M. Bakuradze, Rings of Morava K-theories of modular groups in terms of Chern classes, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2006, Volume 61, Issue 3, 161–162

DOI: https://doi.org/10.4213/rm1745

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Кольца K-теорий Моравы модулярных групп в терминах классов Чженя

М. Бакурадзе

В настоящей работе, используя формулы из [1], [2] для трансфера [3], [4] от классов Чженя, мы даем явное описание в терминах классов Чженя колец K-теории Моравы $K(s)^*(BG)$ в случае модулярных групп. Для диэдральных и полудиэдральных групп, а также обобщенных групп кватернионов эта задача рассмотрена в [5].

В [6], [7] показано, что кольца $K(s)^*(BG)$ порождены, как модули над $K(s)^*(pt)$, классами Чженя комплексных векторных расслоений. В этих работах мультипликативная структура была описана только по модулю некоторого идеала. Вычисление кольцевой структуры в [8], [9] было дано в терминах образующих, отличных от классов Чженя, причем явное описание этих образующих отсутствует. Отметим также работу [10], в которой вычислена эйлерова характеристика $\dim K(s)^{\mathrm{even}}(BG) - \dim K(s)^{\mathrm{odd}}(BG)$ на основе так называемых HKR-характеров.

Для многих конечных p-групп кольцо K-теории Моравы порождается образами классов Чженя при трансфере (в общем случае это неверно, см. [11]). Пусть $G_{p^{m+2}} = \langle a, b \mid a^{p^{m+1}} = b^p = 1,\ bab^{-1} = a^{p^m+1}\rangle$, $m > 1$. Эта группа называется модулярной группой $M_{p^{m+2}}$ при $p \geqslant 3$ и квазидиэдральной группой $QD_{2^{m+2}}$ при $p = 2$, $m \geqslant 3$. Группа $G_{p^{m+2}}$ является полупрямым произведением $\mathbb{Z}/p^{m+1} \rtimes \mathbb{Z}/p$, и имеется точная последовательность $1 \to \mathbb{Z}/p^{m+1} \to G_{p^{m+2}} \to \mathbb{Z}/p \to 1$, где $\mathbb{Z}/p^{m+1} = \langle a\rangle$ и $\mathbb{Z}/p = \langle b\rangle$. Для канонического комплексного одномерного расслоения $\xi \to B\mathbb{Z}/p^{m+1}$ и его первого класса Чженя u положим $b(\xi) = \xi^{\otimes^{1+p^m}}$ и $b(u) = [1+p^m](u)$. Пусть $\xi_\pi \to BG_{p^{m+2}}$ есть p-мерное расслоение, полученное как трансфер от ξ [12], [13]; $c_i = c_i(\xi_\pi)$, $i = 1, \dots, p-1$, – классы Чженя; и пусть $c = c_1(\theta)$ – классы Чженя одномерного комплексного расслоения, индуцированного при помощи проекции $G_{p^{m+2}} \to \mathbb{Z}/p$. Тогда, согласно [6], [14],

$$K(s)^*(BG_{p^{m+2}}) = K(s)^*[c, c_1, \dots, c_p]/\text{соотношения}. \tag{1}$$

В [1], [2] мы ввели и вычислили многочлены A_i от двух переменных, $A_i(z^{p-1}, Z) \in K(s)^*[z, Z]/[p]_F(z)$, $i = 1, \dots, p-1$, однозначно определяемые следующими уравнениями. Для формальной группы Хонда F [15] и k-й элементарной симметрической функции положим $\sigma_k = \sigma_k(y, F(y, z), \dots, F(y, (p-1)z))$, $k = 1, \dots, p$. Тогда

$$\sigma_i = A_i(z^{p-1}, \sigma_p) + p^{-1}\binom{p}{i} y^i z^{p^s-1}.$$

При $p = 2$ мы имеем $A_1(z, Z) = z + v_s \sum_{i=1}^{s-1} z^{2^s - 2^i} Z^{2^{i-1}}$.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS 03-51-3251 и GRDF GEM1-3330-TB-03.

Теорема 1. *$K(s)^*(BG_{p^{m+2}}) \cong K(s)^*[c, c_1, \dots, c_p]/R$, а идеал R порождается элементами*

$$c^{p^s}, x^{p^s}, cc_i^*, xc_i^{**}, c_i^* c_j^{**}, \quad i+j \neq p-1, \qquad c_i^* c_{p-1-i}^{**} - p^{-2}\binom{p}{i}\binom{p}{i+1} v_s x^{p^s-1} c^{p-1},$$

где

$$x = v_s^{(p^{ms}-1)/(p^s-1)} c_p^{p^{ms-1}}, \quad c_i^* = c_i - A_i(c^{p-1}, c_p), \quad c_i^{**} = c_i - A_i(x^{p-1}, c_p).$$

Следствие 2. а) *$K(s)^*(BQD_{2^{m+2}}) \cong K(s)^*[c, c_1, c_2]/(c^{2^s}, x^{2^s}, cc_1^*, xc_1^{**}, c_1^* c_1^{**})$, где $x = v_s^{(2^{ms}-1)/(2^s-1)} c_2^{2^{ms-1}}$, $c_1^* = c_1 + c + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} c_2^{2^{i-1}}$ и $c_1^{**} = c_1 + x + v_s \sum_{i=1}^{s-1} x^{2^s-2^i} c_2^{2^{i-1}}$;*

б) *$c^2 x = cx^2$; $c_1^2 = c^2 + x^2 + cx + v_s^2 (cxc_2)^{2^{s-1}}$.*

Более того, $K(s)^*$-базис для $K(s)^*(BG_{p^{m+2}})$ состоит из элементов $c_1, \dots, c_{p-1}$; c_p^i, $i = 1, \dots, p^{(m+1)s-1}-1$; $c_k c_p^j$, $k = 1, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, p^{ms-1}-1$; $c^l c_p^m$, $l = 1, \dots, p^s-1$, $m = 0, 1, \dots, p^{ms-1}-1$; $c^n c_p^q$, $n = 1, \dots, p-1$, $q = p^{ms-1}, \dots, p^{(m+1)s-1}-1$. Из соотношений $cc_{p-1}^* = 0$ и $xc_{p-1}^{**} = 0$ вытекает $c^p x = cx^p$. Тогда для $i, j = 1, \dots, p-1$ соотношения $cc_i^* = 0$, $xc_i^{**} = 0$ и $c_i^* c_{p-1-i}^{**} = p^{-2}\binom{p}{i}\binom{p}{p-1-i} v_s x^{p^s-1} c^{p-1}$, $c_i^* c_j^{**} = 0$ при $j \neq p-1-i$ дают базисные выражения для cc_i, $c_i c_p^{p^{ms-1}}$ и $c_i c_j$ соответственно. Ранг $K(s)^*(BG_{p^{m+2}})$ как свободного $K(s)^*$-модуля равен $p^{ms-1}(p^{s+1}+p^s-1)$: центр порядка p^m с функцией Мёбиуса $-p$ содержится в $p+1$ абелевой подгруппе порядка p^{m+1} с функцией Мёбиуса 1. Тогда из (1) и сравнения рангов вытекает, что система соотношения является полной.

Список литературы

[**1**] M. Bakuradze, S. Priddy, *Algebr. Geom. Topol.*, **3** (2003), 473–509. [**2**] M. Bakuradze, S. Priddy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:6 (2004), 1855–1860. [**3**] A. Dold, *Math. Z.*, **148**:3 (1976), 215–244. [**4**] D. S. Kahn, S. B. Priddy, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 981–987. [**5**] M. Bakuradze, V. V. Vershinin, "Morava K-theory rings for the dihedral, semihedral and generalized quaternion groups in Chern classes", *Proc. Amer. Math. Soc.* (to appear). [**6**] M. Tezuka, N. Yagita, *Algebraic Topology* (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math., **1370**, Springer, Berlin, 1989, 396–408. [**7**] N. Yagita, *Kodai Math. J.*, **20**:2 (1997), 79–84. [**8**] M. Brunetti, *K-Theory*, **24**:4 (2001), 385–395. [**9**] B. Schuster, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **121**:1 (1997), 7–13. [**10**] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn, D. C. Ravenel, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 553–594. [**11**] I. Kriz, *Topology*, **36**:6 (1997), 1247–1273. [**12**] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Princeton Univ. Press; Univ. of Tokyo Press, Princeton, NJ; Tokyo, 1978. [**13**] M. F. Atiyah, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **9** (1961), 23–64. [**14**] N. Yagita, *K-Theory*, **6**:1 (1992), 87–95. [**15**] D. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Academic Press, Orlando, FL, 1986.

М. Бакурадзе (M. Bakuradze)
Математический институт им. А. Размадзе,
Тбилиси, Грузия
E-mail: maxo@rmi.acnet.ge

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
04.04.2006