and internal category equivalence of crossed modules in categories of groups with operations, Collected papers on K-theory and Categorical Algebra, Proc. A.Razmadze Math Inst. Acad.Sci. Georgia, 113 (1995), 3-30.
16. Kan extensions of internal functors.Algebraic approach, Georgian Mathematical Journal, 6 (1999), No.2, 127-148.

17. Categorical properties of Mac Lane – Whitehead constructions, Abstracts of the talks of the International Meeting in Category Theory, Como (Italy), 2000.
18. (with T.Pirashvili), On (Co)Homology of 2-types and crossed modules, J. Algebra, 244 (2001), 352-365.
19. Kan extensions of internal functors. Nonconnected case, J. Pure Appl. Algebra, 167 (2002), 195-202.
20. (with F.W.Bauer), Closed model category structures on the category of chain functors, Topology & its Applications, 131(2003),101-128.
21. Central series for groups with action and Leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 9(2002), No.4, 671-682.
22. Witt's theorem for groups with action and free Leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 11 (2004), No.4, 691-712.
23. (with F.W. Bauer) The existence of certain (co-) limits in the category of chain functors, Journal of Algebra and Its Applications, vol. 5, No. 4 (2006) 379-401.
24. (with J.M. Casas) Noncommutative Leibniz – Poisson algebras, Communications in Algebra, 34 (2006), No. 7, 2507-2530.
25. (with F.W. Bauer) Simplicial closed model category structures on the category of chain functors, Homology, Homotopy and its Applications, vol.9(1), (2007), 1-32.
26. (with J.M. Casas and M. Ladra) Actors in categories of interest arXiv: math/0702574v2[mathCT]
27. (with J.M. Casas and M. Ladra) Actor of a precrossed module, Communications in Algebra, vol. 37, 2009, 4516-4541.
28. (with J.M. Casas and M. Ladra) Universal strict general actors and actors in categories of interest, Applied Categorical Structures vol. 18, 2010, 85-114.
29. (with J.M. Casas and M. Ladra) Actor of a Lie--Leibniz algebra, to appear in Communications in Algebra, DOI 10.1080/0092. 7872.2011.644608.
30. (with J.M. Casas and M. Ladra), Actor of an alternative algebra arXiv.math/0910.0550v1[mathRA] 3 Oct 2009.
31. (with J.M. Casas, M. Ladra and E. Uslu) Actions in the category of precrossed modules in Lie algebras, Communications in algebra 40 (8) 2012, 1-21.
32. (with J.M. Casas and M. Ladra) Left-Right Noncommutative Poisson algebras, to appear in Central European Journal of Mathematics, (DOI) 10.2478/s11533-013-0321-x.
33. J. M. Casas, T. Datuashvili and M. Ladra, Actor of a Lie-Leibniz algebra, Communications in Algebra, 41 (4) (2013), 1570–1587, DOI 10.1080/0092. 7872.2011.644608.
34. J. M. Casas, T. Datuashvili and M. Ladra, Left-right Noncommutative Poisson algebras, Cent. Eur. J. Math 12 (1) (2014), 57–78. DOI:10.2478/s11533-013-0321-x.
35. Y. Boyaci, J.M. Casas, T. Datuashvili and E. O. Uslu, Actions in modified categories of interest with application to crossed modules, Theory and Applications of Categories, Vol. 30, No. 25, 2015, pp. 882–908.
36. T. Datuashvili, Categorical, Homological, and Homotopical Properties of Algebraic Objects, **monograph**, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 225, No. 3, 2017, pp. 383-533.
37. J.M. Casas, T. Datuiashvili and M. Ladra, Action theory in the category of alternative algebras, submitted for publication in Georgian Mathematical Journal.
38. T. Datuashvili, Ioseb Avalishvili, Terminology topics, Vol. III, 2018, 53-67, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Arnold Chikobava Institute of Linguistics, ISSN 1987-7633.
39. T. Datuashvili (with J.M. Casas and M. Ladra), Action theory of alternative algebras, Georgian Math. J. 2019; 26(2): 177–197, DOI: http://doi.org/10. 1515/gmj-2019-2015.
40. T. Datuashvili (with O. Mucuk, T. Sahan), Groups up to congruence relation and from categorical groups to cssc-crossed modules, Journal of homotopy and related structures,15(3-4): 625-640 DOI:10.1007/s40062-020—00270-4..
41. (with T.Sahan), Actions and semi-direct products in categories of groups with action, *Hacet. J. Math. Stat. (2023)*, https://doi.org/10.15672/hujms.1028848.

42. (with T.Sahan) Pentactions and action reprsentability in the category of reduced groups with action, *Georgian Mathematical Journal*, published online November 2022. https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2205

მზადდება გამოსაქვეყნებლად წიგნი

J.M. Casas, T, Datuashvili and M. Ladra Action representability and universal strict general actors in algebraic categories.

მზადდება გამოსაქვეყნებლად სტატიები

T. Datuashvili, N. Alemdar, O. Mucuk and T. Sahan, From cssc-crossed modules to categorical groups

T. Datuashvili, N. Alemdar, O. Mucuk and T. Sahan, Equivalence of the categories of categorical groups and cssc-crossed modules

თ. დათუაშვილი არის Turkish Journal of Mathematics რედაქტორი და რეფერი, აგრეთვე Georgian Mathematical Journal-ის, Ukrainian Mathematical Journal - ისა და Journal of Algebra and its Applications-ის რეფერი, ჟურნალის Zentralblatt MATH მიმოხილველი, თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ქართული მათემატიკური ტერმინების დამდგენი ჯგუფის წევრი.

ნ. ინასარიძე არის ექსპერტი ჰომოლოგიურ და ჰომოტოპიურ ალგებრასა და ციკლურ ჰომოლოგიაში. მან განავითარა ჯგუფების არააბელური ჰომოლოგიის თეორია და (ხ. ინასარიძესთან და ფრანგ მათემატიკოს კონდუშესთან ერთად) მოდ ქ (კო)ჰომოლოგიის თეორია, რომელსაც მნიშვნელოვანი გამოყენებები გააჩნია K-თეორიაში. ნ. ინასარიძემ (დონაძესთან და პორტერთან ერთად) განავითარა ზოგადი თეორია ნ-ჯერადი ჩეხის წარმოებული ფუნქტორებისა ფუნქტორებისათვის მნიშვნელობებით ჯგუფების კატეგორიაში. ამ თეორიის გამოყენებით მათ მიიღეს ახალი, წმინდა ალგებრული მეთოდი ჯგუფების მაღალი მთელკოეფიციენტებიანი ჰომოლოგიების კვლევისათვის, ჰოპფის ფორმულების (ბრაუნისა და ელისის აზრით) თვალსაზრისით და ამ ფორმულების შემდგომი განზოგადებები. მან (დონაძესთან და ლადრასთა ერთად) აღწერა ასოციური ალგებრების ციკლური, პერიოდული ციკლური და უარყოფითი ციკლური ჰომოლოგიები ნულმახასიათებლიან შემთხვევაში როგორც კოსამეულით წარმოებული ფუნქტორები და n-ჯერადი ჩეხის წარმოებული ფუნქტორების გამოყენებით მან მიიღო ჰოპფის ტიპის ფორმულები ციკლური ჰომოლოგიისათვის. მულტიპლიკაციური ლის რგოლების ჰომოლოგიის თეორიების და მულტიპლიკაციური ლის რგოლების ცენტრალური გაფართოებების შემოტანისა და კვლევისას მან (ზაკთან, დონაძესთან და ლადრასთან ერთად) აღწერა ნებისმიერი რგოლის სტეინბერგის მულტიპლიკაციური ლის რგოლი როგორც სტეინბერგის ჯგუფისა და სტეინბერგის ლის ალგებრის ნამრავლი. ნ. ინასარიძემ (ხმალაძესთან ერთად) ააგო ლის ალგებრების არააბელური (კო)ჰომოლოგიის თეორია, რომელსაც აქვს გამოყენებები ციკლურ ჰომოლოგიაში და კავშირი ლის ალგებრების გაფართოებებთან. მათ (კასასთან და ლადრასთან ერთად) გამოიკვლიეს ჰომოტოპიური (n+1)-ტიპების კოსამეულის ჰომოლოგია ჰოპფის ტიპის ფორმულების თვალსაზრისით. მათ (დონაძესთან და ლადრასთან ერთად) შეისწავლეს არაერთეულიანი ასოციური ალგებრების ჯვარედინი მოდულების ჰოხშილდის და (კოსამეულის) ციკლური ჰომოლოგიები, მიიღეს ჯვარედინი მოდულების ციკლური და კოსამეულის ციკლური ჰომოლოგიების შედარება ჰომოლოგიების გრძელი ზუსტი მიმდევრობის ტერმინებში, რომელიც ანზოგადებს ფარდობითი ციკლური ჰომოლოგიის ზუსტ მიმდევრობას. აგებულია ღია გასაღებზე შეთანხმების ახალი პროტოკოლი, რომელიც დაფუძნებულია ჯგუფების ჯვარედინ მოდულებზე. მიღებულია ზოგადი სქემის რამდენიმე პრაქტიკული გამოყენება. შემოთავაზებულია ცალმხრივი ფუნქციის ახალი კანდიდატი, რომელიც ამავე დროს არის რგოლური ჰომომორფიზმი. გამოყენების სახით აგებულია მრავალმხრივი ციფრული ხელმოწერის ახალი სქემა.

ნ. ინასარიძის პუბლიკაციები

1. Non-abelian homology of groups, Bull. Georgian Acad. Sci. 150, No 1, (1994),13-17.
2. Non-abelian tensor products and non-abelian homology of groups, J. Pure Appl. Algebra 112 (1996), 191-205.
3. Finiteness of non-abelian tensor product of groups, Theory Appl. Categories Vol. 2, No 5 (1996), 55-61.

4. Non-abelian tensor products of finite groups with non-compatible actions, Bull. Georgian Acad. Sci. 154, No 1 (1996), 25-27.
5. Non-abelian tensor products of precrossed modules, Bull. Georgian Acad. Sci. 155, No 3 (1997).
6. Relationship of non-abelian tensor products and non-abelian homology of groups with Whitehead's gamma functor, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 117 (1998), 31-51.
7. (with H.Inassaridze) New descriptions of the nonabelian homology of groups, Bull. Georgian Acad. Sci. 157, No 2 (1998), 196-200.
8. (with H.Inassaridze) The second and the third non-abelian homology of groups, Bull. Georgian Acad. Sci. 158, No 3 (1998).
9. (with H.Inassaridze) Non-abelian homology of groups, K-Theory J. 378 (1999), 1-17.
10. (with E.Khmaladze) More about homological properties of precrossed modules, Homology, Homotopy and Applications Vol. 2, No 7 (2000), 105-114.
11. On nonabelian tensor product modulo q of groups, Comm. Algebra 29 (2001), 2657-2687.
12. (with E.Khmaladze and M.Ladra) Non-abelian tensor product of Lie algebras and its derived functors, Extracta Mathematicae Vol. 17, Num. 2 (2002), 281-288.
13. (with G.Donadze) Generalised Hopf type formulas, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131 (2003), 111-113.
14. (with E.Khmaladze) Non abelian (co)homology of Lie algebras Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131 (2003), 123-125.
15. N-fold Cech derived functors of group valued functors, Bull. Georgian Acad. Sci. 168, No 2, 2003.
16. (with D.Conduche and H.Inassaridze) Mod q cohomology and Tate-Vogel co-homology of groups, J. Pure Appl. Algebra 189 (2004), 61-87.
17. (with E.Khmaladze and M.Ladra) Non-abelian homology of Lie algebras, Glasgow Math. J. 46 (2004), 417-429.
18. (with G.Donadze and T.Porter) n-Fold Cech derived functors and generalized Hopf type formulas, K-Theory 35(2005), 341-373.
19. (with J.M.Casas, E.Khmaladze and M.Ladra) Homology of n-types and Hopf type formulas, J. Pure Appl. Algebra 200 (2005), 267-280.
20. (with A.Bak, G.Donadze and M.Ladra) Homology of multiplicative Lie rings, J.Pure Appl. Algebra 208 (2007), 761-777.
21. (with E.Khmaladze and M.Ladra) Non-abelian cohomology and extensions of Lie algebras, J. Lie Theory 18 (2) (2008), 413-432.
22. (with M.Ladra) Hopf type formulas for cyclic homology, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008), 385-390.
23. (with J.M.Casas and M.Ladra) Homological aspects of Lie algebra crossed modules, Manuscripta Mathematica 131 (3-4) (2010), 385-401.
24. (with G.Donadze and M.Ladra) Cyclic homology via derived functors,Homology, Homotopy and Applications 12 (2) (2010), 321-334.
25. (with G.Donadze, E.Khmaladze and M.Ladra) Cyclic homologies of crossed modules of algebras, J. Noncommutative Geometry 6 (4) (2012), 749--771.
26. (with J.M.Casas and M.Ladra) On degree of derived functors, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 159 (2012), 11--20.
27. (with T.Kandelaki and M.Ladra) Categorical interpretations of some key agreement protocols, J. Mathematical Sciences 195 (4) (2013), 439-444
28. (with J.M.Casas, E.Khmaladze and M.Ladra) Adjunction between crossed modules of groups and algebras, J. Homotopy and Related Structures 9 (2014), 223-237.
29. (with J.M.Casas, E.Khmaladze and M.Ladra) Adjunction between crossed modules of groups and algebras, J. Homotopy and Related Structures (Springer) 9 (2014), 223—237.
30. Some aspects of homotopical algebra and non-abelian (co)homology theories, J. Mathematical Sciences Vol. 213, No. 1, February, 2016.

31. (with G.Donadze and M.Ladra) Non-abelian tensor and exterior products of multiplicative Lie rings, Forum Mathematicum (De Gruyter) 29 (3), 2017, 563-575.
32. (with A. Gagnidze, M. Iavich, G. Iashvili) Analysis of one-time signature schemes, Scientific and Practical Cyber Security Journal 1 (01) (2017).
33. (with G.Donadze, M.Ladra and A.M.Vieites) Exact sequence in homology of multiplicative Lie rings and a new version of Stallings' theorem, J. Pure Appl. Algebra (Elsevier) 222 (2018), 1786 - 1802.
34. (with A. Gagnidze, M. Iavich, G. Iashvili, V.Vyalkova) Critical Analysis of Hash Based Signature Schemes, International Journal of Cyber- Security and Digital Forensics (IJCSDF), 2018, 7(1): 47-55.
35. (with M.Joglidze), On digital signature schemes, Scientific and Practical Cyber Security Journal 1 (02) (2017).
36. (with M.Iavich, E.Khmaladze) Naive algorithm to Bos-Chaum one-time signature scheme, Bull. Georgian Acad. Sci. 12 (2), 2018, 13-18.
37. (with J.M.Casas, M.Ladra and S.Ladra) Handwritten character recognition using some (anti)-diagonal structural features, Bull. Georgian Acad. Sci. 13 (1) (2019), 22-30.
38. (with M.Khazaradze, E.Khmaladze and B.Mesablishvili) On one-way ring homomorphisms, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 177 (2020), 80-86.

ბ. მესაბლიშვილი იკვლევს კატეგორიული ალგებრის საკითხებს. მან დაამტკიცა, რომ კომუტაციური რგოლების წმინდა ჰომომორფიზმები არის ეფექტური დაწევის მორფიზმები კომუტაციური რგოლების ორადულ კატეგორიაზე მოდულებით განსაზღვრული ინდექსირებული კატეგორიის მიმართ. მან დაამტკიცა, რომ კომუტაციური რგოლების წმინდა ჰომომორფიზმები არის აგრეთვე ეფექტური დაწევის მორფიზმები კომუტაციური რგოლების ორადულ კატეგორიაზე სასრულად წარმოქმნილი, ბრტყელი, სასრულად წარმოქმნილი პროექციული მოდულებით განსაზღვრული ინდექსირებული კატეგორიების მიმართ. მის მიერ მიღებულია სქემების იმ კვაზი-კომპაქტური მორფიზმების სრული დახასიათება, რომლებიც არის ეფექტური დაწევის მორფიზმები სქემების კატეგორიაზე კვაზი-კოჰერენტული მოდულებით განსაზღვრული ინდექსირებული კატეგორიის მიმართ, მან აჩვენა რომ იგივე მორფიზმები არის ეფექტური დაწევის მორფიზმები სქემების კატეგორიაზე სასრული ტიპის, ბრტყელი, სასრული ტიპის ბრტყელი, ლოკალურად პროექციული კვაზი-კოჰერენტული მოდულების კონებით განსაზღვრული ინდექსირებული კატეგორიების მიმართ. მის მიერ შემოტანილია ეფექტური დაწევის ტიპის მონადის განმარტება და დამტკიცებულია, რომ მარცხენა შეუღლებული ფუნქტორი არის კომონადური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ შეუღლებით ინდუცირებული მონადა არის ეფექტური დაწევის ტიპის. ამ შედეგის გამოყენებით მოცემულია სიმრავლეებზე, წერტილოვან სიმრავლეებზე და ზოგიერთ რგოლზე მოდულების კატეგორიებზე განსაზღვრული ეფექტური დაწევის ტიპის მონადების სრული დახასიათება. მიღებულია არაკომუტაციური რგოლების გაფართოებით მიღებული სკალარების შეცვლის ფუნქტორის კომონადურობის კრიტერიუმი. დამტკიცებულია, რომ Barr-ის აზრით - კატეგორიაზე განსაზღვრული მარცხენა ფუნქტორი არის კომონადური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის წინაკომონადური. მან მიიღო აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ლოკალურად წარმოდგენად კატეგორიაში წმინდა მორფიზმი იყოს ეფექტური დაწევის. დამტკიცებულია, რომ მონოიდალურ სიმეტრიულ ლოკალურად წარმოდგენად კატეგორიებში კომუტაციური მონოიდების წმინდა მორფიზმები არის ეფექტური დაწევის. გამოყოფილია ჩაკეტილი სიმეტრიული მონოიდალური კატეგორიების ისეთი კლასი, რომლებშიც კომუტაციური მონოიდების მორფიზმი არის ეფექტური დაწევის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის წმინდა.

ბ. მესაბლიშვილმა ელემენტარულ ტოპოსში განმარტა ზმული რგოლის გალუას გაფართოება და დაამტკიცა გალუას ფუნდამენტური თეორემა ასეთი გაფართოებებისათვის. დამტკიცებულია, რომ ელემენტარულ ტოპოსში შინაგანი მოდულების კატეგორიაში Chase-Sweeler-ის და Ligon-ის გალუას თეორიები ექვივალენტურია. მიღებულია Masuoka-ს თეორემის ბიკატეგორიული განზოგადება, რომელიც არაკომუტაციური რგოლების გაფართოებისათვის ანზოგადებს იმ კარგად ცნობილ ფაქტს, რომ კომუტაციური რგოლების მკაცრად ბრტყელი გაფართოების შესაბამისი ფარდობითი პიკარის ჯგუფი არის ამიცურის კოჰომოლოგიის პირველი ჯგუფის იზომორფული. მიღებულია ე.წ. სტრუქტურული თეორემა ჰოპფის მოდულებისათვის ჰოპფის ალგებრის მიმართ ნებისმიერ გადაწ-

ნულ მონოიდალურ კატეგორიაში. განვსაზღვრულია გალუას ფუნქტორის ცნება და დამტკიცებულია ზოგადი ე.წ. სტრუქტურული თეორემა. დამტკიცებულია, რომ სტრუქტურული თეორემები განზოგადოებული ჰოპფის მოდულებისათვის (იხ. Aguiar, M. and Chase, S.U., Generalized Hopf modules for bimonads, Theory Appl. Categ. 27 (2013), 263–326) და ჰოპფის მოდულებისათვის ჰოპფის ალგებრის მიმართ ორმაგ მონოიდალურ კატეგორიებში (იხ. Bohm, G., Chen, Y. and Zhang, L., On Hopf monoids in duoidal categories, J. Algebra 394 (2013), 139–172) არის ჩვენი სტრუქტურული თეორემის კერძო შემთხვევები. შემოტანილია ბიმონადის და ჰოპფის მონადის განმარტებები, რომლებიც განაზოგადებს ბიალგებრის და ჰოპფის ალგებრის კლასიკურ ცნებებს. დამტკიცებულია განზოგადოებული ფუნდამენტური თეორემა ჰოპფის მოდულების შესახებ. დამტკიცებულია, რომ sup-სტრუქტურების კატეგორიაზე გამდიდრებული ნებისმიერი მცირე კატეგორია არის მორიტა-ექვივალენტური sup-მონოიდის. შემოტანილია ერთიდაიგივე კატეგორიაზე განსაზღვრული მონადის და კომონადის დაწყვილების ცნება. ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერი დაწყვილება განსაზღვრავს ე.წ. რაციონალურ ფუნქტორს, რომელიც განაზოგადებს კოალგებრებისათვის ცნობილ რაციონალურ ფუნქტორს.

ნაჩვენებია, რომ კლასიკური შედეგი, რომელიც ამტკიცებს, რომ კომუტაციური რგოლების მკაცრად ბრტყელ გაფართოებასთან ასოცირებული ფარდობითი პიკარისა და ამიცურის ნაჩვენებია, რომ კლასიკური შედეგი, რომელიც ამტკიცებს, რომ კომუტაციური რგოლების მკაცრად ბრტყელ გაფართოებასთან ასოცირებული ფარდობითი პიკარისა და ამიცურის კოჰომოლოგიის პირველი ჯგუფები იზომორფულია, სრულდება ზოგად მონოიდალურ კატეგორიებში. კოჰომოლოგიის პირველი ჯგუფები იზომორფულია, სრულდება ზოგად მონოიდალურ კატეგორიებში. დამტკიცებულია, რომ კომუტაციური ბანახის ალგებრების ჰომორფიზმი ნორმით არის ეფექტური დაწევის მორფიზმი ბანახის მოდულებისათვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის სუსტი რეტრაქტი. ზოგად კატეგორიებზე განსზღვრულია სუსტი ბიმონადია ცნება და მისთვის დამტკიცებულია ფუნდამენტური თეორემა. მოცემულია განზოგადოებული ბიალგებრებისათვის J.P. Loday-ის მდგარდობის თეორემისწმინდა კატეგორიული დამტკიცება. ნაჩვენებია, რომ გადაწნულ მონოიდალურ კატეგორიებში მარცხენა და მარჯვენა აძუმაიას მონიდების ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა და რომ ასეთი ობიექტები შეიძლება წარმოდგინდეს, როგორც განზოგადოებული გალუას ობიექტები. დამტკიცებულია, რომ ლოკალურად წარმოდგენად მონოიდალურ კატეგორიაში წმინდა მორფიზმები არის ეფექტური დაწევის მორფიზმები ამ კატეგორიის კომუტაციურ მონოიდებითა და მათზე მოდულებით განსაზღვრული ინდექსირებული კატეგორიის მიმართ. ნაჩვენებია, რომ Aguiar, M. and Chase, S.U., Generalized Hopf modules for bimonads, Theory Appl. Categ. 27 (2013), 263–326 და Bohm, G., Chen, Y. and Zhang, L., On Hopf monoids in duoidal categories, J. Algebra 394 (2013), 139–172 სტატიებში მიღებული ძირითადი შედეგები არის ჩვენი სტატიის Mesablishvili, B. and Wisbauer, R., Notes on bimonads and Hopf monads, Theory Appl. Categ. 26 (2012), 281–303 ერთი შედეგის კერძო შემთხვევები. ნაჩვენებია, რომ კლასიკური შედეგი, რომელიც ამტკიცებს, რომ კომუტაციური რგოლების მკაცრად ბრტყელ გაფართოებასთან ასოცირებული ფარდობითი პიკარისა და ამიცურის კოჰომოლოგიის პირველი ჯგუფები იზომორფულია, სრულდება ზოგად მონოიდალურ კატეგორიებში. ნებისმიერ საბაზისო კატეგორიაზე განსაზღვრული (კო)მონადისათვის შემოტანილია დაწევის ნულოვანი და პირველი კოჰომოლოგიის სიმრავლეები კოეფიციენტებით (კო)ალგებრაში და შესწავლილია მათი ძირითადი თვისებები. ეს სიმრავლეები აზოგადებენ კორგოლიებისათვის განსაზღვრულ ანალოგიურ სიმრავლეებს. ნაჩვენებია, რომ ამ განზოგადებისას ძირითადი თვისებები და ურთიერთკავშირება უცვლელი რჩება. (არააბელიური) ჯგუფების ცალმხრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით აგებულია რგოლების ცალმხრივი ჰომომორფიზმის ახალი კანდიდატი. შემოთავაზებული რგოლების ცალმხრივი ჰომომორფიზმის გამოყენების სახით მოცემულია მრავალმხრივი ციფრული ხელმოწერის სქემა. ნაჩვენებია, რომ სერის არააბელურ გალუას კოჰმოლოგიის თეორიას არის მონადების დაწევის კოჰმოლოგიის თეორიის კერძო შემთხვევა. სტატიაში მოცემულია ჰილბერტის თეორემა 90-ის განზოგადება მონოიდალურ კატეგორიებისათვის. აგრეთვე მოცემულია ამ თეორემის გამოყენების მაგალითები კომუტაციურ რგოლზე მოდულების, ჯაჭვური კომპლექსების და ბანახის სივრცეების მონოიდალურ კატეგორიებში. ნულოვანი და ერთგანზომილებიანი არააბელიური ამიცურის კოჰომოლოგიის თეორიის განზოგადება ისეთი მონადებისთვის ზოგად კატეგორიებზე, რომლებიც აღჭურვილია ინვოლუციური დისტრიბუციუ-

ლობის კანონით, რომელიც აკმაყოფილებს იან-ბაქსტერის განტოლებას. მოცემულია რამდენიმე გამოყენება (არაკომუტაციური) რგოლებისა და ბანახის ალგებრების გაფართოებებზე.

ბ. მესაბლიშვილის პუბლიკაციები

1. (R. Wisbauer-თან) Azumaya monads and comonads. Journal of Algebra, (იბეჭდება) (იხ. აგრეთვე arXiv:1308.0251v1 [math.CT] 1 Aug 2013).
2. (R. Wisbauer-თან) Galois functors and generalised Hopf modules. Journal of Homotopy and Related Structures, (იბეჭდება); (იხ. აგრეთვე arXiv:1302.1729v1 [math.CT] 7 Feb 2013).
3. Descent in locally presentable categories. Applied Categorical Structures , (იბეჭდება) (2013).
4. Azumaya Algebras as Galois Comodules . Journal of Mathematical Sciences 195 (2013), 518-522.
5. (R. Wisbauer-თან) On Rational pairings of functors. Applied Categorical Structures 21 (2013), 249-290.
6. (R. Wisbauer-თან) QF functors and (co)monads. Journal of Algebra 376 (2013), 101-122.
7. Pure morphisms are effective for modules. Applied Categorical Structures 21 (2013), 801-809.
8. Descent in monoidal categories. Theory and Applications of Categories 27 (2012), 210-221.
9. Effective codescent morphisms in locally presentable categories. J. of Math. Sciences 186 (2012), 770-780.
10. (J. Gomez-Torrecillas-თან). A bicategorical version of Masuoka's theorem. Applications to bimodules over functor categories and to firm bimodules. Algebras and Representation Theory 15 (2012), 147-194.
11. (R. Wisbauer-თან) Notes on bimonads and Hopf monads. Theory and Applications of Categories 26 (2012), 281-303.
12. (R. Wisbauer-თან) Bimonads and Hopf monads on categories. Journal of K-Theory 7 (2011), 349-388.
13. (R. Wisbauer-თან) Galois functors and entwining structures. Journal of Algebra 324 (2010), 464-506.
14. Descent in -autonomous categories. Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009), 60-70.
15. Entwining structures in monoidal categories. Journal of Algebra 319 (2008), 2496-2517.
16. Comonadicity and invertible bimodules. Journal of Algebra 313 (2007), 761-772.
17. Monads of effective descent type and comonadicity. Theory and Appl. of Categories 16 (2006), 1-45.
18. On comonadicity of extension-of-scalars functors. Journal of Algebra 305 (2006), 1102-1110.
19. Descent in categories of (co)algebras. Homology, Homotopy and Applications 7 (2005), 1-8.
20. More on descent theory for schemes. Georgian Mathematical Journal 11 (2004), 783-800.
21. Every small SL-enriched category is Morita equivalent to an SL-monoid. Theory and Applications of Categories 13 (2004), 169-171.
22. Descent theory for schemes. Applied Categorical Structures 12(2004), 485-512.
23. On some properties of pure morphisms of commutative rings. Theory and Applications of Categories 10 (2002), 180-186.
24. Pure morphisms of commutative rings are effective descent morphisms for modules - a new proof. Theory and Applications of Categories 7(2000), 38-42.
25. Galois theory in a category of modulus over an elementary topos. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences 159 (1999), 20-22.
26. Galois objects in the category of internal commutative algebras in an elementary topos and their flatness. I.N. Vekua Institute of Applied Mathematics 35 (1990), 28-44.
27. Fundamental theorem for finite Galois extensions of an internal commutative connected ring in an elementary topos and the functor T. I.N. Vekua Institute of Applied Mathematics 35 (1990), 9-27.
28. Finite Galois extensions of a connected ring in an elementary topos. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences 135 (1989), 32-36.
29. The lattice of separable subalgebras of a radical extension of a connected ring. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences 126 (1987), 29-32.
30. J. Gomez-Torrecillas and B. Mesablishvili , Some exact sequences associated with adjun -ctions in bicategories. Applications. Transactions of the American Mathematical Society (იბეჭდება http://www. ams.org/cgibin/mstrack/accepted_papers/tran), 2018.
31. 2. B. Mesablishvili, Effective descent morphisms for Banach modules, Jourrnal of algebra and its applications 17(5),1850092_(1-6), 2018.

32. 3. B. Mesablishvili and R. Wisbauer, The fundamental theorem for weak braided monads, Journal of Algebra 490 , 55-103, 2017.
33. 4. M. Livernet, B. Mesablishvili and R. Wisbauer, Generalised bialgebras and entwined monads and comonads, Journal of Pure and Applied Algebra 219 , 3263-3278, 2015.
34. 5. B. Mesablishvili and R. Wisbauer, Azumaya monads and comonads. Axioms 4, pp. 32-70, 2015.
35. 6. B. Mesablishvili, Descent in locally presentable categories, Applied Categorical Structures 22 , 715-726, 2014.
36. 7. B. Mesablishvili and R. Wisbauer, Galois functors and generalised Hopf modules, Journal of Homotopy and Related Structures 9 , 199-222, 2014.
37. 8. B. Mesablishvili and R. Wisbauer , On Rational pairings of functors, Applied Categorical Structures 21 , 249-290, 2013.
38. 9. B. Mesablishvili and R. Wisbauer, QF functors and (co)monads, Journal of Algebra 376, 101-122, 2013.
39. 10. B. Mesablishvili, Pure morphisms are effective for modules, Applied Categorical Structures 21 , 801-809, 2013.
40. 11. B. Mesablishvili, Azumaya Algebras as Galois Comodules , Journal of Mathematical Sciences 195, 518-522, 2013.

ე. ხმალაძემ განავითარა ლის ალგებრების არააბელური მოდ ქ ტენზორული დაგარე ნამრავლები და აღწერა ლის ალგებრების უნივერსალური ქ-ცენტრალურიფარდობითი გაფართოება. ხმალაძემ (ნ. ინასარიძესთან ერთად) ააგო წინაჯვარედინი მოდულების მოდ ქ ჰომოლოგიები და მიიღეს ჰოპფის ფორმულა მეორე მოდ ქ ჰომოლოგიისათვის. მან (სეგარასთან ერთად) განავითარა ექვივარიანტული აბელური და სიმეტრიული კოჰომოლოგიის თეორიები და მიიღო თეორემები გრადუირებული გრეხილი კატეგორიული ჯგუფების და გრადუირებული პიკარდის კატეგორიების ჰომოტოპიური კლასიფიკაციის შესახებ. მან ან (კასასთან და ლადრასთან ერთად) გამოიკვლია ლაიბნიცის ნ-ალგებრების ამოხსნადობის და ნილპოტენტურობის საკითხი, განავითარა ლაიბნიცის ნალგებრების ჯვარედინი მოდულების თეორია და აღწერა მეორე კოჰომოლოგია ჯვარედინი გაფართოებებით, მან აგრეთვე მიიღო მაღალი რიგის ჰოპფის ტიპის ფორმულები ლაიბნიცის ნ-ალგებრების ჰომოლოგიებისათვის.

აგებულია შეუღლებული ფუნქტორები ჯგუფების, ასოციური ალგებრების და ლის ალგებრების ჯვარედინი მოდულების კატეგორიებს შორის. მიღებული შედეგებით განზოგადებულია კლასიკური ჯგუფური ალგებრის და უნივერსალური მომვლები ალგებრის კონსტრუქციები. შეუღლებული ფუნქტორების ტერმინებში დადგენილია კავშირები ლის, ლაიბნიცის, ასოციური და დიასოციური ალგებრების ჯვარედინი მოდულების კატეგორიებს შორის. განვითარებულია არააბელური ტენზორული ნამრავლები და დაბალგანზომილებიანი არააბელური ჰომოლოგიები ლის სუპერალგებრებისთვის, ჰომ-ლის და ჰომ-ლაიბნიცის ალგებრებისთვის. თითოეული მათგანისთვის მიღებულია გამოყენებები ცენტრალურ გაფართოებებში, ციკლურ და ჰოხშილდის ჰომოლოგიებში. შესწავლილია ცენტრალური გაფართოებები ლაიბნიცის ალგებრების კატეგორიაში ლის ალგებრების ქვეკატეგორიის მიმართ და მიღებულია ცენტრალურ გაფართოებებზე ბევრი კლასიკური ფაქტის განზოგადება ამ ფარდობით შემთხვევაზე. განვითარებულია ლაიბნიცის ალგებრების არააბელური გარე ნამრავლი, შესწავლილია მისი კავშირი ლაიბნიცის ალგებრების არააბელური ტენზორულ ნამრავლთან და მიღებულია მისი გამოყენებები ლაიბნიცის ჰომოლოგიებში. აგებული და შესწავლილია აქტორ ობიექტი ლაიბნიცის ალგებრების კატეგორიაში. განვითარებულია ჰომ-ლის ალგებრების არააბელური ტენზორული ნამრავლის თეორია და დადგენილია რამდენიმე თვისება, რომელიც ეხაბა ნამრავლების და ფაქტორის შენახვას, ნილპოტენტურობას და ამოხსნადობის შესწავლას. სრულყოფილი ჰომ-ლის ალგებრების შემთხვევაში აღწერილია არააბელური ტენზორული ნამრავლის თავსებადობა უნივერსალურ ცენტრალურ გაფართოებებთან. აგებულია ღია გასაღებზე შეთანხმების ახალი პროტოკოლი, რომელიც დაფუძნებულია ჯგუფების ჯვარედინ მოდულებზე. მიღებულია ზოგადი სქემის რამდენიმე პრაქტიკული გამოყენება. შესწავლილია ლაიბნიცის ალგებრების კაპაბილითი თვისებები, რისთვისაც გამოყებბული იქნა ახლახანს აგებული ლაიბნიცის ალგებრების არააბელური გარე ნამრავლი. გამოკვლეული იქნა მიღებული შედეგების

კავშირები უკვე არსებულ თეორიებთან. მიღებულია ლაიბნიცის ალგებრების ტენზორულ და გარე ცენტრებს შორის კავშირი. შემოთავაზებულია ცალმხრივი ფუნქციის ახალი კანდიდატი, რომელიც ამავე დროს არის რგოლური ჰომომორფიზმი. გამოყენების სახით აგებულია მრავალმხრივი ციფრული ხელმოწერის ახალი სქემა. დიალგებრებისათვის ტეტრამულტიპლიკატორების ცნობილი კონსტრუქცია გადატანილია დიალგებრების ჯვარედინი მოდულებისათვის, რაც გარკვეულ პირობებში საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ აქტორ ობიექტი დიალგებრების ჯვარედინი მოდულების შესაბამის კატეგორიაში. დიალგებრების ჯვარედინი მოდულებისთვის აღწერილია მოქმედებები ალგებრული გამოსახულებების საშუალებით. არაუარყოფითი მთელი q რიცხვიsსთვის, ჩვენ ვსწავლობთ ლის ალგებრების q-უნარიანობის ორ განსხვავებულ ცნებას ლის ალგებრების არააბელიური q-გარე ნამრავლის მეშვეობით. პირველი დაკავშირებულია q-ჯვარედინა მოდულებთან და შიდა q-დიფერენციალებთან, ხოლო მეორე არის ელისის მიერ 1995 წელს შემოთავაზებული ჯგუფების q-უნარიანობის ლის ალგებრული ვერსია. გაანალიზებულია განზოგადებული დავიწყებისა და დალეცკი-ტახტაჯანის ფუნქტორების ქცევა სრულყოფილ ობიექტებსა და ჯვარედინა მოდულებზე. მიღებულია ახალი შედეგების გამოყენებები ლაიბნიცის n-ალგებრების ჰომოლოგიებისთვის და უნივერსალური ცენტრალური გაფართოებებისთვის.

ე. ხმალაძის პუბლიკაციები

1. E. Khmaladze, *On cohomology of small categories,* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 118 (1998), 43 - 51.
2. E. Khmaladze, *Non-abelian tensor product of Lie algebras modulo q,* Bull. Georgian Acad. Sci. 160 (1999), 206 - 210.
3. E. Khmaladze, *Non-abelian tensor and exterior products modulo q and universal q-central relative extension of Lie algebras,* Homology, Homotopy and Applications 1 (1999), 187 - 204.
4. E. Khmaladze, *Non-abelian tensor and exterior products of Lie algebras modulo q and related constructions,* Bull. Georgian Acad. 161 (2000), 16 - 19.
5. N. Inassaridze and E. Khmaladze*, More about homological properties of precrossed modules,* Homology, Homotopy and Applications 2 (2000), 105 - 114.
6. E. Khmaladze, *Homology of Lie algebras with L/qL coefficients and exact sequences,* Theory and Applications of Categories 10 (2002), 113 - 126.
7. N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Non-abelian tensor product of Lie algebras and its derived functors,* Extracta Mathematicae 17 (2002), 281 - 288.
8. N. Inassaridze and E. Khmaladze, *Non-abelian (co)homology of Lie algebras,* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131 (2003), 123 - 125.
9. N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Non-abelian homology of Lie algebras,* Glasgow Math. J. 46 (2004), 417 - 429.
10. J.M. Casas, N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Homology of n-types and Hopf type formulas,* Pure and Applied Algebra 200 (2005), 267 - 280.
11. J. M. Casas, E. Khmaladze and M. Ladra, *On solvability and nilpotency of Leibniz n-algebras,* Communications in Algebra 34 (2006), 2769 - 2780.
12. A. M. Cegarra and E. Khmaladze, *Homotopy classification of braided graded categorical groups,* J. Pure and Applied Algebra 209 (2007), 411 - 437.
13. A. M. Cegarra and E. Khmaladze, *Homotopy classification of graded Picard categories,* Advances in Mathematics 213 (2007), 644 - 686.
14. J. M. Casas, E. Khmaladze and M. Ladra, *Crossed modules for Leibniz n-algebras,* Forum Mathematicum 20 (2008), 841 - 858.
15. N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Non-abelian cohomology and extensions of Lie algebras,* J. Lie Theory 18 (2008), 413 - 432.
16. J. M. Casas, E. Khmaladze and M. Ladra, *Higher Hopf formulas for homology of Leibniz n-algebras,* J. Pure and Applied Algebra 214 (2010), 797 - 808.
17. H. Inassaridze and E. Khmaladze, *Hopf formulas for equivariant homology of groups,* Proc. American Math. Soc. 138 (9) (2010), 3037 - 3046.

18. J. M. Casas, E. Khmaladze, M. Ladra, T. Van der Linden, *Homology and central extensions of Leibniz and Lie n-algebras,* Homology, Homototy and Applications 13 (2011), 59 - 74.
19. G. Donadze, N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Cyclic homologies of crossed modules of algebras,* J. Non-commutative Geometry 6 (4) (2012), 749 - 771.
20. E. Khmaladze*, On associative and Lie 2-algebras,* Proc. A. Razmadze Math. Institute 159 (2012), 57-64.
21. J. M. Casas, E. Khmaladze and M. Ladra, *Low-dimensional non-abelian Leibniz cohomology,* Forum Mathematicum 25 (3) (2013), 443 - 469.
22. E. Khmaladze, *On non-abelian Leibniz cohomology,* J. Math. Sciences 195 (4) (2013), 481-485.
23. J. M. Casas, N. Inassaridze, E. Khmaladze and M. Ladra, *Adjunction between crossed modules of groups and algebras,* J. Homotopy and Related Structures (2013) (in press, DOI 10.1007/s40062-013-0073-0).
24. J. M. Casas, R. Fernandez-Casado, E. Khmaladze and M. Ladra, *Universal enveloping crossed module of a Lie crossed module,* Homology, Homotopy and Applications (submitted for publication in 2013).
25. (with J. M. Casas and M. Ladra), Low-dimensional non-abelian Leibniz cohomology, Forum Mathematicum (Walter de Gruyter) 25 (3) (2013), 443-469.
26. On non-abelian Leibniz cohomology , J. Mathematical Sciences (Springer) 195 (4) (2013), 481- 485.
27. (with J. M. Casas, N. Inassaridze and M. Ladra), Adjunction between crossed modules of groups and algebras, J. Homotopy and Related Structures (Springer) 9 (2014), 223-237.
28. (with J. M. Casas, R. Fernandez-Casado and M. Ladra), Universal enveloping crossed module of a Lie crossed module , Homology, Homotopy and Applications (International Press) 16 (2) (2014), 143-158.
29. (with J. M. Casas and N. Pacheco Rego), Non-abelian homology of Hom-Lie algebras and applications , Proc. A. Razmadze Math. Institute 167 (2015), 99-106.
30. (with X. Garcia-Martnez and M. Ladra), Non-abelian tensor product and homology of Lie superalgebras, J. Algebra (Elsevier) 440 (2015), 464-488.
31. (with J. M. Casas), On Lie-central extensions of Leibniz algebras, Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Serie A, Matematicas (Springer) 111(1) (2017), 39- 56.
32. (with J. M. Casas and N. Pacheco Rego) , A non-abelian tensor product of Hom-Lie algebras, Bull. of the Malaysian Math. Sciences Society (Springer), 40 (2017), 1035-1054.
33. (with J.M. Casas, R. Fernandez-Casado and M. Ladra), More on crossed modules of Lie, Leibniz, associative and diassociative algebras, J. Algebra and its Applications (World Scientific),16 (6) (2017), 17 pages (published online: June 2017).
34. (with J. M. Casas and N. Pacheco Rego), A non-abelian Hom-Leibniz tensor product and applications ,Linear and Multilinear Algebra (Taylor and Francis), 66 (6) (2018), 1133 -1152.
35. (with G. Donadze and X. Garcia-Martinez), A non-abelian exterior product and homology of Leibniz algebras ,Revista Matematica Complutense (Springer), 31 (2018), 217-236.
36. (with J.M. Casas, R. Fernandez-Casado and X. Garcia-Martinez), Actor of a crossed module of Leibniz algebras , Theory and Applications of Categories, 33 (2) (2018), 23-42.
37. (with N. Inassaridze), Public key exchange using crossed modules of groups, Transactions of A. Razmadze Math. Institute 173 (2), 101-104
38. (with N. Inassaridze, M. Khazaradze and B. Mesablishvili), On one-way ring homomorphisms, Results of Science and Technology, 177 (2020), 80–86.
39. (with J. M. Casas and N. Pacheco Rego) On some properties preserved by the non-abelian tensor product of Hom-Lie algebras , J. Linear Algebra and its Applications, 69 (4) (2021), 607-626.
40. (with R. Kurdiani and M. Ladra) On capability of Leibniz algebras, Georgian Math. J. 28 (2) (2021), 271-279.
41. (with J. M. Casas, R. Fernandez-Casado and X. Garcia-Martinez) Actor of a crossed module of dialgebras via tetramultipliers, Hacettepe J. of Mathematics and Statistics 50 (4) (2021), 1063-1078.
42. (with N. Inassaridze), Public key exchange using crossed modules of groups,Transactions of A. Razmadze Math. Institute 173 (2), 101-104
43. (with N. Inassaridze, M. Khazaradze and B. Mesablishvili), On one-way ring homomorphisms, Results of Science and Technology, 177 (2020), 80–86.

44. (with J. M. Casas and N. Pacheco Rego) On some properties preserved by the non-abelian tensor product of Hom-Lie algebras , J. Linear Algebra and its Applications, 69(4) (2021), 607-626.
45. (with R. Kurdiani and M. Ladra) On capability of Leibniz algebras, Georgian Math. J. 28 (2) (2021), 271-279.
46. (with J. M. Casas, R. Fernandez-Casado and X. Garcia-Martinez) Actor of a crossed module of dialgebras via tetramultipliers, Hacettepe J. of Mathematics and Statistics 50 (4) (2021), 1063-1078.

გ.დონაძე ჯვარედინი მოდულის ჰომოლოგიები წარმოვადგინეთ წარმოებული ფუნქტორების სახით. ამის შედეგად შესაძლებელი გახდა, რომ მიგვეღო ჰოპფის ფორმულები ჯვარედინი მოდულის ჰომოლოგიებისთვის. აგრეთვე შევისწავლეთ სხვადასხვა თვისებები ჯვარედინი მოდულის სიმლიციური ჰომოლოგიებისა კოეფიციენტებით აბელურ ჯვარედინ მოდულებში. ვაჩვენეთ, რომ ორი ნოეთერის ჯგუფის არააბელური ტენზორული ნამრავლი შესაძლოა არ იყოს ნოეთერის. თუ ერთი ჯგუფი ნოეთერისაა და მეორე პოლიციკლური (ან პოლიციკლურის გაფართოება სასრული ჯგუფით), მაშინ დავამტკიცეთ, რომ მათი არააბელური ტენზორული ნამრავლი არის პოლიციკლური (ან პოლიციკლურის გაფართოება სასრული ჯგუფით). აგრეთვე ვაჩვენეთ, რომ არააბელური ტენზორული ნამრავლის ჩაკეტილობა გარკვეულ კლასზე დაკავშირებულია შურის კლასების გამოკვლევასთან. ამის შედეგად აღმოვაჩინეთ ახალი შურის კლასები. განვაზოგადეთ ნეიმანის ცნობილი თეორემა BFC-ჯგუფის სასრული კომუტატორის შესახებ. კერძოდ, დავუშვათ ჯფუფის ყოველი ფიქსირებული ელემენტისთვის ამ ელემენტის შეუღლებები n-ცენტრალური კომუტატორებით იძლევა სასრულ სიმრავლეს. გარდა ამისა, დავუშვათ არსებობს სასრული რიცხვი, რომელიც აღემატება ყველა ზემოთ ხსენებული სასრული სიმრავლის რიგს. ასეთი ჯგუფებისთვის დავამტკიცეთ, რომ n+1- ცენტრალური კომუტატორი სასრულია. განვაზოგადეთ შურის და ბერის თეორემები სასრულად წარმოქმნილი ჯგუფებისთვის. კერძოდ, სასრულად წარმოქმნილი G ჯგუფისთვის ვაჩვენეთ, რომ მისი ნებისმიერი n-ცენტრალური გაფართოების n+1-ცენტრალური კომუტატორი სასრულად წარმოქმნილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G-ს n-ცენტრალური კომუტატორი სასრულია. შედეგად მივიღეთ, რომ სასრულად წარმოქმნილი ნოეთერის ჯგუფები არის შურის და ამავე დროს ბერის კლასი. შემოვიტანეთ შუალედური კომუტატორის ცნება, განვმარტეთ მისი ხარისხი და დავამტკიცეთ შედეგები, რომელთა წყალობითაც ერთ სქემაში მოთავსდა ტენზორული ნამრავლის, გარე ნამრავლის და ჩვეულებრივი კომუტატორის ხარისხების შესახებ არსებული სხვადესხვა თეორემები.

გ. დონაძის პუბლიკაციები

[1] (with T. Van Der Linden) A comonadic interpretation of Baues-Ellis homology of crossed modules, J. Homotopy Relat. Struct. 14, (2019), no. 3, 625-646.

[2] (with M. Ladra, P. P´aez-Guill´an) Schur's theorem and its relation to theclosure properties of the non-abelian tensor product, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 150, (2020), no. 2, 993-1002.

[3] (with E. Detomi M. Morigi, P. Shumyatsky) On finite-by-nilpotent groups,Glasgow Mathematical Journal, 63 (2021) 54-58.

[4] (with X. Garc´ıa-Mart´ınez) Some generalisations of Schur' and Baer's theorem and their connection with homological algebra, Mathematische Nachrichten, 294, (2021), no. 11, 2029-2039.

[5] (with R. Bastos, R. Oliveira, N. Rocco) q-tensor and exterior centers, related degrees and capability, Applied Categorical Structures, 31 (2023) no. 2, doi.org/10.1007/s10485-022-09701-0

დ.ზანგურაშვილი შეისწავლა ფუნქტორთა კატეგორიების ამალგამირების, კონგრუენციების გაფართოების, და სხვა კატეგორიულ-ალგებრული თვისება. აღნიშნული შედეგები განზოგადოებულია მის მიერ გროთენდიკის ტოპოსში ალგებრების მრავალნაირობებისათვის. მან მიიღო აბსტრაქტულ კატეგორიებში ფაქტორიზაციის სისტემების აგების ერთ-ერთი მეთოდი და ნაპოვნია სხვა მეთოდები ასეთი სისტემების აგებისათვის. მიღებული შედეგები გამოყენებულია აბელური ჯგუფების, ჰეიტინგის ალგებრების, ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფების და

სხვა კონრეტული კატეგორიებისათვის. მან განავითარა გროთენდიკის დაწევის თეორია ამალგამირების თვისების მქონე კატეგორიებში. მიღებული შედეგების გამოყენებით აღიწერა ეფექტური კოდაწევის მორფიზმები ტოპოლოგიური სივრცეების, ჰაუსდორფის სივრცეების, კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცეების, მეტრიკული სივრცეების და სხვა გეომეტრიული ბუნების კონკრეტულ კატეგორიებში. გარდა ამისა, ნაპოვნია ალგებრების იმ მრავალნაირობების სინტაქსური დახასიათება, სადაც ყველა დაწევის მორფიზმი ეფექტურია. მათ შორისაა ის მრავალნაირობები, სადაც ფუშაუტების ელემენტებისათვის არსებობს ნორმალური ფორმები (ჯგუფები, კვაზი-ჯგუფები, ლუპები, და სხვა). ნაპოვნია კავშირი ასეთი ფორმების არსებობის საკითხსა და ტერმების გადაწერის სისტემების თეორიაში კარგად ცნობილ კონფლუენტობის პირობასთან, რაც იძლევა ზემოთ-აღნიშნული მრავალნაირობების პოვნის საკითხის ალგორითმული გადაჭრის საშუალებას. მან შეისწავლა რეგულარული ეპიმორფიზმების კლასის ეფექტური დაწევის მორფიზმების გასწვრივ ფულბეკების მიმართ მდგრადობის საკითხი. განზოგადოებულია პონტრიაგინის თეორემა იმის შესაზებ, რომ T_1 ტოპოლოგიური ჯგუფი სავსებით რეგულარულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ჯგუფების ნაცვლად გვაქვს სხვა ალგებრები. შესწავლილია ტოპოლოგიური ალგებრების მრავალნაირობებში ფუშაუტების კონსტრუქციის აღწერის საკითხი. მან ააგო რეგიონებში მიგრაციული პროცესებისა და სხვა სისტემების მათემატიკური მოდელები, და ნაპოვნია ამ სისტემების მართვის ოპტიმალური პარამეტრები. ნაპოვნია საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ უნივერსალური ალგებრების მრავალნაირობაში ფუშაუტების ელემენტებს ჰქონდეთ ნორმალური ფორმები, საიდანაც მივიღებთ, რომ ყველა კოდაწევის მორფიზმი ეფექტურია ასეთ მრავალნაირობაში. დამტკიცებულია, რომ ეს საკმარისი პირობა სრულდება ისეთ მრავალნაირობებში, რომლებიც წარმოქმნილია ტერმების გადაწერის ე.წ. კონფლუენტური სისტემებით. ნაპოვნია შესაბამისი მაგალითები. აბსტრაქტულ კატეგორიებში არწერილია ისეთი ეფექტური დაწევის მორფიზმები, რომელთა მიმართ ყოველი რეგულარული ეპიმორფიზმის ფულბეკი არის რეგულარული ეპიმორფიზმი. შესწავლილია საკითხი იმის შესახებ, როდის არის (ეფექტური) დაწევის მორფიზმების კლასი მყარი ფუშაუტების მიმართ. ა.მარტსინკოვსისთან ერთად შესწავლილია მოდულების სტაბილური კატეგორიის სხვადასხვა თვისება (ბირთვების, ნამრავლების და კონამრავლების არსებობა; აღწერილია (ნორმალური) მონომორფიზმები, ეპიმორფიზმები). დამტკიცებულია, რომ მარცხნიდან მემკვიდრეობით რგოლზე მოდულების სტაბილური კატეგორია არის აბელური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რგოლის, როგორც თავის თავზე მარცხენა მოდულის ინექციური გარსი არის პროექციული, რაც ექვივალენტური იმისა, რომ მოცემული რგოლი არის გაყოფად რგოლებზე სრული სამკუთხა ბლოკური მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი. დ. ზანგურაშვილმა დაამტკიცა, რომ მარცხნიდან მემკვიდრეობით მარცხნიდან სრუკლყოფილ მარჯვნიდან კოჰერენტულ რგოლზე სტაბილურ კატეგორიას აქვს კობირთვები და შეიმუშავა მათი კონსტრუქცია. ამისათვის მან დაამტკიცა სტრუქტურული თეორემები ასეთ რგოლზე მარცხენა მოდულებისათვის. ამ თეორემების დამტკიცების მნიშვნელოვანი ნაწილი წმინდა კატეგორიული ხასიათისაა. იგივე კატეგორიული მიდგომის საფუძველზე მან იპოვა მარცხნიდან მემკვიდრეობით მარჯვნიდან ნოეთერის რგოლებზე მარცხენა მოდულებისათვის ჰუ'ს სტრუქტურული თეორემის ახალი დამტკიცება. დამტკიცებული სტრუქტურული თეორემის საშუალებით დამტკიცდა, რომ მარცხნიდან მემკვიდრეობით მარცხნიდან სრუკლყოფილ მარჯვნიდან კოჰერენტულ რგოლზე სტაბილური კატეგორია ექვივალენტულია სტაბილური მოდულების კატეგორიის. დ. ზანგურაშვილმა მოძებნა ასეთ რგოლზე მარცხენა მოდულების კატეგორიიდან შესაბამის სტაბილურ კატეგორიაში კანონიკური ფუნქტორის მარცხენა შეუღლებული ფუნქტროის კონსტრუქცია. მან მოძებნა მარცხნიდან მემკვიდრეობით მარცხნიდან სრუკლყოფილ მარჯვნიდან კოჰერენტულ რგოლების და მარცხნიდან მემკვიდრეობით მარჯვნიდან ნოეთერის რგოლების დახასიათება გრეხვის თეორიის ტერმინებში. დახასიათებულია ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფების თავისუაფალი ნამრავლების ტოპოლოგია გარკვეულ კერძო შემთხვევაში, რომელიც მოიცავს როგორც k_{omega}-ჯგუფების, აგრეთვე ლინდელოფის P-ჯგუფების შემთხვევას. ამის გამოყენებით ნაპოვნია ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფების თავისუაფალი ნამრავლების შესახებ გრაევის თეორემის ახალი მოკლე დამტკიცება ზემოთ-ხსენებული კერძო შემთხვევისათვის. მან იპოვა უნივერსალური ალგებრების მრავალნაირობაში ჯგუფური ტერმის არსებობის კარგად ცნობილი

კრიტერიუმის პროტომოდულარული ანალოგი. ამისათვის მან შემოიღო მარჯვნიდან შეკვეცადი პროტომოდულარული ალგებრის ცნება. აგებული ე. წ. ტრანსლაციის ჯგუფის ფუნქტორი მარჯვნიდან შეკვეცადი პროტომოდულარული ალგებრების კატეგორიიდან ჯგუფების კატეგორიაში. მან დაამტკიცა, რომ უნივერსალური ალგებრების მრავალნაირობაში ჯგუფური ტერმი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის შეიცავს პროტომოდულარულ ტერმს, რომლის მიმართაც მრავალნაირობის ყველა ალგებრა მარჯვნიდან შეკვეცადია. ტერმების გადაწერის მეთოდების გამოყენებით მან დაახასიათა ტერნარული რგოლების ეფექტური კოდაწევის მორფიზმები.

დ. ზანგურაშვილის პუბლიკაციები

1. M.Akhobadze, N. Tevzadze, and D. Zangurashvili, Analysis of a questionnaire with the application of fuzzy set theory, Bull. Georgian Acad. Sci. 150, 3, 1994 (in Georgian).
2. M.Akhobadze and D. Zangurashvili, Optimization problem for tare turnover, Bull. Georgian Acad. Sci. 154, 3, 1996, 356-358.
3. M.Akhobadze and D. Zangurashvili, On the optimal value of the court budget, Proc. A. Eliashvili Inst. Control Systems, 7, 2003, 54-56 (in Georgian).
4. M.Akhobadze and D. Zangurashvili, Simulation model of court functioning on the basis of queuing theory, Proc. II International Conference “Parallel computations and control problems”, Moscow, 2004, 350-360.
5. M.Akhobadze , I. Bregvadze, D. Zangurashvili, M. Zangurashvili, Z. Machavariani, Mathematical modelling and control algorithms for macrosystems, auxiliary manual for students of Technical University of Georgia, TUG, Tbilisi, 2005.
6. M.Akhobadze, D. Zangurashvili , G. Shubitidze, and A. Vadatchkoria, Prevention of population explosions in the process of the control of cities and regions, Proc. IV International Conference “System Identification and Control Problems”, Moscow, 2005, 1025-1044.
7. A.Martsinkovsky, O. Veliche, and D. Zangurashvili, The stable module category over a pseudo-hereditary ring (in preparation).
8. G.Samsonadze and D. Zangurashvili, Amalgamated free products of topological algebras (in preparation).
9. G.Shubitidze, A. Vadatchkoria, and D. Zangurashvili, On the optimal routes of the production supply, Trans. Georgian Technical Univ., 421, 1998, 25-28.
10. D.Zangurashvili, On some categorical algebraic properties of functor categories with values in concrete categories, Bull. Georgian Acad. Sci. 135, 2, 1989, 17-19 (in Russian).
11. D.Zangurashvili, Some categorical-algebraic properties of quasi-varieties of algebras in a Grothendieck topos, Bull. Georgian Acad. Sci. 139, 1, 1990, 25-28 (in Georgian).
12. D.Zangurashvili, On some categorical algebraic properties of functor categories, Bull. Georgian Acad. Sci. 141, 2, 1991, 269-272.
13. D.Zangurashvili, On some categorical algebraic properties of functor categories, II. Counter-examples, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 113, 1995, 155-172.
14. D.Zangurashvili, Factorization systems and adjunctions, Georgian Math. Journal 6, 2, 1999, 191-200.
15. D.Zangurashvili, Adjunctions and locally transferable factorization systems, Applied Categorical Structures, 9, 6, 2001, 625-650.
16. D.Zangurashvili, The strong amalgamation property and codescent morphisms, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 150.
17. D.Zangurashvili, The strong amalgamation property and (effective) codescent morphisms, Theory and Applications of Categories 11, 20, 2003, 438-449.
18. D.Zangurashvili, Several constructions for factorization systems, Theory and Applications of Categories 12, 11, 2004, 326-354.
19. D.Zangurashvili, Some categorical algebraic properties: counter-examples for functor categories, Applied Categorical Structures, 13, 2, 2005, 113-120.

20. D.Zangurashvili, Effective codescent morphisms, amalgamations and factorization systems, Journal of Pure and Applied Algebra, 209, 1, 2007, 255-267.
21. D. Zangurashvili, Effective codescent morphisms in some varieties of universal algebras, Appl. Categ. Structures, 22, 2014, 241-252.
22. D. Zangurashvili, Some stability properties of epimorphism classes, Theory Appl. Categ. , 29(1), 2014, 1-16.
23. A. Martsinkovsky, D. Zangurashvili, The stable category of a left hereditary ring, J. Pure Appl. Categ., 219, 2015, 4061-4089.
24. G. Samsonadze, D. Zangurashvili, Effective codescent morphisms in the varieties determined by convergent term rewriting systems, Tbilisi Math. Journal, 9(1), 2016, 49-64.
25. D. Zangurashvili, The complete regularity of some T_{0} topological protomodular algebras, *Bull. Georg. Acad. Sci,* vol. 13(2), 2019, 7-10.
26. D. Zangurashvili, Effective descent morphisms and colimits, *Bull. Georg. Acad. Sci.* vol. 13(3) 2019, 12-17.
27. D. Zangurashvili, Associativity-like conditions on protomodular algebras*, Algebra Universalis* 2020, 81(1).
28. D. Zangurashvili, Admissible Galois Structures on categories dual to some varieties of universal algebras, *Georgian Math. Journal*, vol. 28 (4), (2021), 651-664.
29. G. Samsonadze, D. Zangurashvili, On Graev's theorem for free products of Hausdorff topological groups, *Bull. Australian Math. Soc.* vol. 104 (3) 2021, 475- 483.
30. D. Zangurashvili, Right-cancellable protomodular algebras, *Algebra Universalis 83(10), 2022*, 1-20.

ა. პაჭკორიამ მონოიდისთვის ააგო კოჰომოლოგიის მონოიდები კოეფიციენტებით ნახევრადმოდულში და მათი გამოყენებით დახასიათდა ნახევრადმოდულების შრაიერის გაფართოებები მონოიდის საშუალებით. ნებისმიერი ადიტიური ფუნქტორისთვის, რომელიც განსაზღვრულია შეკვეცადი ნახევრადმოდულების კატეგორიაზე და მნიშვნელობებსაც შეკვეცადი ნახევრადმოდულების კატეგორიაში ღებულობს, მან აიგო წარმოებული ფუნქტორები (ამისათვის საჭირო გახდა საკუთრივი პროექციული ნახევრადმოდულის შემოტანა და გამოყენება). ეს კონსტრუქცია წარმოადგენს კლასიკური წარმოებული ფუნქტორების კონსტრუქციის ბუნებრივ განზოგადებას. Hom ფუნქტორის წარმოებულები ფუნქტორები აღიწერა ნახევრადმოდულების გაფართოებების საშუალებით . მან შესწავლილია შინაგანი კატეგორიები და ჯგუფოიდები მონოიდების კატეგორიაში. კერძოდ, დაამტკიცა, რომ კატეგორია შრაიერის შინაგანი კატეგორიებისა მონოიდებში ექვივალენტურია ჯვარედინა ნახევრადმოდულების კატეგორიის. ეს აფართოებს ბრაუნ-სპენსერის ცნობილ ექვივალენტობას ჯვარედინა მოდულების კატეგორიასა და ჯგუფებში შინაგანი კატეგორიების კატეგორიას შორის. ა.პაჭკორიამ ნახევრადმოდულებისთვის (კერძოდ, აბელის მონოიდებისთვის) შექმნა ჰომოლოგიური ალგებრის აპარატი (რომელიც მოდულების შემთხვევაში ემთხვევა კლასიკურს): განმარტა ნახევრადმოდულების ჯაჭვური კომპლექსი, მისი ჰომოლოგიის და კოჰომოლოგიის მონოიდები, ჯაჭვური კომპლექსების მორფიზმი, მორფიზმების ჯაჭვური ჰომოტოპია და ა. შ., დამტკიცებულია ჯაჭვური კომპლექსების შრაიერის მოკლე ზუსტი მიმდევრობით ინდუცირებული ჰომოლოგიის მონოიდების გრძელი მიმდევრობის სიზუსტის თეორემები. ამ აპარატის ერთერთი მნიშვნელოვანი გამოყენება არის შემდეგი: ყოველ სიმპლიციალურ აბელის მონოიდთან ბუნებრივად ასოცირდება აბელის მონოიდების ჯაჭვური კომპლექსი, რომლის ჰომოლოგიის და კოჰომოლოგიის მონოიდები წარმოადგენენ ჰომოტოპიური ტიპის ინვარიანტებს სიმპლიციალური აბელის მონოიდების კატეგორიაზე. ა.პაჭკორიამ ნახევრადმოდულების კატეგორიაზე განსაზღვრული Hom ფუნქტორის ტაკაჰაშის სატელიტი დააკავშირა Hom ფუნქტორის სხვა ცნობილ სატელიტებთან. კერძოდ, დადგინდა პირობები ტაკაჰაშის სატელიტის იზომორფულობისა ხ.ინასარიძის და ჯანელიძის Ext ფუნქტორებთან. მან შემოტანა ცნება ნახევრადრგოლისა ვალუაციით არაუარყოფით მთელ რიცხვებში და დაამტკიცა, რომ ყოველი პროექციული ნახევრადმოდული ასეთ ნახევრადრგოლზე თავისუფალია. აქედან მიიღო შედეგი: თუ E არის ჯგუფი, თავისუფალი მონოიდის ქვემონოიდი ან თავისუფალი აბელის მონოიდის

ქვემონოიდი, მაშინ ყოველი პროექციული ნახევრადმოდული E-ს მონოიდურ ნახევრადრგოლზე კოეფიციენტებით არაუარყოფით მთელ რიცხვებში თავისუფალია. მის მიერ ნახევრადმოდულებისათვის განვითარებულმა ჰომოლოგიური ალგებრის მეთოდებმა ბუნებრივად მიიყვანა მონოიდის (კერძოდ, ჯგუფის) ახალი კოჰომოლოგიის და ჰომოლოგიის მონოიდების (კოეფიციენტებით ნახევრადმოდულებში) შემოღებამდე. დადგენილია, რომ ისინი, განსხვავებით აქამდე არსებული (კო)ჰომოლოგიის მონოიდებისგან, უშვებენ გამოთვლებს თავისუფალი რეზოლვენტების ტექნიკის გამოყენებით. სწორედ ამის გათვალისწინებით გამოთვლილია სასრული ციკლური ჯგუფის ახალი კოჰომოლოგიის და ჰომოლოგიის მონოიდები. შემოტანილია მონოიდის ახალი კოჰომოლოგიის მონოიდები კოეფიციენტებით ნახევრადმოდულებში, მათი საშუალებით აღწერილია მონოიდების შრაიერის ტიპის გაფართოებები, დაკავშირებულია ისინი ჯგუფების გაფართოებებთან და გამოთვლილია ციკლური ჯგუფებისთვის. გარდა ამისა, მიღებულია სიმპლიციალური აბელის მონოიდის ჰომოტოპიის ჯგუფების ახალი აღწერა. დადგენილია არააბელური მონოიდების შრაიერის რეგულარული გაფართოებების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და მიღებულია ასეთი გაფართოებების კოჰომოლოგიური კლასიფიკაცია. მოცემულია მონოიდის მესამე კოჰომოლოგიის ჯგუფის ინტერპრეტაცია დასაშვები აბსტრაქტული ბირთვების საშუალებით, რაც ანზოგადებს ჯგუფის მესამე კოჰომოლოგიის ჯგუფის ინტერპრეტაციას კლასიკური აბსტრაქტული ბირთვების საშუალებით. შემოტანილია საკუთრივი პროექციული ნახევრადმოდულის ცნება და საკუთრივი პროექციული რეზოლვენტების გამოყენებით აგებულია წარმოებული ფუნქტორები ადიციური ფუნქტორებისთვის შეკვეცადი ნახევრადმოდულების კატეგორიიდან შეკვეცადი ნახევრადმოდულების კატეგორიაში. გამოკვლეულია ნახევრადმოდულების საკუთრივ მოკლე ზუსტ მიმდევრობასთან ასოცირებული წარმოებული ფუნქტორების გრძელი მიმდევრობის სიზუსტის საკითხი. ნახევრადმოდულების საკუთრივი გაფართოებების საშუალებით აღწერილია Hom ფუნქტორის მარჯვენა წარმოებული ფუნქტორები.

ა. პაჭკორიას პუბლიკაციები

1. A. Patchkoria, On natural transformations of the relative Ext^1 functor, Proc.Junior Sci., Tbilisi State University, 2 (1974), 17-23 (in Russian).
2. A. Patchkoria, On extensions of semimodules, Bull. Georgian Acad. Sci., 84 (1976), 3, 545-548 (in Russian).
3. A. Patchkoria, Extensions of semimodules by monoids and their cohomological characterization, Bull. Georgian Acad. Sci., 86 (1977), 1, 21-24 (in Russian).
4. A. Patchkoria, Cohomology of monoids with coefficients in semimodules, Bull. Georgian Acad. Sci., 86 (1977), 3, 545-548 (in Russian).
5. A. Patchkoria, Schreier normal extensions of semimodolules, Proc. A. Razmadze Math. Inst., (1979), 76-90 (in Russian).
6. A. Patchkoria, On derived functors of semimodule-valued functors, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 83 (1986), 60-75 (in Russian).
7. A. Patchkoria, On cohomology monoids, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 91 (1988), 36-43 (in Russian).
8. A. Patchkoria, Crossed semimodules and Schreier internal categories in the category of monoids, Georgian Math. J., 5 (1998), 6, 575-581.
9. A. Patchkoria, Homology and cohomology monoids of presimplicial semimodules, Bull. Georgian Acad. Sci., 162 (2000), 1, 9-12.
10. A. Patchkoria, Chain complexes of cancellative semimodules, Bull. Georgian Acad. Sci., 162(2000), 2, 206-208.
11. A. Patchkoria, Extensions of semimodules and the Takahashi functor $\text{Ext}_\Lambda(C, A)$, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131 (2003), 148-149 (short note).
12. A. Patchkoria, Extensions of semimodules and the Takahashi functor $\text{Ext}_\Lambda(C, A)$, Homology, Homotopy and Applications, 5 (2003), 1, 387-406.

13. A. Patchkoria, On exactness of long sequences of homology semimodules, Journal of Homotopy and Related Structures, 1 (2006), 1, 229-243.
14. A. Patchkoria, Projective semimodules over semirings with valuations in nonnegative integers, Semigroup Forum, 79 (2009), 3, 451-460.
15. A. Patchkoria, Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules I, Journal of Homotopy and Related Structures, 2014 (in press).
16. A. Patchkoria, Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules II, in preparation.
17. A. Patchkoria, Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules I, Journal of Homotopy and Related Structures, 9 (2014), 1, 239-255.
18. • A. Patchkoria, On homology monoids of simplicial abelian monoids, Bull. Georg. Natl. Acad. Sci., 11 (2017), 2, 7-11.
19. • A. Patchkoria, Relationship between homology of a simplicial semimodule and homology of its module completion. Bull. Georg. Natl. Acad. Sci., 11 (2017), 3, 28-33.
20. • A. Patchkoria, Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules II, Semigroup Forum (2017). https://doi.org/10.1007/s00233-017-9900-7.
21. N. Martins-Ferreira, A. Montoli, A. Patchkoria and M. Sobral, On the classification of Schreier extensions of monoids with non-abelian kernel, *Forum Mathematicum*, **32** (2020), 3, 607- 623. https://doi.org/10.1515/forum-2019-0164
22. N. Martins-Ferreira, A. Montoli, A. Patchkoria and M. Sobral, The third cohomology group of a monoid and admissible abstract kernels, *International Journal of Algebra and Computation*, **32** (2022), 05, 1009-1041. https://doi.org/10.1142/S0218196722500436
23. A. Patchkoria, On derived functors of semimodule-valued functors II, *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci*., **17** (2023), №2, to appear.

2.3. მეცნიერული კვლევის თემატიკის აღწერა

ეს თემატიკა წარმოადგენს მათემატიკის დარგში ფუნდამენტურ კვლევას, სადაც ერთმანეთს კვეთს სხვადასხვა მათემატიკური მიმართულება: (არააბელური) ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური ალგებრა, K- თეორია, ციკლური ჰომოლოგია, არაკომუტაციური გეომეტრია და კატეგორიული ალგებრა. მისი ძირითადი მიზანია სხვადასხვა ტიპის ალგებრების სხვადასხვა ჰომოლოგიის თეორიებისა და ალგებრული და ტოპოლოგიური სტრუქტურების ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური თვისებების შესწავლა. კვლევის მნიშვნელოვანი ნაწილი განხორციელდება ციკლურ ჰომოლოგიაში, K-თეორიასა და ჰომოტოპიური ალგებრის არააბელურ და კატეგორიულ ასპექტებში, რომლებიც არიან კვლევის მნიშვნელოვანი მიმართულებები განვითარებული მათემატიკოსთა მზარდი რაოდენობის მიერ მთელს მსოფლიოში. მათ აქვთ მნიშვნელოვანი გამოყენებები მათემატიკის მრავალ დარგში, რამაც ბიძგი მისცა თანამედროვე მათემატიკის სხვა მრავალი დარგის განვითარებას. ჩვენ აქ ვუთითებთ კარუბის, ლოდეს, ქუილენის, სვანის, ვეიბელის და სხვების ფუნდამენტურ შრომებს (იხ. [Kar1, Kar2, Lo1, Lo2, Qu1-Qu3, Sw1, Sw2, We1, We2]). ჰომოტოპიური ალგებრის ერთ-ერთ მძლავრ ინსტრუმენტს წარმოადგენს არააბელური წარმოებული ფუნქტორების ცნება. ამის საილუსტრაციოდ ვიტყვით, რომ ის გამოყენებულ იქნა სვანისა [Sw1, Sw2] და კეუნეს [Ke] მიერ ალგებრული K-თეორიის სიმპლიციური ჯგუფების მეთოდით შესწავლისას და განვითარებულ იქნა არააბელურ ჰომოლოგიურ ალგებრაში ხ. ინასარიძის [InH5] და სხვების მიერ. მეორეს მხრივ, ბარისა და ბეკის შრომებში [BaBe1, BaBe2] კლასიკური (კო)ჰომოლოგიური ფუნქტორების უმრავლესობა აღიწერა არააბელური წარმოებული ფუნქტორების საშუალებით, როგორც კოსამეულის (კო)ჰომოლოგიები (იხ. აგრეთვე დასკინის შრომა [Du]).

მნიშვნელოვანი აღმოჩენა გაკეთებული კონის [Co1] და მისგან დამოუკიდებლად ციგანის [Ts] მიერ იყო ციკლური კოჰომოლოგიები, როგორც დერამის კოჰომოლოგიების სწორი არაკომუტაციური ანალოგი და ბუნებრივი მნიშვნელობათა არე ჩერნის მახასიათებელი ასახვისათვის K-თეორიიდან და K-ჰომოლოგიიდან K-თეორიასთან, K-ჰომოლოგიასა და KK-თეორიასთან დაწყვილებით, ციკლური

კოჰომოლოგია ჩერნ-ვეილის თეორიის მსგავსად სრულიად ანზოგადებს კლასიკური დიფერენციალური ტოპოლოგიის ბევრ ასპექტს არაკომუტაციური სივრცეებისათვის. ის არის მნიშვნელოვანი და შეუცვლელი აპარატი არაკომუტაციურ გეომეტრიაში [Co2]. ბოლო წლებში კუნცმა და ქუილენმა [CuQu1–CuQu3] ჩამოაყალიბეს ალტერნატიული მიდგომა ციკლური (კო)ჰომოლოგიის თეორიისადმი, რამაც მეტი ნათელი მოჰფინა ამ თეორიას და შესაძლებელი გახადა ამ სფეროში ცნობილი ღია პრობლემის ამოხსნა. კერძოდ, დადგინდა პერიოდული ციკლური კოჰომოლოგიის ამოკვეთის თვისება.

კარუბის ჰიპოთეზის გამოკვლევით მნიშვნელოვანი იმპულსი მიეცა K-თეორიას. კარუბიმ თავისი ჰიპოთეზა ჩამოაყალიბა C^*-ტენზორული ნამრავლის მიმართ ალგებრული და ტოპოლოგიური K-თეორიების იზომორფიზმის შესახებ სტაბილური C^*-ალგებრებისათვის [Kar2]. თავდაპირველად ეს ჰიპოთეზა ნაჩვენები იქნა კერძო შემთხვევაში როცა $n=2$ ჰიგსონის [Hi] და კარუბის [Kar2] მიერ, და ბოლოს დადასტურებულ იქნა ყველა დადებითი n- სათვის სუსლინისა და ვოდზისკის მიერ [SuWo]. კარუბის ჰიპოთეზა კარუბი-ვილამაიორის ალგებრული K-თეორიისათვის დამტკიცებულ იქნა ჰიგსონის მიერ [Hi]. მიდგომა ჰომოტოპიური ინვარიანტობის და ამოკვეთის თვისებების გამოყენებით ალგებრული და ტოპოლოგიური K-თეორიების დასაკავშირებლად ეკუთვნის ჰიგსონ-კასპაროვს და სუსლინ-ვოდზისკის. ის იდეა, რომ H-უნიტარულობის თვისება არის გადამწყვეტი კონცეფცია ამოკვეთის შესასწავლად ალგებრულ K-თეორიაში, მთლიანად ეკუთვნის ვოდზისკის, რაც ცხადი გახდა სუსლინისა და ვოდზისკის შრომაში [SuWo], და მჭიდროდ დაკავშირებულია მათ მიერ შემოტანილ რგოლების სამმაგი ფაქტორიზაციის თვისებასთან. კარუბის ჰიპოთეზასა და მის განზოგადებაში უნიფორმულად შემოსაზღვრული აპროქსიმაციული ერთეულის მქონე კომპლექსური ფრეშე-მაიკლის ალგებრებისათვის მნიშვნელოვანი წვლილი მიუძღვის ვოდზისკის [Wo]. ახლახანს, გლუვი K-ფუნქტორების შემოტანით, ეს ჰიპოთეზა დადასტურებული იქნა ხ. ინასარიძის და თ. კანდელაკის მიერ ფრეშეს ალგებრების უფრო ფართო კლასისათვის [InKa1-InKa3].

ექვივარიანტული თეორიების შესწავლისათვის მნიშვნელოვანი სტიმული იყო ბაუმ-კონის ჰიპოთეზა, რომლის თავდაპირველი ფორმულირება იყო განსხვავებული, რადგანაც ჯერ კიდევ არ იყო ცნობილი ექვივარიანტული K-თეორია. დღესდღეობით ექვივარიანტული თეორიების შესწავლას აქვს უამრავი გამოყენებები ალგებრასა და ტოპოლოგიაში. უნდა აღინიშნოს კარლსონის უახლესი შედეგები ექვივარიანტულ სტაბილურ ჰომოტოპიის თეორიაში [Ca] და ფიოდოროვიჩის, ჰაუშილდის და მეის, კუკუს და ფილიპსის სტატიები [FiHaMa, Ku, Ph], რომლებიც ეძღვნება ექვივარიანტულ ალგებრულ K-თეორიას. ჰომოლოგიურ ალგებრაში ექვივარიანტული თეორიების გამოკვლევა უკავშირდება უაიტეჰედის ადრეულ სტატიას [Wh]. უახლეს კვლევას წარმოადგენს სეგარას, გარსია-კალსინესის და ორტეგას სტატია [CeGaOr] კოჰომოლოგიების შესახებ ჯგუფებისათვის მოქმედებებით. უფრო მოგვიანებით, ხ. ინასარიძემ [InH3] განავითარა ჯგუფების განსხვავებული ექვივარიანტული (კო)ჰომოლოგიის თეორია, რომელსაც აქვს გამოყენებები ალგებრულ K-თეორიაში და ტოპოლოგიური სივრცეების ექვივარიანტულ კოჰომოლოგიებში.

ბოლო ოცი წლის განმავლობაში ბევრი მნიშვნელოვანი ნაშრომია შესრულებული, რომლებშიც გამოკვლეულია ალგებრული და ტოპოლოგიური თეორიების mod q (სასრულ კოეფიციენტებიანი) ვერსიები. ნეიზენდორფერმა [Nei] შეისწავლა ჰომოტოპიის თეორია Z_q კოეფიციენტებით, რასაც აქვს მნიშვნელოვანი გამოყენებები K-თეორიაში და ჰომოტოპიის თეორიაში. ბროუდერმა [Brd] გამოიკვლია mod q ალგებრული K- თეორია. სუსლინმა და ვოევოდსკიმ [SuVo] გამოთვალეს მთელი რიცხვების mod 2 ალგებრული K-თეორია, როგორც მილნორის ჰიპოთეზის ვოევოდსკისეული ამოხსნის შედეგი [Vo]. კარუბიმ და ლამბრემ [KaLa] ააგეს დენისის კვალის ასახვა mod q ალგებრული K-თეორიიდან mod q ჰოხშილდის ჰომოლოგიაში, რასაც გააჩნია მოულოდნელი კავშირი რიცხვთა თეორიასთან. საკმაო რაოდენობის სტატიებია შესრულებული, რომლებშიც გამოკვლეულია არააბელური mod q ტენზორული ნამრავლის თეორია, იხ. მაგალითად [Brn, CoRo, El]. ხ. ინასარიძემ და ნ. ინასარიძემ ფრანგ მათემატიკოს კონდუშესთან ერთად განავითარეს ჯგუფების mod q (კო)ჰომოლოგიის თეორია [CoInIn, InN2].

კლასიკური მიდგომით ჰომოლოგიურ ალგებრაში იხილავენ მხოლოდ ადიციურ ფუნქტორებს აბელურ კატეგორიებს შორის. ამრიგად ის გამოუსადეგარია მრავალი საინტერესო არააბელური ფუნქტორის ჰომოლოგიური შესწავლისათვის და კარგი (კო)ჰომოლოგიის თეორიების აგებისათვის

არააბელური კოეფიციენტებით (არააბელური (კო)ჰომოლოგიის თეორიები). ბევრი მათემატიკოსი (სერი, დედეკერი, ლუე და სხვები) ცდილობდა გაეცა პასუხი კითხვაზე თუ რა უნდა ვიგულისხმოთ (კო)ჰომოლოგიის თეორიაში არააბელური კოეფიციენტებით. დასაბუთებული პასუხი ჯგუფებისათვის და ლის ალგებრებისათვის დაბალ განზომილებებში გაცემული იქნა გენის მიერ [Gu1, Gu2] 1980-იან წლებში. მოგვიანებით, ხ. ინასარიძემ და ნ. ინასარიძემ ჯგუფების კატეგორიისათვის აჩვენეს როგორ შეიძლება გენის განმარტებები გაგძელდეს მაღალ განზომილებებში. კერძოდ, [InIn]-ში აგებული და შესწავლილია ჯგუფების არააბელური ჰომოლოგიები კოეფიციენტებით ჯგუფებში. მეტიც, [InH4]-ში ხ. ინასარიძემ განავითარა ჯგუფების ანალოგიური არააბელური კოჰომოლოგიის თეორია კოეფიციენტებით ჯვარედინ მოდულებში. ამასწინათ ნ. ინასარიძემ, ე. ხმალაძემ და მ. ლადრამ [InKhLa1, InKhLa2] ააგეს და შეისწავლეს ლის ალგებრების არააბელური (კო)ჰომოლოგიები კოეფიციენტებით ლის ალგებრებში (ლის ალგებრების ჯვარედინ მოდულებში), რაც ანზოგადებს კლასიკურ შევალეი-ეილენბერგის (კო)ჰომოლოგიას და გენის დაბალ განზომილებიან არააბელურ (კო)ჰომოლოგიას ლის ალგებრებისათვის [Gu2]. ამ თეორიის განსაკუთრებით საინტერესო გამოყენებაა კავშირის დამყარება არაკომუტაციური ასოციური ალგებრების პირველ ციკლურ ჰომოლოგიას და მილნორის პირველ ციკლურ ჰომოლოგიას შორის. ანალოგიური არააბელური (კო)ჰომოლოგიის თეორია ლაიბნიცის ალგებრებისათვის განვითარებული იქნა გნედბაის [Gn] მიერ დაბალ განზომილებებში. წარმოდგენილი პროექტის ერთ-ერთი მიზანი იქნება არააბელური ლაიბნიცის (კო)ჰომოლოგიის გაგრძელება მაღალ განზომილებებში ისე, რომ ამავე დროს მან განაზოგადოს კლასიკური ლაიბნიცის (კო)ჰომოლოგია [LoPi]. კიდევ ერთი მიზანი იქნება ჯგუფების არააბელური (კო)ჰომოლოგიების ექვივარიანტული ვერსიის აგება დაბალი განზომილებების შემთხვევებში, რაც განაზოგადებს გენის ჯგუფების არააბელურ (კო)ჰომოლოგიებს.

მნიშვნელოვანია ფრანგი მათემატიკოსის ჯ.-ლ. ლოდეს მიერ დასმული პრობლემები [Lo1,Lo2], რომლებიც ეხება ლაიბნიცის ალგებრებს. ეს ალგებრები გარკვეული აზრით განიხილება როგორც ლის ალგებრის არაკომუტაციური ანალოგი; ეს ცნება შემოტანილია თვით ლოდეს მიერ. პრობლემები მდგომარეობს ვ. ვიტის კარგად ცნობილი კონსტრუქციისა და მისივე თეორემის ანალოგის მოძებნაში ლაიბნიცის ალგებრებისთვის. ამ პრობლემებიდან პირველი ორი იქნა ამოხსნილი თ. დათუაშვილის მიერ [Da1, Da2]. განსაკუთებით საინტერესოა მისი მესამე პრობლემა, რომელსაც მივყევართ ლაიბნიცის K თეორიის ცნებამდე.

გალუას თეორიასთან მჭიდროს დაკავშირებულია სტრუქტურული თეორემები ჰოპფის მოდულებისათვის. ყცხოელი მათემატიუკოსების სტრუქტურული თეორემები [AgCh, BoChZh] განზოგადებულ იქნა ზ. მესაბლიშვილის მიერ (ვისზაუერთან ერთად) [MeWi], რომელმაც შემოიტანა გალუას ფუნქტორის ცნება და მიიღო ზოგადი სახის სტრუქტურული თეორემა.

ჩვენი გამოკვლევები ძირითადად დაფუძვნებულია მრავალი მათემატიკოსის იდეებზე და შრომებზე. მიმართულებაში წარმოდგენილი სამეცნიერო ინტერესები მჭიდროდაა დაკავშირებული ზემოთ მოკლედ მიმოხილულ მნიშვნელოვან საკითხებთან.

ციტირებული ლიტერატურა

[AgCh] M.Aguiar and S.U. Chase, Generalized Hopf modules for bimonads, Theory Appl. Categ. 27 (2013), 263–326).

[BaDoInLa] A.Bak, G.Donadze, N.Inassaridze and M.Ladra, Homology of multiplicative Lie rings, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 761-777.

[BaBe1] M.Barr and J.Beck, Acyclic modules and triples, Proc. Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer-Verlag, Berlin/New York (1966), 336-343.

[BaBe2] M.Barr and J.Beck, Homology and Standard Constructions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 80, Springer-Verlag, Berlin/New York (1969), 245-335.

[Brd] W.Browder, Algebraic K-Theory with coefficients Z/p, Geometric Applications of Homotopy Theory I, edited by M.G.Barratt and M.E.Mahowald, Springer-Verlag (1978), 40-84.

[Brn] R.Brown, q-perfect groups and universal q-central extensions, Publ. Matematiques 34 (1990), 291-297.

[BoChZh] G.Bohm, Y.Chen and L.Zhang, On Hopf monoids in duoidal categories, J. Algebra 394 (2013), 139–172).

[Ca] G.Carlsson, Equivatiant stable homotopy theory and related areas, in: G.Carlsson (Ed.), Proc. Workshop at Stanford University 2000, Homology, Homotopy Appl. 3 (2) (2001).

[CaInKhLa] J.M.Casas, N.Inassaridze, E.Khmaladze and M.Ladra, Homology of n-types and Hopf type formulas, J. Pure Appl. Algebra 200 (2005), 267-280.

[CaKhLa1] J.M.Casas, E.Khmaladze and M.Ladra, Crossed modules for Leibniz n-algebras, Forum Math. 20 (2008), 841-848.

[CaKhLa2] J. M. Casas, E. Khmaladze and M. Ladra, Higher Hopf formula for homology of Leibniz n-algebras, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), 797-808.

[CaKhLa3] J.M.Casas, E.Khmaladze and M.Ladra, On solvability and nilpotency of Leibniz n-algebras, Comm. Algebra 34 (8) (2006), 2769-2780.

[CeGaOr] A.M.Cegarra, J.M.Garcia-Calcines and J.A. Ortega, Cohomology of groups with operators, Homology Homotopy Appl. 4 (1) (2002), 1-23.

[CeKh1] A.M.Cegarra and E.Khmaladze, Homotopy classification of braided graded categorical groups, J. Pure Applied Algebra 209 (2007), 411-437

[CeKh2] A.M.Cegarra and E.Khmaladze, Homotopy classification of graded Picard categories, Advances in Math. 213 (2) (2007), 644-686.

[CoInIn] D.Conduche, H.Inassaridze and N.Inassaridze, Mod q cohomology and Tate-Vogel cohomology of groups, J. Pure Appl. Algebra 189 (2004), 61-87.

[CoRo] D.Conduche and C.Rodriguea-Fernandez, Non-abelian tensor and exterior products modulo q and universal q-central extensions, J. Pure Appl. Algebra 78 (1992), 139-160.

[Co1] A.Connes, Cohomologie cyclique et foncteurs EXT n, C. R. Acad. Sci. Paris S. A-B 296 (1983), 953-958.

[Co2] A.Connes, Non-commutative geometry, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[CuMeRo] J.Cuntz, R.Meyer and J.Rosenberg, Topology and bivariant K-theory, preprint.

[CuQu1] J.Cuntz and D.Quillen, On excision in periodic cyclic cohomology, C. R. Acad. Sci. Paris I Math. 317 (1993), 917-922.

[CuQu2] J.Cuntz and D.Quillen, On excision in periodic cyclic cohomology.II. The general case, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 318 (1994), 11-12.

[Da1] T.Datuashvili, 21. Central series for groups with action and Leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 9(2002), No.4, 671-682.

[Da2] T.Datuashvili, Witt's theorem for groups with action and free Leibniz algebras, Georgian Mathematical Journal, 11 (2004), No.4, 691-712.

[DoInLa] G.Donadze, N.Inassaridze and M.Ladra, Derived functors and Hopf type formulas in cyclic homology, Homology, Homotopy and Applications 12 (2) (2010), 321-334.

[DoInPo] G.Donadze, N.Inassaridze and T.Porter, N-Fold Čech derived functors and generalised Hopf type formulas, K-theory 35 (2005), 341-373.

[DoInKhLa] G.Donadze, N.Inassaridze, E.Khmaladze and M.Ladra, Cyclic homologies of crossed modules of algebras, J. Noncommutative Geometry 6 (4) (2012), 749-771.

[Du] J.Duskin, Simplicial methods and the interpretation of "triple" cohomology, Mem. Amer. Math. Soc. 163, 1975.

[El] G.J.Ellis, Tensor products and q-crossed modules, J.of London Math. Soc. (2) 51 (1995), 243-258.

[FiHaMa] Z.Fiedorowicz, H.Hauschild and J.P.May, Equivariant K-theory, Lecture Notes in Math. 967, Springer, 1982, 23-80.

[Gn] A. V. Gnedbaye, A non-abelian tensor product of Leibniz algebras, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 49 (4), (1999), 1149-1177.

[Gu1] D. Guin, Cohomologie et homologie non abéliennes des groupes, J. Pure Appl- Alg. 50 (1988) 109-137.

[Gu2] D. Guin, Cohomologie des algèbres de Lie croisées et K-théorie de Milnor additive, Ann. Inst. Fourier Grenoble 45 (1) (1995) , 93-118.

[Hi] N.Higson, Algebraic K-theory of stable C*-algebras, Adv. Math. 67 (1988), 1-140.

[InH1] H.Inassaridze, Algebraic K-theory, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1995, 440 pages.

[InH2] H.Inassaridze, Algebraic K-theory of normed algebras, K-Theory 21(1) (2000), 25-56.

[InH3] H.Inassaridze, Equivariant homology and cohomology of groups, Topol. and Appl. 153 (2005), 66-89.

[InH4] H.Inassaridze, Higher nonabelian cohomology of groups, Glasgow Math. J. 44 (2002), 497-520.

[InH5] H.Inassaridze, Non-abelian homological algebra and its applications, Kluwer Acad. Publ., Amsterdam, 1997, 270 p.

[InIn] H.Inassaridze and N.Inassaridze, Non-abelian homology of groups, K-Theory 378 (1999), 1-17.

[InKa1] H.Inassaridze and T.Kandelaki, Smooth K-theory of locally convex algebras, 2006, arXiv: math.KT/0603095.

[InKa2] H.Inassaridze and T.Kandelaki, La conjecture de Karoubi pour la K-theorie lisse, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 346 (2008), 1129-1132.

[InKa3] H.Inassaridze and T.Kandelaki, Smooth K-theory of locally convex algebras, Communications in Contemporary Mathematics, 13 (4) (2011), 553-577.

[InKh] H.Inassaridze and E.Khmaladze, Hopf formulas for the equivariant integral homology of groups, Proc. Amer. Math. Soc., v. 138 (9) 2010, 3037–3046.

[InN1] N.Inassaridze, Non-abelian tensor products and non-abelian homology of groups, J. Pure Appl. Algebra 112 (1996), 191-205.

[InN2] N.Inassaridze, On nonabelian tensor product modulo q of groups, Comm. Alg. 29 (2001), 2657-2687.

[InaKh] N.Inassaridze and E.Khmaladze, More about homological properties of precrossed modules, Homology, Homotopy and Applications 2 (7) (2000), 105-114.

[InKhLa1] N.Inassaridze, E.Khmaladze and M.Ladra, Non-abelian cohomology and extensions of Lie algebras, J. of Lie Theory 18 (2) (2008), 413-432.

[InKhLa2] N.Inassaridze, E.Khmaladze, M.Ladra, Non-abelian homology of Lie algebras, Glasgow Math. J. 46 (2004), 417-429.

[InLa] N.Inassaridze and M.Ladra, Hopf type formulas for cyclic homology, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, I 346, 385-390.

[Kar1] M.Karoubi, Homologie cyclique et K-theorie algebrique, C. R. Acad. Sci. Paris 297 (1983), 447-450.

[Kar2] M.Karoubi, K-theorie algebrique de certaines algebres d'operateurs, Lect. Notes in Math. 725 (1979), 254-290.

[KaLa] M.Karoubi and Th.Lambre, Quelques classes caracteristiques en theorie des nombres, Prepubl. 252, 2000, Univ. Paris VI et Paris VII.

[Ke] F.Keune, Derived functors and algebraic K-theory, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag 341 (1973), 158-168.

[Kh] E.Khmaladze, Non-abelian tensor and exterior products modulo q and universal q-central relative extension of Lie algebras, Homology, Homotopy and Applications 1 (9) (1999), 187-204.

[Ku] A.Kuku, Equivariant K-theory and the cohomology of profinite groups, in: Algebraic K-Theory, Number Theory, Geometry and Analysis, in: Lecture Notes in Math. 342, Springer, Berlin, 1984, 235-244.

[Lo1] J.-L.Loday, Cyclic homology, Grundlehren der Math. Wissenschaften, n. 301, Springer-Verlag, 1992.

[Lo2] J.-L.Loday, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, J. Pure Appl. Algebra 24 (1982), 179-202.

[LoPi] J.-L.Loday and T. Pirashvili, Universal enveloping algebas of Leibniz algebras and (co)homology, Math. Ann. 296 (1993), 139-158.

[MeWi] B.Mesablishvili and R. Wisbauer-თან) Galois functors and entwining structures. Journal of Algebra 324 (2010), 464-506.

[Nei] J. Neisendorfer, Primary homotopy theory, Memoirs Amer. Math. Soc. 25 (232), 1980.

[Ph] N.C.Philips, Equivariant K-theory and freeness of group actions on C*-algebras, Lecture Notes in Math. 1274, Springer, Berlin, 1987.

[Qu1] D.Quillen, Homotopical Algebra, Lecture Notes in Math. 43 (Springer, 1967).

[Qu2] D.Quillen, Rational homotopy theory, Ann. Math. 90 (1966), 205-295.

[Qu3] D.Quillen, Spectral sequences of a double semi-simplicial group, Topology 5 (1966), 155-157.

[SuVo] A.Suslin and V.Voevodski, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, K-theory,preprint archive 83, 1995.

[SuWo] A.Suslin and M.Wodzicki, Excision in Algebraic K-theory, Ann. Math. 136 (1) (1992), 51-122.
[Sw1] R.G.Swan, Non-abelian homological algebra and K-theory, Proc. Symp. Pure Math. 17 (1970), 88-123.
[Sw2] R.G.Swan, Some Relations between Higher K-Functors, J. Algebra 21 (1) (1972), 113-136.
[Ts] B.L.Tsygan, The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), 217-218 – Russ. Math. Survey 38 (2) (1983), 198-199.
[Vo] V.Voevodski, The Milnor conjecture, K-theory preprint archive 170, 1996.
[We1] C.Weibel, Cyclic homology for schemes, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1655-1662.
[We2] C.Weibel, Nil K-theory maps to cyclic homology, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 541-558.
[Wh] J.H.C. Whitehead, On group extensions with operators, Quart. J. Math. Oxford 2 (1) (1950), 219-228.
[Wo] M.Wodzicki, Algebraic K-theory and functional analysis, First European Congress of Mathematics, vol.II (Paris 1992), 485-496, Progr. Math.,120, Birkhauser, Basel, 1994.

2.4. კვლევის ობიექტები

(1) მთელ, რაციონალურ და სასრულ კოეფიციენტებიანი ქუილენის და კარუბი-ვილამაიორის ალგებრული K-თეორიების კოეფიციენტებით გამოკვლევა და კავშირის დადგენა გლუვ და ტოპოლოგიურ K-თეორიებთან ნამდვილ რიცხვთა ველზე ტოპოლოგიური ალგებრების კატეგორიაზე.
(2) სასრული ჯგუფის მოქმედებით ზოგიერთი ციკლური ჯგუფის ექვივარიანტული (კო)ჰომოლოგიის ჯგუფის გამოთვლა და ჯგუფების არააბელური (კო)ჰომოლოგიის განვითარება დაბალ განზომილებებში.
(3) ციკლური წარმოებული ფუნქტორების და ციკლური ჩეხის წარმოებული ფუნქტორების შემოტანა და გამოკვლევა.
(4) ფირაშვილის ჰიპოთეზის განვითარება და ფუნქტორების მნიშვნელობებით ჯგუფებში არააბელური წარმოებული ფუნქტორების სიმპლიციალური ხარისხის გამოკვლევა.
(5) ალგებრების ჰოხშილდის ჰომოლოგიისა და ჯგუფების ტეიტ - ფარელ - ვოჟელის კოჰომოლოგიის შესწავლა ჯგუფების (კო)ჰომოლოგიისადმი ხ.ინასარიძის ექვივალენტური მიდგომის გამოყენებით.
(6) ობსტრუქციის თეორიის განვითარება ლაიბნიცის ნ-ალგებრების კოჰომოლოგიისათვის.
(7) ლის და ლაიბნიცის სამეულის სისტემების და (ნ-)ალგებრების (არააბელური) (კო)ჰომოლოგიების განვითარება.
(8) მონოიდების კოჰომოლოგიის მონოიდების და კატეგორიაზე კომონადის არააბელური კოჰომოლოგია კოეფიციენტებით კოალგებრებში შესწავლა.
(9) მოქმედებები და უნივერსალურად მოქმედი ობიექტები მოდიფიცრებულ ინტერესის კატეგორიებში.
(10) ჯგუფების ექვივარიანტული არააბელური გაფართოებების შესწავლა, შესაბამისი ობსტრუქციის თეორიის განვითარება.
(11) ალგებრების მრავალნაირობების ეფექტური დაწევის მორფიზმების გამოკვლევა.
(12) ზოგიერთი ტიპის ალგებრების არააბელური ტენზორული ნამრავლის შესწავლა.
(13) ბიკატეგორიების დონეზე არაკომუტაციური რგოლების გაფართოებები.
(14) ხ.ინასარიძის ჯგუფების (კო)ჰომოლოგიისადმი ექვივარიანტული მიდგომის გავრცელება ჰოხშილდის და ციკლურ ჰომოლოგიებზე.
(15) მილნორის ალგებრული K - ფუნქტორის შეფასება ჯგუფების ექვივარიანტული ჰომოლოგიის გამოყენებით.
(16) აბსტრაქტული ალგებრის - კატეგორიათა თეორიის -გამოყენება კრიპტოგრაფიაში.
(17) ჯგუფთა თეორიის გამოყენება ხელოვნურ ნეირონულ ქსელებში.

2.5. კვლევის მეთოდიკა და მოსალოდნელი შედეგები

თემატიკის მოსალოდნელი შედეგები ემყარება კვლევის ობიექტებში მოცემულ საკითხებს და მისი მიზნების და ამოცანების განხორციელებისათვის გამოყენებული იქნება შემდეგი სამეცნიერო მეთოდები და ტექნიკა:

ალგებრული და ტოპოლოგიური K–თეორიების, (მოდ ქ) ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური ალგებრის, ოპერატორული ალგებრის და არააბელური წარმოებული ფუნქტორების მეთოდებს; ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური ალგებრის, ჰოხშილდის და ციკლური ჰომოლოგიის, ექვივარიანტული ჰომოლოგიის და ჰომოტოპიის თეორიის, კლასიკური ობსტრუქციის თეორიის მეთოდებს და სიმპლიციალურ ტექნიკას; (არააბელური) ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური ალგებრის, ჰოხშილდის და ციკლური ჰომოლოგიის, ჯგუფური რგოლების მეთოდებს, სიმპლიციალურ და სპექტრული მიმდევრობების, არააბელური და (ნ-ჯერად) ჩეხის წარმოებული ფუნქტორების, ჯვარედინი მოდულების თეორიის და კატეგორიული ალგებრის ტექნიკას.

წარმოდგენილი თემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ღირებულებაა ალგებრის თანამედროვე დარგების, კერძოდ (არააბელური) ჰომოლოგიური და ჰომოტოპიური ალგებრის, ციკლური ჰომოლოგიის, K-თეორიის და არაკომუტაციური გეომეტრიის მეცნიერული სფეროს განვითარების მხარდაჭერა მნიშვნელოვანი სამეცნიერო შედეგების წარმოდგენით. ეს თემატიკა მნიშვნელოვანია იმ კუთხითაც, რომ იგი აძლიერებს მათემატიკოსთა სამეცნიერო საზოგადოებას საქართველოში, განამტკიცებს საერთაშორისო კონტაქტებს ევროპისა და ამერიკის მათემატიკოსთა საზოგადოებებთან სამეცნიერო ვიზიტების, სამუშაო შეხვედრების, კონფერენციების და ინტერნეტ-კავშირების მეშვეობით.

2.6. მიღებული სამეცნიერო გრანტები

წლები	დასახელება
1994-1996	Algebraic K-theory and K-homology of Normed Algebras, Monoid Algebras, C-categories and Algebraic Theories, ISF-MXH000.
1996-1998	Homological Algebra, its Non-abelian and Categorical Topics. Applications to Homotopy Theory, K-theory, Algebraic Geometry and Galois Theory, CRDF.
1998-2002	Homotopical Algebra and K-theory, CNRS- 542.
1998-2001	Development and Applications of Simplicial Algebraic Techniques in the Cohomology of Algebraic Structures, Homotopy Theory, K-Theory and Cyclic Homology, INTAS Georgia – 213.
2002-2005	Algebraic K-theory, Groups and Algebraic Homotopy Theory, INTAS - 00 566.
2002-2003	K-Theory and Homotopical Algebra, FNRS 7GEPJ065513.01.
2002-2004	Homotopical Algebra and (Co)Homology of Groups, Algebras and Crossed Modules, NATO PST.CLG.979167.
2004-2006	Simplicial Algebra, Homology Theories, K-theory and Homotopy Theory .
2005-2006	K-theory, Homotopical Algebra and Homology Theories, NATO PST.CLG.979167.
2007-2009	K-theory, non-commutative geometry, homology theories, homotopy theory, operator and normed algebras, INTAS–06-1000017-8609.
2009-2011	Georgian--German Non-Commutative Partnership (Topology, Geometry, Algebra), Volkswagen Foundation.
2011-2013	Georgian--German Non-Commutative Partnership (Topology, Geometry, Algebra), Volkswagen Foundation, Extension.
2012-2014	Simplicial algebra, homology theories, K-theory and applications for algebraic and topological structures, Rustaveli Foundation DI/12/5 – 103/11.
2015 - 2018	Homotopical and categorical algebra, homology and algebraic K-theory of algebraic objects, Rustaveli Foundation FR/189/5-113/14.

2.7. თანამშრომლობა უცხოელ მათემატიკოსებთან

თემის შემსრულებლებს აქვთ განსაკუთრებით მჭიდრო სამეცნიერო კონტაქტები ევროპის წამყვან მათემატიკოსებთან. ამ მიმართულებით უნდა აღინიშნოს ქართულ-გერმანული პარტნერული ჯგუფი ალგებრასა და ტოპოლოგიაში, რომლის მიზანი ჩამოყალიბებულია შემდეგნაირად:

1. To contribute to the further successful development of pure mathematics (and its applications) in Georgia.
2. To stimulate the scientific cooperation between Georgian and German mathematicians.
3. To work on joint research projects devoted to modern topics of mathematics (particularly to Homotopical Algebra, K-Theory, Homotopy Theory, Non-Commutative Geometry, Algebraic Topology and Group, Module and Ring Theories as well) enhanced by mutual scientific visits.
4. To organize international workshops, seminars and conferences in algebra and topology with the participation of leading experts from European and US Universities.
5. To establish and develop scientific contacts with German Universities and other European Universities as well.

მისი შემადგენლობაა:

Georgian-German Algebra and Topology Partner Group

The Georgian-German Algebra and Topology Partner Group is based on the collaboration between Universities of Germany on the one hand, A. Razmadze Mathematical Institute and the Tbilisi Centre for Mathematical Sciences (TCMS) on the other hand. The Georgian-German Partner Group is consisting of Georgian and German leading researchers in the field.

Head of the Georgian-German Algebra and Topology Partner Group

Prof. Hvedri Inassaridze - A.Razmadze Mathematical Institute and TCMS.

Members:

Dr. Malkhaz Bakuradze - A. Razmadze Mathematical Institute and TCMS.
Dr. Guram Donadze - Tbilisi Centre for Mathematical Sciences.
Prof. David Green - Friedrich Schiller University of Jena.
Prof. Jens Hornbostel - University of Bonn, Hausdorff Research Institute for Mathematics.
Prof. Nick Inassaridze - A. Razmadze Mathematical Institute and TCMS.
Prof. George Khimshiashvili - A.Razmadze Mathematical Institute.
Dr. Emzar Khmaladze - A. Razmadze Mathematical Institute and TCMS.
Dr. Bachuki Mesablishvili - A.Razmadze Mathematical Institute and TCMS.
Prof. Ralf Meyer - University of Goettingen.
Prof. Birgit Richter - University of Hamburg.
Prof. Gerhard Roehrle - University of Bochum.
Prof. Samson Saneblidze - A. Razmadze Mathematical Institute.
Prof. Thomas Schick - University of Goettingen, Courant Research Centre "Higher Order Structures in Mathematics”.
Prof. Rainer Vogt - University of Osnabrueck.
Dr.Christian Voigt - University of Muenster.
Prof. Robert Wisbauer - Heinrich Heine University of Dusseldorf.
Dr. Dali Zangurashvili - A. Razmadze Mathematical Institute and TCMS.

თემა 3: მოდალური და ინტუიციონისტური ლოგიკის სემანტიკური ასპექტები

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ლოგიკის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: მამუკა ჯიბლაძე (თემის ხელმძღვანელი), დავით გაბელაია, ლევან ურიდია, ევგენი კუზნეცოვი, გიორგი ნადარეიშვილი.

მოკლე მიმოხილვა

ჩვენი ჯგუფი გეგმავს ევკლიდურ სივრცეთა გეომეტრიულ თვისებებზე მსჯელობისათვის შესაფერისი პოლიედრული ლოგიკების შესწავლას. ეს კვლევა ემყარება ცოტა ხნის წინ შემუშავებულ პოლიედრულ სემანტიკას საბაზისო მოდალური ლოგიკისათვის. ამ პროექტში ჩვენი მიზანია საფუძვლიანად გამოვიკვლიოთ პოლიედრული ლოგიკები 2 და 3 განზომილებებში; გავავრცელოთ პოლიედრული მიდგომა უფრო მძლავრ ენებზე და შევქმნათ აპარატი ჩვენი შედეგების d-ლოგიკებისა და სუპერინტუიციონისტური ლოგიკების სფეროში სათარგმნად.

ისტორიული კონტექსტი

მოდალური ლოგიკის ტოპოლოგიური სემანტიკა პირველად შემოიღეს ცაო-ჩენმა [23], მაკკინსიმ [18], მაკკინსიმ და ტარსკიმ [19]. მაკკინსი-ტარსკის ცნობილი თეორემა და მისი შემდგომი გაძლიერებები აჩვენებს, რომ თუ მოდალურ რომბს შევუსაბამებთ ტოპოლოგიური ჩაკეტვის ოპერატორს, მაშინ ლიუისის კარგად ცნობილი აქსიომატური სისტემა **S4** იქნება თავის თავში მკვრივი მეტრიკული სივრცეების მოდალური ლოგიკა. კერძოდ, **S4** არის კანტორის სივრცის **C**-ს მოდალური ლოგიკა, რაციონალურ რიცხვთა წრფის **Q**-ს მოდალური ლოგიკა და ევკლიდური სივრცის $\mathbf{R}^n$-ის მოდალური ლოგიკა. ეს იძლევა ლოგიკის და ტოპოლოგიის კავშირის კლასიკურ პარადიგმას.

ამ საწყის განვითარებას მოჰყვა რიგი საინტერესო შედეგებისა სისრულისა და განსაზღვრებადობის კუთხით როგორც **S4**, ისე **wK4** მოდალური ლოგიკების გაფართოებებისთვის (ეს უკანასკნელი მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც მოდალური რომბი ინტერპრეტირდება ტოპოლოგიურ სივრცეში, როგორც წარმოებული სიმრავლის აღების ოპერატორი [7]) და სუპერინტუიციონისტური ლოგიკებისათვის (ამ შემთხვევაში ფორმულები ინტერპრეტირდება, როგორც სივრცის ღია სიმრავლეები). ამ ფორმალიზმებსა და შესაბამის ინტერპრეტაციებს შორის არსებული კავშირი საშუალებას გვაძლევს, ერთი ფორმალიზმის ფარგლებში მიღებული შედეგები მეორეში გადავიტანოთ, როგორც ეს ასახულია [12]-ში.

შედეგად მიღებული თეორია კარგად არის აღწერილი, მაგ. წიგნში „Handbook of Spatial Logics“ [3], რომელშიც წარმოდგენილია ამ სამეცნიერო მიმართულების უახლესი მიღწევები და მდგომარეობა 2007 წლისათვის. ამ პროექტისთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამ წიგნის ის თავი, რომელიც მოდალური ლოგიკისა და ტოპოლოგიის კავშირს შეეხება [6], თუმცა სხვა თავებშიც კარგად არის წარმოჩენილი, თუ როგორ ვრცელდება ასეთი მიდგომები სხვა დარგებზე, როგორებიცაა დრო-სივრცის გეომეტრია ან ციფრული გამოსახულების კომპიუტერული ანალიზი.

უახლესი განვითარება

მოდალური ლოგიკის საშუალებით ტოპოლოგიის უფრო სიღრმისეული შემეცნების ერთ-ერთი მიდგომაა გამნიშვნელიანების შეზღუდვა, როდესაც პროპოზიციული ცვლადების გამნიშვნელიანება ხდება არა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეებზე, არამედ ქვესიმრავლეთა სიმრავლის გარკვეულ ქვეოჯახზე. მას შემდეგ, რაც არასისრულის ფენომენი იქნა აღმოჩენილი, განსაზღვრებად ქვესიმრავლეებზე გამნიშვნელიანების შეზღუდვა მოდალურ ლოგიკაში სტანდარტულ ტექნიკად გადაიქცა.

ეს მიდგომა წარმატებით იქნა გამოყენებული მოდალური ლოგიკის ტოპოლოგიური სემანტიკის კონტექსტში [8], სადაც ნაჩვენები იყო, რომ **S4**-ის ნებისმიერი ნორმალური გაფართოება სრულია

კანტორის სივრცის C-ს (ან რაციონალურ რიცხვთა წრფის Q-ს) მიმართ, თუ გამნიშვნელიანება შესაბამისად არის შეზღუდული. ეს შედეგი წარმოაჩენს ასეთი მიდგომის სიმძლავრეს, რადგან სტანდარტული ინტერპრეტაციები ამ და სხვა ევკლიდურ სტრუქტურებზე, როგორებიცაა $\mathbf{R}^n$, იძლევა მხოლოდ **S4** სისტემას, მაშინ როდესაც ასეთი მიდგომისას შესაძლებელი ხდება **S4**-ის არათვლად რაოდენობა გაფართოებათა სრული სპექტრის მოცვა.

იგივე მიმართულებით დასმულ ბუნებრივ შეკითხვას წარმოადგენს, თუ რა სახის მოდალური სისტემები ჩნდება, როდესაც არამხოლოდ განსახილველი სივრცეა „ტოპოლოგიურად კარგი" არამედ დასაშვები გამნიშვნელიანებებიც გაირბენენ სივრცის „გეომეტრიულად კარგ" ქვესიმრავლეებს. ასეთმა მიდგომამ, უკანასკნელ წლებში, შესამჩნევი ყურადღება დაიმსახურა [4, 15, 16, 21, 22].

ამ მიმართულებით პროექტის მკვლევართა გუნდის უახლესი ძალისხმევის შედეგია მოდალური ლოგიკისა და მასთან დაკავშირებული ფორმალიზმების **პოლიედრული სემანტიკის** შემუშავება, რომელშიც ლოგიკური ფორმულები ინტერპრეტირებულია, როგორც ევკლიდური სივრცის $\mathbf{R}^n$-ის პოლიედრები [1, 2, 9, 13, 14]. პოლიედრები არიან წრფივ უტოლობათა სისტემების ამონახსნები. n-განზომილებიანი პოლიედრები ცენტრალურ როლს თამაშობენ უბან-უბან-წრფივ გეომეტრიაში, რომელიც მჭიდროდ ებმის პრაქტიკულ გამოყენებებს, რადგან ფიზიკური სამყაროს მრავალ გამოთვლით მოდელში ობიექტები და მათი საზღვრები პრაქტიკაში 2D და 3D პოლიედრებით არის წარმოდგენილი.

ჩვენი უახლესი კვლევებით გამოვლინდა მოდალური პოლიედრული ლოგიკების იერარქია, რომელიც ჩნდება ევკლიდური სივრცეებიდან $\mathbf{R}^n$ ყოველი $n>0$-თვის [2]. მოხდა ამ სისტემების აქსიომატიზაცია და მათი ყოფაქცევის შესწავლა. ასევე შემუშავებულია კრიტერიუმი იმის დასადგენად, არის თუ არა ლოგიკა პოლიედრული [2]. ეს ქმნის მყარ საფუძველს მომავალი მუშაობისთვის, რომელიც წინამდებარე პროექტის ფარგლებშია დაგეგმილი.

პოლიედრული სემანტიკა საკმაოდ მძლავრი აღმოჩნდა საიმისოდ, რომ მიესადაგოს უფრო ძლიერ ფორმალურ ენებს, რომლებსაც პრაქტიკული გამოყენებები გააჩნიათ. მხედველობაში გვაქვს, მაგალითად, სივრცითი მოდელის შემოწმება (spatial model-checking), რომელიც გამოიყენება სამედიცინო გამოსახულებების ანალიზში, ციფრულ გეომეტრიაში, სივრცით მონაცემთა ბაზებსა და GIS-ში [5, 10, 11]. ამ სფეროებში 2D და 3D პოლიედრული სემანტიკის ინტეგრაცია შესაძლებლობას მისცემს პარადიგმას გადავიდეს პიქსელებიდან/ვოქსელებიდან უწყვეტ 3D ობიექტებზე და 2D ზედაპირებზე, და ამავე დროს შეინარჩუნოს გამოთვლითი დამუშავებადობა, რადგან ეს სტრუქტურები ლოგიკურად ზედმიწევნით წარმოდგება 4-ზე ნაკლები სიმაღლის სასრული ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეების ტერმინებში.

დაგეგმილი კვლევა

ჩვენი კონკრეტული მიზნები სამი მიმართულებით ფოკუსირდება:

- გამოვიკვლიოთ 2D და 3D პოლიედრული ლოგიკების არეალი, რაც მიზნად ისახავს ყველა ასეთი ლოგიკების ან ასეთი ლოგიკების დიდი კლასების ამომწურავ დახასიათებას.
- გავავრცელოთ პოლიედრული სემანტიკა უფრო მდიდარ მოდალურ ენებზე, რომლებიც იჭერს სხვადასხვა სივრცით თვისებებს რომლებიც საინტერესოა სივრცითი მოდელის შემოწმების თვალსაზრისით ან 2D და 3D ბადეების ავტომატური ლოგიკური ანალიზის თვალსაზრისით.
- ერთიანი მომცველი ჩარჩოს შემუშავება, რომელიც დააკავშირებს ჩაკეტვის ოპერატორით ინტერპრეტაციას, წარმოებული სიმრავლის აღების ოპერატორით ინტერპრეტაციასა და ინტუიციონისტურ ინტერპრეტაციებს პოლიედრული სემანტიკის შემთხვევაში.

კვლევის მეთოდოლოგია და მისი შესაბამისობა კვლევის მიზნებსა და ამოცანებთან

პროექტს აქვს სამი მთავარი კვლევითი ამოცანა, რომელსაც ქვემოთ აღვწერთ.

ამოცანა A. პოლიედრული ლოგიკები *საბაზისო მოდალური ენისათვის.* მოდალური და ინტუიციონისტური ლოგიკის პოლიედრული სემანტიკის ბოლოდროინდელმა შესწავლამ ცხადყო, რომ n-განზომილებიანი პოლიედრული ლოგიკები არიან $S4.Grz_{n+1}$-ს გაფართოებები [1, 2]. მაშასადამე ეს ლოგიკები ლოკალურად სასრულები არიან და ისინი ხასიათდება არაუმეტეს n+1 სიმაღლის სასრული ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეებით. ეს იძლევა საბაზისო მოდალურ ენაში ამ ლოგიკების შესწავლის მყარ მეთოდოლოგიურ საფუძველს. ერთი მძლავრი ტექნიკა, რომელიც ჩვენს წინა გამოკვლევებში უაღრესად სასარგებლო აღმოჩნდა, არის იანკოვ-ფაინის ფორმულების მიდგომა (ე. წ. აკრძალული კონფიგურაციები). პოლიედრული მოდელებისა და კრიპკეს სტრუქტურების დასაკავშირებლად ჩვენ ვიყენებთ უბან-უბან წრფივი გეომეტრიის ტექნიკას (ნერვები, ტრიანგულაცია). შესაძლო გამოყენებების გათვალისწინებით, ჩვენი მთავარი ამოცანაა დავახასიათოთ 2D და 3D პოლიედრული მოდალური ლოგიკები, შესაძლო განზოგადებით მაღალ განზომილებებში. რიგი წინასწარი და მოსამზადებელი შედეგები უკვე მიღებულია *ყველა ბრტყელი 2D პოლიედრული ლოგიკების* დახასიათების სახით [14]. აქ პოლიედრს ეწოდება *n-ბრტყელი,* თუ ის თავადაც n-განზომილებიანია და თანაც იდგმება n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში. ხოლო ლოგიკას ეწოდება *ბრტყელი პოლიედრული,* თუ ის სრულია ბრტყელი პოლიედრების რაიმე კლასის მიმართ. ასევე დაგეგმილია ბრტყელი 3D პოლიედრული ლოგიკების სტრუქტურის შესწავლა. ისინი განსაკუთრებული ინტერესის საგანს წარმოადგენენ, რადგან ფიზიკური სამყაროს უმრავლესი გამოთვლითი მოდელები ეფუძნება 3D სივრცეში ჩადგმულ 3D პოლიედრებს. ასევე მიზნად ვისახავთ სხვა (შესაძლოა ყველა) 2D და 3D პოლიედრული ლოგიკების სისტემატურ აღწერას. კვლევის კონკრეტული გეგმა დაყოფილია შემდეგ ქვეამოცანებად:

A.1 ბრტყელი 2D პოლიედრული ლოგიკების შესახებ არსებული საწყისი მიგნებების ამსახველი საჟურნალო პუბლიკაციის მომზადება.
A.2 ბრტყელი 3D პოლიედრული ლოგიკების სპექტრის გამოკვლევა.
A.3 ზემოთ მოყვანილი A.1 და A.2 ქვეამოცანებში მიღებული შედეგების განზოგადება ნებისმიერი განზომილების ბრტყელ პოლიედრულ ლოგიკებზე.
A.4 ყველა 2D და 3D პოლიედრული ლოგიკების სისტემატური გამოკვლევა.

ამოცანა B. პოლიედრული სემანტიკა *გაფართოებული მოდალური ენებისთვის.* საბაზისო მოდალური ენა იჭერს პოლიედრების მხოლოდ ლოკალურ გეომეტრიულ თვისებებს, როგორებიცაა ლოკალური ბმულობა და განზომილება (რამდენი ბმულობის კომპონენტი მიიღება მოცემული წახნაგის მიდამოში თუ ამ წახნაგს წავშლით და რა განზომილებისაა ისინი), მაშინ როდესაც ბევრი გეომეტრიული თვისება თავისი ბუნებით არალოკალურია. შესაბამისად, ჩვენ მიზნად ვისახავთ შევისწავლოთ იმგვარად გამდიდრებული მოდალური ენების პოლიედრული სემანტიკა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ვიმსჯელოთ არალოკალურ თვისებებზე. სახელდობრ, ჩვენ მიზნად ვისახავთ ენაში დავამატოთ *გლობალური მოდალობები* („ყველგან“ და „სადღაც“) [20], *სხვაობის მოდალობა* („სადღაც სხვაგან“) [17] და *წვდომადობის მოდალობა* (კლასიკური ტემპორალური „სანამ“ ოპერატორი, ბინარული ოპერატორი რომელიც გამოხატავს შემდეგს „φ წვდომადია უწყვეტი გზით, რომლის გასწვრივაც ყველგან ჭეშმარიტია ψ“) [11] და შევისწავლოთ ამ გამდიდრებული ენების პოლიედრული სემანტიკა. არსებულმა წინასწარმა გამოკვლევამ აჩვენა, რომ პოლიედრულ სემანტიკას შეუძლია გაუმკლავდეს ამ დამატებით მოდალობებს. მეტიც, წვდომადობის მოდალობისთვის – რომელიც ყველაზე გამომსახველია ჩამოთვლილი მოდალობებიდან – პოლიედრული სემანტიკის სივრცითი მოდელის შემოწმებაში და სამედიცინო 3D ვიზუალიზაციაში გამოყენების მიზნით კვლევა უკვე დაწყებულია პიზაში არსებულ სივრცითი ლოგიკის ჯგუფთან, რაც განავრცობს მათ არსებულ კვლევებს [5, 10, 11]. ჩვენი მიზანია, ასეთი გამოყენებებისათვის მყარი თეორიული საფუძველი მოვამზადოთ გაფართოებული მოდალური ენების საბაზისო პოლიედრული ლოგიკების დახასიათების საშუალებით 3-ზე ნაკლები ან ტოლი განზომილებებისთვის, შესაძლო განზოგადებებით უფრო მაღალ განზომილებებზე. ამ მიზნის განხორციელების მოკლე გეგმა მოცემულია ქვეამოცანების შემდეგი მიმდევრობით:

B.1 პოლიედრული სემანტიკის გავრცელება გლობალური მოდალობების, სხვაობის მოდალობის და წვდომადობის მოდალობის შემცველ ენებზე.
B.2 საბაზისო ლოგიკების დახასიათება განზომილებებისთვის 1 და 2.
B.3 საბაზისო ლოგიკების გამოკვლევა 3-ზე მეტი ან ტოლი განზომილებებისთვის და სივრცითი მოდელების შემოწმებაში გამოყენებების შესწავლა.

<u>ამოცანა C.</u> **d-ლოგიკებზე და ინტუიციონისტურ ლოგიკებზე გადასვლა.** მოდალობები შეიძლება ინტერპრეტირდეს ორი სხვადასხვა ტოპოლოგიურად შინაარსიანი გზით, რომლებსაც ზოგჯერ უწოდებენ C-სემანტიკას და d-სემანტიკას (მოდალობა, როგორც ჩაკეტვის ოპერატორი და მოდალობა, როგორც წარმოებული სიმრავლის ოპერატორი). შედეგად მიღებული ლოგიკებიც ცნობილია როგორც C-ლოგიკები და d-ლოგიკები [7]. ეს ინტერპრეტაციები ასევე მჭიდრო კავშირშია ინტუიციონისტური მაკავშირებლების ინტერპრეტაციასთან ტოპოლოგიის ღია სიმრავლეების ჰეიტინგის ალგებრაში. ეს სამგვარი ბმა C-ლოგიკებსა, d-ლოგიკებსა, და ინტუიციონისტურ ლოგიკებს შორის კარგადაა შესწავლილი როგორც სემანტიკურად (ბლოკ-ესაკიას შესაბამისობა) ასევე სინტაქსურად (გიოდელის თარგმანი, გამყოფი თარგმანი, მოდალური კომპანიონები სუპერინტუიციონისტური ლოგიკებისთვის). ჩვენ მიზნად ვისახავთ გამოვიყენოთ ეს მძლავრი საშუალებები საიმედო ზოგადი თეორიული აპარატის შესაქმნელად, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ამოცანებში A და B მიღებული შედეგები (რომლებიც ორიენტირებულია C-ლოგიკების შესწავლაზე) გადავიტანოთ პოლიედრულ სემანტიკაზე d-ლოგიკებისთვის და ინტუიციონისტური ლოგიკებისთვის. ასეთი აპარატი საშუალებას მისცემს ამ მიმართულებით წარმოებულ მომავალ კვლევებს მარტივად გადაიტანონ შედეგები სიგნატურებისა და ინტერპრეტაციების ერთი არეალიდან მეორეში. ამ ხასიათის მოსამზადებელი წინასწარი კვლევა უკვე ჩატარებულია ჩვენი ჯგუფის მიერ [13]-ში კონკრეტული 2 განზომილებიანი შემთხვევისთვის. ჩვენ ვგეგმავთ განვაზოგადოთ ეს მიდგომა ალგებრული აპარატისა და ორადობის აპარატის საშუალებით [12]. ქვეამოცანებად დაყოფა შემდეგია:

C.1 შევიმუშაოთ C-ლოგიკების, d-ლოგიკების და ინტუიციონისტური ლოგიკების დამაკავშირებელი სისტემატური აპარატი პოლიედრული სემანტიკის პირობებში.
C.2 გამოვიყენოთ შემუშავებული აპარატი A და B ამოცანებში მიღებული შედეგების სათარგმნად d-ლოგიკებისა და ინტუიციონისტური ლოგიკების არეალში.

საერთაშორისო თანამშრომლობა და ინსტიტუციური კოლაბორაცია

დასახული კვლევების ფარგლებში იგეგმება თანამშრომლობა ლოგიკის, ენისა და გამოთვლების ინსტიტუტთან (ILLC), ამსტერდამის უნივერსიტეტი (ნიდერლანდები), ფედერიგო ენრიკესის სახელობის მათემატიკის დეპარტამენტთან, მილანის უნივერსიტეტი (იტალია), და ფორმალური მეთოდების და საშუალებების ლაბორატორიასთან (FMT lab) (რომელიც თავის მხრივ არის ინფორმაციული მეცნიერებების და ტექნოლოგიების ინსტიტუტის (ISTI) ნაწილი, ერთ-ერთი ინსტიტუტისა იტალიის კვლევების ეროვნული საბჭოში (CNR)), რომელიც მდებარეობს პიზაში (იტალია).

პირველ ორ დაწესებულებასთან ჩვენ ნაყოფიერი თანამშრომლობის ხანგრძლივი ისტორია გვაკავშირებს. პოლიედრული სემანტიკის ნოვატორული კვლევა, რომელიც წინამდებარე საპროექტო განაცხადის საფუძველს წარმოადგენს, სწორედ ნიკოლოზ ბეჟანიშვილთან (ILLC, ამსტერდამი) და ვინჩენცო მარასთან (მილანის უნივერსიტეტი) მჭიდრო თანამშრომლობით წარიმართა [2, 9].

ახლახანს, ნიკოლოზ ბეჟანიშვილთან ერთად, ჩვენ თანამშრომლობა დავიწყეთ FMT lab-ის (პიზა) კვლევით ჯგუფთან (ვინჩენცო ჩანჩა, დიეგო ლატელა, მიკი მასსინკი). ეს თანამშრომლობა მოიცავს პოლიედრული სემანტიკის გამოყენებას სივრცული მოდელების შემოწმების დარგში. უკვე მიღებულია რიგი წინასწარი შედეგები. ამ შედეგებზე დაყრდნობით პიზას გუნდის მიერ შემუშავებულია ინსტრუმენტის პროტოტიპული ვარიანტი.

ჩვენ ვაპირებთ აქტიურად გავაგრძელოთ აღნიშნული თანამშრომლობა დაგეგმილი კვლევების ფარგლებში.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] S. Adam-Day. Polyhedral completeness in intermediate and modal logics. Master's Thesis, Available as ILLC report: MoL-2019-08, 2019.

[2] S. Adam-Day, N. Bezhanishvili, D. Gabelaia, and V. Marra. The nerve criterion and polyhedral completeness of intermediate logics. 2020. Submitted. Available as ILLC preprint: PP-2020-22.

[3] M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, J. van Benthem, editors. Handbook of Spatial Logics. Springer, 2007.

[4] P. Balbiani, T. Tinchev, D. Vakarelov. Modal logics for region-based theories of space. Fundam. Inform.,81(1-3):29–82, 2007.

[5] G. Belmonte, V. Ciancia, D. Latella, and M. Massink. Voxlogica: A spatial model checker for declarative image analysis. In Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems - 25th International Conference, TACAS 2019, volume 11427 of Lecture Notes in Computer Science, pages 281–298. Springer, 2019.

[6] J. van Benthem and G. Bezhanishvili.Modal logics of space. In Handbook of Spatial Logics, pages 217–298. Springer, Dordrecht, 2007.

[7] G. Bezhanishvili, L. Esakia, D. Gabelaia. Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces, Studia Logica, 81 (2005), pp. 325–355.

[8] G. Bezhanishvili, D. Gabelaia, J. Lucero-Bryan. Topological completeness of logics above S4, Journal of Symbolic Logic, 80: 520–566, 2015.

[9] N. Bezhanishvili, V. Marra, D. McNeill, and A. Pedrini. Tarski's theorem on intuitionistic logic, for polyhedra. Ann. Pure Appl. Log., 169(5):373–391, 2018.

[10] V. Ciancia, S. Gilmore, G. Grilletti, D. Latella, M. Loreti, and M. Massink. Spatio-temporal model checking of vehicular movement in public transport systems. Int. J. Softw. Tools Technol. Transf., 20(3):289–311, 2018.

[11] V. Ciancia, D. Latella, M. Loreti, and M. Massink. Model checking spatial logics for closure spaces. Log. Methods Comput. Sci., 12(4), 2016.

[12] L. Esakia, Intuitionistic logic and modality via topology. Annals of Pure and Applied Logic 127 (1-3):155–170 (2004).

[13] D. Gabelaia, K. Gogoladze, M. Jibladze, E. Kuznetsov, and L. Uridia. An axiomatization of the d-logic of planar polygons. In Language, Logic, and Computation - 12th International Tbilisi Symposium, TbiLLC 2017, Revised Selected Papers, volume 11456 of Lecture Notes in Computer Science, pages 147–165. Springer, 2017.

[14] D. Gabelaia, M. Jibladze, E. Kuznetsov and L. Uridia. Characterization of flat polygonal logics. Abstract of a talk delivered at Topology, Algebra, and Categories in Logic, Nice. 2019. URL: https://math.unice.fr/tacl/assets/2019/abstracts.pdf

[15] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, F. Wolter, M. Zakharyaschev. Spatial logics with connectedness predicates. Logical Methods in Computer Science, 6(3):3:5, 43, 2010.

[16] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, M. Zakharyaschev. Spatial reasoning with RCC8 and connectedness constraints in Euclidean spaces. Artificial Intelligence, 217:43–75, 2014.

[17] A. Kudinov and V. Shehtman. Derivational modal logics with the difference modality. In Leo Esakia on Duality in Modal and Intuitionistic Logics, pages 291–334. Springer Netherlands, 2014.

[18] J. C. C. McKinsey, A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology, The Journal of Symbolic Logic,vol. 6 no. 4 (1941) pp. 117–134.

[19] J. C. C. McKinsey and A. Tarski. The algebra of topology. Annals of Mathematics, 45:141–191, 1944.

[20] V. Shehtman. “Everywhere” and “here”. J. Appl. Non-Classical Logics, 9(2-3):369–379, 1999.

[21] D. Vakarelov. Dynamic mereotopology: A point-free theory of changing regions. I. Stable and unstable mereotopological relations. Fundam. Inform., 100(1-22):29–82, 2010.

[22] D. Vakarelov. Dynamic mereotopology. II: Axiomatizing some Whiteheadean type space-time logics. In Advances in Modal Logic. Vol. 9. Proceedings of the 9th conference (AiML 2012), Copenhagen, Denmark, August 22–25, 2012, pages 538–558. London: College Publications, 2012.

[23] T. Tsao-Chen. Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication. Bulletin of the American Mathematical Society, 44:737–744, 1938.

კვლევის შედეგების გავრცელების გეგმა

კვლევის შედეგები დარგის წამყვან კონფერენციებზე იქნება წარდგენილი - მაგალითად ისეთებზე, როგორებიცაა TACL, AiML, BLAST, ToLo. მიღებული შედეგები დარგის მოწინავე მეცნიერულ ჟურნალებში გამოქვეყნდება.

კვლევითი ჯგუფი აქტიურადაა ჩართული საქართველოში რეგულარული საერთაშორისო სამეცნიერო ფორუმების ორგანიზებაში, კერძოდ:

- Topological Methods in Logic (ToLo), ორგანიზებული ორ წელიწადში ერთხელ თბილისში. http://rmi.tsu.ge/tolo6/
- Tbilisi Symposium Logic, Language and Computation (TbiLLC), ორგანიზებული ორ წელიწადში ერთხელ საქართველოში, მოხსენებული შედეგები ქვეყნდება Springer-ის მიერ. http://www.illc.uva.nl/Tbilisi/
- International Tbilisi Summer School in Logic and Language, ორგანიზებული ყოველწლიურად კურტ გიოდელის საზოგადოების მიერ თბილისში: https://www.logic.at/tbilisi20/

პროექტის ფარგლებში მიღებული შედეგები ასევე გავრცელებული იქნება ზემოხსენებულ შეხვედრებზე, რომლებიც, აღსანიშნავია, რომ დარგის მოწინავე ექსპერტებს იზიდავენ.

იგეგმება მჭიდრო თანამშრომლობა FMT lab-ის სივრცული ლოგიკის მკვლევართა ჯგუფთან, კვლევის შედეგების სამედიცინო გამოსახულებების კომპიუტერული ანალიზის მიმართულებით გამოყენებისთვის. წინასწარი შედეგები აღწერილია:

N. Bezhanishvili, V. Ciancia, D. Gabelaia, G. Grilletti, D. Latella, M. Massink, “Geometric Model Checking of Continuous Space”, arXiv preprint arXiv: 2105.06194v1, https://arxiv.org/abs/2105.06194

მიკვლეულ შედეგებზე დაფუძნებით, FMT lab-ის მიერ მიმდინარეობს მუშაობა ახალ მოდელ-შემმოწმებელ კომპიუტერულ პროგრამაზე (PolyLogicA). ამ პროგრამის მიზანია ფორმულების ეფექტური შემოწმება პოლიედრულ მოდელებზე, ამავდროულად მის წინამორბედ ხელსაწყოში VoxLogicA (https://github.com/vincenzoml/VoxLogicA) აპრობირებული, უკვე შემოწმებული ოპტიმიზაციის ტექნიკების გამოყენებით. PolyLogicA ხელმისაწვდომი იქნება როგორც პროგრამული უზრუნველყოფა უფასო და ღია საწყისი კოდით, ისეთ საჯარო ონლაინ საცავში როგორიცაა Github.

თემა 4: ტოპოლოგიური ობიექტების ახალი ალგებრული მოდელები და მათი გამოყენებები გეომეტრიის, ტოპოლოგიის, ალგებრის და ფიზიკის საკითხებში

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის გეომეტრია-ტოპოლოგიის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: თორნიკე ქადეიშვილი (თემის ხელმძღვანელი), ალექსანდრე ელაშვილი, სამსონ სანებლიძე, თეიმურაზ ფირაშვილი, მალხაზ ბაკურაძე, ვახტანგ ლომაძე.

ალგებრული ტოპოლოგიის ძირითადი მეთოდია რთული გეომეტრიული ან ტოპოლოგიური ობიექტებისათვის გარკვეული ალგებრული მოდელების შეთანადება და მათი შესწავლა ამ მოდელების საშუალებით.

გეომეტრია-ტოპოლოგიის განყოფილებას გააჩნია მრავალწლიანი გამოცდილება ასეთი მოდელების აგებასა და მათ გამოყენებებში. წინამდებარე პროექტით გათვალისწინებულია მუშაობა ალგებრულ მოდელებზე რამდენიმე განსხვავებული მიმართულებით:

ბოლო ათწლეულში მათემატიკის და ფიზიკის რიგ დარგებში წინ წამოიწია ე.წ. ჰომოტოპიური ალგებრების თეორიამ. ამ დარგში, J. Stasheff-ის შემდეგ პირველი ნაშრომები ჰქონდა თ. ქადეიშვილს, შემდეგ მას შეუერთდა ს. სანებლიძე, შემდგომ ამ საქმიანობაში ჩაერთვნენ მაშინდელი ასპირანტები ზ. ხარებავა (დისერტაცია დაიცვა შრდილო კაროლინის უნივერსიტეტში 2004 წელს), რ. ქურდიანი (დისერტაცია დაიცვა აბერდინში 2006 წელს) და დღეს, შეიძლება ითქვას, გეომეტრია-ტოპოლოგიის განყოფილება წამყვანი ცენტრია A_∞-ალგებრების თეორიაში. პარალელურად ა. ელაშვილის ნაშრომებში ვითარდებოდა ფორბენიუსის ალგებრების თეორია. ორივე ამ თეორიას აღმოაჩნდა გამოყენებანი თეორიული ფიზიკის საკითხებშიც. ამ მხრივ უაღრესად სასარგებლოა მომქმედი სემინარი ინსტიტუტის თეორიული ფიზიკის, მათემატიკური ფიზიკის, მათემატიკური ლოგიკის, ალგებრის და გეომეტრია-ტოპოლოგიის განყოფილებების თანამშრომელთა მონაწილეობით.

განყოფილებას დაუბრუნდა მისი ძველი თანამშრომელი, თეიმურაზ ფირაშვილი, რომელიც წლების განმავლობაში მუშაობდა გერმანიის, საფრანგეთის, ბრიტანეთის ცნობილ სამეცნიერო ცენტრებში და უნივერსიტეტებში.

ხაზი უნდა გაესვას განყოფილების წევრთა თანამშროლობას ერთმანეთთან და სხვა განყოფილებების წევრებთან. თ. ქადეიშვილს და ს. სანებლიძეს აქვთ არაერთი ერთობლივი ნაშრომი. ასევე, ერთობლივი ნაშრომები აქვთ ა. ელაშვილს და ლოგიკის განყოფილების გამგეს მ. ჯიბლაძეს, მ. ბაკურაძეს და მ. ჯიბლაძეს.

ქვემოთ მოგვყავს პროექტის ძირითად შემსრულებელთა საკვლევი თემების აღწერა. თითეულ შემთხვევაში ჩამოყალიბებული იქნება პრობლემის არსი, მისი აქტუალობა, სიახლე, მეცნიერული ღირებულება და მონაწილის მიერ ადრე შესრულებული სამუშაო.

თორნიკე ქადეიშვილი: ასოციატურ ალგებრათა დეფორმაციები

ასოციატურ ალგებრათა დეფორმაციათა თეორია ზოგადი დეფორმაციის თეორიის მნიშვნელოვანი ნაწილია. მას აქვს ღრმა გამოყენებები მათემატიკისა და ფიზიკის სხვადასხვა დარგებში, მაგალითად ეს თეორია ძირითადი იარაღია დეფორმაციული დაკვანტვის ამოცანაში. ეს დეფორმაციები კონტროლდება dg-ლის ალგებრის სტრუქტურით, რომელიც წარმოიშვება ჰოხშილდის კოჯაჭვურ კომპლექსში. ამ პროექტში ვაპირებთ გამოვიყენოთ ამ კომლექსის უფრო მდიდარი ალგებრული სტრუქტურა - სტრუქტურა ჰომოტოპიური გერსტენჰაბერის ალგებრისა (hGa სიმოკლისთვის). ამ სტრუქტურის შემქმნელი მულტიოპერაციები შემოტანილი იყო თ. ქადეიშვილის ნაშრომში [Kade1] Kade2] სტაშეფის A_∞ ოპერაციების ჰოხშილდის კოჯაჭვების სახით ინტერპრეტაციის მიზნით. მათ ლიტერატურაში გეტცლერ-ქადეიშვილის ოპერაციებს უწოდებენ, მათი გამოყენებით იყო დამტკიცებული დელინის ცნობილი ჰიპოთეზა მაკლური-სმიტის და ბერგერ-ფრესეს მიერ.

შემდგომ აღმოჩნდა [GerVoron], რომ ეს ოპერაციები ქმნიან B_∞ -ალგებრის სტრუქტურას და იწვევენ გერსტენჰაბერის ალგებრის სტრუქტურას ჰოხშილდის კოჰომოლოგიებში, სწორედ ამიტომ ეწოდა მას hGa - ჰომოტოპიური გერსტენჰაბერის ალგებრა.
ამ პროექტში ჩვენ ვაპირებთ გამოვიყენოთ ეს hGa სტრუქტურა ასოციატურ ალგებრათა დეფორმაციის თეორიის პრობლემებში.

არსებული ლიტერატურული მონაცემები

1. T. Kadeishvili, On the Homology Theory of Fibrations, Russian Math. Surveys, 35, 3, 1980, 231-238.
2. J. Huebschmann and T. Kadeischvili, Small Models for Chain Algebras. Math. Zeitschrift, 207, 1991, 245-280.
3. T. Kadeishvili and S. Saneblidze, A cubical model for a fibration, Jornal of Pure and Appl. Algebra, 196/2-3, 2005, pp 203-228.
4. T. Kadeishvili, On the bar construction of a bialgebra, Homology, Homotopy and Appl., v. 7(2) , 2005, 109-122.
5. T. Kadeishvili and P. Real, Free resolutions for differential modules over differential algebras, Journal of Mathematical Sciences, v. 43 (2006), 1-16.
6. T. Kadeishvili, Cohomology C_∞-algebra and rational homotopy type. Banach Center Publications, v. 85, 2009, 225-240.
7. T. Kadeishvili, T. Lada, A Small Open-Closed Homotopy Algebra (OCHA), Georgian Math. Journal, v.16, n. 2, 2009, 305—310.
8. T. Kadeishvili, Twisting Elements in Homotopy G-algebras, Higher Structures in Geometry and Physics. Series: Progress in Mathematics, Birkhauser, Vol. 287 (2011), 181-200.
9. T. Kadeishvili, Homotopy Gerstenhaber algebras: examples and applications, Journal of Mathematical Sciences, Springer, Vol. 195, 4 (2013), 455-459.
10. T. Kadeishvili, B_∞-algebra Structure in Homology of a Homotopy Gerstenhaber AlgebraJournal of Mathematical Sciences, Springer, November 2016, Volume 218, Issue 6, pp 778–787.
11. T. Kadeishvili, Homotopy Classification of Morphisms of Differential Graded Algebras, Georgian Mathematical Journal, De Gruyter, Doi 10.1515/gmj-2017-0029.
12. T. Kadeishvili, Cohomology Operations Defining Cohomology Algebra of the Loop Space, Chapter in the book Lie groups, Differential equations, and Geometry, Unipa Springer Series, 2017, 65-82.

ერთერთი პირველი გამოვლინება მაღალი რიგის სტრუქტურებისა იყო ე.წ. ქადეიშვილის მინიმალობის თეორემა [1], რომლის მეშვეობით კლასიკურ კოჰომოლოგიის რგოლზე აიგო ახალი, დამატებითი სტრუქტურა A_∞ - ალგებრისა.

ამ თეორემას უწოდებენ "კლასიკურ შედეგს" (Fukaya, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/2004/17fukaya.pdf;Roitzheim-Whitehouse, arXiv:0909.3222v4), "ჰომოტოპიური ალგებრის საკვანძო თეორემას" (Kajiura-Stasheff,arXiv:hep-th/0510118), მას ეძღვნება სტატია ინტერნეტ ენციკლოპედიაში nLab (http://ncatlab.org/nlab/show/Kadeishvili's+theorem). შემდგომ მინიმალობის თეორემის ანალოგები დამტკიცდა სხვადასხვა სიტუაციებში სხვადასხვა ავტორების მიერ (Smirnov, Huebschman, Markl, Merkulov, Saneblidze-Umble) და მათ ზოგჯერ "ქადეიშვილის ტიპის თეორემებს" უწოდებენ (http://at.yorku.ca/c/a/p/s/02.htm). ამ სტრუქტურების გამოყენებით მოხერხდა: ფიბრაციის ჰომოლოგიური მოდელის აგება [1], რაციონალური ჰომოტოპიური ტიპის განსაზღვრა [6], მეორე მარყუჟთა სივრცის კოჰომოლოგიის ალგებრის განსაზღვრა [12], DG-ალგებრათა მორფიზმთა ჰომოტოპიური კლასიფიკაცია [11].

A_∞ სტრუქტურის კლასიკურ ალგებრად გადაგვერებულობის პირობების ძიებისას აიგო ე.წ. გეტცლერ-ქადეიშვილის ოპერაციები, რომლებიც განსაზღვრავენ უკვე ნახსენებ hGa სტრუქტურას ჰოხშილდის კოჯაჭურ კომპლექსში, რომლებსაც ასევე მრავალრიცხოვანი გამოყენებები აღმოაჩნდათ, მაგალითად მათი მეშვეობით დამტკიცდა ცნობილი დელინის ჰიპოთეზა ნაშრომებში Berger-Fresse, arxiv:math/0109158, და J. E. McClure, J. Smith, arXiv:math/9910126v2.

თ. ქადეიშვილის ნაშრომები გამოყენებულია და ციტირებულია ისეთი ცნობილი მეცნიერების მიერ, როგორებიც არიან მათემატიკოსები Daniel Quillen, Dennis Sullivan, James Stasheff, Jean-Louis Loday, ფიზიკოსები Paul Aspinwall, Sheldon Katz, Kenji Fukaya, C.I. Lazaroiu, L.M. Fidkowski და სხვები, სულ 930 ციტირება Scholar Google-ს მიხედვით.

პროეტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები

შესწავლილი იქნება: დეფორმაციის ტრივიალობა, ორი დეფორმაციის ექვივალენტურობა, ალგებრის მდგრადობა დეფორმაციათა მიმართ, დეფორმაციის აგება მოცემული საწყისი პირობით. ეს უკანასკნელი ამოცანა უკავშირდება პუასონის ალგებრათა დაკვანტვის ამოცანას. ვაპირებთ ავაგოთ წინააღმდეგობათა თეორიები ამ პრობლემებისადმი. hGa სტრუქტურის გარდა ვაპირებთ გამოვიყენოთ მინიმალობის თეორემები [Kade1] A_∞ და L_∞ ალგებრებისათვის.

ს. სანებლიძე: თავისუფალ და იტერირებულ მარყუჟთა სივრცეების კომბინატორული მოდელები და მათი გამოყენებები.

შესავალი

პროექტის მიზანია კომბინატორული და ალგებრული მოდელების განვითარება მრავალსახეობათა და მათი მარყუჟთა სივრცეების შესასწავლად. ამის გაკეთებას ჩვენ ვაპირებთ ალგებრული ტოპოლოგიის ერთი არსებითი ტექნიკით, როგორიცაა სივრცის დაშლა უჯრედებად ისე რომ უჯრედთა ურთიერთგანლაგება დამახსოვრებულია. ეს მონაცემები საშუალებას იძლევა სივრცის გეომეტრიის გამოთვლადი ალგებრული ინვარიანტების აღმოსაჩენად. კერძოდ, ასეთი ინვარიანტები განხილული იქნება გლუვი, ტოპოლოგიური და უბან-უბან გლუვი მრავალსახეობებისთვის, რომლებიც გვხვდება სიმის ტოპოლოგიაში. კვლევაში გამოყენებულ იქნება როგორც ალგებრული ტოპოლოგიის კლასიკური მეთოდები - მრავალწახნაგთა კომბინატორული თეორია, ჰომოლოგიური ალგებრა, ასევე ჰომოტოპიის თეორიის თანამედროვე ტექნიკა. მოსალოდნელია, რომ მიღებული შედეგები ჰპოვებს გამოყენებას მათემატიკის სხვა ნაწილებშიც, როგორიცაა მათემატიკური ფიზიკა, სიმპლექტური და გეომეტიული ტოპოლოგია, და წარმოდგენათა თეორია.

ალგებრული ტოპოლოგიის ერთ-ერთ ცენტრალურ ნაწილს წარმოადგენს მარყუჟთა სივრცეების გამოკვლევა. ზუსტი კომბინატორული/ალგებრული მოდელების აგება იყო წინა წლების კვლევის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საგანი (იხ. [1]--[3]. მარყუჟთა სივრცეები აგრეთვე ბუნებრივად ჩნდება მათემატიკური ფიზიკის არეალში, როგორიცაა კვანტური ველის თეორია და სიმის ტოპოლოგია, რაც გახდა მთავარი მოტივაცია მათი სტრუქტურათა მკაცრი მათემატიკური შესწავლისა.

ჩაზმა და სალივანმა შემოგვთავაზეს და განავითარეს მარყუჟთა სივრცეების მათემატიკური თეორია, რომელსაც ფიზიკაში მისი გამოყენების გამო, ეწოდა სიმის ტოპოლოგია. ეს თეორია ძირითადად განიხილავს ისეთ ალგებრულ სტრუქტურებს, რომლებიც ინდუცირებულია მარყუჟებზე სხვადასხვა გეომეტრიული ოპერაციების განხორციელების შედეგად.

მოცემული ტოპოლოგიური M სივრცისთვის თავისუფალ მარყუჟთა ΛM სივრცე განმარტებულია, როგორც წრეწირის M-ში უწყვეტ ასახვათა ტოპოლოგიური სივრცე. კლასიკური თანაკვეთის გამრავლება M-ზე შეთანხმებულია დიაგონალით ინდუცირებულ სტანდარტულ კონამრავლთან (როცა კოეფიციენტები ველია). უფრო ზუსტად, კონამრავლი არის H(M)-ბიმოდულების ასახვა, სადაც H(M)-ბიმოდულის სტრუქტურა მოცემულია თანაკვეთის გამრავლებით. ეს არის კლასიკური პუანკარეს ორადობის რეფორმულირება იმ ალგებრული სტრუქტურის ტერმინებში, რომელიც ცნობილია როგორც ფრობენიუსის ალგებრა.

სიმის ტოპოლოგიის ერთი არსებითი პრობლემაა თავისუფალ მარყუჟთა სივრცის (ΛM) ჰომოლოგიებში სიმის ტოპოლოგიური გამრავლების და არსებული კლასიკური კონამრავლის შეთანხმების პირობის დადგენა, რაც, კერძოდ, ხელს შეუწყობდა სიმის ტოპოლოგიური გამრავლების გამოთვლის მეთოდის განვითარებას. ეს საკითხი დასმულ იქნა დენის სალივანის (Dennis Sullivan) მიერ [9]-ში, გვ.17 :

„ საინტერესო პრობლემად მოსჩანს თუ რა ტიპის ბიალგებრას შეიძლება წარმოშობდეს ეს კონსტრუქცია. აქამდე თავისუფალ მარყუჟთა დიაგონალური კოალგებრის სტრუქტურა შესწავლილი იყო სიმის ტოპოლოგიიდან წარმოქმნილი ალგებრული სტრუქტურებისგან განცალკევებით. პრობლემის სპეციალური შემთხვევა ილუსტრირებულია ზემო E2 წევრით -- როგორ უნდა განვჭვრიტოთ ფრობენიუსის და ჰოპფის ალგებრების ტენზორული ნამრავლი? „
ჩვენს მიერ შემოთავაზებულია კომბინატორული მიდგომა, რომლის ჩარჩოებში ყველა ჩართული ოპერაცია საკმარისად გამჭვირვალეა რათა ეს საკითხი სრულად გადაწყვეტილ იქნეს.

არსებული ლიტერატურული მონაცემები

1. Saneblidze, S. (with T. Kadeishvili), A cubical model of a fibration, J. Pure and Appl. Algebra, 196 (2005), 203-228.
2. Saneblidze, S., The bitwisted Cartesian model for the free loop fibration, Topology and its Appl., 156 (2009), 897-910.
3. Saneblidze, S. (with M. Rivera), A combinatorial model for the free loop fibration, Bull. L.M.S., 50 (2018), 1085-1101.
4. Saneblidze , S. (with M. Rivera), A combinatorial model for the path fibration, J. Homotopy and Rel. Structures, 14 (2019), 393-410.
5. Saneblidze, S., Filtered Hirsch algebras, Trans. R.M.I., 170 (2016), 114-136 .
6. Saneblidze, S. (with R. Umble), Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra, J. Homotopy, Homology and Appl., 6 (1), (2004), 363-411.
7. Saneblidze შ., On the secondary cohomology operations, Trans. R.M.I., 174 (3) (2020), 429-433.
8. Saneblidze, S. (with R. Umble), Framed Matrices and A_∞ -Bialgebras, Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal 15(4) (2022), 41-140.
9. D. Sullivan, String topology background and present state. *Current developments in mathematics, 2005,* 41--88, *Int. Press, Somerville, MA (2007).*

ს. სანებლიძის და რ. ამბლის (Ron Umble) ნაშრომები პერმუტოედრის დიაგონალისა და A_∞ -ჰოპფის ალგებრების შესახებ უხვადაა ციტირებული ცნობილი მათემატიკოსების მიერ, მათ შორის არიან T.M. Gerstenhaber, J Stasheff, J.L. Loday, B Fresse, M Markl, S Shnider, M Batanin, M Weber, Dev P. Sinha და სხვ. აგრეთვე ს. სანებლიძემ ნაშრომ [3]-ის შესახებ მოხსენება
გააკეთა 2018 წლის მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე (რიო დე ჟანეირო, ბრაზილია, 1-9 აგვისტო, 2018) .

პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

პროექტი თეორიული ხასიათისაა და საინტერესო იქნება ალგებრული ტოპოლოგიის სპეციალისტებისათვის, ისევე როგორც თეორეტიკოსი ფიზიკოსებისთვის.

პროექტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები

პირველი წლის პროგრამა. სიმის ტოპოლოგიური ნამრავლის ზუსტი უჯრედოვანი სტრუქტურის აღწერა ΛM-ის სათანადო კომბინატორულ მოდელში, რის საფუძველსაც იძლევა თავისუფალ მარყუჟთა ფიბრაციის მცირე კომბინატორული მოდელი [3]. უფრო ზუსტად, M-ის K სიმპლიციალური კომპლექსის ნაცვლად განვიხილავთ $K^{\square}$ კუბურ კომპლექსს, და შედეგად, მივიღებთ $\Omega M \longrightarrow \Lambda M \longrightarrow M$ თავისუფალ მარყუჟთა ფიბრაციის $\Omega K^{\square} \longrightarrow \Lambda K^{\square} \longrightarrow K^{\square}$ მოდელს, სადაც ორივე $\Omega K^{\square}$ და $\Lambda K^{\square}$ არის პერმუტოედრული სიმრავლის გეომეტრული რეალიზაცია. M-ის $K^{\square}$ კუბური კომპლექსის განხილვა მოტივირებულია იმ ფაქტით, რომ სიმის ტოპოლოგიური ნამრავლი ეყრდნობა (პონტრიაგინის გამრავლებასთან ერთად) ზემოთ აღნიშნულ M-ის კლასიკურ თანაკვეთის გამრავლებას.

შემდეგ წლებში განვმარტავთ უჯრედოვან გამრავლებას ΛM-ზე, რომელიც ავრცელებს პონტრიაგინის ნამრავლს ბაზირებულ მარყუჟთა სივრციდან თავისუფალ მარყუჟების სივრცეზე, და რომელიც ინდუცირებს გრადუირების შემნახავ კომუტატურ გამრავლებას $H(\Lambda M)$-ზე. შემდეგ

პერმუტოედრის ზუსტი დიაგონალის [6] გამოყენებით დავადგენთ სიმის ტოპოლოგიური გამრავლების და სტანდარტული კოგამრავლების ურთიერთშეთანხმების პირობას. აგრეთვე აღვწერთ მარყუჟთა სივრცის კოჰომოლოგიების მულტიპლიკატურ სტრუქტურას წარმომქმნელების და თანაფარდობების ტერმინებში ავტორის მიერ [7]-ში აღმოჩენილი მეორადი კოჰომოლოგიური ოპერაციების გამოყენებით.

ალექსანდრე ელაშვილი: ლის ალგებრათა უნივერსალურ მომვლებ ალგებრათა დეფორმაციები

შესავალი (კვლევის ობიექტი, პრობლემის აქტუალობა, კვლევის სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია)

აღვნიშნოთ L-ით სასრულგანზომილებიანი ლის ალგებრა 0-მახასიათებლიან ალგებრულად ჩაკეტილ ველზე F და e იყოს მისი არანულოვანი ნილპოტენტური ელემენტი. მოროზოვ-იაკობსონის თეორემის თანახმად არსებობს sl(2)-სამეული s ={e, h, f} (ისე, რომ [e, f] = h, [h, e] = 2e, [h, f] = –2f). მაშინ L -ს საკუთრივ ქვესივრცეებად დაშლა ad h-ის მიმართ არის L -ს Z გრადუირება. L-ს e+F სახის ელემენტს (აქ F არის არანულოვანი ელემენტი მინიმალური საკუთრივი ad h მნიშვნელობით) ეწოდება e-სთან ასოცირებული ციკლური ელემენტი.

სლოდოვის S(L,e) ფენის და W(g,e) ვერტექსული ალგებრის დაკვანტვისათვის (ვერტექსული ალგებრის დაკვანტვა არის უნივერსალური მომვლები U(L) ალგებრის დეფორმაცია) ჩვენ დაგვჭირდება ორი პრობლემის გადაჭრა:

1) ნახევრადმარტივი ტიპის ნილპოტენტური ელემენტაბის კლასიფიკაცია;

2) მოცემული ნახევრადმარტივი ტიპის e-სთვის კლასიფიცირებე ყველა იმ F-ის, რომელთათვისაც e+F ნახევრადმარტივია.

პირველი პრობლემა უკვე ამოხსნილია ნაშრომში [11]. ჩვენ ვაპირებთ მეორე პრობლემის ამოხსნას კლასიკური ტიპის მარტივი ალგებრებისა და ექსპონენციალური ტიპის მარტივი ლის ალგებრებისათვის

არსებული ლიტერატურული მონაცემები (რა არის გაკეთებული, როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს)

პროექტთან კავშირშია შემდეგი ნაშრომები:

1. A.G.Elashvili, Frobenius Lie algebras 1, (Russian) Functional analis i ego prilojeni, v 16, N4, (1982), 94-95.

2. G.Elashvili, Frobenius Lie algebras 2, (Russian), Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, v 77, (1985), 127-137.

3. A.G.Elashvili, On the index of horospherical subalgebras of simple Lie algebras, (Russian) Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, v 77, (1985), 116-126.

4. A.G.Elashvili, Index and points in general positions for Borel subgroup of simple linear Lie groups, (Russian), Functional analis i ego prilojenia, v21 N4, (1988), 72-74. English translation. Functional Anal. Appl. v21, (1988), 84-86.

5. A. G. Elashvili, V. G. Kac, E. B. Vinberg, Cyclic elements in semisimple Lie algebras. Max Planck Institute Preprint Series 2012-26.

6. A.G.Elashvili, E.Vinberg. Classification of Trivectors of a 9 dimensional Space, (Russian), Trudi Sem. Vector. Tensor. Anal.v 18 (1976), 197-233. English Translation. Sel. Math. Sov. Birkhaeuser Verlag, Basel. v 7, N1 (1988), 63-98.

7. G. Khimshiashvili, A. Elashvili, Lie algebra of simple hypersurface singularity.Journal of Lie theory(2006) 9, p.621-649

8. A. G. Elashvili, V. G. Kac, E. B. Vinberg, On exceptional nilpotents in semisimple Lie algebras. Journal of Lie theory 19(2009), 371-390.

9. W. A. de Graaf, A. G. Elashvili, Induced nilpotent orbits of simple Lie algebras of exceptional type. Georgian Mathematical Journal 16(2009), 257-278.

11. A.Elashvili, V.Kac, E.Vinberg.Cyclic elements in semisimple Lie algebras.Transformation Groups 18(2013)97-130

12. Э. Б. Винберг, М. А. Джибладзе, А. Г. Элашвили, Алгебры модулей некоторых неполуквазиоднородных особенностей. Функциональный анализ и его приложения 2017, т. 51, вып. 2

ჰიპერზედაპირების გადაგვარებულობათა მოდულთა ალგებრის ლის დერივაციათა აღწერა დაიწყო ა. ელაშვილსა და გ. ხიმშიაშვილის ნაშრომით [7]. უკანასკნელი დროის ნაშრომში [12] კი აღწერილია იზოლირებულ განსაკუთრებულობების მოდულთა ალგებრების ფართო კლასი. ამავე მიმართულებას ეძღვნება ნაშრომიც [8].

ალექსანდრე ელაშვილი ავტორია 33 ნაშრომისა, მათგან 27 იმპაქტ ფაქტორიან ჟურნალებში, მიღებული აქვს 5 საერთაშორისო გრანტი და 4 ქართული გრანტი. ჰქონდა 30-ზე მეტი მიწვევით მოხსენებები ევროპასა და აშშ-ში, აქვს მიღებული მონაწილეობა 20 საერთაშორისო კონფერენციაში.

პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

სლოდოვის S(g,e) ფენის და W(g,e) ვერტექსული ალგებრის დაკვანტვისათვის (ვერტექსული ალგებრის დაკვანტვა არის უნივერსალური მომვლები U(g) ალგებრის დეფორმაცია) გვჭირდება მოცემული ნახევრადმარტივი ტიპის e-სთვის კლასიფიცირება ყველა იმ F-ის, რომელთათვისაც e+F ნახევრადმარტივია.

საწყის პერიოდში ამას ვაპირებთ კლასიკური ტიპის ლის ალგებრებისათვის, ხოლო შემდეგ განსაკუთრებული ტიპის მარტივი ლის ალგებრებისათის.

პირველ ეტაპზე ვიმუშავებთ შემდეგ ამოცანებზე: აღიწეროს g(1) - ერთგანზომილებიანი (დინკინის აზრით) ერთგვაროვანი ქვესივრცისათვის აღიწეროს მასიმალური კომუტირებადი ქვესივრცეები. ამის გაკეთებას ვაპირებთ ჯერ კლასიკური ტიპის ლის ალგებრებისათვის, შემდეგ კი განსაკუთრებული ტიპის ლის ალგებრესბისათვის.

ვაპირებთ გამოვიყენოთ ჩვენი ეს შედეგები უნივერსალურ მომვლებ ალგებრათა დეფორმაციების შესასწავლად.

თეიმურაზ ფირაშვილი: ლის თეორიის განზოგადებები და ჰომოლოგიური ალგებრის რჩეული საკითხები

თეიმურაზ ფირაშვილი ლის თეორიით დაინტერესდა 90-იანი წლების დასაწყისში როცა ჟან-ლუი ლოდესთან ერთად მუშაობდა ლაიბნიცის ალგებრებზე. ამ ინტერესის შედეგია ამ დარგში მის მიერ დაწერილი (სხვდასხვა თანაავტორებთან ერთად) 12 სტატია. განსაკუთრებით აღსანიშნავია, ბოლო წლებში მისი და ჯიბლაძეს ერთობლოვი შრომა სადაც ლის თეორიის ძირითადი დებულებები განზოგადება სიმეტრიული ლაიბნიცის ალგებრებისთვის. ამასთან მათი განზოგადება ყველა ლაიბნიცის ალგებრებისთვი წარმოადგენს ამ დარგის ცენტრალურ ჯერ კიდევ გადაუჭრელ პრობლემას. კვლევის ერთ-ერთი მიზანი იქნება ჯიბლაძესთან ერთად მიღებული თეორიის შემდგომი განზოგადება და სრულყოფა.

თ. ფირაშვილი არის პოლინომური ფუქტორებზე ათობით დაწერილი სტატიის (თანა)ავტორი, მათ შორის ერთი წიგნის. ამ თემაზე მას აქვს მოხსენებები გაკეთებული გერმანიის, საფრანგეთის და ინგლისის ყველა წამყვან სამეცნიერო ცენტრში, მათ შორის ბურბაკის სემინარებზე. მიუხედავად გარკვეული წარმატებისა ბევრ საკითხზე კვლავ არაა პასუხი ცნობილი. ჩვენ ვაპირებთ შევისწავლოთ პოლინომური ფუქტორები მონოიდალური სტრუქტურით და მათი კავშირი ნორმის ფუქნტორებთან. ის დაეყრდნობა ბაუეს-დრეკმან-ფრანჟუ-ფირაშვილის შრომას, რომელიც დაეხმარება აღნიშნული პრობლემა ითარგმნოს მეკის ფუნქტორების ენაზე, რამაც საგრძნობლად უნდა გაამარტივოს პრობლემა.

ჰომოლოგიური ალგებრა მეთოდებს დიდი გამოყენებები აქვს მათემატიკის ყველა დარგში. მაკლეინის კოჰომოლოგიებზე შრომების გამო თეიმურაზ ფირაშვილს 1999 წელს მიენიჭა

ჰუმბოლტის პრემია. არანაკლები პოპულარობით სარგებლობს თ. ფირაშვილი შრომა მაღალი რიგის ჰოხშილდის კოჰომოლოგიებზე. ამ ბოლო დროს ის დაინტერესდა ორგანზომილებიანი ჰომოლოგიური ალგებრის შექმნით. რაც სხვა ასპექტებთან ერთად გულისხმობს ჯვარედინა მოდულებს ''ჰომოტოპიურად ინვარიანტული'' ობიექტების ალგებრული აგებას. მათ შორის ჯვარედინა მოდულის ჰომოტოპიურად ინვარიანტული ცენტრის მთავარი თვისებების შესწავლას და მათ გამოთვლას კლასიკურ ჯგუფებთან დაკავშირებულ ჯვარედიანა მოდულებისთვის. ასევე ჰომოტოპიურად ინვარიანტული ცენტრის დაკავშირება ჯვარედინა მოდულის მაკლასიფიცირებელი სივრცის გოტლიბის ჯგუფთან. პროექტის კიდევ ერთი მიმართულებაა ჯვარედინა მოდულების (კო)ჰომოლოგიური გამოკვლევები. ამ მიმართულებით რამდენიმე შრომაა დაწერილი. ძირითადად ორი მიდგომაა შემოთავაზებული. პირველი არის ტოპოლოგიური, ჯვარედინა მოდულის მაკლასიფიცირებელი სივრცის მიხედვით (ბაუესი, ელისი, დათუაშვილი - თ. ფირაშვილი), ხოლო მეორე ალგებრულია და იყენებს კოსამეულებს (კარასკო-სეგარა-გრანდჟეან, გრანდჟეან-ლადრა-თ. ფირაშვილი). ამასთან აღნიშნულ შრომებში აგებული კოჰომოლოგიების კოეფიეციენტები ძალიან შეზღუდულია. მაგალითად, როცა ჯვარედინა მოდული არის $1 \to G$ სახის, მაშინ კოეფიციენტები არიან არა G-მოდულები, არამედ აბელის ჯგუფები. ჩვენი მიზანია მოვხსნათ ეს შეზღუდვები, განვმარტოთ ჯვარედინა მოდულების (კო)ჰომოლოგიები უფრო ზოგადი კოეფიციენტებით, მოვძებნოთ კავშირი ალგებრულ და ტოპოლოგიურ მიდგომებს შორის და ავაგოთ ზუსტი მიმდევრობები დაბალგანზომილებიან (კო)ჰომოლოგიებისთვის.

არსებული ლიტერატურული მონაცემები

1. M. Jiblazde and T. Pirashvili. On Ronco-Leibniz algebras. Submitted.

2. M. Jiblazde and T. Pirashvili. Lie theory for symmetric Leibniz algebras. J. of homotopy and related structures. 15(2022) 167-183.

3. A. Djament, T. Pirashvili and C. Vespa. Cohomologie des foncteurs polynomiaux sur les groupes libres. Doc. Math. 21(2016), 205-222.

4. M. Hartl, T. Pirashvili and Ch. Vespa, Polynomial functors from algebras over a set-operad and nonlinear Mackey functors. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 6, 1461-1554.

5. T. Pirashvili, Projective and injective symmetric categorical groups and duality. Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), no. 3, 1315- 1323.

6. T. Pirashvili, On strongly perfect Lie algebras. Comm. Algebra 41 (2013), no. 5, 1619-1625.

7. H.-J. Baues, M. Jibladze and T. Pirashvili, Quadratic algebra of square groups. Adv. Math. 217 (2008), no. 3, 1236-1300.

8, V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili and L. Schwartz, Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology. Panoramas et Syntheses. 16. Societe Mathematique de France, Paris, 2003. xxii+132 pp. ISBN: 2-85629-159-7 55-06.

9. T. Datuashvili, T.Pirashvili, On (co)homology of 2-types and crossed modules. J. Algebra 244 (2001), no. 1, 352-365.

10. T. Pirashvili and B. Richter, Robinson-Whitehouse complex and stable homotopy. Topology 39 (2000), no. 3, 525-530.

11. A. R.-Grandjean, M. Ladra and T.Pirashvili, CCG-homology of crossed modules via classifying spaces. J. Algebra 229 (2000), no. 2, 660-665.

12. T. Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. Ann. Sci. \'Ecole Norm. Sup. (4) 33 (2000), no. 2, 151-179.

13. V. Franjou and T. Pirashvili, On the Mac Lane cohomology for the ring of integers. Topology 37 (1998), no. 1, 109-114.

14. T. Pirashvili. Kan extension and stable homology of Eilenberg-Mac Lane spaces. Topology 35 (1996), no. 4, 883-886

15. J.-L. Loday and T. Pirashvili. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. Math. Ann. 296 (1993), no. 1, 139-158.

16. T. Pirashvili and F. Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. J. Pure Appl.

Algebra 82 (1992), no. 1, 81-98.

ამ შრომებში განვითარებული ტექნიკა დაგვეხმარება აღნიშნული პრობლემების კვლევისას.

პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

პროექტის ერთი ასპექტია ლის თეორიის შემდგომი განვითარება, რასაც უნდა ჰქონდეს გამოყენებები არა მარტო მათემატიკაში, არამედ ყველგან სადაც ლის თეორია გამოიყენება, მაგალითად ფიზიკაში.

პროეტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები.

აქ მოვიყვანთ მხოლოდ იმ ამოცანებს რომლებიც ეხება ჯვარედინა მოდულებს. სხვა ამოცანები ზოგადად აღნიშნულია პირველ ნაწილში.

ამოცანა 1. ჯვარედინა მოდულებისთვის ჰომოტოპიურად ინვარიანტული ცენტრის გამოთვლა. გავიხსენოთ რომ ყველა G ჯგუფი იძლევა ჯვარედინა მოდულს $G \to \mathrm{Aut}(G)$. მიზანი იქნება გამოვითვალოს მისი ჰომოტოპიურად ინვარინტული ცენტრო როცა G არის დიედრული, ქვათერნიონული და სხვა ტიპის კლასიკური ჯგუფი.

ამოცანა 2. ჯვარედინა მოდულების სხვადასხვა კოჰომოლოგიების შედარება.

აღწერა: აქ პირველი მიზანი იქნება ჯგუფური ალგებრის განზოგადოება ჯვარედინა მოდულებისთვის და მათზე ჩვეულებრივი მოდულების შესწავლა. ჩვენ ავაგებთ ჯვარედინა მოდულების კოჰომოლოგიებს და ჰომოლოგიებს კოეფიციენტებით ასეთ მოდულებში. აქ ჩვენ გამოვიყენებთ იგივე კოსამეულს რაც უკვე იყო გამოყენებული არსებულ ნაშრომებში. ამ ამოცანის დანარჩენი ნაწილი მიეძღვნება ასეთნაირად განმარტებულ კოჰომოლოგიებსა და ჯვარედინა მოდულის მაკლასიფიცირებელი სივრცის (კო)ჰომოლოგიებს შორის კავშირების შესწავლას.

ამოცანა 3. ჯვარედინა მოდულების (კო)ჰომოლოგიების ზუსტი მიმდევრობები დაბალ განზომილებებში.

აღწერა: კარგადაა ცნობილი, რომ როცა გვაქვს ჯგუფების მოკლე ზუსტი მიმდევრობა, მაშინ იწერება დაბალგანზომილებიანი (კო)ჰომოლოგიური ზუსტი მიმდევრობები. განსაკუთრებით ცნობილია ე. წ. 5-წევრა, 10-წევრა ზუსტი მიმდევრობები, ხოლო ცენტრალური გაფართოებების შემთხვევაში კი 8-წევრა ზუსტი მიმდევრობა, სადაც კრიტიკულ წევრს ჰქვია განეას წევრი. ჯვარედინა მოდულებისთვის მსგავსი შედეგი ცენტრალური გაფართოებებისთვის იყო ანონსირებული (დამტკიცების გარეშე) სტატიაში [PT12]. ჩვენ ვგეგმავთ ამ სტატიაში (და არა მხოლოდ აქ) მოყვანილი შედეგების დაზუსტებას და მათი დეტალური დამტკიცებების მოყვანას.

საერაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობა.

თეიმურაზ ფირაშვილი არის 90-ზე მეტი სამეცნიერო სტატიის ავტორი, რომელთა აბსოლიტური უმრავლესობა რის აგმოქვეყნებული დასვლეთის წამყვან სამეცნიერო ჟურნალებში. ის 2006-2021 წლებში მუშაობდა ინგლისის ერთ-ერთ უნივერსიტეტში (ლესტერი) რიდერად. თეიმურაზ ფირაშვილი გამოირჩევა უცხოელ კოლეგებთან ნაყოფიერი მუშაობით, მას ჰყავს 20-ზე მეტი უცხოელი თანაავტორი, მათ შორის იყვნენ ისეთი ცნობილი მეცნიერები როგორებიცაა ფრიდჰელმ ვალდჰაუზენი, ჟან-ლუი ლოდე, ერიკ ფრიდლანდერი, რაინერ ფოგტი, ჰანს იოაჰიმ ბაუესი, ზბიგნივ ფიედოროვიჩი და სხვები. ის მრავალჯერ იყო მიწვეული ისეთ სამეცნიერო ცენტრებში როგორიცაა მაქს-პლანკის ინსტიტუტი ბონში, ნიუტონის მათემატიკის ინსტიტუტი კემბრიჯში, მიტტაგ-ლეფლერის ინსტიტუტში სტოკჰოლმში, ბანახის ცენტღში ვარშვაში, ასევე პარიზის, ჩიკაგოს, სტრასბურგის, ნანტის, ბილეფელდის და სხვა უნივერიტეტებში. ის მონაწილეობდა ათობით სამეცნიერო კონფერენციაში და თვითონ იყო რამდენიმე საერთაშორისო კონფერენციის ორგანიზატორი, მათ შორის ბონში გასულ წელს.

მალხაზ ბაკურაძე: ტოპოლოგიური იზოლატორების K-თეორია.

2.2 შესავალი (კვლევის ობიექტი, პრობლემის აქტუალობა, კვლევის სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია

ტოპოლოგიური იზოლატორები არიან იზოლატორები, თუმცა მიუხედავად ამისა, მაინც ატარებენ ელექტროენერგიას მათი საზღვრები. უფრო მეტიც, საზღვარზე მყოფი ნაწილები იძულებულნი არიან იყვნენ წარმოდგენილი ტოპოლოგიური დაბრკოლებებით. ეს გვაფიქრებინებს, რომ, საზღვრის გამტარობა საკმაოდ მდგრადია უწესრიგობის პირობებში, რაც მათ პოტენციურად ძალიან საინტერესოს ხდის აპლიკაციებისთვის. ჩვენ ვგულისხმობთ შულც-ბალდესის მიმოხილვით სტატიას [11] „ტოპოლოგიური იზოლატორების მათემატიკური მოდელირება". აქ მხოლოდ რამდენიმე ძირითად იდეას გავიხსენებთ. ჩვენ ვრჩებით გადამტან-ინვარიანტული სისტემების უფრო კლასიკურ შემთხვევაში, რაც პირდაპირ კავშირშია ალგებრულ ტოპოლოგიასთან. აშლილობის მქონე სისტემების შესწავლა შესაძლებელია შესაფერისი არაკომუტაციური C* -ალგებრის (იხ. [2]) გამოყენებით.

ერთნაწილაკიან მიახლოებაში ტოპოლოგიური იზოლატორები შეიძლება კლასიფიცირდეს ჰამილტონიანებით A C*-ალგებრაში. რომელსაც დაკვირვებად ალგებრას უწოდებენ. გადატანა-ინვარიანტულ მჭიდრო შეკვრის მოდელებში, დაკვირვებადი ალგებრა იზომორფულია მატრიცთა ალგებრის d განზომილებიან ტორზე მოცემულ უწყვეტი ფუნციების ალგებრაზე, სადაც d არის მასალის განზომილება. ჰამილტონიანი არის A-ს თვითშეუღლებული ელემენტი და ის აღწერს ინსულატორს, თუ ის ასევე შებრუნებადია. ორი ჰამილტონიანი ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურია, თუ ისინი ჰომოტოპიურები არიან A-ს შებრუნებად თვითშეუღლებულ ელემენტებს შორის. ფუნქციონალური ანალიზის გამოყენებით, შეიძლება ადვილად დამტკიცდეს, რომ ორი შებრუნებადი თვითშეუღლებული ელემენტი H1 და H2 ამ თვალსაზრისით ჰომოტოპურია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ სპექტრული პროექციები χ(–1.0](H1) და χ(-1.0](H2) ჰომოტოპიურია A-ში პროექციებს შორის.

ამგვარად ინსულატორების ტოპოლოგიური კლასიფიკაცია ხდება პროექციების ჰომოტოპიური კლასების აღწერით A-ში როგორც C*-ალგებრაში. თუ A არის მატრიცების ალგებრა T^d-ზე ფუნქციებზე, როგორც ზემოთ, მაშინ მივიღებთ T^d-ზე ფუნქციების მიმართ მატრიცების პროექციის სივრცეს თითოეულ წერტილში. ეს იძლევა ვექტორულ ფიბრაციას, რომელსაც ხშირად უწოდებენ ბლოხის ფიბრაციას. ჰომოტოპური პროექციები იძლევა იზომორფულ ბლოხის ფიბრაციებს. საპირისპირო დებულება არ არის ჭეშმარიტი, თუმცა, თუ ბლოხის ორი ფიბრაცია იზომორფულია, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ეს ორი პროექცია სტაბილურად ჰომოტოპიურია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი ხდებიან ჰომოტოპიური ორივე მხარეს ერთი და იგივე პროექციის დამატების შემდეგ, რითაც ასევე იზრდება მატრიცის ზომა. პროექციების სტაბილური ჰომოტოპიური კლასები C*-ალგებრა A-ში იძლევა დადებით ნაწილს K-თეორიაში. ჩვეულებრივ ბევრად უფრო ადვილია K-თეორიის გამოთვლა, ვიდრე არასტაბილური ჰომოტოპიური პროექციების კლასების აღწერა. მაგრამ ზოგიერთი ვარაუდით რანგზე, ჩვენ ვიცით, რომ სტაბილური ჰომოტოპია იწვევს ჰომოტოპიას. კერძოდ, განვიხილოთ ორი სტაბილურად იზომორფული ვექტორული ფიბრაცია V1 და V2 კომპაქტურ X სივრცეზე. დავუშვათ, რომ ვექტორულ ფიბრაციებს აქვთ k რანგი და რომ X-ს აქვს დაფარვის განზომილება d. თუ k $\geq$ d/2, მაშინ ორი ფიბრაცია იზომორფული უნდა იყოს (იხ. [4] თავი 8, თეორემა 1.5). ფიზიკურად ყველაზე შესაბამისი განზომილებებია 1, 2, 3. ეს ეხება ყველა ვექტორულ ფიბრაცია, გარდა წრფივი ფიბრაციებისა, რომელთათვისაც არსებობს მარტივი კლასიფიკაცია კოჰომოლოგიის თვალსაზრისით. გარკვეულწილად მსგავსი შედეგი ასევე ეხება პროექციების ჰომოტოპიურ კლასებს.

ფიზიკოსებს ასევე აინტერესებთ ფიზიკური სისტემები განსაკუთრებული სიმეტრიებით. ეს ნიშნავს იმას, რომ ყურადღება უნდა მიექცეს ჰამილტონიანების და უწყვეტ გზებს იმ ჰამილტონებისა, რომლებსაც ერთნაირი სიმეტრია აქვთ. აქ მნიშვნელოვანი გართულება არის ის, რომ ზოგიერთი ფიზიკურად ძალიან მნიშვნელოვანი სიმეტრია შეიძლება განხორციელდეს ანტი-უნიტარული ოპერატორებით, რომლებსაც შეუძლიათ ანტიკომუტირება ან კომუტირება ჰამილტონიანთან. ანტი-უნიტარულ სიმეტრიას, რომელიც კომუტირებს ჰამილტონიანთან, ეწოდება დროის უკუქცევის სიმეტრია. უნიტარულ სიმეტრიას, რომელსაც ანტი-კომუტირებს ჰამილტონიანთან ეწოდება ქირალური სიმეტრია, ხოლო ანტი-უნიტარული სიმეტრიას, რომელიც ანტი-კომუტირებს

ჰამილტონიანთან ეწოდება ნაწილაკ-ხვრელის სიმეტრია. თუ დავუშვებთ, რომ ერთადერთი უნიტარული სიმეტრია, რომელიც კომუტირებს ჰამილტონიანთან, აშკარად სკალარული გამრავლებაა, მაშინ რჩება სიმეტრიების ათი შესაძლო კომბინაცია. ეს შეესაბამება C*-ალგებრების ორ კომპლექსურ (პერიოდულ) და რვა ნამდვილ(პერიოდულ) K- თეორიის ჯგუფებს.

არსებული ლიტერატურული მონაცემები (რა არის გაკეთებული, როგორ იყენებენ იღებულ შედეგებს)

აქ ექსპოზიციისთვის განვიხილავთ სისტემებს, რომლებსაც აქვთ მხოლოდ დროის შებრუნების სიმეტრია Θ. მაშინ კვადრატი Θ^2 უნდა იყოს იგივობა ჰილბერტის სივრცეში ±1-მდე სიზუსტით. აქ ნიშანი +1 გვხვდება ბოზონური სისტემებისთვის და –1 ფერმიონული სისტემებისთვის.

ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით ბოზონური შემთხვევით. ფიზიკურ მოდელებში ასეა მიღებული, რომ საბაზო ჰილბერტის სივრცე არის l^2(Z^d,C^N), სადაც N არის თავისუფლების შინაგანი ხარისხი მესერის თითოეულ უჯრედში და დროის შებრუნების სიმეტრია Θ მოქმედებს $(\Theta f)(n) = \overline{\Theta_0(f(n))}$ -ით რაღაც მატრიცისთვის $\Theta_0 \in$ M(n)(C), სადაც $\overline{f(n)}$ აღნიშნავს კომპლექსურ შეუღლებას თითოეულ კოორდინატში. $\Theta^2 - 1$ შემთხვევაში, ჩვენ შეგვიძლია უბრალოდ ავირჩიოთ Θ_0, როგორც ერთეული მატრიცა, ასე რომ, ის გახდება ყოველ წერტილში კომპლექსური შეუღლება. დაკვირვებადი ალგებრა გენერირდება გარდაქმნის ოპერატორების მიერ Z^d-ში და მატრიცებით წერტილოვნად მოქმედებს. ეს იძლევა ფუნქციებს T^d-დან M(n)(C)-ში ფურიეს გარდაქმნით. ჰამილტონიანი კომუტირებს Θ-სთან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი ფურიეს გარდაქმნა $\hat{H}$: T^d$\rightarrow$ M(n)(C) აკმაყოფილებს $\overline{\hat{H}(z)} = \hat{H}(\overline{z})$ ყველა z $\in$ T^d თვის. ეს იძლევა კოორდინატობრივ კომპლექსური შეუღლების ასახვას T^d $\rightarrow$ T^d, z $\rightarrow \bar{z}$. განსახილველ შემთხვევაში ჩვენ შეიძლება დავაკავშიროთ ბლოხის ვექტორული ფიბრაცია პროექციასთან. ის ფაქტი, რომ H კომუტირებს Θ თან ამჟამად ნიშნავს, რომ ფიბრაცია არის „ნამდვილი“ ვექტორული ფიბრაცია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მასზე არსებობს ინვოლუცია, რომელიც არის აწევა ბაზაზე ინვოლუციის და არის ფიბრობრივად ანტიწრფივი. ესენი არიან ზუსტად ის „ნამდვილი“ ვექტორული ფიბრაციები, რომლებსაც იყენებს ატია [1] ინვოლუციანი სივრცებისთვის KR-ის თეორიის ასაგებად. KR-თეორიის ამ როლმა ფიზიკურ პროცესებში განაახლა ინტერესი ტოპოლოგიური სივრცეების ამ ინვარიანტის მიმართ.

ახლა დავუშვათ, რომ k რანგის ორი „ნამდვილი“ ვექტორული ფიბრაცია d განზომილებიან X „ნამდვილ“ სივრცეზე სტაბილურად იზომორფულია. არის თუ არა ისინი იზომორფული, თუ მათი რანგი საკმარისად დიდია? თუ „ნამდვილი“ ინვოლუცია X საბაზისო სივრცეზე ტრივიალურია, მაშინ [4] თავი 8, თეორემა 1.5 ამბობს, რომ ეს არის k $\geq$d+1 შემთხვევა. თუმცა, "ნამდვილი" სტრუქტურის არატრივიალური შემთხვევა ჯერ არ არის ადეკვატურად განხილული. შედეგი [4]-ში გამომდინარეობს დაკავშირებული შედეგიდან იმის შესახებ, რომ k რაგნის ნამდვილ ან კომპლექსური ვექტორულ ფიბრაციებს აქვს ტრივიალური პირდაპირი შესაკრები, როცა k$\geq$ d ან k $\geq$ (d – 1)/2, შესაბამისად, იხილეთ [4] თავი 8, თეორემა 1.2. ამ უკანასკნელი შედეგის ანალოგი აჩვენა დე ნიტისმა და გომიმ [8] თეორემა 4.25-ში როცა ინვოლუციის ფიქსირებული წერტილების სივრცე არის ნულოვანი განზომილების. მეორეს მხრივ, თეორემა 1.5-დან თეორემა 1.2 [4]-ის გამოყვანის მეთოდი იყენებს X × [0, 1] სივრცეს, რათა მოხდეს თანდაყოლილი ჰომოტოპიები, და აქ ფიქსირებული წერტილების ქვესივრცეს ყოველთვის აქვს განზომილება 1. ასე რომ [8]-ის შედეგი ჯერ არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ სტაბილური შემთხვევა დავიყვანოთ „რეალური“ ვექტორული ფიბრაციების არასტაბილურ კლასიფიკაციამდე. ამისათვის, [8]-ის კრიტერიუმი უნდა გავრცელდეს იმ შემთხვევისთვის, როდესაც ფიქსირებული წერტილთა ქვესიმრავლეს აქვს ნებისმიერი განზომილება.

„ნამდვილი“ ფიბრაციის შეზღუდვა ინვოლუციის ფიქსირებული წერტილთა ქვესიმრავლეზე არის ნამდვილი ვექტორული ფიბრაცია ჩვეულებრივი გაგებით. მაშასადამე, საფიქრებელია, რომ ტრივიალური „ნამდვილი“ პირდაპირი შესაკრები არსებობს როცა k $\geq$df, და k $\geq$ (d – 1)/2. ამის დამტკიცების გზა არის გამოყენება G-CW- კომპლექსების და ექვივარიანტული წინააღმდეგობის თეორიის, ნაცვლად სტანდარტული არაექვივარიანტული წინააღმდეგობის თეორისა, რომელიც გამოიყენება [4]-ში.

იგივე კითხვა შეიძლება დაისვას სხვა სიმეტრიის ტიპებში. დროის შებრუნების სიმეტრიით $\Theta^2 = -1$, ვიღებთ „კვატერნიონულ“ ვექტორულ ფიბრაციებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ბაზაზე ინვოლუცია აიწევა ოპერატორამდე ფიბრაციის სივრცეზე, რომლებიც ფიბრობრივად ანტიწრფივია და კვადრატი ტოლია –1. ამ სიტუაციას ასევე სწავლობენ დე ნიტისი და გომი [9]-ში. მაგრამ ტრივიალური შესაკრების მათი აღწერისას „კვატერნიონულ“ ფიბრაციაში მათი სტატია გაუმართავია, რადგან შეიძლება მოხდეს რომ რომელიმე წერტილში ფიბრაციის ორი არანულოვანი კვეთა იყოს წრფივი დამოკიდებული, თუმცა გლობალური კვეთები წრფივად დამოუკიდებელი. ამრიგად, ამ შემთხვევისთვის საჭიროა უფრო ფრთხილი მიდგომა. რა თქმა უნდა, გასათვალისწინებელია სიმეტრიის კიდევ რამდენიმე ტიპი. ქირალური შემთხვევა უკვე შესწავლილია [10]-ში. კენედის [6] უფრო ეხება სხვადასხვა სიმეტრიის ტიპებს Z/2-ეკვივარიანტული ასახვით კლიფორდის ალგებრაში, რომელიც აღჭურვილია შესაფერისი "ნამდვილი" ინვოლუციით, როგორც Z/2-მოქმედება. კენედი ასევე განსაზღვრავს სტაბილურ რანგს, ანუ ყველაზე დაბალ რანგს, რომელზეც ტრივიალური შესაკრები აღარ ცვლის ჰომოტოპიის კლასს.

კენედის მიდგომა უფრო ძლიერია, მაგრამ ის არ ხსნის, როგორ უნდა ითარგმნოს მისი შედეგები უფრო კლასიკური ბლოხის ვექტორული ფიბრაციებისთვის. მათ შორის არის რამდენიმე დახვეწილი ნიუანსი: პროექციების კლასიფიკაცია ჰომოტოპიამდე, შეუღლებამდე და მიურეი-ფონ ნიუმანის ექვივალენტობამდე. ამიტომ, მისი შედეგები პირდაპირ არ ითარგმნება იზომორფიზმის შედეგებზე ვექტორული ფიბრაციებში, რომელიც დაახლოებით მიურეი-ფონ ნიუმანის ეკვივალენტობის პროექციებია განსხვავებით პროექციის ჰომოტოპიისგან.

როგორც მათემატიკური, ასევე ფიზიკური თვალსაზრისით, ასევე აქტუალურია ჩვეულებრივი სიმეტრიების ჯგუფების დამატება, ანუ სწავლობენ G-ეკვივარიანტულ ფიბრაციებს, შესაძლოა „ნამდვილ“ ან „კვატერნიონულ“, სივრცეზე, რომელიც ატარებს როგორც „რეალურ“ ინვოლუციას ისე G სასრული ჯგუფის მოქმედებას, რომელიც კომუტირებს ინვოლუციათან. უფრო რთული სახის სიმეტრია ასევეა შემოთავაზებულია [3]-ის მიერ. პირველი პრობლემა აქ არის ის, თუ რომელი დამატებითი სტრუქტურა უნდა განიხილებოდეს ვექტორულ ფიბრაციებზე ამ უფრო ზოგად შემთხვევეში, რათა მივიღოთ ურთიერთკავშირი ჰამილტონიანთა ტოპოლოგიურ კლასიფიკაციასთან შესაბამისი სიმეტრიით.

მეორე კითხვა არის ის, თუ როგორ განვაზოგადოთ ზემოთ მოცემული სტაბილური რანგზე შედეგები ექვივარიანტულ შემთხვევეში. ეს პრობლემა გაცილებით რთულია. ჯერ ერთი, "ტრივიალური" ფიბრაციები უფრო რთული ხდება: ისინი X × V ფორმისაა V-ს წრფივი წარმოდგენისთვის G ჯგუფისთვის, შესაძლოა მოიცავდეს ანტი-უნიტარული ოპერატორებს, თუ დროის უკუსიმეტრია ეკუთვნის G-ს. მეორეც, უნდა გავითვალისწინოთ ფიქსირებული წერტილების ქვესიმრავლეები H-ის ყველა ქვეჯგუფებისთვის. H-ფიქსირებულ წერტილებზე G ჯგუფის მოქმედება ეკვივარიანტული ვექტორულ ფიბრაციებზე ხდება ფიბროვრივი წარმოდგენა, ასე რომ ჩვენ შეგვიძლია მისი დაშლა დაუყვანად წარმოდგენებად. თუ ადგილი აქვს H-ის სპეციფიკურ დაუყვანად წარმოდგენას საკმარისი ჯერადობით, მაშინ არაევივარიანტულმა თეორიამ უნდა მოგვცეს H-ექვივარიანტული ტრივიალური ქვეფიბრაცია H-ფიქსირებულ წერტილებზე, რომელიც შემდეგ ინდუცირებს G-ექვივარიანტული ტრივიალურ ფიბრაციას H-ფიქსირებული წერტილების G-ორბიტებზე. ასე, რომ შესაფერისი ინფორმაცია ამ წარმოდგენების ჯერადობებზე და წინააღმდეგობების თეორია უნდა იძლეოდეს იმის იმედს, რომ მოიძებნოს ექვივარიანტულ ვექტორულ ფიბრაციაში ტრივიალური პირდაპირი შესაკრები.

კიდევ ერთი შეკითხვა არასტაბილური K-თეორიის შესახებ, რომელიც წარმოიშვა უახლეს [5] პულიკაციაში. ეს ეხება არაკომპაქტური „ნამდვილი“ X სივრცის წარმოდგენად KR-თეორიას. თუ ინვოლუცია X-ზე ტრივიალურია და X-ს აქვს სასრული დაფარვის განზომილება, მაშინ KR-თეორია ხდება მხოლოდ KO-თეორია და ცნობილია, რომ წარმომადგენადი KO-თეორია არის ნამდვილი ვექტორული ფიბრაციების მონოიდის გროტენდიკის ჯგუფი X-ზე. დავსვათ კითხვა უფრო ზოგადად, რჩება თუ არა ჭეშმარიტი, რომ წარმოდგენადი KR-თეორია X-ზე არატრივიალური ინვოლუციით არის გროტენდიკის ჯგუფი X-ზე "ნამდვილი" ვექტორული ფიბრაციების მონოიდის? ეს გაურკვეველია, რადგან ანალოგიური შედეგი Z/2-ექვივარიანტული K-თეორიისთვის მცდარია. ამას გვიჩვენებს ლიუკისა და ოლივერის კონტრმაგალითი (იხ. [7] მაგალითი 3.11). თუმცა, ეს

კონტრმაგალითი არ მუშაობს „ნამდვილ“ შემთხვევაში, ანუ ფიბრაციის ბაზაზე ინვოლუციის ანტიწრფივ ფიბრობრივ აწევაზე, განსხვავებით ფიბრობრივ წრფივი აწევისგან. ასე რომ, სავსებით შესაძლებელია, რომ შედეგი "ნამდვილ" შემთხვევაში მართალია. თუ "ნამდვილ" შემთხვევას დადებითი პასუხია, მაშინ "კვატერნიონული" შემთხვევა ასევე უნდა იყოს შესწავლილი და შესაძლოა სხვა სიმეტრიის ტიპებიც

პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

ეს პროექტი განხორციელდება რ. მეიერთან თანამშრომლობით და განიხილავს რამდენიმე საკითხს ალგებრულ ტოპოლოგიაში, რაც დაკავშირებულია ტოპოლოგიური ფაზების კლასიფიკაციის ფიზიკურ პრობლემასთან. ტოპოლოგიური ფაზები აღწერილია ვექტორული ფიბრაციებით გარკვეული დამატებითი სტრუქტურებით. განსხვავებული ფიზიკური პირობები იწვევენ სხვადასხვა დამატებით სტრუქტურებს ვექტორულ ფიბრაციებში. საერთო ინგრედიენტი რაც რვა სტანდარტული სიმეტრიის ტიპის აღწერილობაშია, არის ინვოლუცია ფიბრაციის საბაზო სივრცეზე, ანუ Z/2 ჯგუფის მოქმედება. რვიდან სამისთვის სტანდარტული სიმეტრიის ტიპებიდან, ფიბრაციაში დამატებითი სტრუქტურა მათ „ნამდვილ“ და "კვატერნიონულ" ვექტორულ ფიბრაციებად აქცევს, როგორც ეს ადრე ინდექსის თეორიაში და "ქირალურ" ვექტორულ ფიბრაციებში იყო შესწავლილი. ამ ტიპის ფიბრაციები ახლახან იქნა შესწავლილი და გამოყენებული ფიზიკის გათვალისწინებით. ყველა სიმეტრიის ტიპი შეიძლება ერთნაირად დამუშავდეს კლიფორდის ალგებრების გამოყენებით, მაგრამ კავშირი ამ უფრო აბსტრაქტულ აპარატსა და ვექტორულ ფიბრაციებში დამატებითი სტრუქტურებს შორის ჯერ არ არის შესწავლილი.

ჩვენ ვგეგმავთ იმ დამატებითი სტრუქტურის შემოღებას ვექტორულ ფიბრაციებში, რომლებიც დაკავშირებულია სხვადასხვა სიმეტრიის ტიპებთან და მათ დაკავშირებას კლიფორდის ალგებრების თეორიასთან, რომელიც ყველა სიმეტრიის ტიპს ერთდროულად განიხილავს. მიუხედავად იმისა, რომ ფიზიკური კლასიფიკაცია იყენებს იზომორფიზმის კლასებს, ვთქვათ, "ნამდვილი" ვექტორის ფიბრაციებისთვის, ჩვეულებრივ უფრო ადვილია მათი კლასიფიკაცია სტაბილურ იზომორფიზმამდე სიზუსტით: ეს მოიცავს საბაზისო სივრცის „ნამდვილი“ K- თეორიის გამოთვლას. ვექტორული ფიბრაციებისთვისდამატებითი სტრუქტურის გარეშე ცნობილია სტაბილური იზომორფიზმი და იზომორფიზმი ერთი და იგივეა, თუ ვექტორული ფიბრაციის რანგი საკმარისად მაღალია. ეს პროექტი მიზნად ისახავს ანალოგიური შედეგების დამტკიცებას „ნამდვილი“ და „კვატერნიონული“ ვექტორული ფიბრაციებისთვის იმ დამატებითი სტრუქტურების არსებობის შემთხვევაში, რაც დაკავშირებულია ტოპოლოგიურ მასალებთან. ზოგადად, კრისტალოგრაფიული სიმეტრიები უკავშირდება ჯგუფურ მოქმედებებს და ეკვივარიანტულ ვექტორულ ფიბრაციებს და ჩვენ ასევე ვგეგმავთ შევისწავლოთ, როდის იწვევს სტაბილური იზომორფიზმი იზომორფიზმს ამ შემთხვევებში. მიუხედავად იმისა, რომ სივრცეები, რომლებიც გამოიყენება ტოპოლოგიური ფაზების კლასიფიკაციისთვის, კომპაქტურია, მათთვის ალგებრული ტოპოლოგიის გამოთვლები ხშირად მოიცავს არაკომპაქტურ სივრცეებს. ამ პირობებში გაურკვეველია საკმარისია თუ არა "ნამდვილი" და "კვატერნიონული" ვექტორული ფიბრაციები K- თეორიის ჯგუფის წარმოქმნისათვის, რადგან ანალოგიური შედეგები მცდარია ექვივარიანტული ვექტორული ფიბრაციებისთვის, უკვე Z/2 ჯგუფისთვის. ჩვენც აგრეთვე ვგეგმავთ ვუპასუხოთ ამ კითხვებს.

პროეტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით.

ზემოაღნიშნული აღწერილობის მიხედვით, შემოთავაზებული კვლევითი პროექტის მიზნები შეიძლება დაჯგუფდეს შემდეგ ამოცანებში:

A. დავამტკიცოთ რომ ნებისმიერი „ნამდვილი“ X სივრცისთვის, რომ X-ზე საკმარისად მაღალი რანგის „ნამდვილი“ ან „კვატერნიონული“ ვექტორული ფიბრაციებს აქვს ტრივიალური შესაკრები. აქ ქვედა ზღვარი დამოკიდებულია X-ის განზომილება d-ზე და ინვოლუციის ფიქსირებული წერტილების ქვესივრცის განზომილება df -ზე. ჩვენ ველით, რომ ქვედა ზღვარი იქნება max{df , (d – 1)/2} „ნამდვილ“ და (d – 1)/2 „კვატერნიონულ“ შემთხვევაში.

B. G სასრული ჯგუფისთვის და X G-სივრცისთვის ვიპოვოთ პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ რომ G-ექვივარიანტულ ვექტორულ ფიბრაციას X-ზე აქვს ტრივიალური შესაკრები. ჩვენ შეიძლება პირველ რიგში ფოკუსირება მოვახდინოთ აბელის ჯგუფების შემთხვევაზე, რომელიც უფრო ადვილი უნდა იყოს, რადგან მაშინ ყველა დაუყვანად წარმოდგენას აქვს განზომილება 1 და რჩება დაუყვანადი ყველა ქვეჯგუფზე. ჩვენ ველით საკმარის პირობას, რომელიც მოიცავს ორივეს დაუყვანადი წარმოდგენების ჯერადობებს რომლითაც ისინი ჩნდებიან სტაბილიზატორი ჯგუფებისთვის ვექტორული ფიბრაციის ფიბრებში და H-ფიქსირებული წერტილების ქვესიმრავლეთა განზომილებებს G ჯგუფის H ქვეჯგუფებისთვის. პასუხი, რომელიც მოიცავს მხოლოდ ვექტორული ფიბრაციის განზომილებას სასურველი იქნებოდა, მაგრამ გაურკვეველია შესაძლებელია თუ არა ეს.

C. შევამოწმოთ არის თუ არა სასრულ განზომილებიანი Z/2-CW კომპლექსის წარმოდგენადი „რეალური" K-თეორია იზომორფული მისი „ნამდვილი" ვექტორული ფიბრაციების მონოიდის გროტენდიკის ჯგუფის. შევისწავლოთ იგივე კითხვა „კვატერნიონული" ფიბრაციებისთვის. ჩვენ გვჯერა, რომ ეს მართალია, თუმცა ანალოგიური დებულება Z/2-ეკვივარიანტული ვექტორული ფიბრაციებისთვის მცდარია.

D. დავაკავშიროთ სიმეტრიის შემნახავი ტოპოლოგიური ფაზების კენედის კლასიფიკაცია დე ნიტისისა და გომის მიერ შესწავლილ „ნამდვილ", „კვატერნიონულ" და ქირალურ ვექტორულ ფიბრაციებთან მხოლოდ დროის შებრუნების ან ქირალური სიმეტრიის მქონე სისტემებისთვის. გამოვიყენოთ ეს იმ დამატებითი სტრუქტურის დასადგენად ვექტორულ ფიბრაციებზე, რომელიც დაკავშირებულია სიმეტრიის ტიპებთან.

ლიტერატურა

[1] Michael F. Atiyah, K-theory and reality, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 17 (1966), 367–386, DOI 10.1093/qmath/17.1.367. MR0206940

[2] Eske Ewert and Ralf Meyer, Coarse geometry and topological phases, Comm. Math. Phys. 366 (2019), no. 3, 1069–1098, DOI 10.1007/s00220-019-03303-z. MR3927086

[3] Daniel S. Freed and Gregory W. Moore, Twisted equivariant matter, Ann. Henri Poincaré 14(2013), no. 8, 1927–2023, DOI 10.1007/s00023-013-0236-x. MR3119923.

[4] Dale Husemoller, Fibre bundles, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1975. MR0370578.

[5] Collin Mark Joseph and Ralf Meyer, Geometric construction of classes in van Daele's K-theory, posted on 2022, DOI 10.48550/ARXIV.2211.16245.

[6] Ricardo Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Ph.D. Thesis, Universität zu Köln, 2014, http://kups.ub.uni-koeln.de/id/eprint/5873.

[7] Wolfgang Lück and Bob Oliver, The completion theorem in K-theory for proper actions of a discrete group, Topology 40 (2001), no. 3, 585–616, DOI 10.1016/S0040-9383(99)00077-4. MR1838997.

[8] Giuseppe De Nittis and Kiyonori Gomi, Classification of "Real" Bloch-bundles: topologicalquantum systems of type AI, J. Geom. Phys. 86 (2014), 303–338, DOI 10.1016/j.geomphys.2014.07.036. MR32823325.

[9] Giuseppe De Nittis and Kiyonori Gomi, Classification of "quaternionic" Bloch-bundles: topological quantum systems of type AII, Comm. Math. Phys. 339 (2015), no. 1, 1–55, DOI 10.1007/s00220-015-2390-0. MR3366050.

[10] Giuseppe De Nittis and Kiyonori Gomi, Chiral vector bundles, Math. Z. 290 (2018), no. 3-4, 775–830, DOI 10.1007/s00209- 018-2041-1.

[11] Hermann Schulz-Baldes, Topological insulators from the perspective of non-commutative geometry and index theory, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 118 (2016), no. 4, 247–273, DOI 10.1365/s13291-016-0142-5. MR3554424.

ვახტანგ ლომაძე: ალგებრული ანალიზის ზოგიერთი ამოცანა.
შესავალი

ალგებრულ მეთოდებს ანალიზში ჯერ კიდევ ნიუტონი იყენებდა. ასევე, ლაგრანჟი, ლაიბნიცი, კოში და მრავალი სხვა დიდი კლასიკოსი. ტერმინი „ალგებრული ანალიზი“ ეკუთვნის ლაგრანჟს. თანამედროვე აზრით, ალგებრული ანალიზი არის თეორია, რომელიც სწავლობს მეტწილად წრფივ კერძო წარმოებულიან განტოლებათა სისტემებს მოდულების თეორიის, ჰომოლოგიური ალგებრის და კონათა თეორიის გამოყენებით.

არსებული ლიტერატურული მონაცემები

[1] V. Lomadze, Differential equations defined by (convergent) Laurent series, Journal of Algebra and Its Applications 22, pp. 2350087 (2023).
[2] V. Lomadze, Linear ODE’s with Laurent polynomial coefficients, Functional Differential Equations 29 pp. 79-89 (2021).
[3] V. Lomadze, Continuity of the solution set to a linear PDE with constant coefficients, International J. of Control 94 pp. 1948106 (2021).
[4] V. Lomadze, Duality for Multidimensional Linear Systems with Homological Dimension ≤ 1, SIAM J. Control Optim. 59, pp. 417–433 (2021).
[5] V. Lomadze, Continuous dependence of linear differential systems on polynomial modules, Mathematics of Control, Signals, and Systems 32, pp. 385-409 (2020).
[6] V. Lomadze, An easy approach to distributions and operational calculus, Journal of analysis and its applications 37, pp. 151-158 (2018).
[7] V. Lomadze, KW Models for (Multivariate) Linear Differential Systems, SIAM J. Control Optim. 56 pp, 456-472 (2018).

ყოველ კრებად ლორანის მწკრივთან დაკავშირდა დიფერენციალური განტოლება. ეს განტოლება ბუნებრივად განაზოგადებს ჩვეულებრივ მუდმივ კოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას, რაც პოლინომით არის განსაზღვრული. გამოთქმულია იმედი, რომ ამ ტიპის დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზოგიერთი სპეციალური ფუნქციების დასახასიათებლად. ასე მაგალითად, ნაჩვენებია, რომ სახელგანთქმული ბესელის ფუნქცია J_n არის

$$\sqrt{D^2+1}\,(\sqrt{D^2+1}\ +D)^n y=0$$

განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \text{ და } y^{(n)}(0) = 1/2^n$$

(იხ. [1]).

გამოკვლეულია წრფივი დიფერენციალური განტოლებები კოეფიციენტებით ლორანის პოლინომების რგოლში. სახელდობრ, შესწავლილია კოშის ამოცანა. ნაჩვენებია, რომ ბესელის ფუნქციების $(J_n)_n$ ერთობლიობა არის პირველი რიგის

$$y' = {}^{1}/_{2}\,(t - t^{-1})\, y$$

დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობას

$$y(0)=\delta$$

(იხ. [2]).

შესწავლილია მუდმივ კოეფიციენტებიანი კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსენთა სივრცის უწყვეტი დამოკიდებულება განტოლების კოეფიციენტებისგან (იხ. [3]).

კლასიკური კალმანის სისტემა მოიცემა ოთხი სკალარული მატრიცის მეშვეობით, და მისი დუალური სისტემა განისაზღვრება უბრალო ტრასპონირებით. მრავალგანზომილებიანი წრფივი დიფერენ-ციალური სისტემის აღწერისთვის სკალარული მატრიცები არაა საკმარისი და აუცილებელია პოლინომური მოდულების მოშველიება. ვინაიდან მოდული საზოგადოდ არაა თავისუფალი, დუალობის განსაზღვრა ზოგად შემთხვევაში დრამატულად ძნელი საქმეა. ეს

დუალობა განსაზღვრულია ერთ კერძო, მაგრამ მნიშვნელოვან, შემთხვევაში. ეს შემთხვევა მოიცავს მაგ. როზენბროკის სისტემებს (იხ. [4]).

წრფივი დიფერენციალური სისტემა განისაზღვრება როგორც მუდმივ კოეფიციენტებიანი კერძო-წარმოებულიანი განტოლებათა სისტემის ამონახსნების სივრცე. ეს სისტემები ურთიერთ ცალსახა თანადობაშია სტანდარტული პოლინომური მოდულის ქვემოდულებთან. შესაფერისი ტოპოლოგი-ების შემოტანით მოხერხდა ამ თანადობის ჰომეომორფიზმად გადაქცვეა. მეტიც, წრფივი დიფერენ-ციალური სისტემების სიმრავლე ფიქსირებული ჰილბერტის პოლინომით, ჩაიდგა კლასიკურ გრასმანიანში (იხ. [5]).

განვითარებულია მეტისმეტად მარტივი, ალგებრული მიდგომა ერთი ცვლადის განზოგადებული ფუნქციების თეორიაში და ჰევისაიდის ოპერაციულ აღრიცხვაში (იხ. [6]).

კლასიკური კრონეკერ-ვაიერშტრასის მატრიცული კონები განზოგადდა მრავალი ცვლადის შემთხვევაში, და ეწოდა მათ KW-მოდელები. დამყარდა კანონიკური ურთიერთცალსახა თანადობა წრფივ დიფერენციალურ სისტემებსა და მინიმალური KW-მოდელების ექვივალენტობის კლასებს შორის {იხ. [7]).

პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება

პროექტი თეორიული ხასიათისაა. ვფიქრობთ, რომ იგი საინტერესო უნდა იყოს განზოგადებული ფუნქციების თეორიაში და წრფივ დინამიურ სისტემათა თეორიაში.

პროექტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები

ლოკალიზაციის ტექნიკის გამოყენებით (რაც კომუტაციური ალგებრის ერთი ელემენტარული ტექნიკაა) ნავარაუდევია, რომ განისაზღვროს მიკუსინსკის სივრცე როგორც უმცირესი გაფართოება უწყვეტი ფუნქციების სივრცისა, სადაც განუსაზღვრელი კერძო ინტეგრალური ოპერატორები ბიექციურია. მიღებული სივრცე შეიცავდეს იქნება „იმპულსურ" ფუნქციებს. საპროექტი წინადადება ითვალისწინებს სასრული რიგის შვარცის განაწილებების წარმოდგენას, როგორც მიკუსინსკის ფუნქციებისა ამ იმპულსური ფუნქციების მოდულით. უწყვეტი ფუნქციების რაიმე სპეციფიკური თვისებები ამ კოსტრუქციაში არსებით როლს არ უნდა თამაშობდეს. ეს კონსტრუქცია სრულიად ალგებრულია, და უნდა ველოდოთ, რომ იგი შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერ წრფივ სივრცეზე, რომელიც აღჭურვილია მარჯვნიდან შებრუნებადი ოპერატორებით და იდემპოტენტური ოპერატორებით დაკავშირებულთ ერთმანეთთან გადანაცვლებადობის კანონებით.

არსებობს კანონიკური სიურექციული ასახვა პოლინომური მატრიცების სიმრავლიდან წრფივი დიფერენციალური სისტემების სიმრავლეზე. ბუნებრივად ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა ეს ასახვა გავხადოთ "quotient map". ეს კითხვა დაისვა (გასული საუკუნის) 80-იან წლებში. იგი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სხვადასხვა გამოყენებებისთვის, მაგ. მათემატიკურ მოდელირებაში. პროექტის ერთერთი მიზანია პასუხი გაეცეს ამ კითხვას ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

ერთი ცვლადის პოლინომისთვის, როგორც კარგად ცნობილია, განმარტებულია კომპანიონი მატრიცი. ეს ცნება იძლევა საშუალებას მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება დავიყვანოთ პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე. პროექტის ერთი მიზანია ამ ძალიან კლასიკური ცნების და ფაქტის განზოგადება მრავალი ცვლადის შემთხვევაში.

<u>თემა 5:</u> სასაზღვრო ამოცანები ჩვეულებრივი დიფერენციალური, ფუნქციონალურ-დიფერენციალური და ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებისთვის

შემსრულებელ მკვლევართა ჯგუფი: ივანე კიღურაძე (თემის ხელმძღვანელი), სერგო ხარიბეგაშვილი, მალხაზ აშორდია, გივი ბერიკელაშვილი, ნინო ფარცვანია, ოთარ ჯოხაძე.

სამეცნიერო განყოფილება: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დიფერენციალური განტოლებების განყოფილება.

5.1. თემის მოკლე შინაარსი: დამუშავდება საწყის, საწყის-სასაზღვრო და სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების აპრიორული შეფასებების ახალი ტექნიკა როგორც რეგულარული, ისე სინგულარული ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური უტოლობებისა და განტოლებებისთვის და ჰიპერბოლური ტიპის კერძო წარმოებულებიანი განტოლებებისთვის. მიღებული შეფასებების საფუძველზე გამოკვლეული იქნება:

- საწყისი ამოცანა არალიპშიცური და დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის;
- წონიანი საწყისი ამოცანა დროითი ცვლადის მიმართ სინგულარული განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის;
- ამოცანები დირიხლესა და ნეიმანის ტიპის არაწრფივი სასაზღვრო პირობებით დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის;
- პერიოდული ტიპის არაწრფივი ამოცანები მაღალი რიგის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის;
- ამოცანები ფეთქებადი, სწრაფად ზრდადი და უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობის შესახებ არსებითად არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის;
- სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა მეორე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძო წარმოებულიან განტოლებათა სისტემებისთვის.

5.2. პრობლემის აღწერილობა

ოპტიმალურად იქნება აღწერილი არაწრფივ, არალიპშიცურ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ და ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ სისტემათა კლასები, რომელთათვისაც საწყის ამოცანას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

რეგულარული ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის გამოკვლეული იქნება პერიოდულის ტიპის სასაზღვრო ამოცანები, ხოლო დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული განტოლებებისა და სისტემებისთვის – საწყისი ამოცანა და ამოცანები დირიხლესა და ნეიმანის ტიპის არაწრფივი სასაზღვრო პირობებით.

კურცვაილის აზრით განზოგდებული, დროითი ცვლადის მიმართ სინგულარული დიფერენციალური სისტემებისთვის აგებული იქნება წონიანი საწყისი ამოცანის თეორია.

ოპტიმალურად იქნება აღწერილი არსებითად არაწრფივ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემათა კლასები, რომელთაც გააჩნიათ სწრფად ზრდად და უსასრულობაში ქრობად ამონახსნთა მრავალპარამეტრიანი სიმრავლეები.

მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი მკაცრად და არამკაცრად ნორმალურად ჰიპერბოლური სისტემებისა და არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისთვის აგებული იქნება სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანის თეორია.

5.3. კვლევის ობიექტები, თემის აქტუალობა, კვლევის სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია

კვლევის ობიექტებია: ა) საწყისი ამოცანა არალიპშიცური ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის; ბ) წონიანი საწყისი ამოცანა დროითი ცვლადის მიმართ სინგულარული კურცვაილის აზრით განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის; გ) პერიოდულის ტიპის ამოცანა მაღალი რიგის რეგულარული, წრფივი და არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური

განტოლებებისთვის; დ) საწყისი ამოცანა და დირიხლესა და ნეიმანის ტიპის ამოცანები დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის; ე) ამოცანები ფეთქებადი და მარჯვენა ნახევარღერძზე განსაზღვრული სწრაფად ზრდადი და უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნების არსებობის შესახებ არსებითად არაწრფივი (კერძოდ, ემდენ-ფაულერის ტიპის) ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის; ვ) სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა მეორე რიგის წრფივი და არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისთვის.

თემის აქტუალობა: გასული საუკუნის 60-იანი წლებიდან დაწყებული დღემდე საწყისი და სასაზღვრო ამოცანები ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის ინტენსიურად შეისწავლება სწორედ ამ პერიოდში: ა) მიღებულ იქნა ფუნდამენტური შედეგები, რომლებმაც მეტ-ნაკლებად დასრულებული სახე მისცეს კლასიკურ სასაზღვრო ამოცანათა (კოში-ნიკოლეტის, პერიოდული, დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ვალე-პუსენისა და ა.შ.) თეორიას რეგულარული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისთვის; ბ) აგენული იქნა კოშის ამოცანის თეორია კურცვეილის აზრით განზოგადებული რეგულარული დიფერენციალური სისტემებისთვის და გადაიდგა სერიოზული ნაბიჯები ასეთი სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანათა თეორიის საფუძვლების ასაგებად; გ) აგებულ იქნა სასაზღვრო ამოცანათა თეორია დროითი ცვლადის მიმართ არაინტეგრებადი სინგულარობების მქონე დიფერენციალური განტოლებებისთვის და მიღებულ იქნა საინტერესო შედეგები ორწერტილოვანი და საწყისი ამოცანების ამოხსნადობის შესახებ ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური განტოლებებისთვის; დ) არაავტონომიური დიფერენციალური განტოლებებისთვის მიღებულ იქნა ფუნდამენტური შედეგები ფეთქებად და წესიერ, კერძოდ, სწრაფად ზრდად და უსასრულობაში ქრობად მონოტონურ და რხევად ამონახსნთა თეორიის ასაგებად (იხ., მაგალითად, [1]-[37], [92]-[141], [145]-[150], [152]-[158], [162], [164]-[166], [168]-[171] და იქ მითითებული ლიტერატურა).

რაც შეეხება წარმოდგენილი პროექტის 1.5 პუნქტში ჩამოთვლილ ამოცანებს, ისინი კვლავ ნაკლებად შესწავლილი რჩება. ამ ხარვეზის შევსება, რაც ჩვენი საკვლევი თემის ერთ-ერთი ძირითადი მიზანია, ეჭვგარეშეა, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის რთული და აქტუალური პრობლემაა.

ჩვენი მეორე ძირითადი მიზანი უკავშირდება პერიოდულ ამოცანებს კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებისთვის. ასეთი განტოლებისთვის დროითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა პუანკარეს კლასიკური ნაშრომების გამოქვეყნებიდან დღემდე აქტუალურად რჩება. მის მიმართ ინტერესი მნიშვნელოვნად გაიზარდა მას შემდეგ, რაც დამტკიცებულ იქნა „მთაზე გადასვლის ლემის“ სხვადასხვა ვარიანტი [172] და შემუშავებულ იქნა ს. პოხოჟაევის ფიბრაციის მეთოდი [173] და ჰ. ბრეზისისა და ლ. ნირენბერგის მეთოდები [161], რაც ეფუძნება ასახვის ხარისხის თეორიას. ამ ამოცანის შესწავლას ხსენებული მეთოდებით მიეძღვნა ფუნდამენტური გამოკვლევები [144], [151], [159], [160], [163], [174] (იხ. აგრეთვე, [142], [167] და იქ მითითებული ლიტერატურა), რომელთა შემდეგ დღის წესრიგში ბუნებრივად დგება საკითხი სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანის შესწავლაზე. მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემებისთვის ეს რთული და საინტერესო ამოცანა ფაქტობრივად შეუსწავლელი რჩება და მისი თეორიის აგება, რაც ჩვენი საკვლევი თემის მეორე ძირითადი მიზანია, ცალსახად აქტუალურია.

კვლევის სიახლე და მეთოდოლოგია. კვლევის სიახლე განპირობებულია მისი მიზნებით, რაც გულისხმობს:

- ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის და განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის 1.5 პუნქტში ჩამოთვლილი ამოცანების თეორიის აგებას;
- მეორე რიგის წრფივი და არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისთვის სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანის თეორიის აგებას.

კვლევის მეთოდოლოგია დაეფუძნება აპრიორულ შეფასებათა ტექნიკას, რომლის დამუშავებაც ასევე გათვალისწინებულია ჩვენი პროექტით.

5.4. არსებული ლიტერატურული მონაცემები (როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს)

შემოთავაზებული პროექტის ავტორები წლების მანძილზე აქტიურ სამეცნიერო-კვლევით სამუშაოს ეწევიან და მათი მეცნიერული შედეგები კარგადაა ცნობილი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის სპეციალისტებისთვის.

ივანე კიღურაძე [92]-[117] ითვლება სინგულარული დიფერენციალური განტოლებებისთვის სასაზღვრო ამოცანათა თეორიისა და არაავტონომიურ დიფერენციალურ განტოლებათა ასიმპტოტური თეორიის ერთ-ერთ დამფუძნებლად. მის მიერ დამუშავებული მეთოდები და მიღებული მეცნიერული შედეგები ფართოდ გამოიყენება სამეცნიერო ლიტერატურაში. კერძოდ, ისინი ასახულია ენციკლოპედიურ გამოცემებში [135], [137], [158], მონოგრაფიებსა [128]-[134], [136], [138]-[141], [143], [145]-[150], [153]-[155], [158] და მრავალრიცხოვან სამეცნიერო სტატიებში, სადაც იყენებენ ტერმინებს „მიკუსინსკი-კონდრატიევ-კიღურაძის თეორემა“, „კიღურაძის ლემა“, „კიღურაძის უტოლობა“, „კიღურაძის კლასები“, „კიღურაძის ამოცანა“, „კიღურაძე-კვინიკაძის შეფასება“ (იხ., მაგალითად, [139], [158], [165], [168], [171], [175]).

სამეცნიერო ლიტერატურაში ასევე კარგად ცნობილია სერგო ხარიბეგაშვილისა და ოთარ ჯოხაძის [50]-[91] ფუნდამენტური შედეგები არსებითად არაწრფივი (კერძოდ, ხარისხობრივი არაწრფივობის მქონე) ჰიპერბოლური განტოლებებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანათა გლობალური და ლოკალური ამოხსნადობისა და ფეთქებადი ამონახსნების არსებობის შესახებ.

მალხაზ აშორდიას სახელთან დაკავშირებულია განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანათა თეორიის საფუძვლების აგება [1]-[37]. ადრე იაროსლავ კურცვაილისა და მისი მოწაფეების მიერ ასეთი სისტემებისთვის მხოლოდ კოშის ამოცანა იყო შესწავლილი, ისიც რეგულარულ შემთხვევაში. არაინტეგრებადი სინგულარობის მქონე განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის კოშის ამოცანაც პირველად აგრეთვე მ. აშორდიამ გამოიკვლია.

ნინო ფარცვანიას [117]-[127] მიღებული აქვს დასრულებული ხასიათის შედეგები სინგულარულ სასაზღვრო ამოცანათა თეორიასა და ოსცილაციის თეორიაში. კერძოდ, მას ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებებისთვის ამოხსნილი აქვს კნეზერისა და კოშის ამოცანები.

გივი ბერიკელაშვილი [38]-[49] წარმატებით იკვლევს კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისთვის საწყის სასაზღვრო და სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების სასრულ სხვაობიანი მეთოდით აგების საკითხს.

5.5. საკვლევი თემის არსი და მეცნიერული ღირებულება

ჩვეულებრივი დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის და მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემებისთვის დამუშავდება სასაზღვრო ამოცანათა კვლევის მეთოდები, რის საფუძველზეც აიგება ისეთ სასაზღვრო ამოცანათა დასრულებული თეორია, რომლებიც ადრე ნაკლებად შესწავლილი ან ფაქტობრივად შეუსწავლელი რჩებოდა.

5.6. თემის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით

2024 წელი

- საწყისი ამოცანა არალიპშიცური ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის

ოპტიმალურად იქნება აღწერილი მაღალი რიგის დიფერენციალურ და ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემათა კლასები, რომელთათვის კოშის ამოცანას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

- საწყისი ამოცანა დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის

დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის დადგენილი იქნება კოშის ამოცანის ამოხსნადობისა და ცალსახად ამოხსნადობის არაგაუმჯობესებადი საკმარისი პირობები.

- **წონიანი საწყისი ამოცანა არაინტეგრებადი სინგულარობის მქონე განზოგადებული წრფივი დიფერენციალური სისტემებისთვის**

განზოგადებული წრფივი დიფერენციალური სისტემებისთვის არაინტეგრებადი სინგულარობით დადგენილი იქნება: ა) წონიანი საწყისი ამოცანის კორეტულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ბ) წონიანი საწყისი ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის აღნიშნული ამოცანის ამონახსნისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

- **სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი მკაცრად ჰიპერბოლური სისტემებისთვის, რომლებიც წარმოდგენილია მხოლოდ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებით**

აპრიორულ შეფასების მეთოდით დადგენილი იქნება ამონახსნის ერთადერთობა, ხოლო მახასიათებელთა მეთოდისა და ასგეირსონის პრინციპის გამოყენებით ამონახსნი აიგება კვადრატურებში.

ინდიკატორები: გამოსაქვეყნებლად გადაეცემა 5 მაინც სამეცნიერო ნაშრომი და სამეცნიერო ფორუმებზე გასაკეთებლად მომზადდება 6 მაინც მოხსენება.

2025-2028 წლები

- დროითი და ფაზური ცვლადების მიმართ სინგულარული დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის დადგენილი იქნება გარკვეული აზრით ოპტიმალური პირობები, რომლებიც სათანადოდ უზრუნველყოფენ დირიხლესა და ნეიმანის ტიპის არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანათა ამოხსნადობასა და ცალსახად ამოხსნადობას (2025 წ.).
- მაღალი რიგის დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის დადგენილი იქნება პერიოდულის ტიპის არაწრფივ სასაზღვრო ამოცანათა ამოხსნადობისა და ცალსახად ამოხსნადობის საკმარისი პირობები (2026 წ.).
- არსებითად არაწრფივი მაღალი რიგის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისთვის დამტკიცებული იქნება თეორემები ფეთქებად და სწრაფად ზრდად ამონახსნთა მრავალპარამეტრიანი სიმრავლეების არსებობის შესახებ და დადგენილი იქნება აღნიშნული ამონახსნების ასიმპტოტური შეფასებები (2027 წ.).
- არსებითად არაწრფივი მაღალი რიგის დიფერენციალური და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური სისტემებისთვის დამტკიცებული იქნება თეორემები უსასრულობაში ქრობად რხევად ამონახსნთა მრავალპარამეტრიანი სიმრავლის არსებობის შესახებ და დადგენილი იქნება ამ ამონახსნების ასიმპტოტური შეფასებები (2028 წ.).
- არაინტეგრებადი სინგულარობების მქონე წრფივი იმპულსური დიფერენციალური სისტემებისთვის დადგენილი იქნება: ა) წონიანი საწყისი ამოცანის კორექტულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ბ) წონიანი საწყისი ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის აღნიშნული ამოცანის ამონახსნისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები (2025 წ.).
- დროითი ცვლადის მიმართ არაინტეგრებადი სინგულარობის მქონე არაწრფივი განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის დადგენილი იქნება წონიანი საწყისი ამოცანის ამოხსნადობისა და ცალსახად ამოხსნადობის პირობები (2026 წ.).
- დადგენილი იქნება გარკვეული აზრით ოპტიმალური პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ წონიანი საწყისი ამოცანის კორექტულობას დროითი ცვლადის მიმართ სინგულარული არაწრფივი განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის (2027 წ.).
- დროითი ცვლადის მიმართ სინგულარული არაწრფივი განზოგადებული დიფერენციალური სისტემებისთვის დადგენილი იქნება წონიანი საწყისი ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის აღნიშნული ამოცანის ამონახსნისკენ კრებადობის საკმარისი პირობები (2028 წ.).
- აპრიორულ შეფასებათა მეთოდით დადგენილი იქნება სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი მკაცრად ჰიპერბოლური სისტემებისთვის, რომლებიც შეიცავენ პირველი რიგის

წარმოებულებსაც. მახასიათებელთა მეთოდისა და ასგეირსონის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომლის ამონახსნი აიგება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით (2025 წ.).

- მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი არამკაცრად ნორმალურად ჰიპერბოლური სისტემებისთვის, რომლებიც მხოლოდ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებით, აპრიორულ შეფასებათა მეთოდით დადგინდება სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა. თვით ამონახსნი კი აიგება კვადრატურებში ასგეირსონის პრინციპისა და მახასიათებელთა მეთოდის გამოყენებით (2026 წ.).
- სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა შეისწავლება მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი არამკაცრად ნორმალურად ჰიპერბოლური სისტემებისთვის, რომლებიც შეიცავენ პირველი რიგის წარმოებულებსაც. აპრიორულ შეფასებათა მეთოდით დამტკიცდება ამონახსნის ერთადერთობა. მახასიათებელთა მეთოდისა და ასგეირსონის პრინციპის გამოყენებით დასმული ამოცანა მიიყვანება ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომლის ამონახსნი აიგება მიმდევრობით მიახლოების მეთოდით (2027 წ.).
- სივრცითი ცვლადის მიმართ პერიოდული ამოცანა შეისწავლება მეორე რიგის არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისთვის. დადგინდება პირობები, რომლებიც სათანადოდ უზრუნველყოფენ დასმული ამოცანის ამოხსნადობას, ცალსახად ამოხსნადობასა და ამონახსნის არარსებობას (2028 წ.).

ყოველწლიურად გამოსაქვეყნებლად გადაეცემა 5 მაინც სამეცნიერო ნაშრომი. მიღებული შედეგები რეგულარულად მოხსენდება განყოფილების მიერ ორგანიზებულ საერთაშორისო ვორკშოპებს დიფერენციალურ განტოლებათა თვისებრივ თეორიასა და სასაზღვრო ამოცანათა თეორიაში, ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო კონფერენციებსა და საერთაშორისო სამეცნიერო ფორუმებს.

5.7. საერთაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობა

თემის შემსრულებლებს აქვთ სამეცნიერო კონტაქტები: ტარას შევჩენკოს სახელობის კიევის ეროვნულ უნივერსიტეტთან, მეჩნიკოვის სახელობის ოდესის ეროვნულ უნივერსიტეტთან, ბრნოს ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტთან (ჩეხეთის რესპუბლიკა), პალაცკის უნივერსიტეტთან (ჩეხეთის რესპუბლიკა), მიშკოლცის უნივერსიტეტთან (უნგრეთი), ფლორიდის ტექნოლოგიურ ინსტიტუტთან (მელბურნი, აშშ), ჰიროსიმის უნივერსიტეტთან (იაპონია), ბელორუსიის მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტთან და ჩეხეთის მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტთან.

დიფერენციალური განტოლებების განყოფილების ინიციატივით ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში ყოველწლიურად ტარდება საერთაშორისო ვორკშოპი დიფერენციალურ განტოლებათა თვისებრივ თეორიაში; განყოფილება ჩეხეთის მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტის თანამშრომელთა ჯგუფთან ერთად არის სასაზღვრო ამოცანათა თეორიაში ჩეხეთ-საქართველოს ვორკშოპის ორგანიზატორი, რომელიც რეგულარულად ტარდება ქ. ბრნოში.

5.8. მონაცემები თემის შემსრულებელთა პუბლიკაციებისა და ციტირების ინდექსების შესახებ

პუბლიკაციების რაოდენობა

#	გვარი, სახელი	გამოქვეყნებული მონოგრაფიები და მიმოხილვები	გამოქვეყნებული სტატიები, მათ შორის იმპაქტ-ფაქტორიან ჟურნალებში
1.	კიღურაძე ივანე	9	211 (122)
2.	ხარიბეგაშვილი სერგო	4	119 (72)
3.	აშორდია მალხაზი	3	105 (24)
4	ბერიკელაშვილი გივი	1	81 (23)

5.	ფარცვანია ნინო		52 (22)
6.	ჯოხაძე ოთარი		83 (51)

ციტირების ინდექსები

#	გვარი, სახელი	Publish or Perish ციტირება (h ინდექსი)	Scopus ციტირება (h ინდექსი)	Math. Sci. Net. (AMS) ციტირება (მაციტირებელ ავტორთა რაოდენობა)
1.	კიღურაძე ივანე	5092 (31)	1163 (18)	1716 (579)
2.	ხარიბეგაშვილი სერგო	685 (12)	257 (8)	204 (74)
3.	აშორდია მალხაზი	590 (13)	326 (10)	92 (39)
4	ბერიკელაშვილი გივი	399 (12)	150 (9)	105 (106)
5.	ფარცვანია ნინო	217 (9)	117 (6)	80 (66)
6.	ჯოხაძე ოთარი	312 (9)	104 (4)	93 (42)

5.9. ციტირებული ლიტერატურა

ა) თემის შემსრულებლების მონოგრაფიები და ბოლო ათი წლის მანძილზე სამეცნიერო ჟურნალებში გამოქვეყნებული ნაშრომები

1. M. Ashordia, The initial problem for linear systems of generalized ordinary differential equations, linear impulsive and ordinary differential systems. Numerical solvability. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **78** (2019), 1-162.
2. M. Ashordia, The general boundary value problems for linear systems of generalized ordinary differential equations, linear impulsive differential and ordinary differential systems. Numerical solvability. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **81** (2020), 1-184.
3. On the general linear boundary value problems for impulsive systems with singularities. *Georgian Math. J.* **21** (2014), no. 1, 29-39.
4. M. T. Ashordia, A multipoint boundary value problem for systems of linear generalized differential equations with singularities. (Russian) *Differ. Uravn.* **50** (2014), no. 8, 995-1010; translation in *Differ. Equ.* **50** (2014), no. 8, 987-1002.
5. M. Ashordia, On the nonlocal nonlinear boundary value problems for systems of generalized differential equations with singularities. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **63** (2014), 141-149.
6. M. Ashordia, On the solvability of general boundary value problems for systems of nonlinear impulsive equations with finite and fixed points of impulse actions (with G. Ekhvaia, N. Kekelia). *Bound. Value Probl.* **2014,** 2014:157, 17 pp.
7. M. Ashordia, On the well-possedness of general nonlinear boundary value problems for systems of differential equations with finite and fixed points of impulses (with G. Ekhvaia, N. Kekelia). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **61** (2014), 147-159.
8. M. Ashordia, Antiperiodic boundary value problem for systems of linear generalized differential equations (with G. Ekhvaia). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **66** (2015), 141-152.
9. M. Ashordia, On the solvability of multipoint boundary value problems for systems of nonlinear differential equations with fixed points of impulses actions (with G. Ekhvaia). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **64** (2015), 143-154.
10. M. Ashordia, On the solvability of multipoint boundary value problems for systems of nonlinear difference equations (with G. Ekhvaia). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **65** (2015), 151-158.

11. M. Ashordia, On the criteria of well-posed of the periodic problem for linear systems of impulsive equations with finite and fixed points of impulses actions (with G. Ekhvaia). *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **167** (2015), 93-98.
12. M. Ashordia, On the conti-Opial type existence and uniqueness theorems for general nonlinear boundary value problems for systems of discrete equations (with G. Ekhvaia, N. Topuridze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **64** (2015), 155-162.
13. M. Ashordia, On the Opial type criterion for the well-posedness of the Cauchy problem for linear systems of generalized ordinary differential equations.*Math. Bohem.* **141** (2016), no. 2, 183-215.
14. M. Ashordia, On the Opial type criterion for the well-posedness of the Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **170** (2016), no. 2, 149-165.
15. M. Ashordia, On the solvability of the antiperiodic problem for linear systems of impulsive equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 105-111.
16. M. Ashordia, On the well-posedness of antiperiodic problem for systems of linear generalized differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 113-122.
17. M. Ashordia, On the solvability of the antiperiodic boundary value problem for systems of linear generalized differential equations. *Georgian Math. J.* **24** (2017), no. 2, 169-184.
18. M. Ashordia, On boundary value problems for systems of nonlinear generalized ordinary differential equations. Czechoslovak Math. J. **67(142)** (2017), no. 3, 579-608.
19. M. Ashordia, On the well-posedness of antiperiodic problem for systems of nonlinear impulsive differential equations with fixed impulses points. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **71** (2017), 139-150.
20. M. Ashordia, On the antiperiodic problem for systems of nonlinear generalized ordinary differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **70** (2017), 147-154.
21. M. Ashordia, On the antiperiodic problem for systems of nonlinear generalized ordinary differential equations (with Sh. Akhalaia, M. Talakhadze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **71** (2018), 141-149.
22. M. Ashordia, On the well-posedness of antiperiodic problem for systems of nonlinear impulsive equations with fixed impulses points. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **74** (2018), 153-164.
23. M. Ashordia, On the solvability of the periodic problem for systems of linear generalized ordinary differential equations (with M. Chania, M. Kucia). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **74** (2018), 11-16.
24. M. Ashordia, On the Cauchy problem for linear systems of impulsive ordinary differential equations with singularities(with N. Kharshiladze). *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.)* **12** (2018), no. 3, 11-16.
25. M. Ashordia, On the solvability and the well-posedness of the modified Cauchy problem for linear systems of generalized ordinary differential equations with singularities (with V. Sesadze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **75** (2018), 139-149.
26. M. Ashordia, On the modified Cauchy problem for systems of linear impulsive singular differential equations (with N. Kharshiladze). *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.* **69** (2019), 3-12.
27. M. Ashordia, On the well-posedness of the Cauchy problem for systems of linear generalized ordinary differential equations (with M. Kutsia, M. Talakhadze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **77** (2019), 105-113.
28. M. Ashordia, On the solvability of the modified Cauchy problem for linear systems of impulsive differential equations (with N. Kharshiladze). with singularities. *Miskolc Math. Notes* **21** (2020), no. 1, 69-79.
29. M. Ashordia, On the necessary and sufficient conditions for the convergence of the difference schemes for the general boundary value problem for the linear systems of ordinary differential equations. *Math. Bohem.* **146** (2021), no. 3, 333-362.
30. M. Ashordia, On the criterion of the convergence of difference schemes for linear general boundary problems for systems of ordinary differential equations. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **35** (2021), 7-10.
31. M. Ashordia, On the criterion of the well-posedness for the general boundary value problems for the systems of ordinary linear differential equations. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **35** (2021), 11-14.

32. M. Ashordia, On the solvability of the modified Cauchy problem for linear systems of generalized ordinary differential equations with singularities (with I. Gabisonia, M. Talakhadze). *Georgian Math. J.* **28** (2021), no. 1, 29-47.
33. M. Ashordia, On the well-posedness of the Cauchy problem with weight for systems of linear generalized ordinary differential equations with singularities. *Georgian Math. J.* **29** (2022), no. 5, 641-659.
34. M. Ashordia, On the well-posedness of the weighted Cauchy problem for systems of linear impulsive differential equations with singularities (with N. Kharshiladze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **85** (2022), 21-33.
35. M. Ashordia, On the criterion of well-posedness of the Cauchy problem with weight for systems of linear ordinary differential equations with singularities (with B. Anjaparidze). *Reports of QUALITDE* **1** (2022), 13-17.
36. M. Ashordia, On existence of bounded solutions on real axis $\Bbb R$ of linear systems of generalized ordinary differential equations. *Miskolc Math. Notes* **24** (2023), no. 1, 63-79.
37. M. Ashordia, On the well-posedness of nonlocal boundary value problems for a class of systems of linear generalized differential equations with singularities (with Sh. Akhalaia, M. Talakhadze). *Georgian Math. J.* **30** (2023), no. 1, 1-18.
38. G. Berikelashvili, On the convergence rate of a difference solution of the Poisson equation with fully nonlocal constraints (with N. Khomeriki). *Nonlinear Anal. Model. Control* **19** (2014), no. 3, 367-381.
39. G. Berikelashvili, On the convergence of difference schemes for generalized Benjamin-Bona-Mahony equation (with M. Mirianashvili). *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **30** (2014), no. 1, 301-320.
40. G. K. Berikelashvili, Compatible convergence estimates in the method of refinement by higher-order differences (with B. G. Midodashvili). (Russian) *Differ. Uravn.* **51** (2015), no. 1, 108-115; translation in *Differ. Equ.* **51** (2015), no. 1, 107-115.
41. G. Berikelashvili, On the improvement of convergence rate of difference scheme for one mixed boundary value problem (with B. Midodashvili). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **65** (2015), 23-34.
42. G. Berikelashvili, On increasing the convergence rate of difference solution to the third boundary value problem of elasticity theory (with B. Midodashvili). *Bound. Value Probl.* **2015,** 2015:226, 11 pp.
43. G. Berikelashvili, On the convergence rate analysis of one difference scheme for Burgers' equation (with N. Khomeriki, M. Mirianashvili). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 33-42.
44. G. Berikelashvili, Method of refinement by higher order differences for elliptic equations with Bitsadeze-Samarskii type nonlocal boundary conditions (with B. Midodashvili). *Appl. Math. Inform. Mech.* **21** (2016), no. 1, 44-57.
45. G. Berikelashvili, Method of corrections by higher order differences for Poisson equation with nonlocal boundary conditions (with B. Midodashvili). *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **170** (2016), no. 2, 287-296.
46. G. Berikelashvili, Method of corrections by higher order differences for elliptic equations with variable coefficients (with B. Midodashvili). *Georgian Math. J.* **23** (2016), no. 2, 169-180.
47. G. Berikelashvili, Method of refinement by higher order differences for 3D Poisson equation with nonlocal boundary conditions (with M. M. Gupta, B. Midodashvili). *Math. Sci. Lett.* **7** (2018), no. 2, 71-77.
48. G. Berikelashvili, On the convergence of difference schemes for the generalized BBM-Burgers equation (with M. Mirianashvili). *Georgian Math. J.* **26** (2019), no. 3, 341-349.
49. G. Berikelashvili, Iterative solution of a nonlinear static beam equation (with A. Papukashvili, J. Peradze). *Ukraïn. Mat. Zh.* **72** (2020), no. 8, 1024-1033; translation in *Ukrainian Math. J.* **72** (2021), no. 8, 1185-1196.
50. O. M. Jokhadze, Global Cauchy problem for wave equations with a nonlinear damping term. (Russian) *Differ. Uravn.* **50** (2014), no. 1, 58-65; translation in *Differ. Equ.* **50** (2014), no. 1, 57-65.
51. O. Jokhadze, The Cauchy problem for one-dimensional wave equations with a nonlinear dissipative term. *Eurasian Math. J.* **5** (2014), no. 4, 92-112.

52. O. Jokhadze, S. Kharibegashvili, On the Cauchy and Cauchy-Darboux problems for semilinear wave equations. *Georgian Math. J.* **22** (2015), no. 1, 81-104.
53. O. Jokhadze, S. Kharibegashvili, Contact interaction of the plate with a nonlinear elastic stringer (with N. Shavlakadze). *Izv. Ross. Akad. Nauk, MTT* **2** (2019), 101-110; translation in *Mechanic of solids* **54** (2019), 440-447.
54. O. Jokhadze, A new class of exact solutions of von Karman's equation in the nonlinear theory of gas dynamics. *Georgian Math. J.* **29** (2022), no. 5, 715-724.
55. O. M. Jokhadze, Mixed problem with a nonlinear boundary condition for a semilinear wave equation. (Russian) *Differ. Uravn.* **58** (2022), no. 5, 591-606; translation in *Differ. Equ.* **58** (2022), no. 5, 593-609.
56. O. Jokhadze, On the periodicity of the Riemann function of second order general type linear hyperbolic equations. *Reports of QUALITDE* **1** (2022), 94-96.
57. O. Jokhadze, Solutions of a singular integro-differential equation related to the adhesive contact problems of elasticity theory (with N. Shavlakadze). *Georgian Math. J.* **29** (2022), no. 2, 285-293.
58. O. Jokhadze, On the von Karman's equation in the nonlinear theory of gas dynamics. *Miskolc Math. Notes* **24** (2023), no. 1, 197-208.
59. S. Kharibegashvili, Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **4** (1995), 127 pp.
60. S. Kharibegashvili, Some multidimensional problems for hyperbolic partial differential equations and systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **37** (2006), 1-136.
61. S. Kharibegashvili, Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **46** (2009), 1-114.
62. S. Kharibegashvili, Some local and nonlocal multidimensional problems for a class of semilinear hyperbolic equations and systems. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **75** (2018), 1-91.
63. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, Boundary value problem for a wave equation with power nonlinearity in the angular domains. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **164** (2014), 116-120.
64. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, On global and blowup solutions of a mixed problem with nonlinear boundary conditions for a one-dimensional semilinear wave equation. (Russian) *Mat. Sb.* **205** (2014), no. 4, 121-148; translation in *Sb. Math.* **205** (2014), no. 3-4, 573-599.
65. S. S. Kharibegashvili, The existence of solutions of one nonlocal in time problem for multidimensional wave equations with power nonlinearity. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **66** (2015), 83-101.
66. S. Kharibegashvili, On the solvability of a problem nonlocal in time for a semilinear multidimensional wave equation (with B. Midodashvili). Reprint of Ukraïn. *Mat. Zh.* **67** (2015), no. 1, 88-105; *Ukrainian Math. J.* **67** (2015), no. 1, 98-119.
67. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, Time-periodic problem for a weakly nonlinear telegraph equation with directional derivative in the boundary condition. (Russian) *Differ. Uravn.* **51** (2015), no. 10, 1376-1392; translation in *Differ. Equ.* **51** (2015), no. 10, 1369-1386.
68. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, On a Zaremba type problem for nonlinear wave equations in the angular domains. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **167** (2015), 130-135.
69. S. Kharibegashvili, On the solvability of a problem nonlocal in time for a semilinear multidimensional wave equation (with B. Midodashvili). Reprint of *Ukraïn. Mat. Zh.* **67** (2015), no. 1, 88-105. *Ukrainian Math. J.* **67** (2015), no. 1, 98-119.
70. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, On the solvability of a periodic problem for a nonlinear telegraph equation. (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.* **57** (2016), no. 4, 940-950; translation in *Sib. Math. J.* **57** (2016), no. 4, 735-743.
71. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, On the solvability of a boundary value problem for nonlinear wave equations in angular domains. (Russian) *Differ. Uravn.* **52** (2016), no. 5, 665-686. *Differ. Equ.* **52** (2016), no. 5, 644-666.
72. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, The Cauchy-Darboux problem for wave equations with a nonlinear dissipative term. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 53-75.

73. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **170** (2016), no. 3, 385-394.
74. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, An approximate solution of one class of singular integro-differential equations (with N. Shavlakadze). *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **170** (2016), no. 3, 420-426.
75. S. Kharibegashvili, On the global solvability of the first Darboux problem for one class of nonlinear second order hyperbolic systems (with G. Dekanoidze). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **71** (2017), 51-68.
76. S. Kharibegashvili, One nonlocal problem in time for a semilinear multidimensional wave equation (with B. Midodashvili). *Lith. Math. J.* **57** (2017), no. 3, 331-350.
77. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, On the solvability of a mixed problem for an one-dimensional semilinear wave equation with a nonlinear boundary condition (with N. N. Shavlakadze). (Russian) *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **53** (2018), no. 5, 31-51; translation in *J. Contemp. Math. Anal.* **53** (2018), no. 5, 247-259.
78. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, Approximate and exact solution of a singular integro-differential equation related to contact problem of elasticity theory (with N. Shavlakadze). (Russia) *Prikl. Mat. i Mekh.* **82** (2018), no. 1, 114-124; translation in *J. Appl. Math. Mech.* **82** (2018), no. 1, 114-124.
79. S. Kharibegashvili, O. Jokhadze, The adhesive contact problems in the plane theory of elasticity (with N. Shavlakadze). *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **173** (2019), no. 2, 165-168.
80. S. Kharibegashvili, A boundary value problem for higher-order semilinear partial differential equations (with B. Midodashvili). *Complex Var. Elliptic Equ.* **64** (2019), no. 5, 766-776.
81. S. Kharibegashvili, On the existence, uniqueness and nonexistence of solutions to a boundary value problem for a quasilinear hyperbolic equation (with B. Midodashvili). (Russian) *Ukraïn. Mat. Zh.* **71** (2019), no. 8, 1123-1132; translation in *Ukrainian Math. J.* **71** (2020), no. 8, 1282-1293.
82. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, Solvability of a mixed problem with nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation. (Russian) *Mat. Zametki* **108** (2020), no. 1, 137-152; translation in *Math. Notes* **108** (2020), no. 1-2, 123-136.
83. S. S. Kharibegashvili, O. M. Jokhadze, Contact problems for elastic plates with finite-length nonlinearly deformable stringers glued to their boundaries (with N. N. Shavlakadze). (Russian) *Prikl. Mat. Mekh.* **84** (2020), no. 5, 640-649; translation in *Mech. Solids* **55** (2020), no. 8, 1415-1422.
84. S. Kharibegashvili, On the solvability of one boundary value problem for a class of higher-order nonlinear partial differential equations (with B. Midodashvili). *Mediterr. J. Math.* **18** (2021), no. 4, Paper no. 131, 18 pp.
85. S. Kharibegashvili, The boundary value problem for one class of nonlinear systems of partial differential equations. *Reports of QUALITDE* **1** (2022), 117-120.
86. S. Kharibegashvili, Darboux type problem for one nonlinear hyperbolic equation of the fourth order (with T. Bibilashvili). *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **36** (2022), 11-14.
87. S. S. Kharibegashvili, On the solvability of a special boundary value problem in a cylindrical domain for a class of nonlinear systems of partial differential equations (with B. G. Midodashvili). (Russian) *Differ. Uravn.* **58** (2022), no. 1, 82-92; translation in *Differ. Equ.* **58** (2022), no. 1, 81-91.
88. S. Kharibegashvili, The boundary value problem for one class of higher-order nonlinear partial differential equations (with B. Midodashvili). *Georgian Math. J.* **29** (2022), no. 3, 387-395.
89. S. Kharibegashvili, On the solvability of one boundary value problem for one class of higher-order semilinear hyperbolic systems (with B. Midodashvili). *Lith. Math. J.* **62** (2022), no. 3, 360-371.
90. S. S. Kharibegashvili, Boundary-value problem for a class of nonlinear systems of partial differential equations of higher orders (with B. G. Midodashvili). Translation of *Ukraïn. Mat. Zh.* **74** (2022), no. 6, 856-868; *Ukrainian Math. J.* **74** (2022), no. 6, 981-995.
91. S. Kharibegashvili, The boundary value problem for one class of higher-order semilinear partial differential equations (with B. Midodashvili). *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.* **49** (2023), no. 1, 154-171.
92. I. Kiguradze, Some singular boundary value problems for ordinary differential equations. (Russian) *Tbilisi University Press, Tbilisi,* 1975.

93. I. Kiguradze, Boundary value problems for systems of ordinary differential equations. (Russian) *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Novejshie Dostizh.* **30** (1987), 3-103; translation in *J. Sov. Math.* **43** (1988), no. 2, 2259-2339.
94. I. Kiguradze, Singular boundary value problems for second order ordinary differential equations (with B. L Shekhter). (Russian) *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Novejshie Dostizh.* **30** (1987), 105-201; translation in *J. Sov. Math.* **43** (1988), no. 2, 2340-2417.
95. I. Kiguradze, On multi-point boundary value problems for systems of functional differential and difference equations (with Sh. Gelashvili). *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **5** (1995), 1-113.
96. I. Kiguradze, Initial and boundary value problems for systems of ordinary differential equations, I. (Russian) *Metsniereba, Tbilisi,* 1997.
97. I. Kiguradze, Boundary value problems for systems of linear functional differential equations (with B. Půža). Masaryk *University, Brno,* 2003.
98. I. Kiguradze, Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations (with T. Chanturia). *Springer Science & Business Media*, 2012.
99. I. Kiguradze, A priori estimates of solutions of nonlinear boundary value problems for singular in a phase variable second order differential inequalities.*Georgian Math. J.* **21** (2014), no. 2, 211-224.
100. I. T. Kiguradze, Nonlinear nonlocal problems for second-order differential equations singular with respect to the phase variable. (Russian) *Differ. Uravn.* **50** (2014), no. 8, 1025-1041; translation in *Differ. Equ.* **50** (2014), no. 8, 1018-1034.
101. I. Kiguradze, A priori estimates of solutions of nonlinear boundary value problems for singular in phase variables higher order differential inequalities and systems of differential inequalities. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **63** (2014), 105-121.
102. I. Kiguradze, Positive solutions of periodic type boundary value problems for first order singular functional differential equations (with Z. Sokhadze). *Georgian Math. J.* **21** (2014), no. 3, 303-311.
103. I. Kiguradze, Solvability conditions of nonlocal problems for singular in phase variables higher order differential equations. *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.)* **9** (2015), no. 2, 7-12.
104. I. Kiguradze, Periodic type boundary value problems for singular in phase variables nonlinear nonautonomous differential systems. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **66** (2015), 153-159.
105. I. Kiguradze, Oscillatory solutions of higher order nonlinear nonautonomous differential systems. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 123-127.
106. I. Kiguradze, On nonlinear boundary value problems for higher order functional differential equations (with Z. Sokhadze). *Georgian Math. J.* **23** (2016), no. 4, 537-550.
107. I. Kiguradze, On a boundary value problem on an infinite interval for nonlinear functional differential equations (with Z. Sokhadze). *Georgian Math. J.* **24** (2017), no. 2, 217-225.
108. I. T. Kiguradze, Analog of the first Fredholm theorem for higher-order nonlinear differential equations (with T. I. Kiguradze). (Russian) *Differ. Uravn.* **53** (2017), no. 8, 1024-1032; translation in *Differ. Equ.* **53** (2017), no. 8, 996-1004.
109. I. T. Kiguradze, Oscillation properties of higher-order sublinear differential equations (with T. I. Kiguradze). (Russian) *Differ. Uravn.* **54** (2018), no. 12, 1589-1603; translation in *Differ. Equ.* **54** (2018), no. 12, 1545-1559.
110. I. Kiguradze, Oscillation criteria for higher order sublinear delay differential equations (with T. Kiguradze). *Researches in Mathematics and Mechanics* **23** (2018), no. 1(31), 130-137.
111. I. Kiguradze, N. Partsvania, Some optimal conditions for the solvability and unique solvability of the two-point Neumann problem. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **75** (2018), 115-128.
112. I. T. Kiguradze, Two-point boundary value problems for essentially singular second-order linear differential equations. (Russian) *Differ. Uravn.* **55** (2019), no. 5, 607-624; translation in *Differ. Equ.* **55** (2019), no. 5, 591-608.
113. I. T. Kiguradze, Two-point boundary value problems for essentially singular nonlinear second-order differential equations. (Russian) *Differ. Uravn.* **55** (2019), no. 6, 792-802; translation in *Differ. Equ.* **55** (2019), no. 6, 776-786.

114. I. Kiguradze, On one Neumann type problem for second order linear differential equations. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **174** (2020), no. 3, 413-417.
115. I. Kiguradze, On the unique solvability of two-point boundary value problems for third order linear differential equations with singularities. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **175** (2021), no. 3, 375-390.
116. I. Kiguradze, On the set of solutions of the Cauchy problem for higher order non-Lipshitzian ordinary differential equations. *Reports of QUALITDE* 1 (2022), 121-124.
117. I. Kiguradze, N. Partsvania, The Cauchy weighted problem for singular in time and phase variables higher order delay differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **87** (2022), 63-76.
118. N. Partsvania, The nonlinear Kneser problem for singular in phase variables second-order differential equations (with B. Půža). *Bound. Value Probl.* **2014,** 2014:147, 17 pp.
119. N. Partsvania, On positive solutions of nonlinear boundary value problems for singular in phase variables two-dimensional differential systems (with B. Půža). *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **63** (2014), 151-156.
120. N. Partsvania, Boundary value problems on an infinite interval for singular in phase variables two-dimensional differential systems. *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.)* **9** (2015), no. 2, 13-18.
121. N. Partsvania, On some nonlinear boundary value problems on a finite and an infinite intervals for systems of functional differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **67** (2016), 137-140.
122. N. Partsvania, On oscillatory and monotone solutions of nonlinear functional differential systems. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **69** (2016), 129-133.
123. N. Partsvania, Oscillatory and monotone solutions of first-order nonlinear delay differential equations (with Z. Sokhadze). *Georgian Math. J.* **23** (2016), no. 2, 269-277.
124. N. Partsvania, The weighted right focal boundary value problem for second order singular in the time variable functional differential equations. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **173** (2019), no. 2, 157-160.
125. N. Partsvania, Two-point boundary value problems for singular two-dimensional linear differential systems. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **174** (2020), no. 3, 423-427.
126. N. Partsvania, Some optimal conditions for the unique solvability of the Dirichlet problem for second order singular linear differential equations with a deviating argument. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **175** (2021), no. 3, 455-459.
127. N. Partsvania, Optimal conditions for the solvability of the Cauchy weighted problem for higher order singular in time and phase variables ordinary differential equations. *Reports of QUALITDE* 1 (2022), 169-173.

ბ) სხვა ავტორთა მონოგრაფიები

128. R. P. Agarwal, S. R. Grace, D. O'Regan, Oscillation theory for second order dynamic equations. *Taylor & Francis, Ltd., London,* 2003.
129. R. P. Agarwal, D. O'Regan, Singular differential and integral equations with applications. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,* 2003.
130. N. V. Azbelev, L. F. Rachmatullina, Theory of linear abstract functional differential equations and applications. *Publishing House GCI*, 1996.
131. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. *Hindawi Publishing Corporation, Cairo,* 2007.
132. M. Bartušek, Asymptotic properties of oscillatory solutions of differential equations. *Masaryk University Press, Brno*, 1992.
133. M. Bartušek, Z. Došlá, J. R. Graef, The nonlinear limit-point/limit-circle problem. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA,* 2004.
134. M. Bartušek, J. R. Graef, The strong nonlinear limit-point/limit-circle problem. *Trends in Abstract and Applied Analysis* 6. *World Scientific. Hackensack, NJ*, 2018.
135. C. De Coster, P. Habets, The lower and upper solutions method for boundary value problems. *Handbook of differential equations,* 69-160, *Elsevier/North-Holland, Amsterdam,* 2004.

136. C. De Coster, P. Habets, Two-point boundary value problems: lower and upper solutions. *Mathematics in Science and Engineering*, 205. *Elsevier B. V., Amsterdam,* 2006.
137. O. Došlý, Half-linear differential equations. *Handbook of differential equations*, 161-357, *Elsevier/North-Holland, Amsterdam*, 2004.
138. O. Došlý, P. Řehák, Half-linear differential equations. *North-Holland Mathematics Studies* 202. *Elsevier, Amsterdam*, 2005.
139. U. Elias, Oscillation theory of two-term differential equations. *Kluwer AcademicPublishers Group, Dordrecht,* 1997.
140. R. E Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence degree, and nonlinear differential equations. *Springer-Verlag, Berlin-New York,* 1977.
141. R. Hakl, A. Lomtatidze, J. Šremr, Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations. *Masaryk University, Brno*, 2002.
142. T. Kiguradze, Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **1** (1994), 1-144.
143. M. A. Krasnosel'skiĭ, P. P. Zabreĭko, Geometric methods of nonlinear analysis. *Nauka, Moscow*, 1975.
144. J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. *Dunod, Gauthier-Villars, Paris*, 1969.
145. A. Lomtatidze, Theorems on differential inequalities and periodic boundary value problem for second-order ordinary differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* **67** (2016), 1-129.
146. A. Lomtatidze, S. Mukhigulashvili, Some two-point boundary value problems for second order functional differential equations. *Masaryk University, Brno*, 2000.
147. R. Mařik, Half-linear differential equations. *Masaryk University, Brno*, 2000.
148. J. D. Mirzov, Asymptotic properties of solutions of systems of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations. *Masaryk University, Brno*, 2004.
149. *G. A. Monteiro, Slavík, Antonín; Tvrdý, Milan Kurzweil-Stieltjes integral. World Scientific, Hackensack, NJ, 2018.*
150. S. Mukhigulashvili, Two-point boundary value problems for second order functional differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys*. **20** (2000), 1-112.
151. J. A. Pava, Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stabiliy of Solitary and Periodic Ttravelling Wave Solutions. Mathematical surveys and monographs, 156, *American Math. Soc., Providence, Rhode Island*, 2009.
152. I. Rachůnková, S. Staněk, M. Tvrdý, Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations. *Handbook of differential equations: ordinary differential equations*. Vol. III, 607-722, *Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam*, 2006.
153. I. Rachůnková, S. Staněk, M. Tvrdý, Solvability of nonlinear singular problems for ordinary differential equations. *Contemporary Mathematics and Its Applications, vol.* 5, *Hindawi Publishing Corporation*, 2008.
154. I. Rachůnková, J. Tomeček, State-dependent impulses. Boundary value problems on compact interval. *Atlantis Briefs in Differential Equations*, 6. *Atlantis Press, Paris,* 2015.
155. M. Ronto, A. M. Samoilenko, Numerical-analytic methods in the theory of boundary value problems. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ,* 2000.
156. Š. Schwabik, Generalized ordinary differential equations. *Series in Real Analysis*, 5. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ*, 1992.
157. Š. Schwabik, M. Tvrdý, O. Vejvoda, Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. *D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass.-London*, 1979.
158. C. A. Swanson, Comparison and oscillation theory of linear differential equations. *Academic Press, New York-London,* 1968.
159. O. Vejvoda, Partial differential equations: time-periodic solutions. *Martinus Nijhoff Publishers, Leiden*, 1982.

გ) სხვა ავტორთა სამეცნიერო სტატიები

160. H. Brézis, Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **8** (1983), no. 3, 409-426.
161. H. Brézis, L. Nirenberg, Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **5** (1978), no. 2, 225-326.
162. J. M. Davis, P. W. Eloe, Discrete Kiguradze type inequalities. *J. Differ. Equations Appl.* **6** (2000), no. 4, 431-441.
163. E. Feireisl, On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term. *Czechoslovak Math. J.* **38(113)** (1988), no. 1, 78-87.
164. R. Hakl, M. Zamora, Periodic solutions of an indefinite singular equation arising from the Kepler problem on the sphere. *Canad. J. Math.* **70** (2018), no. 1, 173-190.
165. N. A. Izobov, V. A. Rabtsevich, A best-possible I. T. Kiguradze – G. G. Kvinikadze condition for the existence of unbounded regular solutions of an Emden-Fowler equation. (Russian) *Differ. Uravn.* **23** (1987), no.11, 1872-1881; translation in *Differ. Equations* **23** (1987), no. 11, 1263-1270.
166. N. A. Izobov, V. A. Rabtsevich, On two problems of Kiguradze for Emden-Fowler equations. (Russian) *Nonlinear analysis and related problems (Russian)*, 73-91, Tr. Inst. Mat. (Minsk), 2, *Natl. Akad. Nauk Belarusi, Inst. Mat., Minsk*, 1999.
167. T. Kiguradze, On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations. *J. Math. Anal. Appl.* **259** (2001), no. 1, 253-276.
168. K. Kreith, C. A. Swanson, Kiguradze classes for characteristic initial value problems. *Comput. Math. Appl.* **11** (1985), 239-247.
169. J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. (Russian) *Czechoslovak Math. J.* **7 (82)** (1957), 418-449.
170. J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations. *Czechoslovak Math. J.* **8 (83)** (1958), 360-388.
171. T. Kusano, M. Naito, Kiguradze classes for radial entire solutions of higher order quasilinear elliptic equations. *Hiroshima Math. J.* **22** (1992), no. 2, 301-363.
172. L. Nirenberg, Variational and topological methods in nonlinear problems. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **4** (1981), no. 3, 267-302.
173. S. I. Pokhozhaev, The fibration method for solving nonlinear boundary value problems. (Russian) Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.* 1992, no. 3, 157-173. Differential equations and function spaces (Russian). *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **192** (1990), 146-163.
174. P. H. Rabinowitz, Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), no. 2, 189-206.
175. I. Rachůnková, S. Staněk, M. Tvrdý, et al. A tribute to Ivan Kiguradze. *Bound. Value Probl.* **2014,** 2014:228, 11 pp.

თემა 6:

6.1. ინტეგრალური ოპერატორები ლის ჯგუფებზე;

6.2. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანები თხელი სხეულებისთვის;

6.3. პოტენციალთა მეთოდის გამოყენება განზოგადებული თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის თეორიის შერეულ და ბზარის ტიპის დინამიკის ამოცანებში;

6.4. თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების სამგანზომილე-ბიანი ამოცანები;

6.5. ტალღის გავრცელების ამოცანები კრისტალებსა და მეტამასალებში;

6.6. ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის ამოცანები ხახუნის ეფექტის გათვალისწინებით.

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ფიზიკის განყოფილება.

მკვლევარები: როლანდ დუდუჩავა (თემის ხელმძღვანელი), ოთარ ჭკადუა, თენგიზ ბუჩუკური, დავით კაპანაძე, ავთანდილ გაჩეჩილაძე, როლანდ გაჩეჩილაძე, გიორგი ჭკადუა; **საზ. საწყისებზე:** ეკატერინა პესეცკაია.

თემების აღწერილობა.

6.1. ინტეგრალური ოპერატორები ლის ჯგუფებზე (როლანდ დუდუჩავა, თენგიზ ბუჩუკური).

გამოკვლეული იქნება სხვადასხვა სახის კონვოლუციის ტიპის ინტეგრალური განტოლებები ლის აჯგუფებზე, რომლებიც ხშირად წარმოიშობა კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებში. ასეთი მაგალითები ბოლო დრომდე იყო ფურიესა და მელინის ტიპის კონვოლუციის განტოლებები, რომლებიც წარმოადგეს კონვოლუციებს ლის ალგებრებზე ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე და ნახევარღერძზე.

ბოლო დროს აღმოჩნდა, რომ გვხვდება მრავალი ასეთი კონვოლუციის განტოლებები სხვადასხვა ლის ჯგუფებზე, რომელთაც აქვთ გამოყენებები მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების კვლევისას.

6.1.1. შესავალი.

მეცნიერთა, კერძოდ მათემატიკოსთა, დიდ ინტერესს იპყრობს ის ამოცანები, რომლებიც წარმოიშობა მათემატიკურ ფიზიკაში და აღწერს ისეთ ფიზიკურ პროცესებს, როგორიცაა დრეკადობის თეორიის ამოცანები (ფირფიტების და ძელების ღუნვის პროცესი, გარსების მოდელები, ბზარები დრეკად გარემოში), აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის, გაბნევისა და არეკვლის ამოცანები, სხეულის მოძრაობა (მათ შორის ზებგერითი ხასიათის) ჰიდრო და აეროდინამიკურ გარემოში. ასეთი ამოცანები აღიწერება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანებით. ამ ამოცანების შესწავლას, თავის მხრივ, მივყავართ სხვადასხვა სახის ინტეგრალური და ინტეგრო-დიფერენციალური (ფსევდოდიფერენციალური) განტოლებების.შესწავლამდე.

პროექტის პირველი ავტორების მიერ წარსულში შესწავლილი იყო ფურიეს და მელინის ტიპის კონვოლუციის განმტოლებები, მათ შორის წყვეტილი სიმბოლოებით (სიმბოლოები მიიღება ბიინტეგრალური განტოლებების ბირთვების ფურიეს ან მელინის გარდაქმნით). ამ შედეგებს აღმოაჩნდათ ფართო გამოყენება ისეთ ამოცანებში როგორიცაა ბზარები დრეკად გარემოში, აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის, გაბნევისა და არეკვლის ამოცანები.

ბოლო დროს აღმოჩნდა კიდევ ერთი ტიპის კონვოლუციის განტოლება ლის ჯგუფზე, კერძოდ სასრულ მონაკვეთზე (-1,1), რომელსაც აღმოაჩნდა გამოყენება პრანდტლის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლების ზუსტ ამოხსნაში (თვითმფრინავის ფრთის მოძრაობა აეროდინამიკურ ნაკადში), ტრიკომის და ლავრენტიევ-ბიწაძის ინტეგრალური განტოლებების ზუსტ ამოხსნებში (სასაზღვრო ამოცანები შერეული ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის,

რომლებიც აღწერენ აეროდინამიკურ ნაკადში სხეულის მოძრაობის დროს ზებგერითი ბარიერის დაძლევას).

ცხადი გახდა რომ კონვოლუციის განტოლებები მეტად მნიშვნელოვანია გამოყენებებში, რომ არაფერი ვთქვათ მათი გამოკვლევის წმინდა მათემატიკურ ასპექტებზე.

6.1.2. კვლევის ობიექტები.

დაგეგმილი სამეცნიერო კვლევის მიზანია შევისწავლოთ კონვოლუციის ტიპის ინტეგრალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები უწყვეტი და წყვეტილი სიმბოლოებით ლის ჯგუფებზე, როგორიც არიან ჰეიზენბერგის ჯგუფი, სასრული გაშლის კუთხეები, სასრული და უსასრულო პირამიდები და სხვა სხეულები, სადაც შესაძლებელია ლის ჯგუფის სტრუქტურის დადგენა.

ასეთი კონვოლუციის განტოლებებისათვის საჭირო იქნება შესაბამისი ადაპტირებული ბესელის პოტენციალთა სივრცეების განმარტება და შესწავლა, რომლებიც იქნება ბუნებრივი სივრცეები შესაბამისი კონვოლუციის განტოლებათა ზუსტი ამოხსნების საპოვნელად და მათი აპრიორული სიგლუვის დასადგენად.

6.1.3. თემის აქტუალობა და სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია:

როგორც ავღნიშნეთ ინტეგრალურ და ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს გააჩნიათ ფართო გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში, რადგან მათი საშუალებით შეიძლება გამოკვლეულ იქნეს სასაზღვრო ამოცანები რომლებიც აღწერენ როგორც ფიზიკურ პროცესებს (დრეკადობის თეორია, ბზარების ამოცანები, თხელი გარსები, აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქცია, გაბნევა და არეკვლა, სხეულის მოძრაობა ჰიდრო და აეროდინამიკურ გარემოში, მათ შორის ზებგერითი ხასიათის), ასევე ბიოლოგიურ და გეოლოგიურ პროცესებს.

ლის ჯგუფები საშუალებას იძლევა ამ ჯგუფებზე ერთადერთი ფორმით განიმარტოს ჰაარის ზომა, ფურიეს გარდაქმნა და კონვოლუციის ოპერატორი, ბესელის პოტენციალთა ადაპტირებული სივრცე. კონვოლუციის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები ამოიხსნება ჩაკეტილი ფორმით. ბევრი ცნობილი განტოლება გამოყენებებიდან, როგორიცაა, მაგალითად, პრანდტლის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება, ტრიკომის და ლავრენტიევ-ბიწაძის ინტეგრალური განტოლებები, რომლებიც ადრე ამოიხსნებოდა მხოლოდ მიახლოებით, ამოიხსნება ზუსტად, ჩაკეტილი ფორმით, ბოლო დროს გამოკვლეული კონვოლუციის განტოლების გამოყენებით (-1;1) ინტერვალზე.

ადაპტირებული ჰარმონიული ანალიზი ლის ჯგუფზე წარმოადგენს მძლავრ იარაღს კონვოლუციის განტოლებების კვლევისთვის. ამ განტოლებებს შეიძლება აღმოაჩნდეთ არსებითი გამოყენებები. ამის მაგალითებია აქამდე შესწავლილი ვინერ-ჰოპფის და მელინის კონვოლუციის განტოლებები, რომელთაც უკვე ჰპოვეს უდიდესი გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში, ინჟინერიაში, გეოლოგიაში. ამის დადასტურებაა აგრეთვე ზემოთ ნახსენები და ბოლო დროს შესწავლილი კონვოლუციის განტოლებები (-1;1) მონაკვეთზე.

6.1.4. არსებული ლიტერატურული წყაროები (რა არის გაკეთებული და როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს).

ფართედ არის ცნობილი ვინერ-ჰოპფის (ფურიეს კონვოლუციის) განტოლებების და მელინის კონვოლუციის განტოლებების თეორია და მათი უამრავი გამოყენება (იხ. მონოგრაფიები [DZ14,Du79,No58,Kr62,Ch68].

კარგად არის გაშუქებული კონვოლუციის მნიშვნელობა გამოყენებებში სტატიაში ვიკიპედიის სტატიაში https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

ბოლო დროს აღმოჩენილი კონვოლუციის განტოლებების შესახებ (-1;1) მონაკვეთზე და მათ გამოყენებებზე იხ. სტატიები [Du23,CDHR22,AA21,AD16,Pe06].

6.1.5. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება.

მათემატიკოსთა დიდი ყურადღება ეთმობა ისეთი მიდგომების შემუშავებას, რომელიც მოგვცემს საშუალებას გამოვიკვლიოთ ინტეგრალური, ინტეგრო-დიფერენციალური, ფსევდოდიფე-

რენციალური და ფურიეს ინტეგრალური განტოლებების სხვადასხვა კლასები, განსაკუთრებით ისინი, რომელთაც აქვთ გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში. ზემოთ ჩვენ მოვიყვანეთ კონვოლუციის განტოლებების გამოყენების არეები და მივუთითეთ ლიტერატურა სადაც ეს გამოყენებები დაწვრილებით არის აღწერილი. ნათქვამს შეიძლება დავუმატოთ რომ თეორიული ფიზიკის სპეციალისტები ძალიან არიან დაინტერესებული განტოლებებით ლის ჯგუფებზე, რადგან ისინი გამოიყენება, მაგალითად, განუზღვრელობის პრინციპის გამოკვლევებში (ჰეიზენბერგის ჯგუფები). ამიტომაც მნიშვნელოვანია ახალი ლის ჯგუფების შესწავლა, მათზე ჰარმონიული ანალიზის აღწერა (ჰაარის ზომა, ფურიეს გარდაქმნა, კონვოლუცია, შესაბამისი ლის ალგებრის აღწერა, რომელიც შედგება კონვოლუციის ტიპის დიფერენციალური ოპერატორებისაგან). შედეგების გამოყენება შეიძლება დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების ზუსტი ამოხსნების დასაწერად, დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთა სიგლუვის დასადგენად, შესაბამისი ოპერატორების სპექტრის აღსაწერად და ა.შ, რაც მნიშვნელოვანია გამოყენებებში.

6.1.6. შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით:

პირველ ეტაპზე გამოვლენილი იქნება პერსპექტიული სიმრავლეები გამოყენების თვალსაზრისით, რომლებზეც შეიძლება ჯგუფის სტრუქტურის შემოღება, რათა განვითარდეს შესაბამისი ჰარმონიული ანალიზი.

მეორე ეტაპზე მოხდება გამოვლენილ ჯგუფებზე ჰაარის ზომის, ფურიეს გარდაქმნის, კონვოლუციის, შესაბამისი ლის ალგებრის შესწავლა. დადგინდება თეორემები მულტიპლიკატორების შესახებ, რომლებიც პასუხისმგებლებია კონვოლუციის ოპერატორთა შემოსაზღვრულობაზე.

მესამე ეტაპზე მოხდება კონვოლუციის ტიპის ინტეგრალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებების შესწავლა და ამოხსნადობის კრიტერიუმების დადგენა ამისათვის განიმარტება და შეისწავლება შესაბამისი ადაპტირებული ბესელის პოტენციალთა (სობოლევის) სივრცეები.

მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით მომზადდება რამდენიმე სამეცნიერო სტატია.

ციტირებული ლიტერატურა:

[DZ14] V. G. Daniele, R. Zich, The Wiener-Hopf method in electromagnetics, STAMPA, 2014.

[Du23] R. Duduchava, Convolution equations on the Lie group G=(-1,1), Georgian Mathematical Journal}, DOI 10.1515/gmj-2023-2035. https://arxiv.org/abs/2208.08765, 26 pages, 2022.

[CDHR22] D. Cardona, R. Duduchava, A. Hendrickx, M. Ruzhansky, Global pseudo-diffe\-ren\-tial operators on the Lie group G= $(-1,1)^n$. https://arxiv.org/abs/2209.09751, 34 pages, 2022. Submitted to: Integral Equtions and Operator Theory.

[Do79] R. Duduchava, Integral equations in convolution with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities, and their applications to some problems of mechanics, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig}, 1979.

[No58] B. Noble, Methods based on the Wiener-Hopf technique, Pergamon Press, London, 195878

[Kr62] M.G. Krein Integral equation on a half-line with a kernel depending upon the difference on the arguments, AMS Transl.22, 1962, 163-288.

[Ch78] F. Gakhov, Y. Chersky, Equations of Convolution type (in Russian), Hauka, Moscow,1978.

{AA21} I. Andronov, N. Andronov, Plane wave diffraction by a strongly elongated three-ax ellipsoid, Acoustic. Zh. 67 (2021), no. 4, 351-360.

{AP16} I. Andronov, V. Petrov, Diffraction by an impedance strip at almost grazing incidence. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 64 (2016), no. 8, 3562-3572.

[Pe06] V. Petrov, The generalized singular Tricomi equation as a convolution equation, Dokl. Ros. Akad. Nauk 411 (2006), no. 2, 1–5; English transl., Dokl. Math. 74, no. 3, 2006, 901–905.

6.2. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანები თხელი სხეულებისთვის (როლანდ დუდუჩავა, თენგიზ ბუჩუკური).

დაგეგმილი კვლევის მიზანია გიუნტერის წარმოებულების აღრიცხვაზე დაყრდნობით და Γ-კრებადობის გამოყენებით დავადგინოთ როგორი ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანისკენ მიისწრაფის თხელ ფენაში განსაზღვრული მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი სამგანზომილებიანი დინამიკის სასაზღვრო ამოცანა და როგორ იცვლება ამ დროს განტოლების მარჯვენა მხარე, სასაზღვრო და საწყისი მონაცემები და გამოვიკვლიოთ გამოყვანილი ორგანზომილებიანი განტოლებების ამოხსნადობის საკითხი.

6.2.1. შესავალი.

ერთ-ერთი ყველაზე უფრო ძნელი და მნიშვნელოვანი ამოცანა წრფივსა და არაწრფივ დრეკადობაში არის სამგანზომილებიან მოდელებსა და მათ ორგანზომილებიან ანალოგებს შორის კავშირის გააზრება. პუბლიკაციების უზარმაზარი რაოდენობა ეძღვნება გარსის თეორიის იმ მოდელებს, სადაც ორგანზომილებიან ზედაპირის მიდამოში განთავსებული სამგანზომილებიანი დრეკადი სხეული მასალის თვისებების, თავისი ფორმისა და სასაზღვრო პირობების გამო წინააღმდეგობას უწევს დეფორმაციას. ასეთი ობიექტების მოდელირებას მათ შუა ზედაპირზე განსაზღვრული განტოლებებით უდიდესი მნიშვნელობა აქვს, რომელიც ძნელია გადაჭარბებულად შევაფასოთ, რადგან ასეთი ტიპის ობიექტები - გარსები და მათი შემცველი სტრუქტურები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობენ თანამედროვე საინჟინრო საქმეში. გარსების გამოყენებების მოკლე სიაც კი ნათლად გვიჩვენებს მათ მნიშვნელობას: როტორების ფრთები, პარაბოლური ანტენები, კაშხლები, თვითმფრინავების ფრთები და კუდები, სპორტული და სხვა საზოგადოებრივი დანიშნულების შენობების სახურავები, მილები და მილსადენები, ბირთვული ელექტროსადგურების გამაგრილებელი კოშკები, ცილინდრული რეზერვუარები, იალქნები და ა.შ.. გარსის ტიპის სტრუქტურების დაპროექტება და მათი რიცხვითი სიმულაცია წარმოადგენს მათემატიკის, საინჟინრო საქმის და კომპიუტერული მეთოდების ფუნდამენტურ ამოცანას. განზომილების შემცირებით ჩვენ უზარმაზარ რესურსებს ვზოგავთ.

ჩვენი დაგეგმილი კვლევა იყენებს მეთოდს, რომელიც დაფუძნებულია გიუნტერის მხები წარმოებულების აღრიცხვაზე და Γ-კრებადობის გამოყენებაზე. ეს მეთოდი წარმატებით იქნა გამოყენებული სტატიკური სასაზღვრო ამოცანებისთვის, სითბოს გავრცელების განტოლებისთვის [BDT1] და ლამეს განტოლებებისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში [BD2]. ჩვენ ვაპირებთ გავავრცელოთ ეს მეთოდი დინამიკის სასაზღვრო ამოცანებისთვის. კერძოდ, სითბოს გავრცელების და ლამეს დინამიკის განტოლებებისთვის, აგრეთვე ნავიე-სტოქსის განტოლებისთვის.

6.2.2. კვლევის ობიექტები.

დაგეგმილი კვლევის ობიექტებია h სისქის და $\mathcal{C}$ შუაზედაპირის მქონე სამგანზომილებიანი Ω^h თხელ ფენაში დასმული სასაზღვრო ამოცანები და Γ-კრებადობის საშუალებით მიღებული მათი ორგანზომილებიანი გარსის მოდელები როცა h მიისწრაფის ნულისკენ.

6.2.3. თემის აქტუალობა და სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია.

სამგანზომილებიან თხელ ფენაში დასმული სასაზღვრო ამოცანების ნაცვლად გარსის ტიპის ორგანზომილებიან მოდელებისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანების განხილვა და განტოლებების და სასაზღვრო პირობების ჩასაწერად გიუნტერის წარმოებულების გამოყენება საშუალებას იძლევა ზოგიერთ შემთხვევაში მარტივად ჩავწეროთ სასაზღვრო ამოცანები ზედაპირზე. გიუნტერის წარმოებულებზე დამყარებული მეთოდიის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ზედაპირული დიფერენციალური ოპერატორები გამოისახებიან გლობალური ნორმალური ვექტორული ველის საშუალებით, მაშინ როდესაც კლასიკური მეთოდი იყენებს არანაკლებ 6 - როგორც კოვარიანტულ, ასევე კონტრავარიანტულ ვექტორულ ველს. მეორე უპირატესობა არის ის, რომ ოპერატორებს უფრო მარტივი სახე აქვთ. ამიტომ შესაბამისი გრინის ფორმულები ზედაპირზე მარტივად იწერება. თუ მოცემული გვაქვს ფუნდამენტური ამონახსნი შეგვიძლია, გამოვიყენოთ პოტენციალთა მეთოდი, რომელიც სასაზღვრო ამოცანების კვლევის მძლავრ იარაღს წარმოადგენს. ჩვენ ვაპირებთ

გავავრცელოთ ეს მეთოდი დინამიკის სასაზღვრო ამოცანებისთვის. ამის საფუძველზე შევეცდებით ეფექტური ალგორითმების აგებას რიცხვითი ამოხსნების მისაღებად.

6.2.4. არსებული ლიტერატურული წყაროები (რა არის გაკეთებული და როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს).

არსებობს გარსების ბევრი მოდელი და გამუდმებით იქმნება ახალი მოდელები (იხ. [Ci1, Ci2, De1, Re1, Re2 , E1, M1, M2 სადაც მოცემულია ასეთი მოდელების მიმოხილვა). მათ შორის ერთ-ერთი ყველაზე წარმატებული მოდელი ემყარება ამოცანის ანალიზს Γ-კრებადობის საშუალებით [FJM1, FJMM, LMP1, LMP2]. ასეთი მეთოდი ყველაზე უფრო შესაფერისია მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების და კერძოდ, გარსის ამოცანების გადასაწყვეტად. ის მკაცრ მათემატიკურ საფუძველზე აფუძნებს h სისქის 3D სტრუქტურის ზღვრის შესაბამისი 2D მოდელის ძიებას როცა h ნულისკენ მიისწრაფის. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ჩვენს ნაშრომებში ეს მეთოდი წარმატებით იქნა გამოყენებული სტატიკური სასაზღვრო ამოცანებისთვის, სითბოს გავრცელების განტოლებისთვის [BDT1] , [BD3] და ლამეს განტოლებებისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში [BD2].

6.2.5. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გარსები და მათი შემცველი სტრუქტურებისულ უფრო და უფრო მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ თანამედროვე საინჟინრო გამოყენებებში. ამიტომ სამგანზომილებიან თეორიასა და მასთან დაკავშირებულ 2D ობიექტებს შორის კავშირის დადგენას ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს. ინფორმაცია გარსის განტოლებებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის, რეგულარობის და საზღვარზე სინგულარობების შესახებ, რომელსაც მივიღებთ კვლევის პროცესში, გამოყენებული იქნება გარსის განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნების აგებისას სასრულ ელემენტთა მეთოდით (FEM) და დაეხმარება პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების გადაწყვეტისას წარმოშობილი გარსის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნაში.

მიღებული შედეგები შეიძლება სასარგებლო იყოს პრაქტიკული საინჟინრო საქმიანობის დროს წარმოშობილი გარსის ზოგიერთი ამოცანების გადასაწყვეტად და გვაჩვენებს ჩატარებული თეორიული კვლევის და მის საფუძველზე შექმნილი რიცხვითი ამონახსნების ღირებულებას. კვლევის შედეგები გამოქვეყნდება მაღალი რეპუტაციის მქონე ჟურნალებში და მოხსენდება საერთაშორისო კონფერენციებზე.

6.2.6. შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით.

1. **პირველ ეტაპზე (2024 წელი)** დაგეგმილი გვაქვს გადავწეროთ გიუნტერის წარმოებულებში ჩაწერილი h სისქის თხელი დრეკადი სხეულისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანები ვარიაციული ფორმით - როგორც E^h ენერგიის ფუნქციონალის მინიმიზაციის პირობა. შევისწავლით რა სკალირებული ენერგიის $h^d E^h$ ფუნქციონალის Γ-ზღვრებს d -ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ჩვენ ვეცდებით გამოვიყვანოთ ზღვრული გარსის მოდელები, რომელთა განტოლებები ჩაწერილია გიუნტერის წარმოებულებში, ხოლო სასაზღვრო პირობები მოცემულია შუა ზედაპირის (ლიფშიცის) საზღვარზე.
2. **მეორე ეტაპზე (2025-2026 წლები)** დასმული სასაზღვრო ამოცანებისთვის გამოვიკვლევთ გიუნტერის გრადიენტის საშუალებით წარმოდგენილი სკალირებული ენერგიის E^h ფუნქციონალის Γ-კრებადობას. როდესაც $h \to 0$.
3. **მესამე ეტაპზე (2027 წელი)** ჩავატარებთ მიღებული გარსის განტოლებებისა და შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების დაწვრილებითი ანალიზს: ცალსახა ამოხსნადობა და ამონახსნთა თვისებები.
4. **მეოთხეე ეტაპზე (2028 წელი)** მიღებული ინფორმაციას გარსის განტოლებების ამონახსნთა თვისებების შესახებ გამოვიყენებთ ამონახსნის ოპტიმალური მიახლოების მეთოდის მოსაძებნად, მაგალითად, სასრული ელემენტის მეთოდით.

ციტირებული ლიტერატურა:
[BDT1] **T. Buchukuri, R. Duduchava,** and **G. Tephnadze**, T. Buchukuri, R. Duduchava, G. Tephnadze, Laplace-Beltrami equation on hypersurfaces and Gamma-convergence. Mathematical Methods in Applied Sciences, Volume 40, Issue 13 (15.09.2017) pp. 4637–4657,

[BD2] **T. Buchukuri, R. Duduchava,** Shell equations in terms of Günter's derivatives, derived by the Gamma-convergence. Wiley-Blackwell / Math. Methods Appl. Sci. 44 (2021), no. 12, 9710-9726, 2021

[BD3] **T. Buchukuri, R. Duduchava, G. Tephnadze**, Dirichlet problem for Laplace-Beltrami equation on hypersurfaces—FEM approximation. Trans. A. Razmadze Math. Inst. 170 (2016), no. 3, 300-307.

[Ci1] **P.G. Ciarlet**, *Introduction to Linear Shell Theory*, Series in Applied Mathematics, Vol.1. Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales, Elsevier, Paris, North-Holland, Amsterdam, 1998.

[Ci2] **P.G. Ciarlet,** Mathematical Elasticity III: Theory of Shells, Studies in Mathematics and Applications, Vol. 29, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[De1] **R. Destuynder**, Classification of the shell theories, *Acta Applicandae Mathematicae*, **4**, 15-63, 15-63, 1985.

[FJMM1] **G. Friesecke, R.D. James, M.G. Mora,** and **S.Müller**, Derivation of nonlinear bending theory for shells from three dimensional nonlinear elasticity by Γ-convergence, *C.R. Acad. Sci. Paris.* Ser.I, **336**, 697-702, 2003.

[FJM1] **G. Friesecke, R. D. James,** and **S. Müller,** A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence, *Arch. Rational Mech. Anal.* **180**, 183–236, 2006.

[LMP1] **M. Lewicka, M.G. Mora,** and **M.R. Pakzad,** Shell theories arising as low energy Γ-limit of 3d nonlinear elasticity, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **9**, 253-295, 2010.

[LMP2] **M. Lewicka, M.G. Mora,** and **M.R. Pakzad,** The matching property of infinitesimal isometries on elliptic surfaces, *Arch. Rational Mech. Anal.* **200,** 1023–1050, 2011.

[M1] **Miura, T**, Navier--Stokes equations in a curved thin domain. https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.09816

[M2] **Miura, T**, Navier-Stokes equations in a curved thin domain, Part I: uniform estimates for the Stokes operator https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.06343

[E1] **Matthias E.** "The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space." Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 46 (1) 1 - 23, February 2010. https://doi.org/10.1214/08-AIHP306

6.3. პოტენციალთა მეთოდის გამოყენება განზოგადებული თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის თეორიის შერეულ და ბზარის ტიპის დინამიკის ამოცანებში (თენგიზ ბუჩუკური, ოთარ ჭკადუა).

6.3.1. შესავალი.

მყარი მექანიკის სხვადასხვა განზოგადებული და დაზუსტებული მათემატიკური მოდელები და შესაბამისი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის ეფექტური ალგორითმების შექმნა გადამწყვეტ როლს თამაშობს სამეცნიერო და პრაქტიკული საქმიანობის მრავალ სფეროში, განსაკუთრებით ფიზიკაში, ინჟინერიაში, ბიოლოგიაში და მედიცინაში. ამ მოდელებში იმ მათემატიკური ასპექტების შესწავლა, რომლებიც დაკავშირებულია დინამიკურ შერეულ და ბზარის ტიპის საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებთან და მათი ამონახსნების სინგულარობის ანალიზი ძალზე არსებითი და მნიშვნელოვანი საკითხებია.

დინამიკური ამოცანები ხშირად გვხვდება პრაქტიკულ ინჟინერიასთან და სამედიცინო-ბიოლოგიურ ამოცანებთან დაკავშირებულ ბევრ მათემატიკურ მოდელში. მაგალითად, ძაბვის სინგულარობების განაწილების ანალიზს, თუ სად შეიძლება განვითარდეს ბზარები, დიდი მნიშვნელობა აქვს ისეთი მოწყობილობების პროექტირებისთვის, როგორიცაა ელექტრომექანიკური სენსორები, გარდამქმნელები და ამძრავები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ისეთ თანამედროვე ტექნიკურ სფეროებში, როგორიცაა მექატრონიკა, მიკროსისტემების ტექნოლოგია ან ჭკვიანი სტრუქტურები. უფრო მეტიც, ბოლო ათწლეულებში, უწყვეტი გარემოს მექანიკის დაზუსტებული მათემატიკური მოდელები ბიომასალების მოდელირებაში მათი მნიშვნელობის გამო ძალიან პოპულარული გახდა ბიოლოგიურ და სამედიცინო მეცნიერებებში.

წარმოდგენილი კვლევის გეგმა ეხება პოტენციალთა მეთოდით კომპოზიტური სხეულებისთვის დასმულ დინამიკის სამგანზომილებიან შერეულ საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კვლევას. პოტენციალთა მეთოდი სასარგებლო ინსტრუმენტი აღმოჩნდა ბევრ მათემატიკურ მოდელში სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კორექტულობის შესასწავლად და ეფექტური რიცხვითი ალგორითმების შესაქმნელად. კერძოდ, სტატიკისა და სტაციონალური რხევის ამოცანების შემთხვევაში, პოტენციალთა მეთოდი წარმატებით იქნა გამოყენებული შერეული და ბზარის ტიპის ამოცანების ამონახსნების სინგულარობების ეფექტურად დახასიათებისთვის და ძაბვის სინგულარობის მაჩვენებლების ცხადად გამოსათვლელად, რაც არსებითია თეორიული და პრაქტიკული თვალსაზრისით.

6.3.2. კვლევის ობიექტები.

კვლევის გეგმაში განხილული კომპოზიტური სხეულები სხეულები შედგება არეებისაგან, რომელთა მასალებსაც სხვადასხვა პიეზოდრეკადი, განზოგადებული თერმოდრეკადი ან განზოგადებული თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი თვისებები გააჩნია, ხოლო ორი მიმდებარე არის გამყოფი საკონტაქტო ზედაპირები შეიძლება შეიცავდეს ნებისმიერი ფორმის ბზარებს. თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკად მასალებს შეუძლიათ ეფექტურად განახორციელონ გარდაქმნა ელექტრულ ენერგიას, მაგნიტურ ენერგიასა და თერმომექანიკურ ენერგიას შორის. ამ შესანიშნავი თვისებების გამო ეს მასალები ფართოდ გამოიყენება ბევრ მნიშვნელოვან სფეროში, მაგალითად, აეროკოსმოსურ ტექნოლოგიებში, ბიომედიცინაში და ინტელექტუალური მასალების წარმოებაში, აგრეთვე დეტექტორებში, გადამწოდებში და ამძრავებში. თუმცა, რღვევისადმი დაბალი სიმტკიცისა და დეფექტებისადმი მაღალი მგრძნობელობის გამო, ასეთი მასალები ძალიან მყიფეა და მიდრეკილია ბზარების წარმოქმნიკენ. ხშირ შემთხვევაში, რღვევა ხდება მიმდებარე არეების გამყოფ საკონტაქტო ზედაპირებზე, რაც გამოიხატება ამ ზედაპირებზე სხეულის გახლეჩვით და ბზარების წარმოქმნით.

6.3.3. თემის აქტუალობა და სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია.

პრობლემის პრაქტიკული მნიშვნელობის გამო, თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკად მასალებში საკონტაქტო ბზარები აქტიურად იქნა შესწავლილი ბოლო რამდენიმე ათწლეულის განმავლობაში. თუმცა, ძირითადად განიხილებოდა სტატიკის, სტაციონალური რხევის ან ფსევდორხევის ამოცანები და მათი რიცხვითი ამოხსნები ორგანზომილებიან შემთხვევაში. მათგან განსხვავებით ჩვენ დასახული გეგმით განვიხილავთ დინამიკის სამგანზომილებიან ამოცანებს. ამ ამოცანების თეორიული კვლევა განხორციელდება პოტენციალთა მეთოდის, ფსევდოდიფერენციალურ განტო-ლებათა თეორიის, ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის, ლოკალიზებული პარამეტრიქსის, ლოკალიზებულ პოტენციალთა მეთოდისა და ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით.

ერთგვაროვანი, არაერთგვაროვანი და უბნობრივად ერთგვაროვანი ანიზოტროპული დრეკადი სტრუქტურების მათემატიკური მოდელებისა და შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო და ბზარის ამოცანების სირთულის გამო, დაგვჭირდება პოტენციალების მეთოდის არატრივიალური განზოგადება სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის ფუნქციური სივრცეების ფართო სკალაზე, რათა გამოვიკვლიოთ ამოცანების კორექტულობა, დავადგინოთ ამონახსნების ასიმპტოტური თვისებები და მათი ოპტიმალური რეგულარობა. ამ მიზნით, ჩვენ ვაპირებთ გამოვიყენოთ ვიშიკ-ესკინის მეთოდი ფსევდოდიფერენციალური განტოლებისთვის მრავალსახეობაზე საზღვრით, რომელიც დაფუძნებულია ვინერ-ჰოფის ფაქტორიზაციის მეთოდზე, და ბუტე დე მონველის ოპერატორების ალგებრაზე.

ლაპლასის გარდაქმნით განხილულ საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს დავიყვანთ კომპ-ლექსური პარამეტრის შემცველ ფსევდორხევის ელიფსურ ამოცანებზე. შემდეგ, პოტენციალთა მეთო-დით ისინი დაიყვანება სასაზღვრო ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებებზე. პირველ რიგში, ჩვენ ვგეგმავთ დავახასიათოთ მიღებული ფსევდოდიფერენციალური განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური თვისებები და შემდეგ დავადგინოთ ფსევდორხევის შერეული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნების სივრცითი ასიმპტოტური გაშლა. შემდეგ გავაანალიზოთ ლა-პლასის შებრუნებული გარდაქმნით მიღებული თავდაპირველი დინამიკის შერეული ამოცანების

ამონახსნების ასიმპტოტურ თვისებები. ვიმედოვნებთ, რომ დინამიკური ამოცანებისთვის აიგება ეფექტური ალგებრული ალგორითმები ძაბვის სინგულარობის მაჩვენებლების ცხადად გამო-სათვლელად,

6.3.4. არსებული ლიტერატურული წყაროები (რა არის გაკეთებული და როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს).

როგორც აღვნიშნეთ, დასმული ამოცანის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობის გამო, თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკად მასალებში საკონტაქტო ბზარები აქტიურად იქნა შესწავლილი ბოლო რამდენიმე ათწლეულის განმავლობაში. მაგალითად, განიხილებოდა ბრტყელი საკონტაქტო ბზარი ორი განსხვავებული პიეზოელექტრული მასალით ან პიეზოელექტრული და არაპიეზოელექტრული მასალით დამზადებულ სხეულებს შორის, სადაც გათვალისწინებული იყო მხოლოდ სიბრტყის გასწვრივი ან სიბრტყის ნორმალური ძაბვები. ამ ნაშრომებში ძირითადად განიხილებოდა სტატიკის, სტაციონალური რხევის ან ფსევდორხევის ამოცანები და მათი რიცხვითი ამოხსნები ორგანზომილებიან შემთხვევაში. (იხ. მიმოხილვითი ნაშრომები [GKLL-1], [LZJH] და იქ ციტირებული ლიტერატურა, აგრთვე სტატიები [Aou1], [Aou2], [GKLL-2], [OLSL], [ZSSYL2], [MJS], [JKIK], [Mi], [OAJK], [Yang]), ამ ნაშრომებისგან განსხვავებით ჩვენ ჩვენ ვგეგმავთ შევისწავლოთ ზემოთ აღნიშნული დინამიკის სამგანზომილებიანი შერეული საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კორექტულობა და გამოვიკვლიოთ თერმომექანიკური და ელექტრომაგნიტური ველების სინგულარული ყოფაქცევა ე.წ. განსაკუთრებული წირების მახლობლობაში (ბზარის კიდეები, წირები, რომლის გასწვრივაც სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები ერთმანეთს ხვდება ან სადაც საკონტაქტო ზედაპირი კვეთს შედგენილი სხეულის გარე საზღვარს). აგრეთვე სამგანზომილებიან შემთხვევაში ავაგოთ რიცხვითი ამოხსნის ეფექტური ალგორითმები.

6.3.5. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება.

წინამდებარე პროექტით ჩვენ ვგეგმავთ შევისწავლოთ ზემოთ აღნიშნული დინამიკის სამგანზომილებიანი შერეული საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კორექტულობა და გამოვიკვლიოთ თერმომექანიკური და ელექტრომაგნიტური ველების სინგულარული ყოფაქცევა ე.წ. განსაკუთრებული წირების მახლობლობაში (ბზარის კიდეები, წირები, რომლის გასწვრივაც სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები ერთმანეთს ხვდება ან სადაც საკონტაქტო ზედაპირი კვეთს შედგე-ნილი სხეულის გარე საზღვარს). სამგანზომილებიანი სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში მსგავსი საკითხები გაანალიზებულია ჩვენს ნაშრომებში [BCN1-BCN7], [NBC]. ჩვენ ვგეგმავთ ანალოგიური შედეგების მიღებას დინამიკის სამგანზომილებიანი შერეული საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის. ჩვენ შევიმუშავებთ ეფექტურ ალგორითმებს განსაკუთრებული წირების მახლობლად ძაბვის სინგულარობის მაჩვენებლების ცხადად საპოვნელად და გამოვიკვლევთ მათ დამოკიდებულებას დროის ცვლადზე და მატერიალურ პარამეტრებზე.

პროექტის წარმატებული განვითარება და საპროექტო წინადადებაში აღწერილი სამეცნიერო მიზნების მიღწევა გამოიწვევს სრულად დაწყვილებული თერმო-მექანიკური და ელექტრო-მაგნიტური ველების დინამიკური ურთიერთქმედების უფრო ღრმა გააზრებას კომპლექსურ მულტიკომპონენტურ დრეკადი სტრუქტურების შემადგენლობაში, როდესაც სხვადასხვა კომპონენტში განიხილება სხეულის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები. შერეული და საკონტაქტო ბზარის ამოცანების კვლევის დროს მიღებული შედეგების საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ცხადად აღვწეროთ დინამიკური თერმო-მექანიკური და ელექტრო-მაგნიტური ველების სინგულარული ქცევა განსაკუთრებული წირების მახლობლად, ეს არის ბზარის კიდეები, წირები, სადაც სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები ერთმანეთს ხვდება და სადაც საკონტაქტო ზედაპირი კვეთს კომპოზიციური სხეულის გარე საზღვარს. კერძოდ, ძაბვის სინგულარობების ექსპონენტების ანალიზი დინამიკის ამოცანებში და მათზე დამოკიდებულება მატერიალურ პარამეტრებზე საშუალებას იძლევა ჩამოყალიდეს მათემატიკურად მკაცრად დასაბუთებული რეკომენდაციები ძაბვის სინგულარულ ზონებთან დაკავშირებით, შედარდეს სინგულარობები სხვადასხვა განსაკუთრებულ წირებზე და წინასწარ განსაზღვრონ ბზარის გავრცელების მახასიათებლები, რაც ძალიან მნიშვნელოვანია რაც ძალიან მნიშვნელოვანია რღვევის მექანიკაში და გადამწყვეტ როლს

ასრულებს პრაქტიკულ საინჟინრო ამოცანებში. უფრო მეტიც, სინგულარობის მაჩვენებლების ცხადი ფორმულები ძალიან სასარგებლო იქნება ეფექტური რიცხვითი ალგორითმების აგებისთვის, როდესაც სასურველია შესაბამისი სინგულარული ტესტ ფუნქციების გამოყენება.

როგორც ზემოთ აღინიშნა, სამეცნიერო პროექტი მიეკუთვნება ფუნდამენტური კვლევის სფეროს, მაგრამ პროექტის ყველა თემა საინტერესოა პრაქტიკული თვალსაზრისითაც, რადგან საპროექტო წინადადებაში განხილული დინამიკური ამოცანები ხშირად გვხვდება ზევრ მათემატიკურ მოდელში, რომლებიც დაკავშირებულია საინჟინრო და სამედიცინო-ბიოლოგიურ გამოყენებებთან. მაგალითად, ძაბვების სინგულარობების განაწილების ანალიზს, სადაც ბზარები შეიძლება განვითარდეს, დიდი მნიშვნელობა აქვს მექატრონიკაში, კერძოდ, ისეთი მოწყობილობების დაპროექტებისთვის, როგორიცაა ელექტრომექანიკური სენსორები და ამძრავები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე ტექნიკურ სფეროებში, როგორიცაა. მიკროსისტემური ტექნოლოგია და ჭკვიანი სტრუქტურები [GKLL-1], [GKLL-2]. უფრო მეტიც, ბოლო ათწლეულებში, უწყვეტი გარემოს მექანიკის დაზუსტებული მათემატიკური მოდელები ძალიან პოპულარული გახდა ბიოლოგიურ და სამედიცინო მეცნიერებებში, მათი მნიშვნელობის გამო ბიომასალების მოდელირებაში. მაგალითად, როგორც ახლახან გამოვლინდა, ფიზიკური, ქიმიური, დიელექტრიკული და პიეზოელექტრული თვისებების გამო ანიონურ კოლაგენის და კოლაგენ-ჰიდროქსიაპატიტის კომპოზიტებს გამოყენება აქვთ უჯრედული ზრდისა და ძვლის რეგენერაციის სისტემებში.

6.3.6. შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით.

ჩვენი გამოკვლევა განხორციელდება შემდეგი სქემის მიხედვით:

პირველ ეტაპზე (2024-2025 წლები) ლაპლასის გარდაქმნით საწყის-სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები დაიყვანება კომპლექსური პარამეტრის შემცველ ელიფსურ ფსევდორხევის განტოლებათა სისტემისთვის დასმულ შერეულ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებზე. პოტენციალთა მეთოდით ფსევდორხევის ამოცანები დაიყვანება ფსევდოდიფერენციალური განტოლებების სისტემებზე, შეისწავლება შესაბამისი ოპერატორების ფრედჰოლმურობის თვისებები და დადგინდება მათი შებრუნებადობა შესაბამის სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში.

მეორე ეტაპზე (2026-2027 წლები) განხორციელდება ფსევდორხევის ამოცანების ამონახსნების რეგულარობის გამოკვლევა და მათი სინგულარობის ყოფაქცევის ანალიზი განსაკუთრებული წირების მახლობლად.

საბოლოო ეტაპზე (2027-2028 წლები) მოხდება თავდაპირველი დინამიკის შერეული ამოცანების ამონახსნების აგება ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნით, მათი ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლა განსაკუთრებული წირების მახლობლად, რაც მიგვიყვანს ოპტიმალური რეგულარობის შედეგებამდე. აქ ყველაზე რთული ამოცანა იქნება ეფექტური ანალიტიკური და ალგებრული მეთოდების შექმნა ძაბვის სინგულარობის შესაფასებლად და მატერიალურ მუდმივებზე და განსაკუთრებული წირების გეომეტრიაზე მათი დამოკიდებულების ანალიზი. ეს საკითხები ძალიან მნიშვნელოვანია ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტების დასადგენად და შესაბამისი პრაქტიკული რეკომენდაციების შესამუშავებლად.

მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით მომზადდება რამდენიმე სამეცნიერო სტატია.

ციტირებული ლიტერატურა:

[**Aou1**] M.Aouadi, *On the coupled theory of thermomagnetoelectroelasticity*, Q. J. Mech. Appl. Math. 60 (2007), 25-43.

[**Aou2**] M.Aouadi, *Some theorems in the generalized theory of thermomagnetoelectroelasticity under Green-Lindsays model*, Acta Mech., 200 (2008), 25-43.

[BCN1] **T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili**, *Mixed boundary value problems of thermopiezoelectricity for solids with interior cracks*, Integral Equations and Operator Theory, **64**, 4 (2009), 495–537.

[BCN2] T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili, *Mathematical Problems of Generalized Thermo-Electro-Magneto- Elasticity Theory,* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 68 (2016), 1-166.
[BCN3] T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili, *Mixed Boundary Value Problems of Pseudo-oscillations of Generalized Thermo-Electro-Magneto-Elasticity Theory for Solids with Interior Cracks*, Trans. A.Razmadze Math. Inst. 170, No.3 (2016), 308-351.
[BCN4] T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili, *Mixed and Crack Type problems of the Thermopiezoelectricity Theory Without Energy Dissipation,* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, **74**, 2018, pp. 39-78.
[BCN6] T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili, *Mixed and Crack Type Dynamical Problems of Electro-Magneto-Elasticity Theory*, Georgian Mathematical Journal, Vol.28, Issue 4, 2021, pp. 533-553.
[BCN7] T.Buchukuri, O.Chkadua, D.Natroshvili, *Mixed and Crack Type problems of the Thermopiezoelectricity Theory Without Energy Dissipation,* Mem. Differential Equations Math. Phys., Vol. 74, 2018, pp. 39-78.
[GKLL-1] V.Govorukha, M.Kamlah, V.Loboda, Y.Lapusta, *Interface cracks in piezoelectric materials*. Smart Mater. Struct. 25(2): 023001 (2016) (20 pp). DOI: 10.1088/0964-1726/25/2/023001
[GKLL-2] V.Govorukha, M.Kamlah, V.Loboda, Y.Lapusta, *Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 83, Springer, 2017.
[JKIK] A.Jahangir, A.Khan, S.Islam, M.Khan, *Propagation of plane magneto-thermo-elastic waves in a rotating, electrically conducting and transversely isotropic medium*, Scientific Research and Essays, Vol. 7(10), (2012), 1148-1155.
[LZJH] S.Liu, H.Zhang, X.Ji, S.Han, *Fracture analysis of magneto-electro-elastic smart materials: a brief review*, IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 825 (2021) 012024. doi:10.1088/1755-1315/825/1/012024
[Mi] R.D.Mindlin, *Elasticity, piezoelasticity and crystal lattice dynamics.* J. Elasticity, 2 (1972), No. 4, 217–282.
[OAJK] M.Othman, S.Y.Atwa, A.Jahangir, A.Khan, *Plane waves in generalized magneto-thermo-micro-stretch elastic solid for mode-I crack problem*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 76(1) (2014), 59-70.
[OLSL] O.Onopriienko, V.Loboda, A.Sheveleva, Y.Lapusta, *An interface crack with mixed electro-magnetic conditions at its faces in a piezoelectric / piezomagnetic bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings*. Acta Mechanica Et Automatica, **12**, 4(2018), 301-310.
[Yang] J.S.Yang, *Mechanics of piezoelectric structures,* Singapore: World Scientific, 2006.

6.4. თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების სამგანზომილებიანი ამოცანები (გიორგი ჭკადუა, ოთარ ჭკადუა).

6.4.1. შესავალი.

წარმოდგენილ პროექტში ჩვენ ვიკვლევთ სამგანზომილებიანი სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანებს, სადაც თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეული მოთავსებულია შემოსაზღვრულ არეში. ეს სხეული ჩადგმულია სითხეში, რომელიც იკავებს შემოუსაზღვრელ არეს. ჩვენ განვიხილავთ გრინ-ლინდსეის განზოგადებულ თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მოდელს.

ამ მოდელის გამორჩეული მახასიათებელი მდგომარეობს სითბოს გავრცელების სასრულ სიჩქარეში, რომელიც მას განასხვავებს კლასიკური მოდელისგან. ექვსგანზომილებიანი თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი ველი არსებობს შემოსაზღვრულ არეში. ეს ველი შედგება სამკომპონენტიანი გადაადგილების ვექტორისგან, ელექტრული პოტენციალის, მაგნიტური პოტენციალისა და ტემპერატურისგან. ხოლო სითხის შემოუსაზღვრელ არეში მოქმედებს სკალარული აკუსტიკური წნევის ველი.

ფიზიკური კინემატიკური და დინამიკური ურთიერთქმედებების ზუსტად აღსაწერად გამოიყენება შესაბამისი სასაზღვრო ტრანსმისიის პირობები. ეს პროექტი იკვლევს ურთიერთქმედების ამოცანებს, რომლებიც დაკავშირებულია სითხე-მყარი სხეულის

ურთიერთქმედებების მდგრადი რხევისა და დინამიკის განტოლებებთან. ეს ამოცანები ქმნიან საფუძველს მრავალი სამეცნიერო და საინჟინრო სფეროსთვის, კერძოდ:

1. აკუსტიკური მეტამასალები და ტალღების გავრცელების კონტროლი: ამ სფეროში ჩატარებულმა კვლევამ განაპირობა მოწინავე აკუსტიკური მეტამასალების დაპროექტება, რომლებიც აჩვენებენ ტალღის გავრცელების განსაკუთრებულ თვისებებს. სითხისა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი–სტრუქტურების ურთიერთქმედების გამოყენებით, შესაძლებელია შეიქმნას მასალები წინასწარ დაგეგმილი მექანიკური, თერმული და ელექტრომაგნიტური თვისებებით, რომლებიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას ისეთი პროგრამებისთვის, როგორიცაა ხმაურის შემცირება, ვიბრაციის იზოლაცია და ტალღის მართვა.

2. ენერგიის მოპოვება და შენახვა: რხევების ურთიერთქმედების პრობლემების ანალიზი იძლევა ენერგიის ეფექტური მოპოვების და შენახვის ტექნოლოგიების შემუშავების საშუალებას. სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სტრუქტურების ურთიერთქმედების შესწავლამ შეიძლება გამოიწვიოს ახალი მასალების და მოწყობილობების შექმნა, რომლებიც გარდაქმნის მექანიკურ ენერგიას ელექტრო ენერგიად, ან პირიქით, პოტენციური გამოყენებებით თვითმმართველ სენსორებში.

3. ბიოსამედიცინო ინჟინერია: სითხის და თერმოელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სტრუქტურების ინტერდისციპლინური შესწავლა ხორციელდება ბიოსამედიცინო ინჟინერიის სფეროში. მაგალითად, ბიოლოგიურ ქსოვილებში ტალღის გავრცელების ანალიზი, სისხლძარღვებში სითხე-სტრუქტურის ურთიერთქმედება და იმპლანტირებული მოწყობილობების დიზაინი. ყოველივე ეს ეფუძნება ამ ურთიერთქმედების ამოცანების ფუნდამენტურ კვლევას.

4. აერონავტიკა და ავტომობილების ინჟინერია: ურთიერთქმედებების გამოკვლევა სტატიკური, დინამიკური და სტაციონალური რხევების შემთხვევაში ხელს უწყობს საჰაერო კოსმოსური და საავტომობილო დიზაინის ოპტიმიზაციას. სითხისა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სტრუქტურების შესწავლით მიღებული ცოდნა ხელს უწყობს მსუბუქი მასალების შემუშავებას, გაუმჯობესებულ აეროდინამიკას და ვიბრაციის კონტროლის გაძლიერებულ სისტემებს.

6.4.2. კვლევის ობიექტები.

წარმოდგენილ პროექტში ჩვენ ვიკვლევთ სამგანზომილებიანი სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანებს, სადაც თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეული მოთავსებულია შემოსაზღვრულ არეში. ეს სხეული ჩადგმულია სითხეში, რომელიც იკავებს შემოუსაზღვრელ არეს. ჩვენ განვიხილავთ გრინ-ლინდსეის განზოგადებულ თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მოდელს. გამოვიკვლევთ დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის სასაზღვრო ურთიერთქმედების ამოცანებს სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების მდგრადი რხევის განტოლებისთვის. შევისწავლით შერეული ტიპის ამოცანის ამონახსნების ასიმპტოტური თვისებებს იმ წირის მიდამოში, სადაც სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები იცვლებიან. ასიმპტოტური ანალიზის საფუძველზე მივიღებთ ამონახსნის ჰელდერის სიგლუვისთვის ოპტიმალური შედეგებს. გამოვიკვლევთ სითხისა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების დინამიკური ურთიერთქმედების ამოცანებს ნეიმანისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობებით.

6.4.3. თემის აქტუალობა და სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია.

წარმოდგენილი კვლევითი პროექტი მნიშვნელოვანია გამოყენებითი მათემატიკის, კერძოდ, სითხის დინამიკის და მყარი მექანიკის სფეროებში, რადგან ის იკვლევს სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების რთულ ურთიერთქმედებებს. ეს ურთიერთქმედება გადამწყვეტია გამოყენების ფართო სპექტრისთვის, მათ შორისა ენერგიის მოპოვება, მიკროელექტრომექანიკური სისტემები (MEMS), წყალქვეშა და კოსმოსური მანქანები და სენსორები და აქტივატორები. ამ ურთიერთქმედების კვლევა აუცილებელია ასეთი სისტემების მუშაობის, ეფექტურობისა და გამძლეობის გასაუმჯობესებლად (მაგ. [1–3]).

პროექტის სიახლე და უნიკალურობა მდგომარეობს როგორც დინამიკური, ასევე მდგრადი რხევითი ურთიერთქმედების ამოცანების გამოკვლევაში, თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის თეორიის განზოგადებული გრინ-ლინდსეის მოდელისთვის. წინა კვლევები, როგორც წესი,

ფოკუსირებული იყო ამ ურთიერთქმედების ინდივიდუალურ ასპექტებზე (მაგ. [4–11]). ეს პროექტი მიზნად ისახავს მრავალი ფაქტორის სინერგიული ეფექტის გათვალისწინებას, როგორიცაა სითხის ნაკადი, ტემპერატურის გრადიენტები, ელექტრომაგნიტური ველები და დეფორმაცია.

წარმოდგენილ პროექტში ჩვენ ვიკვლევთ სამგანზომილებიანი სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანებს, სადაც თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეული მოთავსებულია შემოსაზღვრულ არეში. ეს სხეული ჩადგმულია სითხეში, რომელიც იკავებს შემოუსაზღვრელ არეს. ჩვენ განვიხილავთ გრინ-ლინდსეის განზოგადებულ თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მოდელს.

ამ მოდელის გამორჩეული მახასიათებელი მდგომარეობს სითბოს გავრცელების სასრულ სიჩქარეში, რომელიც მას განასხვავებს კლასიკური მოდელისგან. ექვსგანზომილებიანი თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი ველი არსებობს შემოსაზღვრულ არეში. ეს ველი შედგება სამკომპონენტიანი გადაადგილების ვექტორისგან, ელექტრული პოტენციალის, მაგნიტური პოტენციალის და ტემპერატურისგან. ხოლო სითხის შემოუსაზღვრელ არეში მოქმედებს სკალარული აკუსტიკური წნევის ველი.

ფიზიკური კინემატიკური და დინამიკური ურთიერთქმედებების ზუსტად აღსაწერად გამოიყენება შესაბამისი სასაზღვრო ტრანსმისიის პირობები. ეს პროექტი იკვლევს ურთიერთქმედების ამოცანებს, რომლებიც დაკავშირებულია დინამიკის და მდგრადი რხევის განტოლებებთან სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედებებისთვის.

კვლევის მეთოდოლოგია, რომელიც ეხება დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის მდგრადი რხევის სასაზღვრო ურთიერთქმედების ამოცანებს სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების მდგრადი რხევის განტოლებისთვის, იქნება ორგანიზებული შემდეგნაირად:

1. ჩამოვაყალიბებთ დირიხლეს, ნეიმანისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო-ურთიერთქმედების ამოცანებს შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში, განვსაზღვრავთ ჯონსის ამონახსნებს და ჯონსის საკუთრივ სიხშირეებს და დავამტკიცებთ ამ ამოცანების ერთადერთობის თეორემებს.
2. აღვწერთ პოტენციალების თვისებებს, რომლებიც დაკავშირებულია ჰელმჰოლცის განტოლებასთან და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემასთან.
3. ჩამოვაყალიბებთ დირიხლეს, ნეიმანისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო-ურთიერთქმედების ამოცანებს ფსევდო–რხევის განტოლებებისთვის და დავამტკიცებთ მათთვის ერთადერთობის თეორემებს.
4. დავამტკიცებთ დირიხლეს და ნეიმანისა ფსევდო–რხევის ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემებს სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეებში პოტენციალთა მეთოდისა და ფსევდოდიფერენციალურ ოპერატორთა თეორიის გამოყენებით.
5. შერეული ტიპის ურთიერთქმედების ფსევდო–რხევის ამოცანის ამონახსნის არსებობის კვლევისას გამოვიყენებთ საზღვრიან ზედაპირზე განსაზღვრულ ძლიერად ელიფსურ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა თეორიას.
6. გამოვიკვლევთ ფრედჰოლმის თვისებებს და დავამტკიცებთ შესაბამისი ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის შებრუნებადობას სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეებში.
7. დავამტკიცებთ მდგრადი რხევის ურთიერთქმედების ამოცანის მონახსნის არსებობის თეორემას სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცეებში, ამოცანის ერთადერთობას როდესაც სიხშირის პარამეტრი არ არის ჯონსის საკუთრივი სიხშირე, და გამოვიყვანთ ამოცანის ამოხსნისათვის აუცილებელ და საკმარის პირობას, როდესაც სიხშირე ეკუთვნის ჯონსის საკუთრივ სიხშირეების სიმრავლეს.
8. გამოვიკვლევთ შერეული ტიპის ამოცანის ამონახსნების ასიმპტოტური თვისებებს იმ წირის მიდამოში, სადაც სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები იცვლებიან. ასიმპტოტური ანალიზის საფუძველზე მივიღებთ ამონახსნის ჰელდერის სიგლუვის ოპტიმალური შედეგებს.

კვლევის მეთოდოლოგია, რომელიც ფოკუსირებულია სითხისა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების დინამიკური ურთიერთქმედების ამოცანებზე ნეიმანისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობებით:

1. ჩამოვაყალიბებთ სითხე-მყარი სხეულის დინამიკური ურთიერთქმედების მოდელის შესაბამისი საწყისი საზღვარო-ურთიერთქმედების ამოცანას.

2. ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით დინამიკის ამოცანებს დავიყვანთ შესაბამის ელიფსურ სასაზღვრო-ურთიერთქმედების ამოცანებზე ფსევდო-რხევის განტოლებებისთვის, რომლებიც დამოკიდებულია კომპლექსურ პარამეტრზე (იხ. [13]).
3. გამოვიყენებთ ამ პროექტის ფარგლებში 2024–2025 წლებში მიღებულ შედეგებს და ფსევდო–რხევის ამოცანების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებს ჩამოვაყალიბებთ.
4. თავდაპირველი დინამიკის ამოცანების ამონახსნებს ავაგებთ ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნის საშუალებით, სადაც გამოყენებული იქნება შესაბამისი ფსევდო–რხევის ამოცანის ამონახსნის ნორმის შეფასება კომპლექსური პარამეტრის მიმართ (იხ. [14]).
5. ჩამოვაყალიბეთ ერთადერთობისა და არსებობის თეორემებს განსახილველი თავდაპირველი დინამიკური ურთიერთქმედების ამოცანებისთვის.

6.4.4. არსებული ლიტერატურული წყაროები (რა არის გაკეთებული და როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს).

პროექტის სიახლე და უნიკალურობა მდგომარეობს როგორც დინამიკური, ასევე მდგრადი რხევის ურთიერთქმედების ამოცანების გამოკვლევაში, თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის თეორიის განზოგადებული გრინ-ლინდსეის მოდელისთვის. წინა კვლევები, როგორც წესი, ფოკუსირებული იყო ამ ურთიერთქმედების ინდივიდუალურ ასპექტებზე (მაგ. [4–11]). ეს პროექტი მიზნად ისახავს მრავალი ფაქტორის სინერგიული ეფექტის გათვალისწინებას, როგორიცაა სითხის ნაკადი, ტემპერატურის გრადიენტები, ელექტრომაგნიტური ველები და დეფორმაცია.

წარმოდგენილ პროექტში ჩვენ ვიკვლევთ სამგანზომილებიანი სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანებს, სადაც თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეული მოთავსებულია შემოსაზღვრულ არეში. ეს სხეული ჩადგმულია სითხეში, რომელიც იკავებს შემოუსაზღვრელ არეს. ჩვენ განვიხილავთ გრინ-ლინდსეის განზოგადებულ თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მოდელს.

6.4.5. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება.

პროექტის მოსალოდნელი შედეგები იქნება მნიშვნელოვანი მათემატიკოსებისთვის, რომლებიც სპეციალიზირებულნი არიან გამოყენებითი ანალიზში, ასევე მათემატიკოსებისთვის და ინჟინრებისთვის, რომლებიც ჩართული არიან მეცნიერებისა და ინჟინერიის სფეროებთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანების რიცხვით გადაწყვეტაში. ეს შედეგები განსაკუთრებით აქტუალურია მასალების გამოთვლითი მეცნიერებისა და აკუსტიკური ტალღების გაფანტვის კონტექსტში.

წარმოდგენილ პროექტში ჩვენ ვიკვლევთ სამგანზომილებიანი სითხე-მყარი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანებს, სადაც თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეული მოთავსებულია შემოსაზღვრულ არეში. ეს სხეული ჩადგმულია სითხეში, რომელიც იკავებს შემოუსაზღვრელ არეს. ჩვენ განვიხილავთ გრინ-ლინდსეის განზოგადებულ თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის მოდელს.

ამ მოდელის გამორჩეული მახასიათებელი მდგომარეობს სითბოს გავრცელების სასრულ სიჩქარეში, რომელიც მას განასხვავებს კლასიკური მოდელისგან. ექვსგანზომილებიანი თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი ველი არსებობს შემოსაზღვრულ არეში. ეს ველი შედგება გადაადგილების ვექტორისგან, რომელსაც აქვს სამი კომპონენტი, ელექტრული პოტენციალის, მაგნიტური პოტენციალის და ტემპერატურისგან. ხოლო სკალარული აკუსტიკური წნევის ველი არის სითხის შემოუსაზღვრელ არეში.

6.4.6. შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით.

2024 წელი: გამოვიკვლევთ სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო–დრეკადი სხეულის მდგრადი რხევის ურთიერთქმედების ამოცანებს. კერძოდ დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანებს. ეს ამოცანები გამოკვლეული იქნება ნაკლები შეზღუდვებით თერმო–ელექტრო-მაგნეტო–დრეკადობის შესაბამის მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორზე და ასიმპტოტური კლასების შემოღებით. კერძოდ, ეს

მიდგომა იძლევა საშუალებას, რომ მატრიცის დიფერენციალური ოპერატორის შესაბამის მახასიათებელ პოლინომს ჰქონდეს ჯერადი ნამდვილი ფესვები. ეს მიდგომა ემსახურება ზომერფელდ-კუპრაძის კლასის განზოგადებას (იხ. [12]).

2025 წელი: განვიხილავთ სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო–დრკადი სხეულების მდგრადი რხევის ურთიერთქმედების ამოცანების შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობებით. ეს გამოკვლევა მოიცავს თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობის შესაბამის დიფერენციალურ ოპერატორზე ზემოთ ნახსენები ნაკლები შეზღუდვების შენარჩუნებას (იხ. [12]). გარდა ამისა, მიღებული იქნება ამონახსნების ასიმპტოტური გაშლა სასაზღვრო წირის მიდამოში, სადაც იცვლება სხვადასხვა სასაზღვრო პირობები. ასიმპტოტური ანალიზის საშუალებით დადგინდება ოპტიმალური ჰელდერის სიგლუვე.

2026–2027 წელი: გამოვიკვლევთ სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების დინამიკური ურთიერთქმედების ნეიმანის ამოცანას. ეს გამოკვლევა მოიცავს სითხის დინამიკასა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობას შორის კომპლექსური ურთიერთქმედების შესწავლას, რომლის მიზანია გამოიკვლიოს ამ სტრუქტურების თვისებები დინამიკის შემთხვევაში.

2027–2028 წელი: გამოვიკვლევთ სითხისა და თერმო–ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადი სხეულების დინამიკური ურთიერთქმედების შერეული ამოცანას. ეს გამოკვლევა მოიცავს სითხის დინამიკასა და თერმო-ელექტრო-მაგნიტო-დრეკადობას შორის კომპლექსური ურთიერთქმედების შესწავლას.

ციტირებული ლიტერატურა:

1. Neugschwandtner GS, Schwodiauer R, Bauer-Gogonea S, Bauer S, Paajanen M, Lekkala J. Piezo- and pyroelectricity of a polymer-foam space-charge electret. Journal of Applied Physics. 89(8); 2001. 4503--4511.

2.Safari A, Akdogan EK, editors. Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer Applications. Springer, New York, 2008.

3.Vopson MM. Fundamentals of Multiferroic Materials and Their Possible Applications. Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences. 40(4); 2015. 223--250.

4. Chkadua G, Natroshvili D. Interaction of acoustic waves and piezoelectric structures. Math. Meth. Appl. Sci. **38**, (11); 2015. 2149--2170.

5. Chkadua G. Solvebility, asimptotic analysis and regularity results of mixed type interaction problem of acoustic waves and piezoelectric structures. Math. Meth. Appl. Sci. **40**, (15); 2017. 5539–5562.

6. Sánchez-Vizuet T, Sayas FJ. Symmetric Boundary-Finite Element Discretization of Time Dependent Acoustic Scattering by Elastic Obstacles with Piezoelectric Behavior. J. Sci. Comput. **70**; 2017. 1290–1315.

7. Hassell M.E, Qiu T, Sánchez-Vizuet T, Sayas FJ. A new and improved analysis of the time domain boundary integral operators for the acoustic wave equation. J. Integral Equations Applications. **29** (1); 2017. 107-136.

8. Brown T.S, Sánchez-Vizuet T, Sayas FJ. Evolution of a semidiscrete system modeling the scattering of acoustic waves by a piezoelectric solid. ESAIM: M2AN, **52** 2; 2018. 423-455.

9. George C. Hsiao, Wolfgang L. Wendland, On the propagation of acoustic waves in a thermo-electro-magneto-elastic solid, Applicable Analysis, 101:11, 2022, 3785-3803.

10. Kupradze VD, Gegelia TG, Basheleishvili MO, Burchuladze TV. Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, Translated from the second Russian edition. Edited by V. D. Kupradze. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 25. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York; 1979.

11. Buchukuri T, Gegelia TG. Some dynamic problems of the theory of electroelasticity. Mem. Differential Equations Math. Phys. **10**; 1997. 1--53.

12. Chkadua G, Shargorodsky E, Asymptotic Analysis of Fundamental Solutions of Hypoelliptic Operator, Georgian Mathematical Journal, (accepted for publication).

13. Chkadua G, Natroshvili D. Mathematical aspects of fluid-multiferroic solid interaction problems. Math. Meth. Appl. Sci. **44**, (12); 2021. 9727--9745.

14. Chkadua G, Natroshvili D. Mathematical problems of dynamical interaction of fluids and multiferroic solids, Applicable Analysis, 2023, https://doi.org/10.1080/00036811.2023.2171874

6.5. ტალღის გავრცელების ამოცანები კრისტალებსა და მეტამასალებში (დავით კაპანაძე, ეკატერინა პესეცკაია).

შესწავლილი იქნება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების სასაზღვრო ამოცანები დისკრეტულ სტრუქტურებში, რომლებიც წარმოადგენს კრისტალებსა და მეტამასალებში სხვადასახვა ტიპის ტალღის გავრცელების ამოცანების მათემატიკურ მოდელებს.

6.5.1. შესავალი.

მეცნიერთა, კერძოდ მათემატიკოსთა, დიდ ყურადღებას იპყრობს ის ამოცანები რომლებიც აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის, გაბნევისა და არეკვლის პროცესებთან არის დაკავშირებული. რადგან აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღები ჩვენი ცხოვრების თანამდევი ნაწილია, ამიტომ ცხადი და ბუნებრივია მათდამი დიდი ინტერესი და მათი კვლევის აუცილებლობა.

დროით ჰარმონიულ ტალღებთან დაკავშირებული პროცესების მათემატიკური მოდელია სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის განტოლებებისათვის. დაკვირვების მასშტაბის მიხედვით შესაძლებელია სასაზღვრო ამოცანები განხილული იყოს როგორც უწყვეტ, ასევე დისკრეტულ სტრუქტურებში. ცნობილია, რომ ხშირად მასალების როგორც უწყვეტ სხეულის განხილვა არ არის საკმარისი მასში მიმდინარე ზოგიერთი ტიპის მიკროპროცესების შესასწავლად, ამიტომ საჭიროა დისკრეტული სასაზღვრო ამოცანების განხილვა და შესწავლა, იხ. მაგ. [BH54], [SV01], [Do03], [TM11]. კრისტალებისა და მეტამასალების თვისებების ანალიზი წარმოადგეს არამარტო ინჟინრების, მექანიკოსებისა და ფიზიკოსების, არამედ მათემატიკოსების ინტერესების სფეროსაც, რადგან კვლევის პროცესში მათემატიკური ფიზიკის მრავალი საინტერესო ამოცანა წარმოიშობა.

6.5.2. კვლევის ობიექტები.

განსახორციელებელი სამეცნიერო კვლევის მიზანია შევისწავლოთ აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ ტალღის დიფრაქციისა და არეკვლის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანები სხვადასხვა კონფიგურაციის მქონე პერიოდულ სტრუქტურებში. დისკრეტული ამოცანების შესასწავლად ჩვენი მიზანია შევიმუშაოთ უწყვეტ შემთხვევებში გამოყენებული ანალიტიკური მეთოდების პოტენციალთა თეორიისა და ვინერ-ჰოფის მეთოდის დისკრეტული ანალოგები და მათი გამოყენებით მივიღოთ ამონახსნთა წარმოდგენის ფორმულები. წარმოდგენილი განსახორციელებელი სამეცნიერო კვლევა ძირითადად წარმოადგენს ამ მიმართულებებით დაწყებული კვლევების (იხ. [Ka18], [Ka19], [Ka21a], [Ka21b], [KP21], [KP23]) გაგრძელებას.

6.5.3. თემის აქტუალობა და სიახლე, კვლევის მეთოდოლოგია.

ინჟინერიაში, ბიოლოგიაში, მედიცინაში, გეოფიზიკასა და ნანომეცნიერებაში ფართო გამოყენების გამო კრისტალებს, მეტამასალებსა და კომპოზიტებს წამყვანი პოზიცია უკავიათ თანამდეროვე მასალთამცოდნეობაში. მასალების შესაძლებლობის გაზრდისა და მატერიალური თვისებების გაუმჯობესების მოთხოვნების უწყვეტი ზრდა თავისთავად ქმნის თეორიული, ექსპერიმენტული და რიცხვითი მეთოდების სწრაფ განვითარების დიდ ინტერესს. საინჟინრო და მათემატიკურ დონეზე ლიტერატურის დიდი რაოდენობის მიუხედავად, დღეს, მათემატიკური მოდელირება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს კრისტალებისა და მეტამასალების თვისებების ანალიზში და კრიტიკულ სიტუაციებში თანამედროვე მასალებისა და კომპოზიტების ნანოსტრუქტურულ და მიკროსტრუქტურულ ტრანსფორმაციების გაგებაში.

ჩვენთვის ძალიან მიმზიდველია ის იდეა, რომ განვავითაროთ და გამოვიყენოთ უწყვეტი თეორიის ანალიტიკური მეთოდების დისკრეტული ანალოგები. პოტენციალთა თეორიის დისკრეტული ანალოგების განვითარება კვლევის მნიშვნელოვანი ნაწილია. სამკუთხა და ექვსკუთხა ბადისებრი სტრუქტურებისთვის ამოსავალი წერტილია [Ka21a] -ში მიღებული შედეგები. დისკრეტული ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით, დისკრეტულ გრინის იგივეობებთან ერთად ჩვენ განვსაზღვრავთ სხვაობიან პოტენციალებს, როგორც ნახვევებს და შესაბამისად, გამოვიყვანთ

ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულებს. ამავდროულად შემოღებული იქნება სათანადო სივრცეები ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის უზრუნველსაყოფად. ამონახსნები ისე იქნება წარმოდგენილი, რომ მოსახერხებელი იყოს შესაბამისი რიცხვითი გამოთვლები.

6.5.4. არსებული ლიტერატურული წყაროები (რა არის გაკეთებული და როგორ იყენებენ მიღებულ შედეგებს).

მიუხედავად მათემატიკოსების დიდი დაინტერესებისა დისკრეტული ჰელმჰოლცის განტოლებების ანალიზი ბადისებრ სტრუქტურებზე ისევ აქტუალურია, იხ. ვაინბერგის, კაპანაძის, პესეცკაიას, მარტინის, სლეპიანის, შაბანის, შარმას და სხვათა შრომები და მითითებული ციტირებები.

6.5.5. პროექტის არსი და მეცნიერული ღირებულება.

მათემატიკოსთა დიდ ყურადღებას იპყრობს ის რთული მათემატიკური ამოცანები, რომლებიც აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტურ ტალღებთან დაკავშირებული პროცესების კვლევის დროს სხვადასხვა მახასიათებლების აღწერისა და ანალიზისთვის არის საჭირო. რადგან აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტურ ტალღები დიდ ინტერესს წარმოადგენს როგორც გამოყენებითი მეცნიერებისათვის, ასევე რეალურ ცხოვრებაში ტელეკომუნიკაციებში, სამშენებლო კონსტრუქციებში და სამედიცინო მიზნებისთვის. ამიტომ ვთვლით, რომ აქ წარმოდგენილი საკითხების შესწავლა და უფრო სრულყოფილი ცოდნის მიღება, რიცხვითი გამოთვლებისთვის ალგორითმების შემუშავება მნიშვნელოვნად დაეხმარება ტექნიკურ პროგრესსაც.

6.5.6. შესასრულებელი ამოცანები ეტაპების ჩვენებით და მოსალოდნელი შედეგები სათანადო ინდიკატორებით.

ტალღის გავრცელების სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის შედეგების მიღება სხვადასხვა კონფიგურაციის მქონე დისკრეტული სამკუთხა და ექვსკუთხა ბადისებრი სტრუქტურებისთვის.

პირველ ეტაპზე შესწავლილი იქნება გარე სასაზღვრო ამოცანა სამკუთხა ბადისებრი სტრუქტურებისთვის. მეორე ეტაპზე მიღებული იქნება გამოსხივების პიროებები ექვსკუთხა მესერისთვის, ხოლო მესამე ეტაპზე წესწავლილი იქნება გარე სასაზღვრო ამოცანა ექვსკუთხა ბადისებრი სტრუქტურებისთვის.

მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით მომზადდება რამდენიმე სამეცნიერო სტატია.

ციტირებული ლიტერატურა:

[Do03] M.T. Dove. Structure and Dynamics: An Atomic View of Materials. Oxford University Press, 2003.

[BH54] M. Born, K. Huang. Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford University Press, 1954.

[Ka18] D. Kapanadze. Exterior Diffraction Problems for Two-Dimensional Square Lattice, Z. Angew. Math. Phys. 69, No. 5, Paper No. 123, 2018.

[Ka19] D. Kapanadze. Wave propagation through a square lattice with sources on line segments, Trans. A. Razmadze Math. Inst. 173, No. 2, 111-119, 2019.

[Ka21a] D. Kapanadze. The far-field behaviour of Green's function for a triangular lattice and radiation conditions, Math. Methods Appl. Sci. 44, No. 17, 12746-12759, 2021.

[Ka21b] D. Kapanadze. On the discrete problem of wave diffraction by semiinfinite rigid constraint, Trans. A. Razmadze Math. Inst. 175, No. 3, 443-449, 2021.

[KP21] D. Kapanadze, E. Pesetskaya. Diffraction problems for two-dimensional lattice waves in a quadrant, Wave Motion 100, Article ID 102671, 2021.

[KP23] D. Kapanadze, E. Pesetskaya, Half-plane diffraction problems on a triangular lattice, J Eng Math 138, 5, 2023.

[Ma06] P.A. Martin. Discrete scattering theory: Green's function for a square lattice, Wave Motion,43, 619–629 (2006).

[Sl02] L. Slepyan, Models and Phenomena in Fracture Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[TM11] E.B. Tadmor, R.E. Miller. Modeling Materials: Continuum, Atomistic and Multiscale Techniques. Cambridge University Press, 2011.

6.6. ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის ამოცანები ხახუნის ეფექტის გათვალისწინებით (როლანდ გაჩეჩილაძე, ავთანდილ გაჩეჩილაძე).

მომავალი ხუთი წლის (2024-2028) განმავლობაში განზრახული გვაქვს შევისწავლოთ ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის დინამიკისა და კვაზისტატიკური შემთხვევებისათვის სასაზღვრო-საწყისი და სასაზღვრო ამოცანები ხახუნის ეფექტის გათვალისწინებით არაერთგვაროვანი, ანიზოტროპული სხეულებისათვის. კერძოდ:

1) ვგეგმავთ გამოვიკვლიოთ კვაზისტატიკურ შემთხვევაში ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ხახუნის გათვალისწინებით არაერთგვაროვანი, ანიზოტროპული სხეულებისათვის (განხილული იქნება არაკოერციტიული შემთხვევა მცირე მახსოვრობის სხეულებისათვის). ვარიაციულ უტოლობათა თეორიის გამოყენებით შესწავლილი იქნება სუსტი ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის საკითხი.
2) შესწავლილი იქნება ბლანტი დრეკადობის მომენტური თეორიის დინამიკის ამოცანა ხანგრძლივი მახსოვრობის მქონე არაერთგვაროვანი, ანიზოტროპული სხეულებისათვის ხახუნის გათვალისწინებით. გამოკვლეული იქნება სუსტი ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის საკითხი.
3) ზემოთ ნახსენები სხეულებისათვის განხილული და გამოკვლეული იქნება კვაზისტატიკური ამოცანა ხახუნთან ერთად როგორც კოერციტიული, ისე არაკოერციტიული შემთხვევებისათვის.
4) შესწავლილი იქნება დრეკადობის სტატიკური თეორიის საკონტაქტო ამოცანა, როდესაც დრეკად და მყარ სხეულებს შორის ხახუნის გარეშე კონტაქტი აღიწერება ბუნებრივი შეუღწევადობის პირობით. ვარიაციულ უტოლობათა თეორიის გამოყენებით გამოკვლეული იქნება სუსტი ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის საკითხი, ასევე ამონახსნის მდგრადობის საკითხი ერთადერთობის პირობებში. განხილული იქნება შემთხვევა როდესაც მყარი სხეული უკან იხევს დრეკად სხეულთან კონტაქტისას. ეს პროცესი აღწერილი იქნება კვაზივარიაციულ უტოლობით. გამოკვლეული იქნება იგივე საკითხები.
5) კოერციტიული ორადწრფივი ფორმისთვის შესწავლილი იქნება ევოლუციური კვაზივარიაციული უტოლობა პარაბოლურ შემთხვევაში, როდესაც სასაზღვრო წინაღობა დამოკიდებულია ამონახსნის კონორმალით წარმოებულზე. გამოკვლეული იქნება სუსტი ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის საკითხი; ერთადერთობის პირობებში ასევე გამოკვლეული იქნება ამონახსნის მდგრადობის და კვაზივარიაციული უტოლობის ამონახსნის ვარიაციული უტოლობების ამონახსნებით აპროქსიმაციის საკითხები.

თემა 7: უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ზოგიერთი საკონტაქტო და შერეული სასაზღვრო ამოცანა

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დრეკადობის მათემატიკური თეორიის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: ნუგზარ შავლაყაძე (თემის ხელმძღვანელი), სერგო კუკუჯანოვი, ლუიზა შაფაქიძე, გიორგი კაპანაძე, ლიდა გოგოლაური.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის შერეული და საკონტაქტო ამოცანების თეორიაში გასული საუკუნის 40-იან წლებში მნიშვნელოვანი შედეგები იქნა მიღებული ნ. მუსხელიშვილის, ი. ვეკუას, ფ. გახოვის, ლ. გალინის, დ. შერმანის, მ. კელდიშის, ლ. სედოვის და სხვათა შრომებში, რომლებმაც ფაქტორიზაციის მეთოდის გამოყენებით დაამუშავეს ანალიზურ ფუნქციათა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია [1-2], ხოლო 60-იანი წლებიდან ვინერ-ჰოპფის მეთოდის გამოყენებით ამოხსნილ იქნა ბზართა თეორიისა და საკონტაქტო ურთიერთქმედებათა თეორიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა (ე. მელანი, გ. ირვინი, ვ.კოიტერი, ა.ხრაბკოვი, ვ. ვოროვიჩი, ჰ. ბიუკნერი, რ. მუკი, ვ. სტენზერგი, გ. პოპოვი, ვ. ალექსანდროვი, ბ. ნულერი, ნ. არუთინიანი, რ. ბანცური). ამავე პერიოდიდან იწყება ახალი ტიპის, პრაქტიკისათვის მეტად მნიშვნელოვანი არაკლასიკური საკონტაქტო-სასაზღვრო ამოცანების კვლევა, რომლებიც უკავშირდებიან დრეკადი მასიური სხეულებისა და თხელკედლიანი დრეკადი ელემენტების (სტრინგერი, ჩართვა, დაკვრა, ძელი და სხვა) ურთიერთქმედებას; აგრეთვე ბზართა თეორიის ამოცანებს, როდესაც ბზარი გადის იზოტროპული, ანიზოტროპული, პიეზოელექტრული, არაერთგვაროვანი სხეულის საზღვარზე ან ერთგვაროვნების გამყოფ საზღვარზე [3-10]. აღნიშნული კვლევების კვალდაკვალ დამუშავდა ზუსტი და მიახლოებითი ამოხსნების სხვადასხვა მეთოდი, როგორებიცაა ორთოგონალურ პოლინომთა და ასიმპტოტური მეთოდები, რიმანის ამოცანაზე მიყვანის მეთოდი, ფაქტორიზაციისა და ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდები.

რ. ბანცურმა ინტეგრალური გარდაქმნების გზით ახალი კლასის (არაკლასიკური საკონტაქტო და შერეული) ამოცანები დაიყვანა ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ახალი ტიპის გადაადგილებიან ე.წ.Kკარლემანის ტიპის ამოცანებზე ზოლისათვის. Mმან დაამუშავა ფაქტორიზაციის ახალი მეთოდი და კარლემანის ტიპის ამოცანა ზოლისათვის და რგოლისათვის ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში. აღნიშნულმა მეთოდმა სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისათვის იგივე მნიშვნელობა შეიძინა, რაც ნ. მუსხელიშვილისა და ვინერ-ჰოპფის მეთოდმა კლასიკური საკონტაქტო ამოცანებისათვის. ეს მეთოდი ლიტერატურაში ცნობილია რ. ბანცურის ფაქტორიზაციის პირველი მეთოდის სახელწოდებით და წარმოადგენს ერთადერთ ზოგად მეთოდს არაკლასიკური საკონტაქტო ამოცანების ეფექტური ამოხსნების მისაღებად.

როგორც ცნობილია ჩართვები და სტრინგერები, შტამპები და ბზარები, წარმოადგენენ სხეულში ძაბვების კონცენტრატებს, ამიტომ ძაბვების კონცენტრაციის საკითხის შესწავლა და მათი შემცირებისთვის სხვადასხვა მეთოდის დამუშავება, მით უმეტეს არაწრფივი დეფორმაციებისა და მასალის სხვადასხვა ფენომენოლოგიური თვისებების პირობებში, თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობის პრობლემებს განეკუთვნება.

თეორიული თვალსაზრისით აღნიშნული საკონტაქტო ამოცანები წარმოადგენენ მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ახალ კლასს შერეული სასაზღვრო პირობებით. პრაქტიკულად კი ისინი ფართოდ გამოიყენებიან რღვევის მექანიკაში ბზარების გავრცელების თავიდან აცილებისა და თხელკედლიანი ელემენტებით სხვადასხვა საინჟინრო კონსტრუქციების გამაგრების ამოცანებში. დრეკადობის ბრტყელი თეორიის საკონტაქტო ამოცანების კვლევისას საკმაოდ ეფექტური აღმოჩნდა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისა და ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანების მეთოდები (ნ. მუსხელიშვილის მეთოდი, ვინერ-ჰოპფის მეთოდი). არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები, გარდა აღნიშნული მეთოდებისა, მოითხოვენ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის, ინტეგრალური გარდაქმნების თეორიის, კოშის ტიპის ინტეგრალების თეორიის, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის, მიახლოებითი ანალიზის სხვადასხვა მეთოდების განზოგადოებას.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის შერეულ და საკონტაქტო სასაზღვრო ამოცანებში ამჟამადაც მიმდინარეობს ინტენსიური კვლევები მსოფლიოს მრავალ სამეცნიერო ცენტრში. წლების მანძილზე ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის დრეკადობის მათემატიკური თეორიის განყოფილებაში მიმდინარეობდა და ამჟამადაც მიმდინარეობს: დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის თეორიის არაკლასიკური საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა ცვლადი სიხისტის თხელკედლიანი ელემენტებისა და სხვადასხვა გეომეტრიული ფორმისა თუ ფენომენოლოგიური თვისების მქონე (იზოტროპული, ანიზოტროპული, პიეზოელექტრული, არაერთგვაროვანი, ბლანტიდრეკადი თვისების მქონე მასალებისათვის) სხეულების ურთიერთქმედების შესახებ [11-47]; დრეკადობისა და ბლანტიდრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის თეორიის შებრუნებული (ნაწილობრივ უცნობ საზღვრიანი) ამოცანების შესწავლა [48-69];Lცილინდრულთან მახლობელი ბრუნვითი გარსების მდგრადობის ამოცანების დამუშავება [70-84]; მბრუნავი ფოროვანი ცილინდრების ჰიდროდინამიკური მდგრადობის ამოცანების შესწავლა [85-111].A

დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის თეორიის არაკლასიკური საკონტაქტო ამოცანები მათემატიკურად ფორმულირდებიან ცვლადი კოეფიციენტების მქონე სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებისა ან ასეთი განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემების სახით, აგრეთვე უძრავი სინგულარობის მქონე მეორე გვარის სინგულარული ინტერო-დიფერენციალური განტოლებების სახით. ამ განტოლებათა მახასიათებელ ნაწილს პრანდტლის ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების სახე აქვს,Aრომელიც ზოგად შემთხვევაში გამოკვლეული არ გახლდათ. მიღებულ განტოლებათა ამონახსნს ვეძებთ ჰელდერის H კლასის ფუნქციებში, რომელთა წარმოებული ეკუთვნის ე.წ. H^* კლასს (იხ. [2]). ისინი ხარისხოვანი კანონით ცვლადი (საინტეგრაციო წირის ბოლოებში ნებისმიერი რიგით ქრობადი, შემოსაზღვრული ან შემოუსაზღვრელი) კოეფიციენტით მიეკუთვნებიან მესამე გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა ტიპს.

ნ. შავლაყაძემ Aანალიზურ ფუნქციათა თეორიის და მიახლოებითი ანალიზის მეთოდების გამოყენებით აღნიშნული განტოლებები სხვადასხვა შემთხვევებში დაიყვანა კარლემანის ტიპის გადაადგილებიან სასაზღვრო ამოცანაზე ზოლისათვისან რგოლისათვის, აგრეთვე ასეთი ტიპის სასაზღვრო ამოცანათა სისტემაზე, ან წრფივი შეუღლების (რიმანის) ამოცანაზე. გარკვეულ პირობებში მიიღო ეფექტური ამოხსნები, ხოლო ზოგად შემთხვევაში ორთოგონალურ პოლინომთა მეთოდის გამოყენებით მიიღო უსასრულო წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები, რომელთა გამოკვლევა ხდება რეგულარობაზე კვადრატით ჯამებად ან შემოსაზღვრულ მიმდევრობათა სივრცეებში. Mმოხერხდა მიღებული სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა, დადგინდა ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა და ამოიხსნა ძაბვების კონცენტრაციის ამოცანები.

ბლანტი დრეკადობის თავდაპირველი თეორიები განხილულია მაქსველის, მეიერის, ბოლცმანის შრომებში და შესწავლილია ვოიგტას, კელვინის, ვოლტერას და სხვათა მიერ. ბლანტიდრეკადი მასალები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ბიომექანიკაში (კერძოდ ძვლის მექანიკაში), აგრეთვე ბლანტი დრეკადი ტალღების შესწავლა და სეისმური ტალღების გავრცელების დადგენა არის გეოლოგიისა და გეოფიზიკის მნიშვნელოვანი ამოცანა. ბოლცანოსა და ვოლტერას იდეებზე დაყრდნობით გასული საუკუნის 50-იანი წლებიდან დაიწყო განვითარება ბლანტიდრეკადობის მათემატიკურმა თეორიამ (ი. რაბოტნოვი, ნ. არუტინიანი, გ. მასლოვი, რ. კრისტენსენი და სხვები). ცოცვადობის თვისების მქონე სხეულებისა და თხელკედლიანი ელემენტების ურთიერთქმედების ამოცანები ანალიზურ ფუნქციათა თეორიისა, ინტეგრალური განტოლებების, ინტეგრალური გარდაქმნების და მიახლოებითი ანალიზის სხვადასხვა მეთოდთან ერთად უკავშირდებიან ვოლტერას მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლების გამოკვლევას.

ნ. შავლაყაძის შრომებში გამოკვლეულია ბლანტიდრეკადობის თეორიის საკონტაქტო ამოცანები, რომლებიც უკავშირდებიან არაერთგვაროვანი თხელკედლიანი სასრული ან ნახევრად უსასრულო ელემენტებისა (ჩართვები, სტრინგერები, დაკვრები) და ცოცვადობის თვისების მქონე ნახევარსიბრტყის/ სიბრტყის, ნახევარსივრცის ურთიერთქმედებას, როდესაც თხელკედლიანი ელემენტები იმყოფებიან ტანგენციალური ან ნორმალური დატვირთვების პირობებში. განსაზღვრულია ტანგენციალური და ნორმალური საკონტაქტო ძაბვები და დადგენილია მათი ასიმპტოტური ყოფაქცევა განსაკუთრებულ წერტილების მახლობლობაში. გამოკვლეულია უძრავი

სინგულარობის მქონე სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან უბან-უბან ერთგვაროვანი სხეულებისა და სასრული/ნახევრადუსასრულო ჩართვების/ბზარების ურთიერთქმედებასთან. გამოკვლეულია სხვადასხვა ფორმის დრეკად სხეულებთან მუდმივი ან ცვლადი სიხისტის მქონე დრეკადი ელემენტების ურთიერთქმედების წრფივი და არაწრფივი საკონტაქტო ამოცანები, როდესაც დრეკადი ელემენტები შეიძლება იმყოფებოდნენ როგორც წრფივი, ასევე არაწრფივი დეფორმაციის პირობებში (ჰუკის წრფივი ან არაწრფივი კანონის პირობებში), კონტაქტის პირობა შეიძლება წარმოადგენდეს როგორც ხისტი(უწყვეტი) კონტაქტის პირობას, ასევე ურთიერთქმედებაში მყოფ სხეულებს შორის წებოს ტიპის თხელი ბლანტი ფენის არსებობას. P ჩატარებულია დრეკადი ელემენტების ბოლოების მახლობლობაში საძიებელი საკონტაქტო ძაბვების ასიმპტოტური ანალიზი, დადგენილია საკონტაქტო ძაბვების განსაკუთრებულობათა ხასიათი დრეკადი ელემენტების სიხისტის ცვლილების და არაწრფივობის კანონებთან მიმართებაში. გამოკვლეულია დრეკადობისა და ბლანტი დრეკადობის დინამიკური საკონტაქტო ამოცანები. მიღებულია პრანდტლის ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების ეფექტური ამოხსნები განტოლების კოეფიციენტის, როგორც ფუნქციის, საკმაოდ ფართო და სპეციფიკური კლასისათვის.[25-47].

ნ. შავლაყაძე ამჟამად გახლავთ შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მიერ დაფინანსებული საგრანტო პროექტის #FR-21-7307 სამეცნიერო ხელმძღვანელი, ამ პროექტის ფარგლებში მუშავდება ბლანტიდრეკადი დინამიკისა და არაწრფივი რხევების ზოგიერთი საკონტექტო და სასაზღვრო ამოცანა

ნ. შავლაყაძის ხელმძღვანელობით 2023 წელს დაცული იქნა სადოქტორო დისერტაცია „დრეკადობის და ბლანტი დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი არაკლასიკური სასაზღვრო საკონტაქტო ამოცანა" საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის დოქტორანტ ც. ჯამასპიშვილის მიერ. აღნიშნულ სადოქტორო ნაშრომში მიღებულია კომპლექსური წარმოდგენები ანუ კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულების ანალოგები ბლანტი დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში, გამოკვლეულია სხვაობიანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები ბზარისა და ჩართვების მქონე უბან-უბან ერთგვაროვანი ბლანტი დრეკადი ფირფიტისათვის, გამოკვლეულია დრეკადობისა და ბლანტი დრეკადობის თეორიის ზოგიერთ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანასთან დაკავშირებული სპეციალური ტიპის ინტეგრო-დიფერებციალური განტოლება.

ნ. შავლაყაძის ხელმძღვანელობით მიმდინარეობს მუშაობა დოქტორანტ ბ. ფაჩულიას სადოქტორო ნაშრომზე „ფირფიტების ღუნვის თეორიისა და ბლანტიდრეკადი დინამიკის ზოგიერთი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა" (**ნ. შავლაყაძე,** იმპაქტ-ფაქტორის მქონე ჟურნალებში გამოქვეყნებული 37 ნაშრომი, Google Scholar -ის ციტირების ინდექსი 299, H-ინდექსი-9; Web of Science-ის ინდექსი -42, H-ინდექსი-3, Scopus-ის ინდექსი 103, H-ინდექსი-7).

სხეულში ძაბვების ოპტიმალური განაწილების ამოცანათა ახალ კლასს მიეკუთვნება ე. წ. ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანები. Gგანყოფილების მკვლევართა მიერ გამოკვლეულია დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის თეორიაში თანაბრადმტკიცე კონტურების მოძებნის ამოცანები უცნობი ან ნაწილობრივ უცნობი ხვრელებით შესუსტებული სხეულებისათვის და მიღებულია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ახალი სასაზღვრო ამოცანა, ეგ. წოდ. კარლემანის ტიპის ამოცანა რგოლისათვის. ამისათვის რ. ბანცურმა დაამუშავა ფაქტორიზაციის მეორე მეთოდი და მოგვცა ამ სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის დასრულებული თეორია.

საინჟინრო პრაქტიკაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის თეორიის პირდაპირი და შებრუნებული ამოცანები. ტეხილებით შემოსაზღვრული ორადბმული ფირფიტების ამოცანებში ყველაზე ეფექტური აღმოჩნდა კომპლექსური ანალიზის მეთოდები, ასეთი ამოცანების კვლევისას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება ძაბვათა კონცენტრაციის სურათის დადგენას კუთხის წვეროთა მახლობლობაში, სადაც ადგილი აქვს ძაბვების გადანაწილებას და პლასტიკური ზონების წარმოქმნას. ხვრელის საზღვრის მახლობლობაში ძაბვების განაწილების სურათის დადგენამ აქტუალური გახადა საზღვრის ისე შერჩევა, რომ მათზე ტანგენციალური ნორმალური ძაბვები მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობენ. ასეთი ტიპის თანაბრადმტკიცე კონტურების მოძებნის შებრუნებულ ამოცანებს უსასრულო არეებისათვის საფუძველი ჩაეყარა გ. ჩერეპანოვის და ნ. ბანიჩუკის შრომებში, ხოლო ტეხილებით შემოსაზღვრული

ორადბმული არეებისათვის მათ კვლევას სათავე დაედო რ. ბანცურის შრომებში და ისინი დღესაც აქტუალურ ამოცანათა რიცხვს მიეკუთვნება.

დამუშავებულ იქნა დრეკადობის ბრტყელი თეორიის სასაზღვრო ამოცანები ორადბმული არეებისათვის, კერძოდ, დრეკადობის ბრტყელი თეორიის სასაზღვრო ამოცანა მართკუთხოვანი ხვრელის მქონე წრიული არისათვის, დრეკადობის ბრტყელი თეორიის სასაზღვრო ამოცანები მართკუთხა არისათვის წრიული ხვრელით და სწორხაზოვანი ჭრილებით, აგრეთვე თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანები ხვრელით შესუსტებული მართკუთხა არისათვის და ხვრელითა და წვეროებში ამონაჭრებით შესუსტებული კვადრატული არისათვის. [50-56].

საანგარიშო პერიოდში შესწავლილი იქნება დრეკადობისა და ბლანტი დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ამოცანები მრავალკუთხა ორადბმული არეებისათვის სხვადასხვა კონკრეტულ შემთხვევებში, ამასთან ბლანტი დრეკადობა გაგებული გვექნება კელვინ- ფოიგტის მოდელის მიხედვით. კერძოდ, მიღებული იქნება სასაზღვრო პირობების სახე აღნიშნულ შემთხვევაში, რაც შემდგომში გამოყენებული იქნება საკონტაქტო ამოცანების გადასაწყვეტად. ამ გზით მიღებული იქნება იმ შედეგების ანალოგიები, რაც დრეკადობის კლასიკურ თეორიაშია ცნობილი. გამოკვლეული იქნება მრავალკუთხა არის შიგნით თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანები როგორც დრეკადი, ისე ბლანტი დრეკადი მრავალკუთხა ფირფიტისათვის სხვადასხვა კონკრეტულ შემთხვევაში.

განხილული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებული იქნება ერთიანი მიდგომა-კონფორმულ ასახვათა და ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანების თეორიის მეთოდები, რომლის სისტემატური გამოყენება დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში აკად. ნ.მუსხელიშვილის სახელთანაა დაკავშირებული. ამ გზით დასმული ამოცანების ამოხსნები აგებული იქნება ეფექტურად (ანალიზური ფორმით).

მიღებული შედეგები გამოქვეყნებული იქნება სამეცნიერო ჟურნალებში და მოხსენებული იქნება ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის ყოველწლიურ კონფერენციაზე, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკი სინსტიტუტის სემინარსა და გაფართოებული სემინარის სხდომებზე, აგრეთვე საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის ყოველწლიურ საერთაშორისო კონფერენციებზე (**გ. კაპანაძე, ლ. გოგოლაური**).

ძალოვანი და ტემპერატურული ზემოქმედების ქვეშ მყოფი თხელკედლიანი გარსების გამოკვლევა მათი ფართო გამოყენების გამო თანამედროვე ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში დიდ ინტერესს იმსახურებს. Dდრეკადი შემავსებლის მქონე ბრუნვითი გარსების რხევისა და მდგრადობის ამოცანები სხვადასხვა დატვირთვისა და ტემპერატურის მოქმედებისას პრაქტიკულად შესწავლილი არ არის. განხილულია ბრუნვითი, ცილინდრულთან მახლობელი, ნორმალური წნევის ქვეშ მყოფი გარსების მდგრადობის ამოცანები. მიღებულია მდგრადობის დაზუსტებული განტოლებები, განხილულია მდგრადობის ამოცანები მგრეხავი და მერიდიანული დატვირთვებისათვის, აგრეთვე როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი გაუსის სიმრუდის მქონე ორთოტროპული გარსებისათვის, შესწავლილია ჰარმონიული რხევისა და დინამიკური მდგრადობის საკითხები წინასწარ დატვირთული, ცილინდრულთან მახლობელი, ბრუნვითი გარსებისათვის [75-84].

გამოკვლეულია თერმორხევისა და თერმომდგრადობის ამოცანები წინასწარ დატვირთული, ცილინდრულთან მახლობელი ბრუნვითი გარსებისათვის დრეკადი შემავსებლით. განხილულია დრეკადი შემავსებლისა და გარსის საკონტაქტო ამოცანა, თერმორხევისა და თერმომდგრადობის ამოცანები სხვადასხვა დატვირთვისა და მუდმივი ტემპერატურის პირობებში მყოფი გარსებისათვის როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი გაუსის სიმრუდის შემთხვევაში. შესწავლილია ცილინდრულთან მახლობელი, ბრუნვითი გარსების დინამიკური მდგრადობის ამოცანები. თერმორხევისა და თერმომდგრადობის ამოცანებში დრეკადი შემავსებლის მქონე წინასწარ დატვირთული, ცილინდრულთან მახლობელი ბრუნვითი გარსებისათვის ძირითადი შედეგები წარმოდგენილია ანალიზური ფორმულებისა და გრაფიკების სახით.

განხილულია დინამიური თერმომდგრადობის ზოგიერთი საკითხი დრეკადშემავსებლიანი ცილინდრულ ფორმასთან მიახლოებული ჩაკეტილი გარსებისათვის, რომლებზეც მოქმედებს მერიდიანული ძალები, წნევა და ტემპერატურა. განხილულია როგორც დადებითი, ასევე

უარყოფითი გაუსის სიმრუდის მქონე გარსები. მოყვანილია ფორმულები სიხშირეებისა და არამდგრადობის არეების საზღვრებისათვის [81-84].

საანგარიშო პერიოდში გაგრძელდება კვლევა ცილინდრულ ფორმასთან მიახლოებული, როგორც დადებითი ისე უარყოფითი გაუსის სიმრუდის მქონე, ჩაკეტილი ბრუნვითი გარსების მდგრადობის ამოცანების მიმართულებით (**ს. კუკუჯანოვი**).

სითხის ბრუნვით დინებებში ბიფურკაციების შესწავლას აქვს როგორც თეორიული, ისე დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობები, რამაც განაპირობა მრავალი თეორიული და პრაქტიკული გამოკვლევები როგორც წინა წლებში, ასევე დღესაც.

ბრუნვითი სიჩქარის მატებასთან ერთად ისეთი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, როგორიც არის ბრუნვის სიჩქარე, სიბლანტე, გეომეტრია და სხვა, ხდება გადასვლები მდგრადი მოძრაობიდან არამდგრადი მოძრაობისაკენ. ამ დროს საჭირო ხდება პარამეტრების იმ კრიტიკული, ზღვრული მნიშვნელობების დადგენა, რომლებმაც შეიძლება გამოიწვიოს ეს პროცესები.

პრაქტიკული თვალსაზრისით, სითხის დინებაში ბიფურკაციების შესწავლა დაკავშირებულია სხვადასხვა საინჟინრო და სამეცნიერო სფეროში მის გამოყენებასთან. მაგალითად, ტუმბოების და სხდასხვა საინჟინრო მექანიზაციის მანქანების მდგრადობისა, ასევე ტურბულენტური ნაკადების ჰიდრო დინამიკური მდგრადობის ანალიზის დროს და ა.შ. თეორიული გამოკვლევები ძირითადად ეყრდნობა ჰიდროდინამიკური მდგრადობის წრფივ თეორიას და შესწავლილია მოცემული დინებისათვის მდგრადობის დაკარგვის შედეგად მეორადი დინებების წარმოქმნის საკითხები.

ჩვენს მიზანს შეადგენს სხვადასხვა კონკრეტული ამოცანებისათვის ბიფურკაციების არაწრფივი თეორიისა და რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით შესწავლილ იქნეს ის შესაძლო კვაზიპერიოდული მოძრაობები, რომლებიც წარმოიქმნებიან მოცემული დინების თანდათანობითი ბიფურკაციების შედეგად და რომელთაც საბოლოოდ მივყავართ ქაოსურ მოძრაობებამდე.

ამ თემის ირგვლივ ბოლო 2019-2023 წლებში ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები წარმოდგენილია პუბლიკაციების [110,111] და სხვადასხვა სამეცნიერო ფორუმებზე მოხსენებათა თეზისების სახით [109].

2024-2028 წლებში კვლევის მიზანს შეადგენს შესწავლა ისეთი ამპლიტუდურ განტოლებათა არაწრფივი დინამიური სისტემების შესწავლა, რომლებიც რიცხვით გამოთვლებთან ერთად მოგვცემს საშუალებას გამოვიკვლიოთ მდგრადობის საკითხები ბრუნავ ცილინდრებს შორის არაიზოთერმული დინებებისათვის. ასეთ დინებებში ურთიერთმოქმედებს ორი ფაქტორი: ბრუნვა და ტემპერატურული გრადიენტი, რომლებიდანაც თითოეულს შეიძლება ქონდეს როგორც მდგრადი, ისე არამდგრადი ქმედებები (**ლ. შაფაქიძე**).

2024-2028 წლების სამუშაო გეგმა-პროექტი:

1. 2024 წ.

ა) კვლევის ძირითადი მიზანი იქნება დინამიკური ბლანტიდრეკადობის თეორიის საკონტაქტო ამოცანები, რომლებიც უკავშირდებიან სხვადასხვა კონტაქტის პირობებში ცოცვადობის თვისების მქონე არაერთგვაროვანი თხელკედლიანი სასრული ან ნახევრად უსასრულო ელემენტებისა (ჩართვები, სტრინგერები) და ამავე თვისების მქონე ნახევარსიბრტყის/სიბრტყის, ნახევარსივრცის და სხვა ფორმის სხეულების ურთიერთქმედებას, როდესაც თხელკედლიანი ელემენტები იმყოფებიან ტანგენციალური ან ნორმალური დატვირთვების პირობებში. ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს ტანგენციალური და ნორმალური საკონტაქტო ძაბვების ამპლიტუდების განსაზღვრაში, მათი ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენასა და განსაკუთრებულ წერტილების მახლობლობაში ინტენსივობის კოეფიციენტის განსაზღვრაში.

ბ) შესწავლილი იქნება კონკრეტული სასაზღვრო ამოცანები ბლანტი დრეკადი ორადბმული ფირფიტისათვის. კერძოდ, ბლანტი დრეკადობის ბრტყელი თეორიის სასაზღვრო ამოცანა რომბისათვის წრიული ხვრელით.

გ) გამოკვლეული იქნება ორთოტროპიის გავლენა ხისტად დამაგრებული დრეკადშემავსებლიანი ბრუნვითი გარსების დინამიკურ თერმომდგრადობაზე. პირველ ეტაპზე განხილული იქნება რხევისა

და დინამიური მდგრადობის ამოცანები ჩაკეტილი წინასწარ დატვირთული ბრუნვითი გარსებისათვის.

დ) შეისწავლება დინის ამოცანა ფოროვან ცილინდრებს შორის არაიზოთერმული სითხის შემთხვევაში ტემპერატურული გრადიენტის მოქმედებისას. პარამეტრების ფართო სპექტრისათვის (ცილინდრებს შორის მანძილი, რელეის და პრანდტლის რიცხვები) შეისწავლება სხვადასხვა სახის ბიფურკაციები.

2. 2025 წ.

ა) ბოლცანოსა და ვოლტერას მოდელის პირობებში ბლანტი დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სხვადასხვა საკონტაქტო პირობებით. გამოკვლეული იქნება აღნიშნულ ამოცანებთან დაკავშირებული ორგანზომილებიანი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით. მიიღება როგორც ზუსტი, ასევე მიახლოებითი ამოხსნები.

ბ) გაგრძელდება კვლევა ბლანტი დრეკადობის სასაზღვრო ამოცანებისა სხვადასხვა კონკრეტული არის შემთხვევებში, კერძოდ განხილული იქნება სამკუთხა არე წრიული ხვრელით და მისი ზღვრული შემთხვევები. საძიებელი კომპლექსური პოტენციალები აგებული იქნება ეფექტურად (ანალიზური ფორმით).

გ) გამოკვლეული იქნება არაერთგვაროვნად დაგრეხილი ბრუნვითი გარსების საკუთარი რხევები და თერმომდგრადობა.

დ) ტეილორ-დინის ამოცანისათვის არაიზოთერმული დინებისათვის შესწავლილი იქნება წონასწორობები და მათი ბიფურკაციები რადიანული და რელეის რიცხვის ფართო მნიშვნელობებისათვის.

3. 2026 წ.

ა) ბოლცანოსა და ვოლტერას მოდელის პირობებში დინამიკური ბლანტიდრეკადობის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები გამოკვლევა სხვადასხვა დასმითა და საკონტაქტო პირობებით.

ბ) ბლანტი დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ამოცანის გამოკვლევა ორადბმული არისათვის მრუდწირული ხვრელით. კერძოდ განხილული იქნება წრიული არე მრუდწირული ოთხკუთხა ხვრელით. აგებული იქნება განხილული არის წრიულ რგოლზე კონფორმულად გადამსახავი ფუნქცია და საძიებელი კომპლექსური პოტენციალები აგებული იქნება ეფექტურად. გამოკვლეული იქნება მათი ყოფაქცევა კუთხის წვეროების მახლობლობაში.

გ) განხილული იქნება ჩაკეტილი ბრუნვითი გარსების თერმომდგრადობა, როდესაც გარსები იმყოფებიან მღუნავი მომენტების და ტემპერატურის ზემოქმედების ქვეშ.

დ) შესწავლილი იქნება ის რთული რეჟიმები, რომლებიც შეიძლება წარმოიქმნას მილებში ბიფურკაციების გადაკვეთის მცირე მიდამოებში.

4. **2027 წ.**

ა) წრფივი და არაწრფივი დინამიკური საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა. დრეკადი ელემენტებისათვის როგორც წრფივი, ასევე არაწრფივი დეფორმაციების განხილვა. კონტაქტის პირობა შეიძლება წარმოადგენდეს როგორც უწყვეტი (ხისტი) კონტაქტის პირობას ასევე ურთიერთქმედებაში მყოფ სხეულებს შორის კონტაქტი შეიძლება განხორციელდეს წებოს თხელი ბლანტი ფენის არსებობით. დადგენილ იქნება საკონტაქტო ძაბვების განსაკუთრებულობათა ხასიათი დრეკადი ელემენტების სიხისტის ცვლილების და არაწრფივობის კანონებთან მიმართებაში.

ბ) შესწავლილი იქნება ბლანტი დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის პერიოდულად განლაგებული წრიული ხვრელებით. ამოხსნები აგებული იქნება ანალიზური ფორმით.

გ) განხილული იქნება ტემპერატურული ველის და გარე წნევის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი დრეკადშემავსებლიანი ორთოტროპული ბრუნვითი გარსების თავისუფალი რხევების და თერმომდგრადობის ზოგიერთი ამოცანა.

დ) გამოკვლეული იქნება არამდგრადობები და გადასვლები ტეილორ-დინის ამოცანებში საწინააღმდეგოდ ბრუნავი ცილინდრების შემთხვევაში.

5. 2028 წ

ა) მიახლოებითი ანალიზის ზოგიერთი მეთოდის(ორთოგონალურ პოლინომთა მეთოდის, მცირე პარამეტრის მეთოდის) განზოგადება დრეკადობის დინამიკური თეორიის არაწრფივ საკონტაქტო ამოცანებთან დაკავშირებით.

ბ) თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანისა გამოკვლევა კონკრეტული ფორმის ბლანტი დრეკადი ფირფიტების შემთხვევაში. საძიებელი კონტურის განტოლება აგებული იქნება ანალიზური ფორმით.

გ) ცვალებადი სისქის ბრუნვითი გარსების თერმომდგრადობის ზოგიერთი პრობლემის შესწავლა.

დ) შესწავლილ იქნება აზიმუტური წნევის გრადიენტის მიმართულების გავლენა ფოროვან ცილინდრებს შორის იზოთერმული სითხის დინების მდგრადობაზე. აგებული იქნება სტაციონარული დინების რთული რეჟიმებისაკენ გადასვლის სქემები.

ბიბლიოგრაფია

(*-ით მონიშნულია იმპაქტ-ფაქტორის მქონე ჟურნალებში გამოქვეყნებული ნაშრომები)

1. N. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematic theory of elasticity. (Russian) *Nauka,* Moscow, 1966.
2. N. Muskhelishvili, Singular integral equation. (Russian) Fiz.Mat. Moscow, 1962.
3. V.Alexandrov, S. Mkhitaryan, Contct problem for bodies with thin coverings and layers. (Russian) Nauka, Moscow,1983.
4. G. Popov, Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusion and supports. (Russian) Nauka, Moscow,1983.
5. N. Arutyunyan,The contact problem for halfplane with an elastic strengthening. (Russian) Prikl. Mat. Mekh. 32 (1968), No.4, 632-646.
6. O. Onishchuk, G. Popov, On some problems of bending of plates with cracks and thin inclusion. (Russian) Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Tv. Tela, 4 (1980), 141-150.
7. O. Onishchuk, G Popov, P.Farshight, On Singularities of contact srteses under bending of plates with thin inclusion. (Russian) Prikl. Mat. Mekh. No.2, 50 (1986), 393-302.
8. B. Nuller, The deformation of an elastic wedge- shaped plate supported by a rod of variable stiffness and a method of solving mixed problems.(Russian) Prikl. Mat. Mekh. No. 2, 40 (1976), 306-316.
9. R. Bantsuri, A contact problem for a wedge with elastic bracing. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 211 (1973), 797-800.
10. R. Bantsuri, The contact problem for an anisotropic wedge with an elastic fastening. (Russian) Dokl. Akad. Nauk.SSSR. No.3, 222 (1975), 568-571.
11. * N. Shavlakadze,On some contact problems for Bodies with elastic inclusion. Georgian Math. J., 5(1998), No. 3, 285-300.
12. * N. Shavlakadze,A contact problem of the Interaction of semi-finite inclusion with a plate. Georgian Math. J. 6 (1999), No. 5, 489-500.
13. N. Shavlakadze, On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 120(1999), 135-147.
14. N. Shavlakadze, Nonclassical biharmonic boundary value problems describing the band of finite and infinite plates with inclusions. Mem. Differential Equations Math. Phys. 22(2001), 91-140.
15. * N. Shavlakadze, The contact problem of bending of plate with thin fastener (Russian). Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tv. Tela. 2001, No.3, 144-155. Enl. Transl.: Mechanic of Solids. 2001, vol. 36, part 3, 122-127.
16. * N. Shavlakadze, The contact problem for anisotropic wedge with elastic fastener of variable rigidity (with R. Bantsuri). (Russian) Prikl. Mat. i Mekh., 66 (2002), No. 4, 663-669. Eng. transl.: J. Appl. Math. Mech. 66 (2002), No. 4, 645-650.
17. * N. Shavlakadze, Bending of elastic anisotropic plate with circle hole, reinforced with inclusions on a finite sites (Russian). Prikl. Mekh. 38 (2002), No.3, 114-121. Eng. transl.: Int. Appl. Mech. 38(2002), No.3, 356-364.

18. * N. Shavlakadze, Bending of elastic anisotropic plate with elastic inclusion (Russian). Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh.Tv. Tela, 2003, No.6, 102-108. Eng. Transl.: Mechanic of solids. 2003, part. 6, p. 83-87.
19. * N. Shavlakadze, The bending problem of beam lying on the elastic basis (with R. Bantsuri). (Russian). Prikl. Mat. i. Mech. 69(2005), No.2. 296-302. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. 69(2005), No.2. 268-274.
20. N. Shavlakadze, The contact problem for piecewise-homogeneous plate, strengthened by semi-infinite inclusion crossing the boundary by right angle. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 143(2007), 151-153.
21. * N. Shavlakadze, The contact problems of the Mathematical Theory of Elasticity for plates with an elastic inclusion. Acta Appl. Math. 99(2007), 29-51.
22. N. Shavlakadze, The contact problems of the Mathematical Theory of Elasticity for plates with an elastic inclusion. "IUTAM Symposium on relations of Shell, Plate, Beam and 3D models". Springer Science +Business Media B. V. 2008. pp. 197-204.
23. * N. Shavlakadze, The contact problem for piecewise homogeneous elastic plate with semi-infinite inclusion (with R. Bantsuri). (Russian) Prikl. Mat. i Mech. 73(2009), No. 4. 655-662. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. 73(2009), No. 4. 471-477.
24. N. Shavlakadze, The dynamic contact problem for half-plate with an elastic cover plate. Proc. A. Razmadze Math. Inst.151(2009), 109-116.
25. N. Shavlakadze, The mixed problem for a piecewise homogeneous orthotropic plane with a cut, intersecting perpendicularly the line of interface (with R. Bantsuri). Proc. A Razmadze Math. Inst., 154(2010), 53-64.
26. * N. Shavlakadze, The contact problem for piecewise homogeneous orthotropic plane with finite inclusion (with R. Bantsuri). (Russian) Prikl. Mat. I mech. 75(2011), No. 1. 133-138. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. 75(2011),No. 1. 93-97.
27. * N. Shavlakadze, The solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.. 91 (2011), No. 12, 979-992.
28. * N. Shavlakadze, The boundary-contact problems electroelasticity for piezo-electric plate with inclusion and half space with cut (with R. Bantsuri). (Russian) Prikl. Mat. I mech. 77(2013), No. 6, 862-871. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. (in print).
29. * N. Shavlakadze, The effective solution of two–dimensional integro-differential equations and their applications in the theory of viscoelasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.. 1-10 (2015)/DOI 10.1002/zamm.201400091.
30. * N. Shavlakadze. The contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a finite inclusion of variable cross-section. (with N. Odishelidze, F. Criado-Aldeanueva). Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 22(6), (2017), 1326-1333.
31. * N. Shavlakadze. The contact problem of electroelasticity for piecewise-homogeneous piezoelectric plate with elastic inclusion. (Russian) Prikl. Mat. i Mech. 81, No. 3, (2017), 337-347. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. 81, No. 3, (2017), 337-347.
32. * N. Shavlakadze. The boundary value problem for piezo-elastic half space with thin elastic inclusion (with N. Odishelidze, F. Criado-Aldeanueva) Mathematics and Mechanics of Solids. First published on March 21, 2017, https://doi.org/10.1177/1081286517694936.
33. * N. Shavlakadze. The boundary value contact problem of electroelasticity for piecewise-homogeneous piezo-elastic plate with elastic inclusion and cut. (with N. Odishelidze, F. Criado-Aldeanueva). Mathematics and Mechanics of Solids.,2018, DOI. 10.1177/108128651762620.
34. *N. Shavlakadze. Approximate and exact solution of a singular integro-differential equation related to contact problem of elasticity theory. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili). Prikl. Mat. i Mech. 82, No. 1, (2018), 114-124. Eng. Transl.: J. Appl. Math. Mech. 82, No. 1, (2018), 114-124.
35. *N. Shavlakadze. On the solvability of a mixed problem with a nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili). Journal of Contemporary Mathematical Analysis. v.53, No. 5, (2018), 247-259 .

36. *N. Shavlakadze. Contact interaction of the plate with a nonlinear elastic stringer. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili). Izv. Ross. Akad. Nauk, Prikl. Mekh. 2(2019), 101-110. Eng. Transl.: Mechanic of solids. 2018.
37. * N. Shavlakadze. Exact solutions of some singular integro-differential equations related to adhesive contact problems of elasticity theory. (with N., Odishelidze, N. & Criado-Aldeanueva), *Z. Angew. Math. Phys.* 71, 115 (2020). https://doi.org/10.1007/s00033-020-01350-4
38. *N. Shavlakadze. The contact problem for elastic plate, on the border which is adhered nonlinearly deformable stringer of finite length. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili) (Russian) Prikl. Mat. i Mech. 84, No. 5, (2020), 640-649.
39. *N. Shavlakadze. Contact Problems for Elastic Plates with Finite-Length Nonlinearly Deformable Stringers Glued to Their Boundaries. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili) Mechanics of Solids. 55, no. 8. (2020), 1415-1422.
40. *N. Shavlakadze. Contact Problems for Elastic Plates with Finite-Length Nonlinearly Deformable Stringers Glued to Their Boundaries. (with O. Jokhadze, S. Kharibegashvili) Mechanics of Solids. 55, no. 8. (2020), 1415-1422.
41. N. Shavlakadze, The boundary value problems for piecewise-homogeneous viscoelastic plate. (with Ts. Jamaspishvili) Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Inst, of Appl. Math. v.34. 2020
42. *N. Shavlakadze The investigation of singular integro-differential equations relating to adhesive contact problems of the theory of viscoelasticity (with N., Odishelidze, N. & Criado-Aldeanueva), *Z. Angew. Math. Phys.* (2021) 72:42 . https://doi.org/10.1007/s00033-021-01471-4
43. *N. Shavlakadze The solution of one type singular integro-differential equation related to the adhesive contact problems of elasticity theory. (with O. Jokhadze). Georg. Math. J. 2021, DOI. 10.1515/gmj-XXXX
44. * N. Shavlakadze.The singular integro-differential equations and its applications in the contact problems of elasticity theory. (with Ts. Jamaspishvili) MMA(Math. Methods in Appl. Sciences), First published: 30 May 2021, https://doi.org/10.1002/mma.7493
45. N. Shavlakadze. The contact problem for piecewise-homogeneous viscoelastic plate reinforced with a finite rigid patch. (with Ts. Jamaspishvili). Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. vol. 175 (2021), no.3. p. 467-473.
46. * N. Shavlakadze. Some effective solutions for Prandtl's type integro-differential equation. Math. Methods in Appl. Sciences (MMA). DOI: 10.1002/mma.9224. (accepted)
47. *N. Shavlakadze. The adhesive contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with an elastic patch. (with N., Odishelidze, N. & Criado-Aldeanueva). Mathematics and Mechanics of Solids (MMS). DOI: 10.1177/10812865221138514
48. L. Gogolauri, The problem of finding optimal holes in an elastic square. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 150(2009), 85-90.
49. L. Gogolauri, The problem of finding equistiong holes in an elastic square. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 158(2012), 25-31.
50. * G. Kapanadze, A problem of a plate for a dobly-connected domain bounded by polygons. J. Appl. Math Mech..66 (2002), No.4, 601-604.
51. * G. Kapanadze, A problem of a plate for a finite dobly-connected domain with partially unknown boundary. Inter. Appl. Mech. 39(2003), No. 5, 121-126.
52. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М. Наука, 1974.
53. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М Наука, 1980.
54. G. Kapanadze. The problem of finding an equally strong contour for a rectangular plate weakened by a rectilinear. *Appl. Math. Inform. Mech.* 22 (2017), no. 1, 71–80.
55. G. Kapanadze. About one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.* 43 (2017), 52–58.
56. G. Kapanadze. The problem of finding an equally strong contour for a rectangular plate weakened by a rectilinear cut, whose ends are cut out by convex smooth arcs. *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.* 67 (2017).

57. G. Kapanadze, B. Gulua. Some boundary value problems for plane theory of elasticity for doubly-connected domain bounded by polygons. *Appl. Math. Inform. Mech.* 21 (2016), no. 2, 38.
58. G. Kapanadze, B. Gulua. About one problem of plane elasticity for a polygonal domain with a curvilinear hole. *Appl. Math. Inform. Mech.* 21 (2016), no. 2, 121–129.
59. G. Kapanadze, B. Gulua. One problem of the bending of a plate for a curvilinear quadrangular domain with a rectilinear cut. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.* 42 (2016), 27–33.
60. G. Kapanadze, L. Gogolauri. On one problem of the plane theory of elasticity for a circular domain with a rectangular hole. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 170 (2016), no. 1, 62–68.
61. Kapanadze, G.; Gulua, B. A problem of plane elasticity for a rectangular domain with a curvilinear quadrangular hole. *Appl. Math. Inform. Mech.* 20 (2015), no. 2, 24–33.
62. G. Kapanadze, L. Gogolauri. On one problem of the plane theory of elasticity for a finite polygonal domain with a circular hole. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 166 (2014), 61–67.
63. G. Kapanadze, R. Bantsuri. The plane problem of the theory of elasticity for a polygonal domain with a rectilinear cut. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 164 (2014), 13–17.
64. N. Shavlakadze, G. Kapanadze, L. Gogolauri. About one contact problem for a viscoelastic halfplate Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. **173** (2019), Issue 1, 103-110. ISSN 2346-8092
65. G. Kapanadze, L. Gogolauri. The problems of a punch in the linear theory of visco-elasticity Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. **173** (2019), Issue 2, 121-125. ISSN 2346-809.
66. G. Kapanadze, L. Gogolauri. The punch problem of the plane theory of viscoelasticity with a friction. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. **174** (2020), Issue 3, 405-411. ISSN 2346-8092
67. Kapanadze G., Gulua B. The punch problems of the plane theory of viscoelasticity for the half plane. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, **175** (2021), no. 3, 451-454. ISSN 2346-8092.
68. G. Kapanadze, L. Gogolauri.The problem of finding an equistrong contour for a viscoelastic rectangular domain. Trans. of A. Razmadze Math. Inst. Vol 176 (2022), Issue 2, 275-279. ISSN 2346-8092.
69. G. Kapanadze, L. Gogolauri, B. Gulua. The problem of finding an equal-strength contour in thecase of a viscoelastic square plate. AMIM, Vol. 27, (1) (2022), (in press).
70. Даревский В. М. Устойчивость оболочек, близких по форме к цилиндрическим. Проблема расчета простран. Констр. М. МИСИ, 1980.
71. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М. Наука. 1995.
72. * Кукуджанов С.Н. Об устойчивости оболочек вращения, близких к цилиндрическим, при одинаковом действии кручения и давления. Прикл. Мех. 1992,т. 28, №7, 56-62.
73. * Кукуджанов С.Н.О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим. Изв. РАН, МТТ, №6, 1996, 121-126.
74. S. Kukudzanov, Stability of orthotropic shells of revolution close to cylindrical ones, with elastic filler under torsion. Proc. A. Razmadze Math. Inst.122(2000), 93-104.
75. * Кукуджанов С. Н, О влиянии граничных условий на собственные колебания предворительно напряженных оболочек вращения, близких к цилиндрическим. Изв. РАН, МТТ, №6, 2003, 126-136.
76. S. Kukudzanov, Dynamical stability of orthotropic shells of rotation, close by their shape to the cylindrical ones, under the action of meridional stresses. Proc. A. Razmadze Math. Inst.138(2005), 27-42.
77. * С. Кукуджанов, Колебания и динамичесая устойчивость оболотчек вращения, близких к цилиндрическим, находящихся под действием нормольного давления и меридиональных усилий. Изв. РАН, МТТ, №2, 2006, 48-59.
78. S. Kukujanov. On the orthotropy effect on thermostability of shells of revolution with an elastic filler close by their form to cylindrical ones. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **164** (2014), 83-92.
79. S. Kukujanov. Oscillations and stability of shells of revolution, close by their form to cylindrical ones, with elastic filler, under the action of normal pressure and temperature. Proc. A. Razmadze Math. Inst. Vol. 167 (2015), 63-72.
80. S. Kukujanov . Some problems of oscillation and stability of prestressed shells of rotation close to cylindrical ones, with on elastic filler and under the action of temperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical institute. 170 (2016) Issue 3, 410-419.

81. S. Kukujanov.The stability of orthotropic shells of revolution, close to cylindrical ones, with an elastic filler, under the action of torsion, normal pressure and temperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. 172 (2018), Issue 1, 64-72.
82. S. Kukudzhanov. Eigenoscillations and stabuility of orthotropic shells, close to cylindrical ones, with an elastic filler and under the action of meridional forces, normal pressure and temperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 173 (2019), Issue 1, 71-82. ISSN 2346-8092
83. S. Kukudzanov. On the influence of boundary conditions of rigid fixing on eigen-oscillations and thermostability of shells of revolution, close by their form to cylindrical ones, with an elastic filler, under the action of pressure and temperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 174 (2020) Issue 3. ISSN 2346-8092
84. S. Kukudzhanov. Dynamical thermostability of shells of revolution with an elastic filler and under the action of meridional forces, normal pressure and temperature. Transactions of A.Razmadze Math. Inst., vol. 176(2022), Issue 1, pp. 45-55.
85. M.H. Chang, Hydrodynamic stability of Taylor-Dean flow between rotating porous cylinders with radial flow.Physics of Fluids,15 (2003), N5,1178.
86. P. Chossat and G. Iooss, The Couette-Taylor Problem, Springer Verlag, New York, 1994.
87. V. V. Kolesov, Calculation of auto-oscillations resulting from the loss of stability of a nonisotherm0al Couette flow, Fluid Dyn. 16 (1981), 344.
88. V. V. Kolesov and V. I. Yudovich, Calculation of oscillatory regimes in Couette flow in the neighborhood of the point of intersection of bifurcations initiating Taylor vortices and azimuthal waves," Fluid Dyn. 33 (1998), 532.
89. V. V. Kolesov and A. G. Khoperski, Simple regimes of fluid motion in the neighborhood of the intersection of bifurcations initiating nonisothermal Taylor vortices and azimuthal waves," Fluid Dyn. 37 (2002) , 257.
90. V. V. Kolesov and L. D. Shapakidze, On transitions near the intersection point of bifurcation6s in the flow between two rotating permeable cylinders, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 122(2000) ,79.
91. V. V. Kolesov and L. D. Shapakidze, On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders, Proceedings of the 11th Symposium of the International Conference STAMM 98, University of Nice, Nice, France, 25–29 May 1998(CRC, Boca Raton, FL, 2000), Vol. 106, p. 221.
92. L. D. Shapakidze, On the numerical investigation of instability and transitionin flow between two porous rotating cylinders with a transverse pressure gradient, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 148 (2008) , 69.
93. V. V. Kolesov, S. N. Ovchinnikova, N. V. Petrovskaya, and V. I. Yudovich, Onset of chaos through intersections of bifurcations in Couette-Taylor flow, Z. Angew. Math. Mech. 76(1996), 567.
94. Chossat, Y. Demay, and G. Iooss, "Interaction de modes azimtauxdans le probleme de Couette-Taylor," Arch. Ration. Mech. Anal. 99 (1987), 213.
95. V. V. Kolesov, M.N. Romanov, Calculation of stationary, periodic and quasi-periodic viscous fluid flows between two rotating permeable cylinders. Fluid Dinamics,45(2010),N6,880..
96. * V. V. Kolesov, L. D. Shapakidze, Instabilities and transition in flows between two porous concentric cylinders with radial flows and a radial temperature gradient, Physics of Fluids, 23(2011), 014107-1.
97. V. Kolesov and A. G. Khoperski, Nonisothermal Couette-Taylor's Problem Yuj. Fed. Yniv, Rostov, 2009.
98. P. Chossat and G. Iooss, *The Couette-Taylor Problem* sSpringer-Verlag, New York, 1994.
99. V. Kolesov and A. G. Khoperski , *Nonisothermal Couette-Taylor's Problem* sYuj. Fed. niv, Rostov, (2009).
100. V. V. Kolesov and A. G. Khoperski , Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza **2**, 97 (2002) "Simple regimes of fluid motion in the neighborhood of the intersection of bifurcations initiating nonisothermal Taylor vortices and azimuthal waves," Fluid Dyn. **37**, 257 (2002).
101. V. V. Kolesov and L. D. Shapakidze, "On transitions near the intersection point of bifurcations in the flow between two rotating permeable cylinders," Proc. A. Razmadze Math. Inst. **122**, 79 (2000).

102. V. V. Kolesov and L. D. Shapakidze, “On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders,” *Proceedings of the 11th Symposium of the International Conference STAMM 98*, University of Nice, Nice, France, 25–29 May 1998 sCRC, Boca Raton, FL, 2000, Vol. 106, p. 221.
103. L. D. Shapakidze, “On the numerical investigation of instability and transition in flow between two porous rotating cylinders with a transverse pressure gradient,” Proc. A. Razmadze Math. Inst. **148**, 69 (2008).
104. P. Chossat, Y. Demay, and G. Iooss, “Interaction de modes azimtauxdans le probleme de Couette-Taylor,” Arch. Ration. Mech. Anal. **99**, 213 (1987).
105. G. Gersshuni and E. Zhukhovitski, *Convective Stability of Incompressible Fluid* sKeter, Jerusalem/Wiley, New York, 1976.
106. M. G. Feigenbaum, “Universal behavior in nonlinear systems,” Los Alamos Sci. **1**, 4 (1980).
107. V. V. Kolesov and L. D. Shapakidze, Instabilities and transition in flows between two porous concentric cylinders with radial flow and a radial temperature gradient *Phys. of Fluids* 23 (2011), 014107-1-014107-13.
108. L. Shapakidze. On the nonlinear dynamical system of amplitude equations corresponding to intersections of bifurcations in the flow between permeable cylinders with radial and axial flow. *J. Math. Sci. (N.Y.), Springer,* 218 (2016), no. 6, 820-828; doi:10.1007/s10958-016-3070-0.
109. L. Shapakidze. On the transitions in a heat-conducting flow between horizontal porous cylinders with radial flow and a radial temperature gradient. *Journal of Applied Mathematics and Physics* 5 (2017), no. 9; DOI: 10.4236/jamp.2017.59146
110. L. Shapakidze. Bicritical Points in Problem on the Stability of Heat- Conducting Flows Between Horizontal Porous Cylinders. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 173 (2019), issue* 3, 67–71.
111. L. Shapakidze. On the complex regimes of the Taylor-Dean flow between two porous cylinders.*Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 175 (2021), issue 3, 461–467*

საერთაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობა

ა) Louisiana State University, department of Mathematics

ბ) Florida Atlantic University, College of Engineering and Computer Science

გ) სომხეთის მეცნიერებათა აკადემიის მექანიკის ინსტიტუტი

დ) რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მექანიკის პრობლემათა ინსტიტუტი

ე) უკრაინის ქ. ოდესის ი. მეჩნიკოვის სახ. ნაციონალური უნივერსიტეტი, დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების კათედრა

ვ) ესპანეთის ქ. მალაგას უნივერსიტეტი

ზ) გერმანიის ქ. მაგდებურგის ტექნიკური უნივერსიტეტი

თემა 8: თეორიული ფიზიკის აქტუალური საკითხების კვლევა თანამედროვე მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით (კვანტური ველების თეორიის, ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკის, დაბალგანზომილებიანი ფიზიკური სისტემების და გრავიტაციის ამოცანები)

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის თეორიული ფიზიკის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: მერაბ ელიაშვილი (თემის ხელმძღვანელი), ალექსანდრე კვინიხიძე, გიორგი ჯორჯაძე, გიორგი ლავრელაშვილი, ვახტანგ გარსევანიშვილი, ბადრი მაღრაძე, გიორგი ციციშვილი, ავთანდილ შურღაია, არსენ ხვედელიძე.
დამხმარე პერსონალი: (2 ახალგაზრდა მკვლევარი).

პროექტის მოკლე შინაარსი

პროექტი წარმოედგენს კომპლექსურ პროგამას, რომლის ძირითადი მიზანია თეორიული ფიზიკის თანამედროვე მათემატიკური აპარატის გამოყენება ფიზიკის აქტუალურ ამოცანებში. მიმართულება შედგება შემდეგი ძირითადი ამოცანებისაგან:

ამოცანა 1. *დენები ბირთვული ძალების თანამედროვე თეორიაში. უწყვეტი ველის კვანტური თეორიის მეთოდების განვითარება და მათი გამოყენება. დისპერსიული მიდგომა კვანტურ ქრომოდინამიკაში.*
კოორდინატორები: ა. კვინიხიძე, ბ. მაღრაძე

ამოცანა 2. *ველის კვანტური თეორიის ძირითადი მდგომარეობის ტოპოლოგიური და დინამიური სტრუქტურა ნულოვანი და სასრული ტემპერატურისთვის და სიმკვრივისთვის.*
კოორდინატორი: ა. შურღაია.

ამოცანა 3. *დაბალ განზომილებიანი ფიზიკური სისტემების თეორიული კვლევა.*
კოორდინატორები: მ. ელიაშვილი, გ. ციციშვილი.

ამოცანა 4: *კუდიტების კვანტური რესურსის შესწავლა.*
კოორდინატორი :ა. ხვედელიძე

ამოცანა 5. *სიმისა და ველის კვანტური თეორიების დუალობა და ინტეგრებადი მოდელები.*
კოორდინატორი: გ. ჯორჯაძე

ამოცანა 6. *გრავიტაციის და კოსმოლოგიის ასპექტები.*
კოორდინატორი: გ. ლავრელაშვილი

პროექტის მონაწილეებს აქვთ სამეცნიერო თანამშრომლობის ხანგრძლივი გამოცდილება. მიღებული შედეგების მნიშვნელოვანი ნაწილი მიღებულია სხვადასხვა საერთაშორისო სამეცნიერო პროექტებში მონაწილეობისას, უცხოეთის წამყვან ცენტრებში მოკლე და გრძელ ვადიან მივლინებებში ყოფნისას. ჩატარებული კვლევების ძირითადი ნაწილი გამოქვეყნებულია რეფერირებულ ჟურნალებში. მკვლევართა ჯგუფის ნამუშავრები 5000 ზე მეტჯერ არის ციტირებული სამეცნიერო ლიტერატურაში. მიმართულების მონაწილეთა კომპეტენცია და გამოცდილება იძლევა პროექტში დასმული ამოცანების წარმატებით გადაწყვეტის მყარ გარანტიას.

პროექტის აღწერილობა
პროექტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები

ამოცანა 1
1.1 დენები ბირთვული ძალების თანამედროვე თეორიაში

ე.წ. ეფექტური ველის თეორიები წარმოადგენენ თანამედროვე ბირთვული ფიზიკის სტანდარტულ იარაღს. ეფექტური ველის თეორიის საკვანძო ელემენტს წარმოადგენს „power counting" (ხარისხების თვლის წესი) რომელიც განსაზღვრავს თეორიაში მიღებული წევრთა მნიშვნელობას იმის მიხედვით თუ რა წვნილი შეაქვთ მათ ლაგრანჯიანში და დაკვირვებადი სიდიდეების ამღწერ გამოსახულებებში. ე.წ. რენორმალიზაციის ჯგუფი (RG) არის ამ იერარქიის დადგენის ზოგადი მიდგომა. RG-ის განტოლებები იქნა გამოყვანილი და ამოხსნილი ურთიერთქმედების

პოტენციალებისთვის 2000 წლამდე, 2018 წელს პირველი ნაბიჯი გადაიდგა ამ ამოცანის განხილვაში დენებთან მიმართებაში, ჩვენს მიერ გამოვიყვანილ იქნა და ამოიხსნა RG-ის განტოლებები დენებისთვის დაბალი ენერგიების შემთხვევაში, ანუ როდესაც საკმარისია მოკლე მანძილებზე მოქმედი ძალების გათვალისწინება [K11]. ამ ამოცანის გადაწყვეტაში საკვანძო როლი ითამაშა ჩვენს მიერ გამოყვანილმა და განვითარებულმა ყალიბურად ინვარიანტული დენების აგების მეთოდმა (ეს მეთოდი ლიტერატურაში ცნობილია სახელით „gauging equations method").

ამ მეთოდის გამოყენებით ვგეგმავთ განვიხილოდ დენების ამოცანა უფრო მაღალ ენერგიების შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში შორი მანძილებზე მოქმედი ძალების გათვალისწინება არის საჭირო, რაც ამოცანას არსებითად ართულებს.

1.2 . უწყვეტი ველის კვანტური თეორიის მეთოდების განვითარება და მათი გამოყენება.

ნაწილაკთა შორის ძლიერი ურთიერთქმედების აღწერის აქტუალობა და მასთან დაკავშირებული სიძნელეები საყოველთავოდ ცნობილია, ამიტომ ეფექტური მეთოდების განვითარებას დიდი მნიშვნელობა აქვს. ჩვენს მიერ გამოყვანილი განტოლებები [K1,K2] და განტოლებების გაყალიბების მეთოდი („gauging equations method") [K3-K7] ინტენსიურად გამოიყენება ნაწილაქთა შორის ძლიერი ურთიერთქმედების აღსაწერად. ამ მიდგომას ეწოდება უწყვეტი ველის კვანტური თეორია (Continuum QFT). ამოცანის ფარგლებში ვაპირებთ ამ მიმართულებით კვლევების გაგრძელებას. ამ მიდგომას იყენებენ მსოფლიოს მრავალ მეცნიერულ ცენტრებში, სადაც წინასწარმეტყველებენ კვანტური ქრომოდინამიკიდან გამომდინარე ნაწილაკთა თვისებებს. ვაპირებთ არსებული მეთოდების განვითარებას, რათა შესაძლებელი იქნას კვლევებში მეტი მნიშვნელოვანი ფიზიკური ეფექტების გათვალისწინება. მაგალითად, ეგზოტიკური სისტემის შესასწავლად იყო გამოყენებული ჩვენი განტოლება [K8], სადაც კვარკ-ანტიკვარკის ანიგილაციის (გაქრობის) ეფექტი არ არის გათვალისწინებული; ეს ხარვეზი ნაწილობრივ გამოვასწორეთ ნაშრომში [K9].

ვგეგმავთ კვარკ-ანტიკვარკის ანიგილაციის ეფექტის სრულად გათვალისწინებას, ანუ ეგზოტიკური მეზონების ორ კვარკად წარმოდგენის ალბათობის გათვალისწინებას. ვგეგმავთ უნივერსალური მიდგომის ჩამოყალიბებას სადაც ორი სხვა-და-სხვა ცნობილი ოთხ-კვარკიანი სისტემის ამღწერი მექანიზმი იქნება გაერთიანებული ერთ განტოლებაში [K12]. მსგავსი ორი მექანიზმის გაერთიანებას ვაპირებთ სამ-კვარკიანი სისტემების (ბარიონების) ამღწერი განტოლებების ფარგლებში.

ლიტერატურა:

[K1] *A. N. Kvinikhidze* and B. Blankleider, Nuclear Physics A574, 788 (1994).

[K2] *A. N. Kvinikhidze*, A.M. Khvedelidze Teor.Mat.Fiz.90, 95 (1992).

[K3] B. Blankleider and *A. N. Kvinikhidze*, T. Skawronsky, J.Phys.Conf.Ser. **330** 012008 (2011).

[K4] *A. N. Kvinikhidze* and B. Blankleider, Phys.Rev. C60, 044003 (1999), Phys. Rev. C60, 044004 (1999).

[K5] *A. N. Kvinikhidze* and B. Blankleider, Phys. Rev. C56, 2973 (1997).

[K6] B. Blankleider and *A. N. Kvinikhidze*, Phys. Rev. C62, 039801 (2000).

[K7] *A. N. Kvinikhidze*, B. Blankleider, Nucl. Phys. A784, 259 (2007).

[K8] W. Heupel, S. Kubrak, G. Eichmann, C. Fischer, PoS Bormio2013, 065 (2013); W. Heupel, G. Eichmann, C. Fischer, Phys.Lett. **B718, 545 (2012).**

[K9] *A. N. Kvinikhidze*, B. Blankleider, Covariant equations for the tetraquark and more, Phys.Rev. D90 no.4, 045042, (2014).

[K10] *A. N. Kvinikhidze*, B. Blankleider, Z.K. Silagadze, Gauge invariant formulation of 3 gamma decay of particle-antiparticle bound state, Phys.Rev. D92, no.4, 045032 (2015).

[K11] *A. N. Kvinikhidze*, M. C. Birse, Renormalisation-group analysis of electromagnetic couplings in the pionless effective field theory, Eur.Phys.J., A54, 12, 216 (2018)

[K12] *A. N. Kvinikhidze*, B. Blankleider, Unified tetraquark equations, Phys.Rev. D107, 9, 045032 (2023).

[K13] *A. N. Kvinikhidze,* B. Blankleider, Comment on «sigma-meson: Four-quark vs two-quark components and decay width in a BS approach», e-print 2102.05818[hep-ph] (2021)

1.3 *დისპერსიული მიდგომა კვანტურ ქრომოდინამიკაში*

ადრონების ურთიერთმოქმედებების თანამედროვე არააბელური ყალიბური თეორია, კვანტური ქრომოდინამიკა (QCD), ინტენსიურად შეისწავლება და წარმატებით გამოიყენება მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტების აღსაწერად. ამ თეორიის უნიკალური თვისება, ასიმპტოტური თავისუფლება, შესაძლებელს ხდის გამოვთვალოთ ფიზიკური სიდიდეები (მაგალითად ადრონული დენების კორელატორები) საკმარისად მაღალ ენერგიებზე რენორმჯგუფით გაუმჯობესებული შეშფოთების თეორიის და ვილსონის ოპერატორული გაშლების გამოყენებით. იმპულსის დაბალ მნიშვნელობებზე პერტურბაციული ბმის ფუნქცია $\alpha_s(Q^2)$ (გაშლის პარამეტრი) შეიცავს არაფიზიკურ ლანდაუს სინგულარობას და არაკონტროლირებადად იზრდება: ამ მიზეზით შეშფოთების თეორია აზრს კარგავს. ეს სინგულარობები განლაგებულია სივრცისებრ იმპულსებზე და ამიტომ ირღვევა მიზეზობრიობის პრინციპი. უწყვეტ ველის კვანტური თეორიაში ამ პრობლემის გადაჭრის მიზნით განვითარებული იქნა დისპერსიული მიდგომები: გამოთვლების კონტროლირებადი სქემები (ადრონული დენების კორელატორებისათვის) მთელ იმპულსურ ინტერვალზე, $0 < Q^2 < \infty$. დისპერსიული ტექნიკა საშუალებას იძლევა მივიღოთ არაპერტურბაციული ამონახსნები ფუნდამენტალური გრინის ფუნქციებისათვის დაისონ-შვინგერის განტოლებების ჩამოჭრილი სისტემების ანალიზით უშუალოდ მინკოვსკის სივრცეში, შევისწავლოთ პროპაგატორების ანალიზური სტრუქტურა ინფრაწითელ არეში და მივიღოთ მნიშვნელოვანი ინფორმაცია კვარკების და გლუონების კონფაინმენტის მექანიზმის ასახსნელად.

ჩვენი გამოკვლევები [M1–M11] მიეძღვნა დისპერსიული მეთოდის გამოყენებას პერტურბაციულ კვანტურ ქრომოდინამიკაში. ჩვენ ვიპოვეთ [M11] კვანტური ქრომოდინამიკის მორბენალი ბმის ფუნქციისათვის რენორმალიზაციური ჯგუფის განტოლების ზუსტი ამონახსნი მე–2 რიგში და მწკრივითი ამონახსნები მაღალ რიგებში [M6- M7]. ეს ამონახსნები გამოისახება ლამბერტის-W ფუნქციით და ამიტომ მათი გამოყენებით შესაძლებელი გახდა მაღალი რიგის ეფექტური მუხტის ანალიზური სტრუქტურის დადგენა იმპულსის კვადრატის კომპლექსურ სიბრტყეზე [M6]. ბმის ფუნქციის ანალიზური სტრუქტურის დადგენის შემდეგ აგებული იქნა დისპერსიული გაშლის ფუნქციები რომლებიც ცვლიან ბმის ფუნქციის ხარისხებს.

წარსულში ნაშრომებში [M12-M13] ჩვენს მიერ განვითარებული იყო დისპერსიული მეთოდი გაბნევის ამპლიტუდის ბეტე-სოლპიტერის განტოლების ამონახსნების მისაღებათ ცხადი ანალიზური სახით უშუალოთ მინკოვსკის სივრცეში („ვიკის მობრუნების“ გარეშე) [M12- M13].
დაისონ-შვინგერის განტოლებები კვარკის პროპაგატორისთვის ამოხსნილი იქნა არაპერტურბაციულ მიახლოებით სქემაში ნაშრომებში [M14-M18]. მიღებული ანალიზური არაპერტურბაციული ამონახსნები აღწერენ კვარკის კონფაინმენტს და კირალური სიმეტრიის სპონტანურ დარღვევას.

ამოცანის ფარგლებში კონკრეტულად დაგეგმილია შემდეგი სამუშაოების შესრულება:

ა) ტაუ–ლეპტონის ადრონული ინკლუზიური დაშლების ანალიზი დისპერსიული მიდგომის რამოდენიმე ახალი ვარიანტით. ტაუ-ლეპტონის ადრონული დაშლების შესწავლა უფრო დახვეწილ დისპერსიულ არაპერტურბაციულ მოდელებში ამ პროცესის ეფექტური მუხტისათვის $\alpha_2(Q^2)$. კვარკ-ადრონული დუალობის დარღვევის გათვალისწინება.

ბ) კვარკ–ანტიკვარკის სტატიკური პოტენციალის შესაბამისი ეფექტური მუხტის მოდელირება დისპერსიულ მიდგომაში. შესწავლილი იქნება სამი ფენომენოლოგიური მოდელი 2 და 3-მარყუჟის მიახლოებაში. გამოვიყენებთ რენორმ-ჯგუფის განტოლების ლამბერტის ფუნქციით გამოსახულ ზუსტ და პადე-აჯამვით გაუმჯობესებულ ამონახსნებს შესაბამისად. პირველი 2 მოდელი აღწერს წრფივ და ლოგარითმული კონფაინმენტს შესაბამისად. შესწავლილი იქნება ასეთი მოდელების თვისებები როგორც $\overline{MS}$ ისე V- გადანორმირების სქემებში. მე-3 მოდელი აღწერს მიახლოებით წრფივ კონფაინმენტს რაც სიმის (ფერადი მილაკის) გაწყვეტის და ადრონების დაბადების პროცესს შეესაბამისება.

გ) კვანტური ქრომოდინამიკის დაისონ–შვინგერის განტოლებების და სლავნოვ-ტეილორის იგივეობების ანალიზი კვარკის, გლუონის და გოსტის პროპაგატორებისათვის დისპერსიული მიდგომაში. შესწავლილი იქნება ჩამოჭრილი გამარტივებული განტოლებათა სისტემები კოვარიანტულ ყალიბებში. გლუონის პროპაგატორისთვის აღებული იქნება კონფაინმენტური

ანზაცები იმპულსურ სივრცეში $¢^{4}(k)$ და $\square ¢^{4}(k)$ და რეგულარიზებული სინგულარული ფუნქცია $1/k^{4}$. გამოკვლევის მიზანია ამონახსნების მიღება კვარკის პროპაგატორისთვის ევკლიდურ და მინკოვსკის სივრცეებში და მათი ანალიზური თვისებების შესწავლა.

დ) ჩვენ ვგეგმავთ ასევე კვანტურ ქრომოდინამიკაში ფიზიკური სიდიდეების გამოთვლებისათვის ახალი მიახლოებითი სქემის გავითარებას სუსტი ბმის და ძლიერი ბმის მწკრივების კომბინირებით. პერტურბაციული და არაპერტურბაციული გაშლის პარამეტრებია $\sim_{s}$ და $e^{-1/\sim_{s}}$ შესამამისად. ასეთი ორმაგი მწკრივები იძლევა შეშფოთების თეორიის ბუნებრივ გაფართოებას და მათი გამოყენებით მომავალში შესაძლებელი უნდა გახდეს არაპერტურბაციული ეფექტების გათვალიწინება და ზუსტი ამონახსნების თვისებების უფრო სრული აღდგენა ვიდრე ერთ პარამეტრიან მწკრივებით. შესაბამისი მათემატიკური დარგი, ტრანს-მწკრივების თეორია დღეს ინტენსიურად ვითარდება.

პროექტის ფარგლებში შესასრულებელი ამოცანები

ა) ტაუ–ლეპტონის ადრონული ინკლუზიური დაშლების ანალიზი დისპერსიული მიდგომის ახალ ვარიანტებით და არაპერტურბაციული შესწორებებით (პირველი 2 წელი)

ბ) კვარკ–ანტიკვარკის სტატიკური პოტენციალის შესაბამისი ეფექტური მუხტის მოდელირება დისპერსიული მიდგომის გამოყენებით (პირველი 2 წელი).

გ) კვანტური ქრომოდინამიკის დაისონ–შვინგერის განტოლებების ანალიზი. კვარკის და გლუონის პროპაგატორებისათვის დისპერსიული მეთოდით ამონახსნების მიღება (მე-3 წელი).

ვ) ტრანს-მწკრივების გამოყენება ფიზიკური სიდიდეების გამოსათვლელად (მე-4 და მე-5 წლები).

ლიტერატურა:

[M1] *B. Magradze,* Strong Coupling Constant from Hadronic tau Decays within the Dispersive Treatment, BULLETIN OF THE GEORGIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, vol. 11, no. 3, 2017.

[M2] *B. Magradze,* “Strong Coupling Constant from τ Decay”. VII International Joint Conference of Georgian Mathematical Union& Georgian Mechanical Union Dedicated to 125-th birthday anniversary of academician N. Muskhelishvili, Book of ABSTRACTS p. 161. 2016, Batumi Georgia.

[M3] *B. A. Magradze*, “Analysis of the tau-lepton decay data within a dispersive approach to perturbative QCD”. Proceedings. of the 7th International Conference “Physics in the LHC Era” 14-18 October 2013, Tbilisi, pp. 145-152 Eds. G. Devidze, J. Khubua (TSU/JINR).

[M4] *B. Magradze* Strong Coupling Constant from tau Decay within a Dispersive Approach to Perturbative QCD Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute Vol.160 (2012) 91-111.

[M5] *B. A. Magradze*, Testing the Concept of Quark-Hadron Duality with the ALEPH τ Decay Data, Few-Body Syst. Vol. 48, p.p. 143-169 (2010) Erratum-ibid. **53**/3, (2012) 365.

[M6] *B. A. Magradze*, "A novel series solution to the renormaslization group equation in QCD", Few Body Systems, Vol. 40, No, 1-2, p.p. 71-99 (2006), hep-ph/0512374.

[M7] D.S. Kourashev and *B.A. Magradze*, "Theor. and Math. Phys. Vol 135 No 1 (2003) pp. 531-540.(in english) Teor. Mat. Fiz. Vol 135, No 1, (2003) pp. 95-106. (in Russian); hep-ph/0104142 .

[M8] *B.A. Magradze*, Practical techniques of analytic perturbation theory of QCD ; hep-ph/0305020, talk given at the extended seminar of the institute of applied mathematics Dedicated to 90th anniversary of I.N. Vekua. 22 april 2003, Tbilisi, Georgia.

[M9] *B.A. Magradze*, QCD coupling up to third order in standard and analytic perturbation theories, Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, E2-2000-222 (2000) p.p. 1-22; hep-ph/0010070. (In English).

[M10] *B.A. Magradze*, Int. J. of . Mod. Phys. **A15**, (2000) p.p. 2715-2733; hep-ph/9911456.

[M11] *B.A. Magradze*, “The Gluon Propagator in Analytic Perturbation Theory”, in Proc. of the 10th International Seminar ``QUARKS-98'', V1 p.p. 158-170, (Suzdal, Russia, May 17-24, 1998), Moscow 1999; arXiv: 9808247 [hep-ph]

[M12] A.N. Kvinikhidze, *B.A. Magradze,*V.A. Matveev, M.A. Mestvirishvili and A.N. Tavkhelidze, Teor. Mat. Fiz. V45 (1980) p.p. 302-312.

[M13] *B.A. Magradze*, BULLETEN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIA SSR, 107 (1982) p.p. 497-499.
[M14] V. Gogokhia, G. Efimov, *B. Magradze*, "Constant Cluon Propagator and Quark Confinement in QCD", Preprint JINR P2-88-127, Dubna, (1988). pp. 1-10.(in Russion).
[M15] V. Gogokhia, *B. Magradze*, , Phys. Lett. B 217 (1989) p.p. 162-164.
[M16] V. Gogokhia and *B. Magradze,* Mod. Phys. Lett. A4 (1989) p.p. 1549-1558.
[M17] V. Gogokhia, Gy. Kluge, *B. Magradze*, Phys. Lett. B 244 (1990) p.p. 68-74.
[M18] *B. Magradze* , Infrared Singularity and Dynamical Chiral Symmetry Breaking in QCD'. In Proceedings of IX Int. Seminar "QUARKS-96", Russia, ed. V.A.Matveev, A.A. Penin, V.A.Rubakov, A.N.Tavkhelidze Institute for Nuclear Research of Russian Academy of Sciences, Moscow 1997, pp.186-192.

ამოცანა 2. *ველის კვანტური თეორიის ძირითადი მდგომარეობის ტოპოლოგიური და დინამიკური სტრუქტურა ნულოვანი და სასრული ტემპერატურისთვის და სიმკვრივისთვის*

პროექტის აღწერილობა

წინამდებარე პროექტით ჩვენ ვაგრძელებთ ველის კვანტური თეორიის ძირითადი მდგომარეობის ტოპოლოგიური და დინამიკური სტრუქტურის შესაწავლას. კვლევები შეეხება როგორც ველების მატერიის მდგრად, ასე არამდგრად მდგომარეობებს. ველის კვანტური თეორიის ფარგლებში არ მოინახება აღნიშნულ თემასთან დაკავშირებული ამოცანები, რომლებიც ექვემდებარება ზუსტ ამოხსნებს. ამიტომ მნიშვნელოვანია მიახლოებითი ანალიტიკური და რიცხვითი გამოთვლების შემუშავება და გამოყენება. ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდოლოგია ეხება კვანტური ველების ძლიერ ურთიერთქმედებას და იგი წარმოადგენს ე.წ კოლექტიური კოორდინატებისმეთოდის განზოგადოებას. საუბარია კვანტური ველების ურთიერთქმედების სიმეტრიის თვისებების აღწერაზე და გამოყენებაზე, რომლის საშუალებისთაც შესაძლებელია ისეთი შეშფოთების თეორიის შემუშავება, რომელიც ზუსტად აღწერს კვანტური თეორიის სიმეტრიის თვისებებს შეშფოთების თეორიის ნებისმიერ რიგში. პროექტის ფარგლებში ყურადღებას გავამახვილებთ რელატივისტურ სიმეტრიაზე (შინაგან სიმეტრიებთან ერთად). კვლევები ამ მიმართულებით დაწყბულია და ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია. იგეგმება აგრეთვე არამდგრადი ძირითადი მდგომარეობების შესწავლა, კერძოდ ფაზური გადასვლა ურთიერთქმედების სიმეტრიულიდნ არასიმეტრიულში. ეს თემა დღესაც აქტუალურია და არა მარტო მიკროსამყაროში. საკითხი ეხება ენერგეტიკული მდგომარეობის განსაზღვრას, როდესაც მოდელის/თეორიის სიმეტრია ირღვევა კვანტური ტუნელირების მეშვეობით.

თანამედროვე ფიზიკაში იანგ-მილსის ყალიბურმა ველებმა მყარად დაიმკვიდრა ადგილი მიკროსამყაროში მიმდინარე პროცესების აღსაწერად. ჩვენი შემდგომი კვლევების მიზანს შეადგენს ყალიბური ველების მატერიასთან ურთიერთქმედების თეორიის ძირითადი მდგრადი და არ მდგრადი მდგომარეობების შესწავლა

მომავალი კვლევების ძირითადი ამოცანებია:

ა) წმინდა ყალიბური ველებითვის შემუშვებული თეორიის შემდგომი გაღრმავება თეორიაში კვარკების ჩართვით. ეს კვლევა დაწყებულია და მოითხოვს გაგრძელებას. ჩვენს მიერ, კერძოდ, გამოკვლეულია წმინდა იანგ-მილსის ველის კვანტურ თეორიაში კლასიკური მდგრადი კონფიგურაციების ძირითადი მდგომარეობის ამოცანა სამგანზომილებიან სივრცეში არსებული სიმეტრიის თვისებების აღსაწერა.

ბ) ვგეგმავთ ყალიბური ველების კვარკებთან ურთიერთქმედების შესწავლას ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდის საფუძველზე. კერძოდ,რიცხვითიმმეთოდების გამოყენებით ძირითად მდგარადი მდგმარეობის კლასიკურ კონფიგურაციის პოვნას და შემდგომ ჩვენი მეთოდოლოგიით მის კვანტური მდგომარეობების აღწერას.

გ) 3-განზომილებიან სივრცეში სიმეტრიის თვისებებთან ერთად იგეგმება შინაგანი სიმეტრიის თვისებები აღწერა, პირველ რიგში SU(2) ჯგუფის მიმართ. ეს მნიშვნელოვანია, რადგან ცნობილია ველის კლასიკური კონფიგურაციები, რომლებიც აღწერენ თეორიის ინვარიანტობას ერთდროულად 3-განზომილებიანი სივრცის და SU(2) ჯგუფის მიმართ.

დ) ამავე მეთოდის გამოყენებით ვგეგმავთ გავაგრძელოთ კვლევები არამდგარადი ძირითადი მდგომარეობის ფაზური გადასვლების შესწავლის მიზნით პირველ რიგში მხოლოდ იანგ-მილსის ველის კვანტურ თეორიაში, ხოლო შემდგომ კვარკების ჩართვით. აქ ყურადღება გამახვილებული იქნება ნულოვან და სასრულ ტემპერატურაზე არსებულ ფაზურ გადასვლებზე.

ლიტერატურა

[S1] *A.Shurgaia* ,Collective coordinates method in relativistic theory, arXiv:2301.01950, (2023)
[S2] *A.Shurgaia* , Quantization of Scalar Field Theory with Internal Symmetry arXiv:1103.1052,(2020)
[S3] *A.Shurgaia,* Mod.Phys Lett.A26, (2011),53
[S4] *A. V. Shurgaia*, H. J. W. Mueller-Kirsten, Int.J.Mod.Phys. A22, (2007),3655
[S5] D.K. Park, , H.J.W. Muller-Kirsten, *A.V. Shurgaia,* Phys.Lett. B501,(2007),54[G36] D.K. Park, H.J.W. Muller-Kirsten, J.Q. Liang, *A.V. Shurgaia*, Int.J.Mod.Phys A16, (2001), 3951
[S6] D.K. Park, H.J.W. Muller-Kirsten, J.Q. Liang, *A.V. Shurgaia*, Int.J.Mod.Phys A16, (2001), 3951
[S7] J.Q. Liang, H.J.W. Muller-Kirsten, D.K. Park, *A.V. Shurgaia*, Phys.Lett.B483, (2000), 225
[S8] J.Q. Liang, H.J.W. Muller-Kirsten, Y.B. Zhang, *A.V. Shurgaia*, Phys.Rev.D62 (2000), 025017
[S10] *A. Shurgaia*, Ann. Phys.282, (2000), 7
[S11] *A.V. Shurgaia*, H.J.W. Mueller-Kirsten, D.H. Tchrakian, Z.Phys.C69, (1996), 537
[S12] *A.V. Shurgaia,* H.J.W. Mueller-Kirsten, D.H. Tchrakian, Annals Phys.228,(1993), 146
[S13] *A. V. Shurgaia*, Fortsch.Phys.41, (1992), 553
[S14] *A. Shurgaia,* ТМФ, 57, (1983), 392
[S15] V. Gogokhia, *A. Shurgaia* (2012), Bull. of the GNAS, 6, no. 1, p.79
[S14] V. Gogokhia, *A. Shurgaia* (2012), Bull. of the GNAS, 6, no. 3, p.37
[S15] V. Gogokhia, *A. Shurgaia*, M. Vasúth; Proceedings of VII International conference of the Georgian Mathematical Union and the Georgian Mechanical Union, 2016. 5-9 September.
[S17] V. Gogokhia, *A. Shurgaia*. Proceedings of VII International conference of the Georgian Mathematical Union and the Georgian Mechanical Union,. 2016, 5-9 September.
[S18] V. Gogokhia, *A. Shurgaia*, M. Vasúth; Int.J.Mod.Phys. A Vol. 31, No. 289, 1645026 (2016).
[S19] V. Gogokhia, *A. Shurgaia*, M. Vasúth; Proceedings of VIII International conference of the Georgian Mathematical Union and the Georgian Mechanical Union, 2017. 4-8 September.
[S19] V. Gogokhia, *A. Shurgaia.* Proceedings of VIII International conference of the Georgian Mathematical Union and the Georgian Mechanical Union,. 2017 4-8 September.

ამოცანა 3. *დაბალ განზომილებიანი ფიზიკური სისტემების თეორიული კვლევა*

წარმოდგენილი პროექტის ეს ამოცანა მიზნად ისახავს დაბალგანზომილებიანი ფიზიკური სისტემების ტოპოლოგიური და ალგებრული ასპექტების შესწავლას.

დაბალგანზომილებიანი ფიზიკური სისტემები წარმოადგენენ უნიკალურ სფეროს სადაც იკვეთება შეხების წერტილები კონდენსირებული გარემოს ფიზიკასა და ნაწილაკების ფიზიკას შორის. მრავალი კონსტრუქცია, რომელიც ძირითადად დაკავშირებულია ველის თეორიის ფორმალიზმთან, წარმატებულ გამოყენებას პოულობს დაბალგანზომილებიან ფიზიკურ სისტემებში, როგორებიც არიან კვანტური ჰოლის სისტემები, ტოპოლოგიური იზოლატორები და ა.შ. აქ იგულისხმება მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმი, არაკომუტაციური გეომეტრიის საფუძვლები, W-ალგებრები, არააბელური ყალიბური სტრუქტურები, ტოპოლოგიური სტრუქტურები და სხვა კონსტრუქციები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე თეორიულ და მათემატიკურ ფიზიკაში. ამ თემებისადმი ინტერესი გამოწვეულია ახალი მასალების გამოჩენით, რომლებიც წარმოაჩენენ თვისობრივად ახალ ფიზიკას, როგორიც არის, მაგალითად მატერიის ტოპოლოგიური მდგომარეობა. გარდა ამისა, ჰოლის კვანტური ეფექტი არსებობის უკვე 40 წელს ითვლის, და ამ მიმართულებით საკმაოდ მნიშვნელოვანი პროგრესია მიღწეული. თუმცა, ჰოლის წილადმნიშვნელოვანი კვანტური ეფექტის ძირითადი მდგომარეობის მიკროსკოპული აღწერა ჯერ კიდევ დაუმუშავებელ ამოცანას წარმოადგენს. პროექტი შედგება ორი ამოცანისაგან. ამოცანა 1 ეხება

მჭიდრო ბმის მოდელების ტოპოლოგიურ აღწერას, ამოცანა 2 კი მიზნად ისახავს ურთიერთქმედი ფერმიონების მიკროსკოპულ შესწავლას ლანდაუს უმდაბლეს დონეზე , რაც ჰოლის წილადმნიშვნელოვან ეფექტით არის ნაკარნახევი.

ამოცანა 1. ყალიბური თეორიებში ტოპოლოგიური მახასიათებლები (დახვევის რიცხვი, ჩერნის კლასები) როგორც წესი, აგებულია ყალიბურად ინვარიანტული სიმრუდის მეშვეობით. მჭიდრო ბმის ორგანზომილებიან მოდელებში ყალიბურად ინვარიანტულ ბერის (Berry) სიმრუდეს შემდეგი სახე აქვს $F=\frac{\partial A_2}{\partial k_1}-\frac{\partial A_1}{\partial k_2}$ სადაც $A_{1,2}=i\psi^{\dagger}\frac{\partial\psi}{\partial k_{1,2}}$ წარმოადგენს ბერის ბმულობას, ψ არის მდგომარეობის ვექტორი და $k_{1,2}$ იცვლება ბრილუენის ზონაში. ერთ განზომილებაში მსგავსი სტრუქტურა მიუწვდომელია k_2-ის არარსებობის გამო. ეს დაბრკოლება გადალახვა ხერხდება დამატებითი α პარამეტრის შემოღებით (იხ. მაგ. Phys. Rev. B89, 085111 (2014)). შედეგად სიმრუდე აგებულია (k,α) წყვილის მეშვეობით, ნაცვლად (k_1,k_2) წყვილისა. არსებულ ლიტერატურაში იძებნება α პარამეტრის სხვადასხვა არჩევანი, რომელთაგანაც თითოეული მორგებულია მოცემულ მოდელზე, და არ იძლევა განზოგადების საშუალებას, რომლის მისადაგება შესაძლებელი იქნებოდა ნებისმიერი სხვა ერთგანზომილებიანი სისტემისათვის. ასეთი ზოგადი სქემა დამუშავებულია მოცემული პროექტის მონაწილეების მიერ (J. Phys. Soc. Jpn. 86, 074712 (2017)) ერთგანზომილებიანი პერიოდულ ჯაჭვებში ყალიბურად ინვარიანტული სიმრუდის ასაგებად. სუ-შრიფერ-ჰეგერის (SSH) მოდელის მაგალითის გამოყენებით, იდეა მდგომარეობს α-ზე დამოკიდებული $\tau_n(\alpha)=\frac{1}{2}(t_1+t_2)-\frac{1}{2}(t_1-t_2)\cos(\pi n+\alpha)$ პარამეტრების გამოყენებაში. $\alpha=0$ შემთხვევაში ეს იძლევა $\tau_{1,2}=t_{1,2}$, ხოლო $\alpha=\pi$ შემთხვევაში კი $\tau_{1,2}=t_{2,1}$, რაც წარმოადგენს ელემენტარული უჯრედის რედეფინიციას ($t_1\rightarrow t_2$ და $t_2\rightarrow t_1$). ამ სქემამ წარმატებით აღწერა როგორც სტანდარტული (ორპარამეტრიანი) SSH მოდელი, ასევე გაფართოებული (ოთხპარამეტრიანი) SSH მოდელიც. უნდა აღინიშნოს, რომ α პარამეტრის წანაცვლება წარმოადგენს ტრანსლაციას რეალურ სივრცეში, ხოლო k-ს წანაცვლება წარმოადგენს ტრანსლაციას იმპულსურ სივრცეში. ამ თვალსაზრისით(k,α)წყვილი წააგავს კანონიკურად შეუღლებულ წყვილს. მოცემულ ამოცანაში დაგეგმილია ამ სქემის განზოგადება მჭიდრო ბმის ორგანზომილებიანი მოდელისთვის. მიუხედავად იმისა, რომ (k_1,k_2) წყვილი საკმარისია ყალიბურად ინვარიანტული სიმრუდის ასაგებად, (α_1,α_2) წყვილის ჩართვა გაზრდის საბაზისო სივრცეს (k_1,k_2)-დან $(k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2)$-მდე და შექმნის კანონიკურად შეუღლებული ცვლდების სრულ კრებულს. შესაბამისად, ორგანზომილებიან (k_1,k_2) საბაზისო სივრცეზე აგებული ყალიბური კონსტრუქციის ნაცვლად გვექნება ოთხგანზომილებიან $(k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2)$ სივრცეზე აგებული კონსტრუქცია, რაც გაამდიდრებს მოდელის სტრუქტურას.

ამოცანა 2 გულისხმობს ორგანზომილებიანი მჭიდრო ბმის მოდელების ტოპოლოგიური ასპექტების შესწავლას. პროექტის ეს ნაწილი დაფუძნებული იქნება წინამდებარე პროექტის მონაწილეთა ადრინდელ შედეგებზე (J. Phys. Soc. Jpn. 86, 074712 (2017)). ამ ნაშრომში შემოთავაზებული იყო ტოპოლოგიური მახასიათებლების აგების გარკვეული სქემა ერთგანზომილებიანი მესერული მოდელებისთვის, რომელიც წარმატებით მუშაობდა როგორც 2-ზონიან ასევე 4-ზონიან SSH-მოდელებში. ამოცანა 1-ის მიზანია ამ მეთოდის განზოგადება ორგანზომილებიანი მოდელებისთვის. აქ გამოყენებული იქნება ფურიეს დისკრეტული ანალიზი, მეორადი დაკვანტვის მეთოდები და არააბელიური ყალიბური სტრუქტურები, ჰომოტოპიის თეორიის ელემენტები და ტოპოლოგიური ობიექტები, როგორიცაა ბერის ფაზა, დახვევის რიცხვები, ჩერნის კლასები და ა.შ.

ამოცანა 3. წილადმნიშვნელოვანი ჰოლის კვანტური ეფექტი (FQHE) ბოლო ათწლეულების ერთ-ერთი მთავარი გამოწვევა იყო. ჯეინის (Jain) მიერ შემუშავებული კომპოზიტური ფერმიონების სურათი იყო ამ მოვლენის ახსნის ერთ-ერთი მცდელობა. სხვა მნიშვნელოვანი მიღწევა ამ მიმართულებით არის ლაფლინის (Laughlin) ტალღური ფუნქცია, რომელიც მიღებულია პლაზმის ანალოგიიდან. კომპოზიტური ფერმიონები წარმოადგენენ FQHE-ს ფენომენოლოგიურ აღწერას, ხოლო ლაფლინის ტალღური ფუნქცია, მიუხედავად იმისა, რომ კარგ თანხმობაშია რიცხვით გამოთვლებთან, არ არის შესაბამისი ჰამილტონიანის ზუსტი ძირითადი მდგომარეობა. არც ერთი ეს მიდგომა არ იძლევა FQHE-ს მიკროსკოპულ აღწერას. განსხვავებული მიდგომა განხორციელდა კაპელისა და მისი თანაავტორების (Cappelli et al.) მიერ (Phys. Rev. Lett. 72, 1902 (1994)) რომლებიც იყენებდნენ W-ალგებრის ცნებას. ეს უკანასკნელი წარმოიქმნება ფერმიონების გაჩენისა ($c_m^{\dagger}$) და

გაქრობის (c_n) ოპერატორების ბიწრფივი კომბინაციებით ($c_m^\dagger c_n$), ხოლო კულონური ჰამილტონიანის ($H_C \sim c_m^\dagger c_n c_p^\dagger c_q$) ძირითად მდგომარეობას ეძებდნენ W-ალგებრის გარკვეული უმაღლესი წონითი წარმოდგენის უმაღლესი წონის ვექტორის სახით. მოცემულ ამოცანაში დაგეგმილია განსხვავებული ალგებრული მიდგომის აგება. კერძოდ, ($c_m^\dagger c_n$) ბიწრფივი კომბინაციების ნაცვლად, ჩვენ გამოვიყენებთ $c_m c_n$ ნამრავლებს გარკვეულ წრფივ კომბინაციებს

$$K_a = \sum_{m<n} \xi_{a,mn} c_m c_n \qquad (1)$$

სადაც $\xi_{a,mn}$ სიდიდეებისათვის უკვე მიღებულია ცხადი ანალიზური გამოსახულებები. წინასწარი შეფასებების მიხედვით კი K_a ოპერატორების მეშვეობით გამოსახული კულონური ჰამილტონიანი დიაგონალურია, ე.ი.

$$H_C = \sum_{mnpq} V_{mnpq} c_m^\dagger c_n c_p^\dagger c_q = \sum_{mnpq} V_{mnpq} \cdot c_m^\dagger c_p^\dagger \cdot c_q c_n = \sum_a K_a^\dagger K_a \qquad (2)$$

ეს გარემოება გვკარნახობს, რომ ალგებრული მიდგომა უნდა ეფუძნებოდეს არა $c_m^\dagger c_n$ ოპერატორებით წარმოქმნილ ალგებრას, არამედ ალგებრას რომელიც $\{K_a^\dagger \sim c_m^\dagger c_n^\dagger,\ K_a \sim c_m c_n,\ c_m^\dagger c_n\}$ წარმოიქმნება. პირველი არის უნიტარული ალგებრა $U(N)$, ხოლო მეორე კი ორთოგონალური ალგებრა $SO(2N)$. აქედან გამომდინარე, კულონური ჰამილტონიანის ძირითადი მდგომარეობის საკითხი შესწავლილი იქნება ორთოგონალური ალგებრების წარმოდგენების გამოყენებით.

ამოცანა 2 გულისხმობს ლანდაუს უმდაბლეს დონეზე ურთიერთქმედი ფერმიონების სისტემის ალგებრულ აღწერას. ამ თემის ირგვლივ არსებული კვლევები ეფუძნება W-ალგებრის ცნებას, რომელიც რეალიზებულია ფერმიონების გაჩენა-გაქრობის ოპერატორების ბიწრფივი კომბინაციების სახით. მოცემულ ამოცანაში ჩვენ ვგეგმავთ შევიმუშაოთ ალტერნატიული მიდგომა, მათ შორის ფერმიონების გაჩენა-გაქრობის ოპერატორების ისეთი კომბინაციებით, რომლებიც ცვლიან ნაწილაკთა რიცხვს. წინასწარი შეფასებების მიხედვით ასეთი მოდგომით მოხერხდება ოთხფერმიონული ჰამილტონიანის დიაგონალურ სახემდე ფორმამდე მიყვანა. ამ საკითხის შესაბამისი მეთოდოლოგია იყენებს დაბალგანზომილებიანი ველის თეორიას, არაკომუტაციური გეომეტრიის ელემენტებს, კლასიკური მრავალწევრების თეორიას, ლის (Lie) კლასიკური ალგებრებისa და მათი წარმოდგენების თეორიას, უნიტარული და ორთოგონალური ჯგუფების თეორიას და ა.შ.

წარმოდგენილი პროექტი მოიცავს ორ განცალკევებულ, მაგრამ არსებითად დაკავშირებულ ამოცანას, რომლებიც დაკავშირებულია დაბალგანზომილებიანი კვანტური სისტემების კვლევებთან. კვლევის მეთოდები ძირითადად არის ანალიზური და იყენებს კარგად აპრობირებულ და დამკვიდრებულ მეთოდებს, რომლებსაც წინამდებარე პროექტის მონაწილეები ინტენსიურად იყენებდნენ ადრინდელ კვლევებში.

ლიტერატურა:

[E1] T. Supatashvili, *M. Eliashvili, G. Tsitsishvili*, “Group structure of Wilson loops in 2D tight-binding models with 2-band and 4-band energy spectra”, Int. J. Mod. Phys. B 36 (2022)

[E2] *M.Eliashvili*, D.Kereselidze, *G.Tsitsishvili*, M.Tsitsishvili: *Edge States of a Periodic Chain with Four-Band Energy Spectrum* ; J.Phys.Soc.Jpn. 86 (2017) 074712

[E3} *M.Eliashvili, G.Tsitsishvili*; *Boundary Conditions and Formation of Pure Spin Currents in Magnetic Field;* Physica E;Low-Dimensional Systems and Nanostructures 93, pp 196-201 (2017)

[E4} *M.Eliashvili*, G.I.Japaridze, *G .Tsitsishvili*; *The quantum group and Harper equation on a honeycomb lattice;* Journal of Mathematical Sciences, 216(4), (2016) 522-526 .

[E5] *M.Eliashvili, G .Tsitsishvili*, *Electrons in Magnetis Field Under Restricted Geometry'* Bulletin of Georgian National Academy of Sciences vol.10 No 2 (2016). 53-57

[E6] *M.Eliashvili*, G.I.Japaridze, *G.Tsitsishvili*, G.Tukhashvili; *Edge states in 2D lattices with hoping anisotropy and Chebyshev polynomials.* arXiv: 1401.6779; J.Phys.Soc.Jpn. 83 (2014) 044706

E[7] *M. Eliashvili, G Tsitsishvili Algebraic aspects of the Hofstadter problem in graphene*. Journal of Mathematical Sciences 193 (3), (2013). 418-427

E[8]*M.Eliashvili*, G.I.Japaridze, *G Tsitsishvili*; *The quantum group, Harper equation and structure of Bloch eigenstates on a honeycomb lattice.* J.Phys. A: Math.Theor. **45. (2012)** #39, 395305
[E9] *M. Eliashvili and G. Tsitsishvili*, “On the NCCS model of quantum Hall fluid”, Eur. Phys. J. C 50 (2007) 1013.
[E10] Z.F. Ezawa, *M. Eliashvili and G. Tsitsishvili,* “Ground-state structure in $\nu = 2$ bilayer quantum Hall systems”, Phys. Rev. B 71 (2005) 125318.
[E11] *M. Eliashvili and G. Tsitsishvili*, “Area preserving transformations in non-commutative space and NCCS theory”, Eur. Phys. J. C 32 (2003) 135.
[E12] *M.Eliashvili, G.Tsitsishvili*, „Geometric transformations and NCCS theory in the lowest Landau level“, International Journal of Modern Physics B, v16, #25, 3725 (2002)

ამოცანა 4. *კუდიტების კვანტური რესურსის შესწავლა*

პროექტი მიზნად ისახავს სასრული განზომილებიანი კვანტური სისტემების (კუდიტების) კვანტური რესურსის შესწავლას. მნიშვნელოვანია რომ ამ რესურსის გამოყენება უზრუნველყოფს კვანტური გამოთვლითი სქემების ეფექტურ მუშაობას.

კვანტური რესურსის შესწავლის ამოცანა მოიცავს ორ მთავარ მიმართულებას :

(1) სასრული განზომილებიანი კვანტური სისტემების შერეული მდგომარეობების სივრცის კლასიფიკაცია, მისი სტრატიფიკაცია უნიტარული ჯგუფის მოქმედებით;

(2) «კვანტურობის» რაოდენობრივი მახასიათებლების იერარქიის აგება თითოეული შესაძლო სტრატისთვის.

შემოთავაზებული კვლევის მოკლე აღწერა

(1) კვანტური სისტემების მდგომარეობების სტრატიფიკაცია და სასრულ განზომილებიანი კვანტური სისტემების მახასიათებლები

უნიტარული ჯგუფის მოქმედება N-განზომილებიანი კვანტური სისტემის სივრცეზე იწვევს მის ბუნებრივ სტრატიფიკაციას SU(N) უნიტარული ჯგუფის ან მისი გარკვეული ქვეჯგუფების მოქმედების ორბიტების ტიპის მიხედვით [1,2,3]. ამ სტრატიფიკაციის აღწერა წარმოადგენს სისტემის ფიზიკური პარამეტრების განსაზღვრის პრობლემის (კვანტური მდგომარეობების ჩახლართული ფენომენის ჩათვლით) მათემატიკური ფორმულირება.

კვანტური სისტემების დაკვირვებადი მახასიათებლები არიან უცვლადი უნიტარული გარდაქმნების მიმართ. ამის გამო „კვანტურობის“ მახასიათებლების სრული კრებულის აგებისას უნდა გავითვალისწინოთ მათი ეკვივალენტობა უნიტარული სიმეტრიის მოქმედებასთან მიმართებაში. ამავდროულად, ქვესისტემების ლოკალური მახასიათებლების ასაგებად კომპოზიტური კვანტური სისტემებისთვის განმსაზღვრელი როლი მდგომარეობების ეკუთვნის უნიტარული ჯგუფის ქვეჯგუფს .

(2) „რაოდენობრივი“ მახასიათებლების იერარქიის აგება თითოეული შესაძლო სტრატისთვის

კლასიკურ და კვანტურ მახასიათებლებს ანალიზი ყველაზე მოსახერხებელი განსახორციელებლად კვანტური მექანიკის ფაზურ სივრცეს ფორმალიზმის ფარგლებში [4]. ამ ფორმალიზმში კლასიკური და კვანტური სისტემების სტატისტიკური აღწერილობები მსგავსი აღმოჩჩა. კვანტური სტატისტიკური აღწერა იმეორებს კლასიკური ანალოგის მახასიათებლებს, გარდა ალბათობის განაწილების დადებითობის თვისებისა. მდგომარეობათა კვანტური კვაზი-განაწილების ეს თვისება შეიძლება გამოყენებულ იქნას „არაკლასიკურობის/კვანტურობის“ რაოდენობრივი მახასიათებლების დასანერგად [5,6,7]. ამ იდეაზე დაყრდნობით, პროექტში განვითარდება კუბიტებისის და კუტრიტების დეტალური კვანტური მახასიათებლების შესწავლა.

ლიტერატურა:

[Kh1] V.Gerdt, *A.Khvedelidze*, Y.Palii, On the ring of local polynomial invariants for a pair of entangled qubits, Journal of Mathematical Sciences, 168, 368-378, (2010) [Kh 2] V.Gerdt, D.Mladenov, *A.Khvedelidze*, SU(6) Casimir invariants and SU(2)xSU(3) scalars for a mixed qubit-qutrit state, Journal of Mathematical Sciences, 179, 690-701, (2011)

[Kh 3] V.Gerdt, *A.Khvedelidze*, Y.Palii, Constraints on $SU(2) \otimes SU(2)$invariant polynomials for entangled qubit pair, Physics of Atomic Nuclei, 74, 893–900, (2011)

[Kh 4] V.Abgaryan, *A.Khvedelidze*, On Families of Wigner Functions for N-Level Quantum Systems, Symmetry 2021, 13(6), 1013, (2021)

[Kh 5] V.Abgaryan, *A.Khvedelidze*, A.Torosyan, Global Indicator of Classicality of an Arbitrary N-Level Quantum System, Journal of Mathematical Sciences, 251, 301-314, (2020)

[Kh 6] V.Abgaryan, *A.Khvedelidze*, A.Torosyan, Kenfack– Zyczkowski indicator of nonclassicality for two non-equivalent representations of Wigner function of qutrit, Physics Letters A , 412 127591 (2021)

[Kh 7]V. Abgaryan, *A. Khvedelidze*, I. Rogojin, Overall Measure of Non-classicality of N-level Quantum System and Its Universality in the Large N Limit, Lecture Notes in Computer Science , Springer, 12563, 244-255 (2021).

ამოცანა 5. *ევკლიდური ვორმჰოლების და შავი ხვრელების ფიზიკური და მათემატიკური ასპექტები*

დიდი ხანია არსებობს მოსაზრება რომ მაღალ ენერგიებზე (მცირე მანძილებზე) პროცესებს მართავს კვანტური გრავიტაციის თეორია. ბოლო ათწლეულების განმავლობაში ამ მიმართულებით ბევრი მუშაობისა და კვანტური გრავიტაციის თეორიის რამდენიმე კანდიდატის შექმნის მიუხედავად, სრული კვანტური გრავიტაციის თეორია ჯერ კიდევ არ არსებობს. რადგანაც ამჟამინდელი ექსპერიმენტები ვერ აღწევენ საკმარისად მაღალ ენერგიებს, რათა პირდაპირ იქნას შესწავლილი ფიზიკის კანონები პლანკის მასშტაბებზე, ან თუნდაც დიდი გაერთიანების მასშტაბებზე. ნებისმიერი ინფორმაცია, რომლის მიღებაც შეგვიძლია დაბალი ენერგიის ფიზიკაში კვანტური გრავიტაციული ეფექტების შესაძლო გამოვლინების შესახებ, ძალზედ ძვირფასია. ამ მხრივ მნიშვნელოვან როლს თამაშობს გარკვეული კლასიკური ამონახსნები - კვაზიკლასიკური კვანტური გრავიტაციის უნაგირის წერტილები: ევკლიდური ვორმჰოლები და ევკლიდური შავი ხვრელები. ევკლიდური ვორმჰოლები არიან გასაოცარი ობიექტები, რომლებიც დაკავშირებულია მაღალ ენერგიებზე სივრცე-დროის ტოპოლოგიის ფლუქტუაციასთან. ევკლიდური შავი ხვრელები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ შავი ხვრელების თერმოდინამიკაში. ამის გათვალისწინებით, ჩვენ ვგეგმავთ ევკლიდური ვორმჰოლების და შავი ხვრელების მნიშვნელოვანი ასპექტების განხილვასა და გამოკვლევას,

ამოცანა შედგება სამი ძირითადი ქვე-ამოცანიდან:

5.1. *ახალი ტიპის ვორმჰოლები გაფართოვებულ აქსიონურ გრავიტაციაში*

1988 წელს გიდინგს და სტრომინგერის მიერ ცხადი სახით ნაპოვნი იქნა ევკლიდური ვორმჰოლები ორ თეორიაში: გრავიტაცია + აქსიონური ველი და გრავიტაცია + აქსიონური ველი + უმასო დილატონი. ჩვენ ვგეგმავთ ახალი ტიპის ვორმჰოლების შესწავლას გაფართოვებულ აქსიონურ გრავიტაციაში, კერძოდ მასიური დილატონის დამატებით და თვითურთიერთქმედებადი სკალარული ველის დამატებით.

5.2. *ვორმჰოლების უარყოითი მოდების შესწავლა*

ცნობილია, რომ გიდინგს-სტრომინგერის აქსიონურ ვორმჰოლებს არ გააჩნიათ უარყოფითი მოდები. ჩვენ ვგეგმავთ ახალი ტიპის ვორმჰოლების ირგვლივ წრფივი შეშფოთებების სპექტრის შესწავლას და უარყოფითი მოდების რაოდენობის დადგენას.

5.3. ევკლიდური შავი ხვრელების უარყოითი მოდების შესწავლა

ცნობილია რომ შვარცშილდის შავი ხვრელის ამონახსნის ევკლიდურ ვერსიას გააჩნია ერთი უარყოფითი მოდა, რომელიც აღწერს ბრტყელი სივრცე-დროის არასტაბილობას მაღალ ტემპერატურაზე. ჩვენ ვგეგმავთ ევკლიდური შვარცშილდ-დე სიტერის შავი ხვრელის ამონახსნის წრფივი შეშფოთებების სპექტრის შესწავლას და უარყოფითი მოდების რაოდენობის დადგენას.

ლიტერატურა:

[L1] *G.Lavrelashvili*, V.A.Rubakov and P.G.Tinyakov, ``Disruption of Quantum Coherence upon a Change in Spatial Topology in Quantum Gravity,'' JETP Lett. 46 (1987) 167.
[L2] *G.Lavrelashvili*, V.A.Rubakov and P.G.Tinyakov, ``Particle Creation and Destruction of Quantum Coherence by Topological Change,'' Nucl. Phys. **B299** (1988) 757.
[L3] *G.Lavrelashvili*, V.A.Rubakov and P.G.Tinyakov,``Loss of Quantum Coherence Due to Topological Changes: A Toy Model,'' Mod. Phys. Lett. A3 (1988), 1231-1242
[L4] *G.Lavrelashvili*, ``Negative mode problem in false vacuum decay with gravity,'' Nucl. Phys. Proc. Suppl. **88** (2000) 75; [gr-qc/0004025].
[L5] A.Khvedelidze, *G.Lavrelashvili* and T.Tanaka, ``On cosmological perturbations in closed FRW model with scalar field and false vacuum decay,'' Phys. Rev. **D62** (2000) 083501; [gr-qc/0001041].
[L6] G.Lavrelashvili and D.Maison, ``Regular and black hole solutions of Einstein Yang-Mills Dilaton theory,'' Nucl. Phys. **B410** (1993) 407.
[L7] M.S.Volkov, O.Brodbeck, *G.Lavrelashvili a*nd N.Straumann, ``The Number of sphaleron instabilities of the Bartnik-McKinnon solitons and nonAbelian black holes,'' Phys. Lett. **B349** (1995) 438; [hep- th/9502045].
[L8] M.Volkov, N.Straumann, *G.Lavrelashvili*, M.Heusler and O.Brodbeck, ``Cosmological analogs of the Bartnik-McKinnon solutions,'' Phys. Rev. **D54** (1996) 7243; [hep-th/9605089].
[L9] P.Breitenlohner, G.V.Lavrelashvili and D.Maison, ``Mass inflation and chaotic behavior inside hairy black holes,'' Nucl. Phys. **B524** (1998) 427; [gr-qc/9703047].
[L10] J.Baacke and *G.Lavrelashvili*, ``One loop corrections to the metastable vacuum decay,'' Phys. Rev. **D69** (2004) 025009; [hep-th/0307202].
[L11] *G.Lavrelashvili*, ``The Number of negative modes of the oscillating bounces,'' Phys. Rev. **D73** (2006) 083513; [gr-qc/0602039].
[L12] L.Battarra, *G.Lavrelashvili* and J.-L.Lehners, ``Negative Modes of Oscillating Instantons,'' Phys. Rev. **D86** (2012) 124001; arXiv:1208.2182 [hep-th].
[L13] L.Battarra, *G.Lavrelashvili* and J.-L.Lehners, ``Zoology of instanton solutions in flat potential barriers,'' Phys. Rev. **D88** (2013) 104012; [arXiv:1307.7954].
[L14] *G.Lavrelashvili*, ``Creation of wormholes during the false vacuum decay,'' Sov. J. Nucl. Phys. 45 (1987) 185 [Yad. Fiz. 45 (1987) 295].
[L15] *G.Lavrelashvili*, V.A.Rubakov and P.G.Tinyakov, ``Tunneling Transitions With Gravitation: Breaking of the Quasiclassical Approximation,'' Phys. Lett. **B161** (1985) 280.
[L16] L.Battarra, *G.Lavrelashvili* and J.L.Lehners,``Creation of wormholes by quantum tunnelling in modified gravity theories,'' Phys.Rev. D90 (2014) 124015.
[L17] L.Battarra, *G.Lavrelashvili* and J.L.Lehners,``Wormhole creation by quantum tunnelling,'', (2016) arXiv:1603.08728 [gr-qc].
[L18] M.Koehn, *G.Lavrelashvili* and J.L.Lehners,``Towards a Solution of the Negative Mode Problem in Quantum Tunnelling with Gravity,'' Phys. Rev. D92 (2015) 023506.
[L19] *G.Lavrelashvili*, J.L.Lehners and M.Schneider,``Scalar lumps with a horizon,'' Phys. Rev. D 104 (2021) 044007.
[L20] *G.Lavrelashvili* and J.L.Lehners,``Scalar lumps with two horizons,'' Phys. Rev. D 105 (2022) 024051.

ამოცანა 6. *S-მატრიცა ინტეგრებად ველის კვანტური თეორიებში*

ინტეგრებადობა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თანამედროვე თეორიული და მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებში. ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა ველის კვანტური თეორიის ის ინტეგრებადი მოდელები, რომლებიც აღიწერება უსასრულო განზომილებიანი სიმეტრიის ჯგუფთა წარმოდგენებით.

ლიუვილის თეორია ერთ-ერთი ყველაზე კარგად შესწავლილი ურთიერთქმედი ველის კვანტური თეორიის მოდელია. მისი ინტეგრებადობა დაფუძნებულია სიმეტრიაზე ორ-განზომილებიანი კონფორმული ჯგუფის მიმართ. ეს თეორია არის დროში ასიმპტოტოტურად

თავისუფალი და S-მატრიცა აღწერს გადასვლებს ასიმპტოტურ თავისუფალ ველს შორის. ჩვენ ნაშრომებში [J1, J2] გამოკვლეული იქნა ამ თეორიის S-მატრიცა, როგორც კლასიკურ ისე კვნატურ დონეზე. კვაზიკლასიკური ზღვრის შესწავლის საფუძველზე, ჩვენ გამოვთქვით ვარაუდი, რომ კვანტური S-მატრიცა შეიძლება წარმოდგინდეს მარტივი ფუნქციონალური ინტეგრალით. ლიუვილის თეორიის თვითოეულ კირალურ სექტორში, ეს ფუნქციონალური ინტეგრალი მოიცემა ერთ-განზომილებიანი, არალოკალური ველის თეორიის ქმედებით, რომელიც უკავშირდება *in* და *out* ველებს შორის კანონიკური გარდაქმნის მაწარმოებელ ფუნქციონალს ლეჟანდრის გარდაქმნით. მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ამ არალოკალური ქმედების ფუნქციონალი მოიცემა ჩაკეტილი და კომპაქტური ფორმით. მართალია, თავდაპირველად ჩვენი არგუმენტები შემოწმებული იქნა შეშფოთების თეორიის მხოლოდ დაბალ რიგში, შემდგომ ნაჩვენები იქნა, რომ მტკიცებულება, სამართლიანია ყველა რიგში [J2].

საწყის ეტაპზე, ჩვენი მიზანია ეს შედეგი განვავრცოთ სხვა ორ-განზომილებიან ინტეგრებად ველის თეორიის მოდელებზე. ამ მხრივ, ბუნებრივი კანდიდატებია გაყალიბებული ვეს-ზუმინო-ვიტენის (WZW) მოდელები, რომლებიც, კლასიკურ დონეზე, სრულად ინტეგრებადია ლიუვილის თეორიის მსგავსად და სიმეტრია ამ მოდელებში ფართოვდება 2d კონფორმული ჯგუფიდან W-ალგებრამდე.

ამჟამად, ასიმპტოტურ ველებს შორის კანონიკური გარდაქმნის მაწარმოებელი ფუნქცია, და შესაბამისი ლეჟანდრის გარდაქმნა, შესწავლილი გვაქვს SL(3) ტოდას თეორიაში და SL(2)/U(1) WZW მოდელში. აგრეთვე ჩატარებულია გადასვლის ამპლიტუდების ზუსტი კვანტური გამოთვლები დაბალ ენერგეტიკულ დონეებზე. პიველი შედეგი გვაძლევს ქმედების ფუნქციონალის კანდიდატს, S-მატრიცის ფუნქციონალური ინტეგრალით წარმოდგენისას, ხოლო მეორე შედეგი საშუალებს მოგვცემს შევამოწმოთ ჩვენი წარმოდგენის სისწორე. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ, ლიუვილის თეორიასთან შედარებით, გამოთვლები, ორივე მოდელებში, ტექნიკური თვალსაზრისით, მნიშვნელოვნად რთულია და ჩვენი პოსტულატის შემოწმების სისწორე არატრივიალურ ამოცანად წამოჩინდება.

კიდევ ორი კანდიდატი, 2d ინტეგრებად ველის თეორიებში, სადაც ჩვენი პოსტულატის შემოწმება შესაძლებელია, არის სუპერ-ლიუვილის თეორია და ლიუვილის თეორია კონფორმულად ინვარიანტულ სასაზრვრო პირობებში. მაგრამ, ამ მოდელებისთვის, S-მატრიცის მაწარმოებელი ფუნქციონალის ანალიზი და მისი ლეჟანდრის გარდაქმნა ჯერ კიდევ ჩასატარებელია. ასევე ვგეგმავთ, აღწერილი სქემა განვაზოგადოთ 4d თეორიებისთვის.

ამისათვის უნდა განვიხილოთ *in* და *out* ველები, როგორც ორი თავისუფალი სკალარული ველი ოთხგანზომილებიან მინკოვსკის სივრცეში და შემოვიყვანოთ მათ შორის კანონიკური გარდაქმნის მაწარმოებელი ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდბულია *in*-ველის გაქრობის და *out*-ველის გაჩენის ცვლადებზე. ამ ფუნქციონალის ექსპონენტა, მსგავსად ლიუვილის თეორიისა, განსაზღვრავს კვაზი-კლასიკურ გადასვლის ამპლიტუდას *in* და *out* მდგომარეობებს შორის და ის არის კვაზი-კლასიკური S-მატრიცის მაწარმოებელი ფუნქციონალი. ჩვნი მიზანია გამოვიკვლიოთ ისეთი ოთხგანზომილებიანი თეორიები, რომელთა S-მატრიცას აქვს უსასრულო განზომილებიანი სიმეტრია და წარმოვადგინოთ ის 3d ფუნქციონალური ინტეგრალით.

ლიტერატურა

[J1]. *G. Jorjadze*, S. Theisen, *On the S-matrix of Liouville theory*, JHEP, **02** (2021) 111.

[J2]. *G. Jorjadze*, S. Theisen, *Generating Functional for the S-matrix in Liouville theory*, Proceedings of Science, Regio2020 (2021) 013.

თემა 9: მარტინგალური მეთოდები და მათი გამოყენება ფინანსურ მათემატიკაში, სტატისტიკურ შეფასებათა თეორიაში, ფუნქციონალურ განტოლებებში და მათემატიკურ ბიოლოგიაში

შემსრულებელი: ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის განყოფილება.

მკვლევართა ჯგუფი: მიხეილ მანია (თემის ხელმძღვანელი), თეიმურაზ ტორონჯაძე, ომარ ფურთუხია.

თემის მოკლე აღწერა

თემის მიზანია მარტინგალური მეთოდების გამოყენება სტოქასტური ანალიზის, პირდაპირი და შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების (შსდგ-ების), სტატისტიკურ შეფასებათა თეორიის, ფინანსური მათემატიკისა და მათემატიკური ბიოლოგიის სხვადასხვა მნიშვნელოვანი ამოცანების გადასაჭრელად.

ჩვენ გავაგრძელებთ წინა წლებში დაწყებულ გამოკვლევებს და შევისწავლით შექცეული სტაქასტური დიფერენციალური განტოლებების (შსდგ-ს) არსებობისა და ერთადერთობის პირობებს, ბროუნის მოძრაობის სემიმარტინგალური ფუნქციების სტრუქტურულ დახასიათებას და ყურადღებას გავამახვილებთ მათ ორ ახალ გამოყენებაზე.

ბროუნის მოძრაობის მარტინგალური ფუნქციების აღწერას გამოვიყენებთ სხვადასხვა (მაგალითად, კოშის, აბელის, დალამბერების, კვადრატული და სხვა) ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად. ჩვენი მიზანია დავაკავშიროთ ფუნქციონალური განტოლებები ბროუნის მოძრაობის სემიმარტინგალურ და მარტინგალურ ფუნქციებთან და ვაჩვენოთ, რომ ამ განტოლებების ზოგადი ზომადი ამონახსნის პოვნა შესაბამისი ფუნქციით გარდაქმნილი ბროუნის მოძრაობის მარტინგალობის დამტკიცების ტოლფასია.

ჩვენ განვიხილავთ კოშის ექსპონენციალური ფუნქციონალური განტოლების სტოქასტურ ვერსიას და ვაჩვენებთ, რომ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი სტოქასტური ექსპონენტაა. ამ განტოლებისა და ზოგიერთი ბუნებრივი დაშვების (აქსიომების) გამოყენებით გამოვიყვანთ, რომ აქტივების ფასის პროცესი უნდა მიჰყვეს წანაცვლებულ გეომეტრიულ ბრაუნის მოძრაობას, ისე როგორც ეს ბლეკ-შოულსის მოდელშია.

მარტინგალური მეთოდების საშუალებით შევისწავლით ცოცხალი ორგანიზმების პოპულაციური დინამიკის მოდელებს. კერძოდ, განვიხილავთ ფონ ბერტანალფის ზრდის მოდელის სტოქასტურ ვერსიებს, რომელთა დინამიკას შევისწავლით შექცეული სდგ-ს გამოყენებით.

ჩვენ შევისწავლით რობასტული ჰეჯირების შესაბამის მინიმაქსურ ოპტიმიზაციის ამოცანებს, გამოვიკვლევთ ოპტიმალური სტრატეგიების არსებობის პირობებს და უცნობი პარამეტრის შეფასებების ასიმპტოტურ ყოფაქცევას.

არასრულ ფინანსურ ბაზრებზე ფინანსური ვალდებულების ფასდადება და ჰეჯირება და ამასთანავე დინამიური პორტფელის სელექცია წარმოადგენს მნიშვნელოვან პრობლემას თანამედროვე ფინანსების თეორიაში. იგი ასოცირებულია, ე.წ. საშუალო კვრადრატული აზრით პრობლემის გადაწყვეტასთან. ამოცანა მდგომარეობს "კარგი" მაჰეჯირებელი სტრატეგიის განსაზღვრაში. ამასთან განიხილება ფინანსურ ბაზრები ნებისმიერი საინფორმაციო სტრუქტურით, ერთი ურისკო აქტივით და მრავალგანზომილებიანი რისკიანი აქტივით, რომლის ფასის პროცესი წარმოადგენს სემიმარტინგალს. ჰეჯირების შეცდომის გასაზომად ხშირად გამოიყენება საშუალო კვადრატული აზრით ჰეჯირება.

ეს პრობლემა ფართოდ გამოკვლეულია სხვადასხვა ნაშრომში. ჩვენ ვიყენებთ საშუალო კვადრატული აზრით ჰეჯირებას ბაზრის ისეთ მოდელში რომელშიც ლატენტური ვოლატილობის პროცესი დამოკიდებულია უცნობ მრავალგანზომილებიან პარამეტრზე ჩანაცვლების კოეფიციენტში და აქვს მცირე დიფუზია. ამასთან, ვოლატილობის პროცესი არის დაუკვირვებადი (ლატენტური). ოპტიმალური სავაჭრო სტრატეგიის აგების თეორია კი ითხოვს რომ ვოლატილობის პროცესი იყოს სრულად ცნობილი. ამრიგად საჭიროა უცნობი მრავალგანზომილებიანი პრამეტრის შეფასება.

ამ ლატენტური პროცესის ასაგებად არსებობს ორი ძირითადი მიდგომა დაფუძნებული ან ისტორიაულ მონაცემებზე, ან ნაგულისხმები ვოლატილობის პროცესის გამოყენების მეთოდოლოგიაზე.

ჩვენ ამოცანის განხილვის დროს ზუსტად ვაყალიბებთ და დაწვრილებით აღვწერთ ორივე პროცედურას. უნდა აღინიშნოს, რომ ორივე პროცედურა ძალიან მგძნობიარეა პარამეტრის იდენტიფიკაციის პროცესებში წარმოქმნილი ცდომილების მიმართ. ამიტომ, ჩვენ ვიყენებთ პარამეტრის შეფასების რობასტულ პროცედურებს. ყალიბდება ზუსტი მათემატიკური მოდელი, შეისწავლება CULAN (consistant uniform linear assiptotic normal) შეფასებების აგების პროცესი, რასაც საბოლოო ჯამში მივყავართ B-რობასტული (biaz robust) შეფასების აგებამდე და პრობლემის გადაწყვეტამდე.

ჩვენ განვიხილავთ მეორე რობასტულ პროცედურას ფინანსური ვალდებულების ჰეჯირების ამოცანის ანალიზში. სხვა სიტყვებით, ჰეჯირების მიზნით ვაგებთ და ვიყენებთ ოპტიმალურ V-რობასტულ სტრატეგიას. ჩვენი აზრით, ეს “double robust”

სტრატეგია უფრო მისაღებია, რათა დაიცვას ფინანსური აგენტი შესაძლო შეცდომისაგან.

შემთხვევით პროცესთა თეორიაში განსაკუთრებული ადგილი უკავია სტოქასტური ინტეგრა-ლური წარმოდგენის თეორემებს (რომლებიც გირსანოვის ზომის შეცვლის თეორემასთან ერთად) არსებითად მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ, როგორც თანამედროვე სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში, ისე არაწრფივი ფილტრაციის პრობლემატიკაში. ჩვენ განვიხილავთ სტოქასტურად (მალივენის აზრით) არაგლუვ, ტრაექტორიაზე დამოკიდებულ ვინერის ფუნქციონალებს (ამიტომ ინტეგრალური წარმოდგენის მისაღებად არ შეიძლება გამოვიყენოთ კლარკ-ოკონეს ცნობილი ფორმულა (1984)) და შემოთავაზებული იქნება კონსტრუქციული სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის მიღების გარკვეული მეთოდები. გარდა ამისა, განსახილველ კლასში შედის ფუნქციონალები, რომელთა პირობითი მათემატიკური ლოდინიც კი არ არის სტოქასტურად გლუვი და, შესაბამისად, მათთვის შეუძლებელია ღლონტი-ფურთუხიას (2017) მიერ მიღებული კლარკ-ოკონეს ფორმულის განზოგადების გამოყენება. შესწავლილი იქნება აგრეთვე ისეთი არაგლუვი ვინერის ფუნქციონალები, რომელთა პირობითი მათემატიკური ლოდინიდან ვინერის პროცესის ბუნებრივი ფილტრაციის მიმართ გამოიყოფა იგივე სახის არაგლუვი შესაკრები ან თანამამრავლი. მიღებული შედეგების გამოყენებით აგებული იქნება მაჰეჯირებელი სტრატეგიები შესაბამისი გადასახადის ფუნქციების მქონე სხვადასხვა ევროპული ტიპის ოფციონებისათვის. ასევე შესწავლილი იქნება შესაძლო გამოყენებები არაწრფივი ფილტრაციის საჭიროებებისთვის.

კვლევათა პრობლემატიკა

1. დიფუზიური პროცესების სემიმარტინგალური და მარტინგალური ფუნქციების კლასის სრული აღწერა
2. ოპტიმალური ინვესტირებისა და ჰეჯირების ამოცანის ფასის ფუნქციისთვის შექცეული სდგ-ს გამოყვანა და მსგავსი ტიპის განტოლებების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის ჩვენება.
3. ფუნქციონალური განტოლებების ზოგიერთი კლასის სტოქასტური ანალოგების შემოღება და შესწავლა. კერძოდ, კოშის ექსპონენციალური განტოლების სტოქასტური ვარიანტის გამოყვანა და მისი კავშირის დადგენა სტოქასტურ ექსპონენტასთან.
4. მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით პოპულაციური დინამიკის მოდელების ანალიზი. ფონ ბერტანალფის ზრდის მოდელის სტოქასტური ვარიანტის შემოღება და მისი დინამიკის შესწავლა შექცეული სდგ-ს გამოყენებით.
5. ოპტიმალური B-რობასტული შეფასების აგება მცირე ხმაურის მქონე დიფუზიური ტიპის პროცესის ჩანაცვლების კოეფიციენტის მრავალგანზომილებიანი პარამეტრისათვის.
6. ოპტიმალური საშუალო კვადრატული აზრით რობასტული ჰეჯირების პროცესის კონსტრუქციული განსაზღვრა სტოქასტური ვოლატილობის მოდელში, სადაც ლატენტური ვოლატილობის პროცესი შეიცავს უცნობ მრავალგანზობილებიან პარამეტრს ჩანაცვლების კოეფიციენტში და მცირე პარამეტრს დიფუზიურ წევრში.

7. ოპტიმალური ინვესტირების ამოცანების შესწავლა დაუზუსტებელი მოდელის შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა როგორც პროცესების მართვა, ასევე უცნობი პარამეტრების შეფასება. უცნობი პარამეტრების რობასტული შეფასებების აგება და მათი გამოყენება რობასტული ჰეჯირების ამოცანაში.
8. ტრაექტორიაზე დამოკიდებული არაგლუვი ვინერის ფუნქციონალების კონსტრუქციული სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენების მიღება.
9. ეგზოტიკური არაგლუვი გადასახადის ფუნქციების მქონე სხვადასხვა ევროპული ოფციონების მაჰეჯირებელი სტარტეგიების აგება.
10. ვინერის ფუნქციონალების იტოს სტოქასტური ინტეგრალის სახით წარმოდგენა და არაწრფივი ფილტრაციის პრობლემატიკა.

მ. მანია (სემიმარტინგალური ფუნქციების კლასის აღწერა, სტოქასტური ფუნქციონალური განტოლებები, შექცეული განტოლებები და ზრდის მოდელები)

თემის მოკლე აღწერა

ჩვენი ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა ეძღვნება ბროუნის მოძრაობის (და დიფუზიური პროცესების კლასების) სემიმარტინგალური და მარტინგალური ფუნქციების სრულ აღწერას და მათ გამოყენებას სტოქასტური მართვის თეორიაში, ფინანსურ მათემატიკასა და ფუნქციონალურ განტოლებებში.

კარგად არის ცნობილი თუ რა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს იტოს ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა და მისი განზოგადებები (კრილოვის, ტანაკას, მაიერის, ვენცელის, დუპირეს და სხვათა მიერ) სტოქასტურ აღრიცხვაში. ამ ფორმულის მიხედვით, თუ დიფუზიურ პროცესს (ან სემიმარტინგალს) საკმარისად გლუვი ფუნქცით გარდავქმნით, მაშინ გარდაქმნილი პროცესი ისევ დიფუზიური პროცესია (შეს. სემიმარტინგალია) და ეს ფორმულა გვაძლევს კანონიკური გაშლის წევრების დახასიათებას კერძო წარმოებულების საშუალებით.

ჩვენ აგრეთვე ვიხილავთ შებრუნებულ ამოცანას: რისი თქმა შეგვიძლია ფუნქციის ანალიზურ თვისებებზე, კერძოდ, ამ ფუნქციის წარმოებულების არსებობის შესახებ, თუ ვიცით, რომ ამ ფუნქციით გარდაქმნილი პროცესი არის იტოს პროცესი (ან სემიმარტინგალი). მანიამ და თევზაძემ (2000) აჩვენეს რომ, ფუნქციით გარდაქმნილი დიფუზიური პროცესი წარმოადგენს სემიმარტინგალს დიფუზიური პროცესების გარკვეული კლასისთვის, მაშინ იარსებებს ამ ფუნქციის განზოგადებული წარმოებულები, რაც საკმარისია გარდაქმნილი პროცესის კანონიკური გაშლის წევრების დასახასიათებლად. ცნობილია, რომ მართვადი დიფუზიური პროცესის (ასევე ფინანსური ვალდებულების) ფასი არის სემიმარტინგალი ყოველი დასაშვები მართვის შესაბამისი ზომის მიმართ. ზემოხსენებული შებრუნებული ამოცანების საშუალებით ჩვენ დავადგენთ ფასის ფუნქციის დიფერენცირებადობის თვისებებს (რაც ბელმანის განტოლების გამოყვანის ძირითად სირთულეს წარმოადგენს), რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ვაჩვენოთ ბელმანის განტოლების ამონახსნის არსებობა მართვადი პროცესის საკმაოდ ზოგადი კოეფიციენტების შემთხვევაში. ჩვენი ერთ-ერთი ამოცანაა კავშირის დამყარება ფასის პროცესისთვის მეორე რიგის შექცეულ სტოქასტურ დიფერენციალურ განტოლებასა (ასეთი განტოლებების თეორია ახლახანს არის შემუშავებული სონერის, ტოუზის და სხვების მიერ) და მართვადი მარკოვის პროცესის შესაბამის ბელმანის კლასიკურ განტოლებასთან, როდესაც იმართება როგორც გადატანის, ისე დიფუზიის კოეფიციენტები, რაშიც გამოვიყენებთ ზემოხსენებულ დებულებებს დიფუზიური პროცესების ინვარიანტული გარდაქმნების შესახებ.

ჩვენ გამოვიყენებთ ბროუნის მოძრაობის მარტინგალური ფუნქციების აღწერას, რომ ვიპოვოთ სხვადასხვა (მაგალითად, კოშის, აბელის, დალამბერების, კვადრატული და სხვა) ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ჩვენი მიზანია დავაკავშიროთ ფუნქციონალური განტოლებები ბროუნის მოძრაობის სემიმარტინგალურ და მარტინგალურ ფუნქციებთან და ვაჩვენოთ, რომ ამ განტოლებების ზოგადი ზომადი ამონახსნის პოვნა შესაბამისი ფუნქციით გარდაქმნილი ბროუნის მოძრაობის მარტინგალობის დამტკიცების ტოლფასია.

ჩვენ წარმოგიდგენთ კლასიკური ფუნქციონალური განტოლებების ზოგიერთი კლასის სტოქასტურ ვერსიებს. კერძოდ, ჩვენ ვთავაზობთ კოშის ექსპონენციალური ფუნქციონალური განტოლების სტოქასტურ ვერსიას და ვაჩვენებთ, რომ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი სტოქასტურ ექსპონენტას წარმოადგენს. ამ განტოლებისა და ზოგიერთი ბუნებრივი დაშვების (აქსიომების) გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ აქტივების ფასის პროცესი უნდა მიჰყვეს წანაცვლებულ გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას, ისე როგორც ბლეკ-შოულსის მოდელში.

ჩვენ გამოვიყენებთ სტოქასტურ ექსპონენტებს და შექცეულ სტოქასტურ განტოლებების მიდგომას ფონ ბერტალანფის (1938) თევზის ზრდის დეტერმინისტული მოდელის განზოგადებისთვის, რომელიც ყველაზე ხშირად გამოიყენება, როგორც ზომა-ასაკობრივი მონაცემების აღწერითი მოდელი. ლიტერატურაში ხელმისაწვდომია სტოქასტური ზრდის სხვადასხვა მოდელი. რუსოს და სხვათა (2012) მიერ შემოთავაზებული იყო თევზის (და სხვა ცხოველების) ზრდის მოდელი, როგორც წრფივი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, რომლის მამოძრავებელია ლევის პროცესი დადებითი ნახტომებით (სუბორდინატორი) და რომლის ერთადერთი ამოხსნა არის სტოქასტური ექსპონენტა. ამ მიდგომას (როგორც ყველა არსებულს) აქვს ნაკლი, როგორც ზრდის მოდელს, ვინაიდან თევზის ასიმპტომური სიგრძე ითვლება მუდმივად. ეს გულისხმობს, რომ თევზის სიგრძის ცვალებადობა ნულისკენ მიისწრაფვის, რაც არ არის რეალისტური, რადგან ეს ნიშნავს, რომ ყველა ინდივიდმა უნდა მიაღწიოს ერთსა და იმავე ზღვრულ ზომას. ამ პრობლემის დასაძლევად ბუნებრივია ვივარაუდოთ, რომ თევზის ექსტრემალური ზომა თავისთავად შემთხვევითი სიდიდეა, რაც გაითვალისწინებს ინდივიდუალურ ცვალებადობას. ამიტომ, ჩვენ გამოვიყენებთ შექცეულ სტოქასტურ განტოლებებს (პირდაპირი სტოქასტური განტოლებების ნაცვლად) შემთხვევითი სასაზღვრო პირობით ბოლოში, რომელიც თევზის ასიმპტომური სიგრძის ტოლია. თუ დაუშვებთ, რომ შემთხვევითობის ორი წყარო, შემთხვევითი ინდივიდუალური ცვალებადობა და გარემოს შემთხვევითობა, ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია (რაც ბუნებრივია ვივარაუდოთ), ასეთი შექცეული განტოლების ამოხსნის მათემატიკური ლოდინი გაჰყვება ფონ ბერტალანფის ზრდის მრუდს და უფრო რეალისტურად შეაფასებს ტერმინალურ ცვალებადობას.

კვლევის სიახლე და აქტუალობა.

კვლევის ერთ-ერთ სიახლეს წარმოადგენს მათემატიკის ორი დარგის ფუნქციონალური განტოლებებისა და ალბათობის თეორიის ერთმანეთთან დაკავშირება და კლასიკური ფუნქციონალური განტოლებების ზოგიერთი კლასის სტოქასტური ვერსიების შემოღება. ხიდის როლს შეასრულებს ბრაუნის მოძრაობის სემიმარტინგალური და მარტინგალური ფუნქციები და მათი სრული აღწერა. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ სხვადასხვა (მაგ., კოშის, აბელის, დ'ალამბერსის და სხვა) ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ზომადი ამონახსნის პოვნა გარკვეული მარტინგალური პრობლემის ამოხსნის ეკვივალენტურია.

კვლევის სიახლეა აგრეთვე კლასიკური ფუნქციონალური განტოლებების ზოგიერთი კლასის სტოქასტურ ვერსიების შემოღება და შესწავლა. კერძოდ, ჩვენ ვთავაზობთ კოშის ექსპონენციალური ფუნქციონალური განტოლების სტოქასტურ ვერსიას და ვაჩვენებთ, რომ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი სტოქასტურ ექსპონენტას წარმოადგენს. ამ განტოლებისა და ზოგიერთი ბუნებრივი დაშვების (აქსიომების) გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ აქტივების ფასის პროცესი უნდა მიჰყვეს წანაცვლებულ გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას, ისე როგორც ბლეკ-შოულსის მოდელში.

კვლევის ერთ-ერთ სიახლეს წარმოადგენს ცოცხალი ორგანიზმების ზრდის მოდელების შესწავლა შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით, რადგან ადრე გამოყენებული ზრდის სტოქასტური მოდელები ეფუძნება პირდაპირ სტოქასტურ დიფერენციალურ განტოლებებს, რაც არ იძლევა საშუალებას ცოცხალი ორგანიზმის ზღვრული სიგრძე განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი სიდიდე.

თემასთან დაკავშირებულია შემდეგი ნაშრომები:

[1] **M. Mania**, A general problem of an optimal equivalent change of measure and contingent claim pricing in an incomplete market, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 90, No. 1, (2000), pp. 19-42.

[2] **M. Mania** and R. Tevzadze, Semimartingale functions for a class of diffusion processes, Theory Probab. Appl. Vol. 45, No. 2 (2000), pp. 337-343.

[3] **M. Mania** and R. Tevzadze, Backward Stochastic PDE and Imperfect Hedging, Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 6, No. 7, (2003), pp. 663-692

[4] **M. Mania** and R. Tevzadze, A Unified Characterization of the q-optimal and minimal entropy martingale measures. Georgian Math. J. 10, No. 2, (2003), pp. 289-310

[5] **M. Mania** and R. Tevzadze, A semimartingale Bellman equation and the variance-optimal martingale measure under general information flow, SIAM Journal on Control and Optimization, 42 (2003), pp. 1703-1726

[6] **M. Mania** and M. Schweizer, Dynamic exponential indifference valuation, Annals of Applied Probability, Vol. 15, N. 3, (2005), pp.2113-2143

[7] **M. Mania** and R. Tevzadze, Martingale equation of exponential type, Electronic communication in probability, Vol. 11,(2006), pp. 206-216

[8] T. Kavtaradze, N. Lazrieva, **M. Mania** and P. Mulliere,A bayesian - martingale approach to the general disorder problem, Stochastic Processes and their Applications, Vol.117, (2007), pp. 1093–1120

[9] **M. Mania** and R. Tevzadze, Backward stochastic partial differential equations related to utility maximization and hedging, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 153, No. 3, 2008, pp. 292-376

[10] **M. Mania**, R. Tevzadze and **T. Toronjadze,** Mean-variance Hedging Under Partial Information, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 47, N. 5, (2008) , pp. 2381-2409

[11] **M. Mania**, R. Tevzadze and **T. Toronjadze** , L^2-approximating pricing under restricted information, “Applied Mathematics and Optimization”, Vol. 60, N. 1, (2009), pp. 39-70

[12] **M. Mania** and R. Tevzadze, Backward stochastic PDEs related to utility maximization problem, Georgian Mathematical Journal, Vol. 17, N 4, (2010) , pp. 705- 741

[13] **M. Mania** and M. Santacroce, Exponential hedging under partial information, “Finance and Stochastics”, Vol. 14, N. 3, (2010), pp. 419-448

[14] M. Jeanblanc , **M. Mania**, M. Santacroce and M. Schweizer, Mean-variance hedging via stochastic control and BSDEs for general semimartingales, Annals of Applied Probability, Vol. 22, No. 6, (2012), pp. 2388-2428

[15] B. Chikvinidze and **M. Mania**, New proofs of some results on BMO martingales using BSDEs, Journal of Theoretical Probability, Vol. 27, N. 4, (2014) pp. 1213-1228

[16] **M. Mania** and R. Tevzadze, On the properties of dynamic value functions in the problem of optimal investment in incomplete market, Georgian Mathematical Journal. Vol. 22, Issue 1, (2015), pp. 111-130.

[17] **M. Mania** and R. Tevzadze, On regularity of primal and dual dynamic value functions related to investment problem and their representations as BSPDE solutions, SIAM Journal on Financial Mathematics, Vol. 8, pp. 483-503, (2017)

[18] **M. Mania** and R. Tevzadze, Connections between Forward- Backward SDEs and Backward Stochastic PDEs related to optimal investment problem, to appear in Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, 18 pages, (2018).

[19] **M. Mania** and R. Tevzadze, On Ito’s formula for non-anticipative functionals, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 23, N. 1, 2020, 21 pages

[20] **M. Mania** , A Probabilistic Method of Solving Lobachevsky's Functional Equation, Aequationes Mathematicae, Vol. 95, N2, pp. 237-243, 2021

[21] **M. Mania** and R. Tevzadze, On Martingale Transformations of Multidimensional Brownian Motion, Statistic and Probability Letters, Vol. 175, 2021, pp. 109-119

[22] **M. Mania** and L. Tikanadze, Functional Equations and Martingales, Aequationes Mathematicae, Vol. 96, 2022, pp. 221–241.

[23] **M. Mania** and R. Tevzadze, Martingale Transformations of Brownian Motion with Application to Functional Equations, “Stochastics”, Vol. 95, Issue 3, 2022, pp. 377-395.

[24] Chikvinidze, **M. Mania** and R. Tevzadze, Functional equations for stochastic exponential, arXiv:2112.14189 [math.PR] , accepted in “Stochastic and Dynamics”, 2023.

თ. ტორონჯაძე (მცირე შემთხვევითობის მქონე სტოქასტური ვოლატილობის მოდელი. პარამეტრის რობასტული შეფასება და ჰეჯირება)

თემის მოკლე აღწერა

ამოცანა 1.

ოპტიმალური B-რობასტული შეფასების აგება მცირე ხმაურის მქონე დიფუზიური ტიპის პროცესის ჩანაცვლების კოეფიციენტის მრავალგანზომილებიანი პარამეტრისათვის.

არასრულ ფინანსურ ბაზრებზე ფინანსური ვალდებულების ფასდადება და ჰეჯირება და ამასთანავე დინამიური პორტფელის სელექცია წარმოადგენს მნიშვნელოვან პრობლემას თანამედროვე ფინანსების თეორიაში. იგი ასოცირებულია, ე.წ. საშუალო კვრადრატული აზრით პრობლემის გადაწყვეტასთან. ამოცანა მდგომარეობს "კარგი" მაჰეჯირებელი სტრატეგიის განსაზრვრაში. ამასთან განიხილება ფინანსურ ბაზრები ნებისმიერი საინფორმაციო სტრუქტურით, ერთი ურისკო აქტივით და მრავალგანზომილებიანი რისკიანი აქტივით, რომლის ფასის პროცესი წარმოადგენს სემიმარტინგალს. ჰეჯირების შეცდომის გასაზომად ხშირად გამოიყენება საშუალო კვადრატული აზრით ჰეჯირება.

ეს პრობლემა ფართოდ გამოკვლეულია სხვადასხვა ნაშრომში. ჩვენ ვიყენებთ საშუალო კვადრატული აზრით ჰეჯირებას ბაზრის ისეთ მოდელში რომელშიც ლატენტური ვოლატილობის პროცესი დამოკიდებულია უცნობ მრავალგანზომილებიან პარამეტრზე ჩანაცვლების კოეფიციენტში და აქვს მცირე დიფუზია. ამასთან, ვოლატილობის პროცესი არის დაუკვირვებადი (ლატენტური). ოპტიმალური სავაჭრო სტრატეგიის აგების თეორია კი ითხოვს რომ ვოლატილობის პროცესი იყოს სრულად ცნობილი. ამრიგად საჭიროა უცნობი მრავალგანზომილებიანი პრამეტრის შეფასება.
ამ ლატენტური პროცესის ასაგებად არსებობს ორი ძირითადი მიდგომა დაფუძნებული ან ისტორიაულ მონაცემებზე, ან ნაგულისხმები ვოლატილობის პროცესის გამოყენების მეთოდოლოგიაზე.

ჩვენ ამოცანის განხილვის დროს ზუსტად ვაყალიბებთ და დაწვრილებით აღვწერთ ორივე პროცედურას. უნდა აღინიშნოს, რომ ორივე პროცედურა ძალიან მგძნობიარეა პარამეტრის იდენტიფიკაციის პროცესებში წარმოქმნილი ცდომილების მიმართ. ამიტომ, ჩვენ ვიყენებთ პარამეტრის შეფასების რობასტულ პროცედურებს. ყალიბდება ზუსტი მათემატიკური მოდელი, შეისწავლება CULAN (consistant uniform linear assiptotic normal) შეფასებების აგების პროცესი, რასაც საბოლოო ჯამში მივყავართ B-რობასტული (biaz robust) შეფასების აგებამდე და პრობლემის გადაწყვეტამდე.

კვლევის სიახლე და აქტუალობა

კვლევა აქტუალურია იმის გამო რომ საქმე ეხება არასრულ ფინანსურ ბაზრებს ნებისმიერი ინფორმაციის სტრუქტურით. ასეთ დასმაში ცნობილია დიდი რაოდენობა კვლევებისა რომელიც ეხება სხვადასხვა ტიპის ამოცანების განხილვას და გადაჭრას. და არ კარგავს აქტულაობა მრავალი წლის განმავლობაში. ის მიდგომა რომელსაც ჩვან ვანვითარებთ წარმოადგენს სიახლეს, რადგან ჩავრთედ პრობლემის გადაჭყვეტაში რობასტული შეფასების აგების პროცედურა. რასაც შემოაქვს ახალი იდეები რობასტული სტატისტიკის თეორიიდან ფინანსთა თეორიაში და იწვევს პრობლემის ახლებურად კვლევის და გადაჭრის აუცილებლობას. ჩვენი მიდგომის მიმდევრობითი ნაბიჯები შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი სახით:

1. ნებისმიერი დროის მომენტისათვის ხდება ლატენტური ვოლატილობის პროცესის ტრაექტორიის აღდგენა რისთვისაც ვიყენებთ ან ისტორიულ მონაცემებს ან ვაჭრებადი დერივატივების ფასებს.
2. ჩვენს მიერ განვითარებულ მეთოდებზე დაყრდნობით გამოვითვლით რობასტული შეფასების პარამეტრის სიდიდეს როგორც დროის ფუნქციას და შემდეგ ვაგებთ ნდობის არეს ამ პარამეტრისათვის.
3. ვოლოტილობის პროცესის მოდელზე დაყრდნობით ვაგებთ ვოლატილობის პროცესის ნდობის ინტერვალს.

4. ვიღებთ სტოქასტურ ვოლატილობის მოდელს არასრულად განსაზღვრული ფასის პროცესით და სრულად განსაზღვრული ვოლატილობის პროცესით.

ამ ოთხი ნაბიჯის გამოკვლევას მივყავართ ამოცანაში დასმული პრობლემების ამოხსნამდე.

ამოცანა 2.

ავაგოთ ოპტიმალური საშუალო კვადრატული აზრით რობასტული ჰეჯირების მეთოდოლოგია სტოქასტური ვოლატილობის მოდელში, სადაც ლატენტური ვოლატილობის პროცესი შეიცავს უცნობ მრავალგანზობილებიან პარამეტრს ჩანაცვლების კოეფიციენტში და მცირე პარამეტრს დიფუზიურ წევრში.

უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა ზუსტად აღიწეროს ფინანსური ბაზრის ის მოდელი, რომელიც ასახავას ზემოდ დასმულ ამოცანის ყველა პირობას.ეს საკითხი მოითხოვს გარკვეულ ძალისხმევას და ამ პირობების ზუსტად ჩამოყალიბებას, მაგალითად, სტრუქტურული პირობების ჩამოყალიბებას, საშუალო კვადრატულ ურთიერთ კავშირის აღწერას (MVT – mean variance tradeoff) და ა.შ. ასეთი საკითხების განხილვასა და ზუსტ ფორმულირებებს ეძღვნება ამოცანა 2-ის შინაარსობრივი მხარის მათემატიკური ფორმალიზაციის პროცესის განხორციელება. შედეგად მიღებული ფინანსური ბაზრის მოდელი ასახავს დასმული ამოცანის პირობების ყველა მხარეს. ამის შემდეგ საჭიროა ე.წ. ვარიანს-ოპტიმალური ELMM (equivalent local martingale measure) დახასიათება. რასაც მივყავართ ასეტი ზომის სიმკვრივის დახასიათებამდე. მტკიცდება სათანადო დებულებები და მიიღება სიმკვრივის პროცესის ზუსტი დახასიათება. ამის შემდეგ, აიგება აქციის ფასის პროცესის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვეთება ის მოთხოვნები რომლებიც ასახავენ პროცესის მისსპეციფიკაციას. რასაც საბოლოო ჯამში ბუნებრივად მივყავართ რობასტული მაჰეჯირებელი სტრატეგიის აგების ამოცანამდე. ამის შემდეგ ჩვენ ვიყენებთ კიდევ ერთ აპროქსიმაციას რომელიც დაფუძნებულია გატოს (Gateaux) დიფერენციალის გამოთვლაზე განსაზვრული მიმართულებით. ამ აპროქსიმაციაზე დაყრდნობით საბოლოოდ ყალიბდება რობასტული ჰეჯირების ამოცანა, რომელიც ამოიხსნება ცხადი ფორმით.

კვლევის სიახლე და აქტუალობა

როგორც ამოცანა 1 ისე ამოცანა 2 აქტუალურია მათემატიკური ფინანსების და მათი გამოყენებების პრობლემატიკაში. ამ თემატიკას ეძღვნება არაერთი პუბლიკაცია მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყნის სამეცნიერო ჟურნალში.

ჩვენი მიდგომა წარმოადგენს სიახლეს რაც ჩანს ჩვენი მიდგომის მოკლე აღწერიდან:

a) შემოყვანილია რობასტული პროცედურა ვოლატილობის პროცესის სტატისტიკურ ანალიზში. სხვა სიტყვებით, აგებულია და გამოიყენება ვოლატილობის პროცესის ჩანაცვლების კოეფიციენტში უცნობი პარამეტრის ოპტიმალური B-რობასტული შეფასება.

პარამეტრის შეფასებას ბუნებრივად მივყავართ აქტივის ფასის მოდელის მისსპეციფიკაციამდე

b) შემოყვანილია მეორე რობასტული პროცედურა ფინანსური ვალდებულების ჰეჯირების ამოცანის ანალიზში. სხვა სიტყვებით, ჰეჯირების მიზნით ვაგებთ და ვიყენებთ ოპტიმალურ V-რობასტულ სტრატეგიას. ჩვენი აზრით, ეს "double robust"

სტრატეგია უფრო მისაღებია რათა დაიცვას ფინანსური აგენტი შესაძლო შეცდომისაგან.

თემასთან დაკავშირებულია შემდეგი ნაშრომები:

[1] On asymptotic estimation theory with perturbation of a model in the general scheme of a statistical experiment (with R. Chitashvili and N. Lazrieva). (Russian) Probability theory and mathematical statistics (Russian). *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR* **92** (1989), 106-145.

[2] Asymptotic theory of *M*-estimators in general statistical models (with R. Chitashvili and N. Lazrieva). *Centre for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam, Netherlands,* 1990, Report BS-R9019, 1-31.

[3] Asymptotic theory of *M*-estimators in general statistical models. On asymptotic behaviour of estimators in the presence of nuisance parameters (with R. Chitashvili and N. Lazrieva). *Centre for Mathematics and Computer Sciences, Amsterdam, Netherlands,* 1990, Report BS-R9020, 1-31.

[4] Robust estimators in statistical models with filtration. Shrinking neighbourhoods (with N. Lazrieva). *Seminarberichte, Fachbereich Mathematik, Fernuniversität, Hagen, Germany* **48** (1994), 50-68.

[5] The semimartingale statistical models and robust estimation (with N. Lazrieva). *Proc. of* 4*th Iranian International Statistical Conference* 1(1999), 261-303.
[6] Optimal mean-variance robust hedging under asset price model misspecification. *Georgian Math. J.* **8** (2001), No. 1, 189-199.
[7] General *M*-estimators in the presence of nuisance parameter. Skew projections technique (with N. Lazrieva). *Georgian Math. J.* **10** (2003), No. 2, 271-288.
[8] Mean-variance Hedging Under Partial Information (with M. Mania, R. Tevzadze), arX IV math PR 0703424v1, 2007
[9] Mean-variance Hedging Under Partial Information. with M. Mania, R. Tevzadze, SIAM journal of Control and Optimization, 47, №5, (2008) , 2381-2409. 2008.
[10] L2-approximating pricing under restricted information, with M. Mania, R. Tevzadze, published in "Applied Mathematics and Optimization" (2009). DOI:10.1007/s00245-009-9067-z, 2009.
[11] Mean-variance Hedgin Under Partial Information, with M.Mania, R.Tevzadze, Sciyo, Stochastic Control, ed. by Chris Myers,p.581-608, www.sciyo.com 2010.
[12] R. Tevzadze, T. Toronjadze and T. Uzunashvili, Robust utility maximization for diffusion market model with misspecified coefficients, Finance and Stochastics, 17, 3, (2013), 535-563.
[13] Construction of identifying and real M-estimators in general statistical model with filtration, conference materials, Applications of Stochastic Processes and Mathematical Statistics to Financial Economics and Social Sciences VII, Business Administration Research Papers, DOI 10.48614/bara.7.2022.6042, 2022.

ო. ფურთუხია (მარტინგალური წარმოდგენის თეორემები, სტოქასტურ ფინანსური მათემატიკისა და არაწრფივი ფილტრაციის პრობლემატიკა)

თემის მოკლე აღწერა

შემთხვევით პროცესთა თეორიაში განსაკუთრებული ადგილი უკავია სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის თეორემებს ანუ ე. წ. მარტინგალური წარმოდგენის თეორემებს, რომელიც გულისხმობს ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალების საშუალებით წარმოდგენას. თუ ყოველი კვადრატით ინტეგრებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი მარტინგალი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც სტოქასტური ინტეგრალი ვინერის პროცესის მიმართ, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება ფილტრისათვის, რომელიც ფილტრაციის პრობლემის გადაჭრის პრაქტიკული და მათემატიკურად უფრო მიმზიდველი მეთოდია. მეორეს მხრივ, გასული საუკუნის 80-იან წლებში აღმოჩნდა, რომ მარტინგალური წარმოდგენის თეორემები (გირსანოვის ზომის შეცვლის თეორემასთან ერთად) არსებითად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თანამედროვე ფინანსურ მათემატიკაში. კერძოდ, ინტეგრალურ წარმოდგენაში მონაწილე სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდის საშუალებით ხერხდება მაჰეჯირებელი სტრატეგიების აგება სხვადასხვა ტიპის ევროპულ ოფციონებში. ამიტომ ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: შეიძლება თუ არა ნებისმიერი მარტინგალი წარმოდგენილი იყოს სტოქასტური ინტეგრალის სახით? აღმოჩნდა, რომ ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი გვაქვს როდესაც ± -ალგებრათა ნაკადი ვინერის პროცესითაა წარმოქმნილი (კლარკი, 1970), მაგრამ ზოგადად ეს ასე არ არის. ეს ნაჩვენებია კალიანპურის (1984) მაგალითში (რომელიც მას აღუწერა მ. იორმა, ეს უკანასკნელი კი, თავის მხრივ, ამ მაგალითს ჰ. კუნიტას მიაწერს).

მარტინგალური წარმოდგენის თეორემის პირველი დამტკიცება არაცხადი სახით ეკუთვნის თვითონ იტოს (1951). კლარკის ცნობილი შედეგის თანახმად (1970) ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრებადი ვინერის ფუნქციონალი წარმოიდგინება იტოს სტოქასტური ინტეგრალის სახით, მაგრამ ეს შედეგი არაფერს ამბობს ინტეგრანდის ცხადი სახით პოვნაზე. ამ მიმართულებით ცნობილია ერთი საკმაოდ ზოგადი შედეგი, ე. წ. ოკონე-კლარკის ფორმულა (1984), რომლის თანახმადაც, ინტეგრანდი წარმოადგენს ფუნქციონალის სტოქასტური (მალივენის) წარმოებულს ოფციონალურ პროექციას. ამ შედეგის გამოყენება ერთის მხრივ, როგორც წესი, მოითხოვს ძალიან მნიშვნელოვან ძალისხმევას, ხოლო, მეორეს მხრივ, იმ შემთხვევაში როცა ფუნქციონალს არ გააჩნია სტოქასტური წარმოებული, მისი გამოყენება შეუძლებელია. განსხვავებული მეთოდი ინტეგრანდის

საპოვნელად ეკუთვნის გრავერსენს, შირიაევსა და იორს (2006) “მაქსიმუმის” ტიპის ფუნქციონალისთვის. ისინი ასეთ ფუნქციონალს უკავშირებდნენ ასოცირებულ ლევის მარტინგალს და იყენებდნენ განზოგადოებულ იტოს ფორმულას. მოგვიანებით, კლარკ-ოკონეს ფორმულის გამოყენებით, რენაუდმა და რემილარდმა (2007) დაადგინეს ცხადი სახის მარტინგალური წარმოდგენები ტრაექტორიაზე დამოკიდებული ვინერის ფუნქციონალებისთვის (კერძოდ, ფუნქციონალის როლში განიხილება სამი ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლის არგუმენტებად აღებულია: ვინერის პროცესი, მისი მაქსიმუმი და მინიმუმი).

სამწუხაროდ, ფუნქციონალთა კლასი, რომელზეც შეიძლება გავრცელებულ იქნას კლარკ-ოკონეს ფორმულა, შემოიფარგლება იმ შეზღუდვით, რომ ისინი უნდა იყოს მალივენის აზრით დიფერენცირებადი. მეორეს მხრივ, იმისდა მიუხედავად, რომ კლარკ-ოკონეს ფორმულა იძლევა ინტეგრანდის ცხად კონსტრუქციას, მისი პრაქტიკული გამოყენებისას ჩვენ ვაწყდებით გარკვეულ პრობლემებს. კერძოდ, ფუნქციონალის სიგლუვის შემთხვევაშიც კი, ძნელია გამოთვალოთ მისი მალივენის წარმოებული და შემდეგ კი მიღებული შედეგის პირობითი მათემატიკური ლოდინი. ზემოთ აღწერილ ყველა შემთხვევაში, შესწავლილი ფუნქციონალები სტოქასტურად (მალივენის აზრით) გლუვი იყო. ჩვენ ვსწავლობთ სტოქასტურად არაგლუვი ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის საკითხებს, რომლებიც საინტერესოა როგორც სტოქასტური აღრიცხვის განვითარებისათვის, ასევე მათი პრაქტიკული გამოყენებების თვალსაზრისით თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკისა და არაწრფივი ფილტრაციის პრობლმატიკაში.

აღმოჩნდა, რომ ფუნქციონალის სიგლუვის მოთხოვნა შეიძლება შესუსტდეს მხოლოდ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინის სიგლუვის მოთხოვნამდე. ცნობილია, რომ თუ შემთხვევითი სიდიდე მალივენის აზრით სტოქასტურად დიფერენცირებადია, მაშინ მისი პირობითი მათ-ემატიკური ლოდინიც დიფერენცირებადია. მეორეს მხრივ, პირობითი მათემატიკური ლოდინი შეიძლება იყოს გლუვი, მაშინაც კი, თუ შემთხვევითი სიდიდე არ არის სტოქასტურად გლუვი. ღლონტმა და ფურთუხიამ (2017) განაზოგადეს კლარკ-ოკონეს წარმოდგენა სტოქასტურად არაგლუვი ისეთი ფუნქციონალებისთვის, რომელთა პირობითი მათემატიკური ლოდინი გლუვია.

ჩვენ განვიხილავთ სტოქასტურად (მალივენის აზრით) არაგლუვ, ტრაექტორიაზე დამოკიდებულ ვინერის ფუნქციონალებს (ამიტომ შეუძლებელია კლარკ-ოკონეს ცნობილი ფორმულის გამოყენება (1984)) და შემოთავაზებული იქნება კონსტრუქციული სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის მიღების გარკვეული მეთოდები. გარდა ამისა, განსახილველ კლასში შედის ფუნქციონალები, რომელთა პირობითი მათემატიკური ლოდინიც კი არ არის სტოქასტურად გლუვი და, შესაბამისად, მათთვის შეუძლებელია ღლონტი-ფურთუხიას (2017) მიერ მიღებული კლარკ-ოკონეს ფორმულის განზოგადების გამოყენება. შესწავლილი იქნება აგრეთვე ისეთი არაგლუვი ვინერის ფუნქციონალები, რომელთა პირობითი მათემატიკური ლოდინიდან ვინერის პროცესის ბუნებრივი ფილტრაციის მიმართ გამოიყოფა იგივე სახის არაგლუვი შესაკრები ან თანამამრავლი. მიღებული შედეგების გამოყენებით აგებული იქნება როგორც მაჰეჯირებელი სტრატეგიები შესაბამისი გადასახადის ფუნქციების მქონე სხვადასხვა ევროპული ტიპის ოფციონებისათვის, ასევე შესწავლილი იქნება მათი გამოყენების შესაძლებლობები არაწრფივი ფილტრაციის პრობლემატიკაში.

კვლევის სიახლე და აქტუალობა

მას შემდეგ, რაც კლარკმა (1970) ვინერის ფუნქციონალებისთვის მიიღო სტოქასტური ინტეგ-რალური წარმოდგენის ფორმულა, მრავალი ავტორი ცდილობდა ეპოვნა ინტეგრანდი ცხადი სახით, და შესაბამისი შედეგები მიიღეს, როდესაც ფუნქციონალები გარკვეული აზრით გლუვი იყო. ხშირ შემთხვევაში, შესაძლებელია განისაზღვროს ვიენერის ფუნქციონალი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმა მალივენის აღრიცხვის გამოყენებით, თუ ფუნქციონალი მალივენის აზრით დიფერენცირებადია. ამ მიმართულებით განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთი ნამუშევრები, როგორებიცაა ჰაუსმანი (1979), ოკონე (1984), ოკონე და კარატზასი (1991) და კარატზასი, ოკონე და ლი (1991), შირიაევი, იორი და გრავერსენი (2003, 2006), რენაუდი და რემილარდი (2007). შირიაევმა, იორმა და გრავერსენმა შემოგვთავაზეს ინტეგრანდის პოვნის კიდევ ერთი მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია (განზოგადებული) იტოს ფორმულაზე და ლევის თეორემაზე განსახილველ

ფუნქციონალთან დაკავშირებული ლევის მარტინგალისათვის. მოგვიანებით, კლარკ-ოკონეს ფორმულის გამოყენებით, რენაუდმა და რემილარდმა მიიღეს ცხადი სახის მარტინგალური წარმოდგენა ტრაექტორიაზე დამოკიდებული გარკვეული სახის ვინერის ფუნქციონალებისათვის.

სამწუხაროდ, ფუნქციონალთა კლასი, რომელზეც შეიძლება გამოყენებულ იქნას კლარკ-ოკონეს ფორმულა, შეზღუდულია იმ პირობით, რომ ისინი უნდა იყოს დიფერენცირებადი მალივენის აზრით. მეორეს მხრივ, იმისდა მიუხედავად, რომ კლარკ-ოკონეს ფორმულა იძლევა ინტეგრანდების კონსტრუქციას, პრობლემები არსებობს მის პრაქტიკულ რეალიზაციასთან დაკავშირებით. ჩვენ ვსწავლობთ სტოქასტურად არაგლუვი ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის საკითხებს, რომლებიც საინტერესოა როგორც სტოქასტური აღრიცხვის განვითარებისათვის, ასევე მათი პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ევროპული ოფციონების ჰეჯირების პრობლემატიკაში. ღლონტმა და ფურთუხიამ (2014) შემოგვთავაზეს ინტეგრალური წარმოდგენის მიღების მეთოდი ტროტერ-მეიერის თეორემის გამოყენებით, რომელიც აკავშირებს სემიმარტინგალის ჭვრეტად კვადრატულ ვარიაციას მის ლოკალურ დროსთან. ლივინსკამ და ფურთუხიამ (2016) მიიღეს ცხადი სახის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა ტრაექტორიაზე დამოკიდებული სტოქასტურად არაგლუვი ვინერის ფუნქციონალისათვის, რომელიც დაფუძნებული იყო მისი განაწილების სახის პირდაპირ განსაზღვრაზე. მოგვიანებით გაირკვა, რომ ფუნქციონალის სიგლუვის მოთხოვნა შეიძლება შესუსტდეს მხოლოდ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინის სიგლუვის მოთხოვნამდე. ღლონტმა და ფურთუხიამ (2017) განაზოგადეს კლარკ-ოკონეს ფორმულა იმ შემთხვევაზე, როდესაც ფუნქციონალი არ არის სტოქასტურად გლუვი, მაგრამ მისი პირობითი მათემატიკური ლოდინი სტოქასტურად დიფერენცირებადია და დაადგინეს ინტეგრანდის პოვნის მეთოდი. მომავალში, გარდა იმისა, რომ მოხდება ზემოთ აღწერილი მეთოდების შემდგომი განვითარება და კომბინირება, შემოთავაზებული იქნება სხვა თანამედროვე მეთოდები და მეთოდოლოგიები, მათ შორის მოხდება მარტინგალური მიდგომის ფართო და ინტენსიური გამოყენება.

მეორეს მხრივ, მარტინგალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის საკითხი ძალიან მნიშვნელოვანია ფილტრაციის ამოცანებისთვის. შესაბამისად, თუ მარტინგალი წარმოდგენილი იქნება როგორც იტოს სტოქასტური ინტეგრალი ვინერის პროცესის მიმართ, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება ფილტრისათვის. თავის მხრივ, ფილტრაციის პრობლემის გადაჭრის პრაქტიკული და მათემატიკურად უფრო მიმიმზიდველი მეთოდია ფილტრისთვის სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების გამოყვანა და იტოს სტოქასტური აღრიცხვის გამოყენება.

თემასთან დაკავშირებულია შემდეგი ნაშრომები:

[1] **O. Purtukhia.** An Extension of the Ocone-Haussmann-Clark Formula for a Class of Normal Martingales. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 132, 2003, pp. 127-136.

[2] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of Functionals of Wiener Processes. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 171 (2005a), N 1, pp. 17-20.

[3] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic integral representation of functionals of Poisson processes I. *Bulletin. Georgian Acad. Sci.*, 172, (2005b), N2, pp. 189-192.

[4] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of Functionals of Poisson Processes II. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 174, (2006), N1, pp. 29-32.

[5] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of Functionals of Poisson Processes. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 143 (2007), pp. 37-60.

[6] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Martingale Representation Theorems for Multidimensional Wiener Functionals. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 2 (2008a), N 1, pp. 41-46.

[7] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** An Extension of the Ocone-Haussmann-Clark Formula for the Compensated Poisson Process. Theor. Prob. Appl. Vol. 53 (2008b), N 2, pp. 349-354.

[8] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of two dimensional Poisson Functionals. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 23 (2008c), pp.94-98.

[9] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Derivative of Poisson Polynomial Functionals. Proceedings of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 58 (2008d), pp. 59-66.
[10] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of Multidimensional Polynomial Poisson Functionals. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, **2**, (2008e), **4**, pp. 19-22.
[11] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** An Extension of the Ocone-Haussmann-Clark Formula For the Compensated Poisson Processes.Theory Probab. Appl. Volume 53, (2009a), issue 2, pp. 316-321, SIAM .
[12] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** A New Approach to the Definition of Stochastic Derivative Operator of Poisson Functionals. Stochastic Analysis and Random Dynamics, June 14-20, (2009b), Lviv, Ukraine, pp. 207-208.
[13] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Stochastic derivative operator of two-dimensional Poisson functionals. The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics". September 6-8, 2010a, Baku, Azerbaijan, volume II, pp. 189-192.
[14] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** The Stein's identity and Poisson functionals. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Volume 24, 2010b, pp. 113-118.
[15] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Ito type formula for Poisson anticipating integral. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Volume 25, 2011, pp. 103-108.
[16] **O. Purtukhia.** Sobolev-Poincare Type Inequalities for Poisson Functionals". IV International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics" .PCI' (2012a), Baku, Azerbaijan, volume III, pp. 173-177.
[17] **O. Purtukhia.** Sobolev and logarithmic Sobolev type inequalities"Applied Mathematics, Informatics and Mechanics - AMIM, Volume 17, No 2, (2012b), pp. 26-39.
[18] O. Glonti, **O. Purtukhia.** Hedging of One European Option of Integral Type in Black-Scholes Model. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*. **4**, **5**, *November*, pp. 51-61 (2014).
[19] O. Glonti, **O. Purtukhia.** Clark`s Representation of Wiener functional and Hedging of the Barrier Option. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, **8**, **1**, pp. 32-39 (2014).
[20] O. Glonti, **O. Purtukhia.** Hedging of European Option of Integral Type. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 8, 3, pp.4-13 (2014).
[21] **O. Purtukhia.** Martingale Representation of Wiener functional. *Reports of Enlatged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applide Mathematics*, **29**, pp. 115-118 (2015).
[22] O. Glonti, V. Jaoshvili, **O. Purtukhia.** Hedging of European Option of Exotic Type. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, **168**, pp. 25-40 (2015).
[23] O. Glonti, **O. Purtukhia.** Об одном интегралном представлении броуновского функциона ла. *Теория вероятностей и ее применения*, **61**, **1**, pp. 158-164 (2016).
[24] H. Livinska, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of One Stochastically Non-smooth Wiener Functional. *Bulletin of TICMI*, **20, 2**, pp. 11-23 (2016).
[25] **O. Purtukhia.** On the smoothness of conditional mean of some stochastically nonsmooth functionals. *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, **66**, pp. 52-57 (2016).
[26] **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of One Nonsmooth Brownian Functional. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, **10**, **3**, pp. 17-26 (2016).
[27] O. Glonti, **O. Purtukhia.** On One Integral Representation of Functionals of Brownian Motion. *SIAM J. Theory of Probability & Its Applications*, **61, 1,** pp. 133-139 (2017).
[28] H. Livinska, **O. Purtukhia.** Hedging of the European Option of the Exotic Type with a nonsmooth payoff function. *Bulletin of TICMI*, **21, 2**, pp. 81-95 (2017).
[29] **O. Purtukhia**, V. Jaoshvili. Hedging of Barrier type one European Option. *Reports of Enlatged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applide Mathematics*. **31,** pp. 119-122 (2017).
[30] **O. Purtukhia**, O. Glonti . European option hedging with a nonsmooth payment function. *Ukrainian Mathematical Journa.* **70, 6**, pp. 773-787 (2018).
[31] B. Mamporia, **O. Purtukhia.** On functionals of the Wiener processin a Banach space, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute.* 172, 3, pp. 420- 428 (2018).

[32] B. Mamporia, **O. Purtukhia.** About one method of stochastic integral representation of Brownian functional, *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* **32,** pp. 43-46 (2018).
[33] B. Mamporia, **O. Purtukhia.** Banach space valued functionals of the Wiener process. *Reports of Enlatged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applide Mathematics*. **33.** pp. 47-50 (2019).
[34] V. Jaoshvili, B. Mamporia, **O. Purtukhia.** Stochastic Integral Representation of Poisson Functionals with an Explicit Form of the Integrand. *Reports of Enlatged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applide Mathematics*. **33,** pp. 31-34 (2019).
[35] V. Jaoshvili, **O. Purtukhia**, Z. Zerakidze. Stochastic derivative of Poisson polynomial functionals and its application. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences.* **14, 1**, pp. 29-38 (2020).
[36] B. Mamporia, **O. Purtukhia.** Banach space valued functionals of the Wiener process. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*. 174, 2, pp. 207-216 (2020).
[37] S. Davadze, M. Giorgadze, **O. Purtukhia.** Stochastic integral representation of some Brownian functional with explicit expression of integrand. *Reports of Enlatged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applide Mathematics*. **34,** pp. 15-18 (2020).
[38] B. Mamporia, E. Namgalauri, **O. Purtukhia.** Stochastic integral representation of path-dependent Non-smooth Brownian Functionals. *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* **35**, pp. 63-66 (2021).
[39] B. Mamporia, E. Namgalauri, **O. Purtukhia.** On the Clark-Ocone type formula for integral type Wiener functional. *Global and Stochastic Analysis.* **8, 3,** pp. 87-95 (2021).
[40] E. Namgalauri, **O. Purtukhia**, Z. Zerakidze. Stochastic Integral Representation of Past-Dependent Non-Smooth Brownian Functionals. *Bulletin of TICMI.* **26, 1**, pp. 3-18 (2022).
[41] V. Jaoshvili, E. Namgalauri, **O. Purtukhia**. Martingale representation of one non-smooth functional of Brownian motion. *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*. **36**, pp. 83-86 (2022).
[42] E. Namgalauri, **O. Purtukhia** Different approaches in the constructive martingale representation of Brownian functionals. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. **1**, pp. 35-45 (2022).
[43] R. Mnatsakanov, **O. Purtukhia.** Approximations for Estimating Some Options Using the Inverse of the Laplace Transform. In: “Modern Optimization Methods for Decision Making Under Risk and Uncertainty”. CRC Press, Taylor & Francis Group, Chapter 7, pp. 132-153 (2023).

საერთაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობა

ო.ფურთუხია 2017 წელს მიწვეული იყო გოტინგენის გეორგ–ავგუსტის უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტში ერთკვირიანი ვიზიტით (ქართველ მათემატიკოსთა 5 კაციანი ჯგუფის ფარგლებში) ფოლკსვაგენის ფონდის მიერ დაფინანსებული პროექტის ფარგლებში (პროექტის საიდენტიფიკაციო ნომერია 92148, დასახელება - „მათემატიკის საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში“ პროფესორ რალფ მეიერის მიერ. ჩატარდა ყოველდღიური სამუშაო შეხვედრები პროფესორ რალფ მეიერთან და პროფესორ ინგო ვიტთან, სადაც განხილული იყო მიმდინარე პროექტის შესრულებასთან და ახალი პროექტის მომზადებასთან დაკავშირებული საკითხები; გოტინგენის გეორგ–ავგუსტის უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარზე წაიკითხა მოხსენება თემაზე „ბროუნის ფუნქციონალების კონსტრუქციული ინტეგრალური წარმოდგენები“. ამ მუშაობის შედეგი იყო დოქტორანტურის ერთობლივი, სტრუქტურირებული საგანმანათლებლო პროგრამების განვითარებისათვის სსიპ - შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდისა და გერმანიის ფოლკსვაგენის ფონდის ერთობლივი საგრანტო კონკურსში გამარჯვება (პროექტი # 93581 – „საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამა მათემატიკაში თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში“ (იხ. [http://www.mathphd.tsu.ge/-pages/programperson. html](http://www.mathphd.tsu.ge/-pages/programperson.html)).

ო.ფურთუხიას აქვს ორი საერთო ნაშრომი კიევის ტარას შევჩენკოს უნივერსიტეტის პროფ. ა. ლივინსკასთან (H. Livinska, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine); ერთი საერთო ნაშრომი მინესოტას უნივერსიტეტის პროფ. ნ. კრილოვთან (N. V. Krylov, University of Minnesota, Minneapolis, USA), ერთი საერთო ნაშრომი სამხრეთ კალიფორნიის უნივერსიტეტის პროფ. ბ. როზოვსკისთან (B. L. Rozovskii, University of Southern California, USA) და ერთი საერთო ნაშრომი დასავლეთ ვირჯინიის უნივერსიტეტის პროფ. რ. მნაცაკანოვთან (R. M. Mnatsakanov, West Virginia University, USA).

თ. ტორონჯაძე: 1999 წელი - მიწვეული პროფესორი ჯორჯიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიზნეს სკოლაში (ჯორჯია, ატლანტა, აშშ.), 1999 წელი - მიწვეული პროფესორი აქტუარების საზოგადოების (ჩიკაგო, აშშ) , ამავე წელს იყო მიწვეული პროფესორი კომპანიების: “AllStates” ჩიკაგო, “NewYorkLife”, “PriceWaterHouse”, “Prudential”, ნიუ იორკი, “WorldBank”, ვაშინგტონი. “BlueShields”, ჩიკაგო. 2007 წელი - მიწვეული პროფესორი კოგოდის ბიზნეს სკოლაში, ვაშინგტონი, აშშ,*2011 წელი - მიწვეული პროფესორი CollegeofOzarks – ში, MO, USA, 2011,* იყო მიწვეული პროფესორი რომის უნივერსიტეტში 2003, 2005 და 2008 წლებში (University La Sapiensa, Roma) და იენის უნივერსიტეტში (Jena University, Germany) 2002 და 2006 წლებში.

მ. მანიას აქვს ორი საერთო ნაშრომი ციურიხის უნივერსიტეტის პროფესორ მარტინ შვეიცერთან (Martin Schweizer, ETH Zurich), ერთი საერთო ნაშრომი პარიზის ევრის უნივერსიტეტის პროფესორ მონიკ ჟენბლანკთან (Monique Jeanblanc, Evry University, Paris), ერთი საერთო ნაშრომი მილანის ბოკონის უნივერსიტეტის პროფესორ პიეტრო მულიერთან (Pietro Mulliere, Bocconi University, Milano) და რამდენიმე საერთო ნაშრომი მარინა სანტაკროჩესთან ტურინის პოლიტექნიკური უნივერსიტეტიდან (Marina Santacroce, Politechnico Torino).

<u>შენიშვნა პროექტის ბიუჯეტთან დაკავშირებით</u>

პროექტის 1.8 პუნქტში მოცემულ ბიუჯეტში სახელფასო ფონდის 10-20 %-იანი ზრდა პირობითია. რეალურად ინსტიტუტის ბიუჯეტი მკვეთრად უნდა გაიზარდოს ისე, რომ უზრუნველყოფილი იყოს ღირსეული სახელფასო განაკვეთები, რაც აუცილებელია ახალგაზრდა ნიჭიერი კადრების მოსაზიდად მეცნიერებაში, ინსტიტუტის საერთაშორისო სამეცნიერო აღიარებისა და საერთაშორისო სამეცნიერო პროცესებში ჩართულობის დღევანდელი დონის შესანარჩუნებლად, და მაშასადამე, წარმოდგენილი პროექტის წარმატებით განსახორციელებლად.