M. Bakuradze, The formal group laws of Buchstaber, Krichever, and Nadiradze coincide, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2013, Volume 68, Issue 3, 189–190

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9521

Формальные группы Бухштабера, Кричевера и Надирадзе совпадают

М. Бакурадзе

Пусть $F(x,y)$ – формальная группа геометрических кобордизмов [6]. Следуя Квиллену [7], отождествим ее с универсальной формальной группой Лазара. Положим $\omega(x)=\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}(x,0)$.

В [2] В. М. Бухштабер дает аналитическое решение функционального уравнения на экспоненту формальной группы вида

$$\mathscr{F}_{\mathrm{B}}(x,y)=\sum\alpha_{ij}x^iy^j=\frac{A(y)x^2-A(x)y^2}{B(y)x-B(x)y}\,. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{F}$ – формальная группа вида $\mathscr{F}_{\mathrm{B}}$, где $B'(0)=A'(0)$. Тогда $B(x)$ совпадает с ограничением $\omega(x)$, т.е. $B(x)$ является образом $\omega(x)$ при кольцевом гомоморфизме кольца Лазара, классифицирующем формальную группу $\mathscr{F}$.*

Действительно, если ряды A и B имеют вид $A(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+O(t^3)$ и $B(t)=B_0+B_1t+B_2t^2+O(t^3)$, то $\mathscr{F}(x,y)=(A_0/B_0)(x+y)+O(xy)$. Таким образом, если $\mathscr{F}(x,y)$ является формальной группой, то должно выполняться равенство $A_0=B_0$ и после соответствующего деления числителя и знаменателя можно считать, что $A_0=B_0=1$. Далее, $\mathscr{F}(x,y)=x+y+A_1xy+\sum_{i=2}^{\infty}B_i(x^iy+xy^i)+O(x^2y^2)$. Таким образом, $\alpha_{1i}=B_i$ при $i\geqslant 2$, $\alpha_{11}=A_1=A'(0)=B'(0)$ и ряд $1+\sum_{i\geqslant1}\alpha_{1i}t^i$ совпадает с ограничением формы $(1+\sum_{i\geqslant1}[\mathbb{C}P^i]t^i)^{-1}=\omega(t)$.

Теперь внесем небольшие изменения в исследование формальной группы $\mathscr{F}_{\mathrm{B}}$, проведенное в [5], и, как подсказывает лемма 1, введем

$$A(x,y)=\sum A_{ij}x^iy^j=F(x,y)(x\omega(y)-y\omega(x)). \tag{2}$$

Определим универсальный формальный групповой закон Надирадзе $\mathscr{F}_{\mathrm{N}}$ с помощью очевидного классифицирующего отображения кольца Лазара на его фактор-кольцо по идеалу, порожденному всеми A_{ij}, $i,j\geqslant 3$.

Предложение 2. *Пусть L – кольцо Лазара. Тогда*:
i) $\omega'(x)-\omega'(0)=2x\widehat{\omega}(x)$ *в* $L[[x]]$, *где* $\widehat{\omega}(x)=\sum_{i\geqslant1}\omega_ix^{i-1}$;
ii) *в* $L[[x,y]]/(xy)^3$ *имеем*

$$A(x,y)=\bigl(x\omega(y)+y\omega(x)-\omega'(0)xy\bigr)\bigl(x\omega(y)-y\omega(x)\bigr)+\bigl(\omega(x)\widehat{\omega}(x)-\omega(y)\widehat{\omega}(y)\bigr)x^2y^2.$$

Доказательство. Пусть f и g – экспонента и логарифм формального группового закона F. Тогда $F(x,y)=f(g(x)+g(y))$ и

$$f'(x)=1/g'(f(x))=\omega(f(x)),\qquad f'(g(x))=\omega(f(g(x)))=\omega(x). \tag{3}$$

Пусть $\omega(x)=1+b_1x+b_2x^2+\cdots$. Поскольку $g''(0)=-f''(0)=-\omega'(0)=-b_1$, то

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(x,0)=f''(g(x))+f'(g(x))g''(0)=\omega'(x)\omega(x)-\omega'(0)\omega(x). \tag{4}$$

Отсюда получаем i), так как правая часть (4) делится на 2 и $\omega(x)$ обратима. ii) Ввиду антисимметрии по модулю $(xy)^3$ имеем $A(x,y)=A(y)x^2-A(x)y^2=\sum(A_{i2}x^2y^i-A_{i2}x^iy^2)$. Мы хотим вычислить $-\sum A_{i2}x^i$ в терминах $\omega(x)$. Применив $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x,0)$ к (2)

Работа выполнена при поддержке Volkswagen Foundation, Ref.: I/84 328.
DOI: 10.4213/rm9521

и учитывая (3) и (4), получим $-2\sum A_{i2}x^i = x\omega(x)\omega'(x) - x\omega'(0)\omega(x) + 2x\omega'(0)\omega(x) - 2\omega^2(x) + 2b_2x^2$. Так как коэффициенты лежат в кольце Лазара, отсюда следует равенство $-\sum A_{i2}x^i = x\omega(x)(\omega'(x) - \omega'(0))/2 + x\omega'(0)\omega(x) - \omega^2(x) + b_2x^2$, поэтому

$$\begin{aligned}\sum(A_{i2}x^2y^i - A_{i2}x^iy^2) &= (x\omega(y) + y\omega(x))(x\omega(y) - y\omega(x)) \\ &\quad - \omega'(0)xy(x\omega(y) - y\omega(x)) + \omega(x)\widehat{\omega}(x)x^2y^2 - \omega(y)\widehat{\omega}(y)x^2y^2.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Для вычисления рода Кричевера на коэффициентах формальной группы геометрических кобордизмов в [3] универсальная формальная группа Кричевера $\mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}$ определена как

$$\mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}(x,y) = xb(y) + yb(x) - b'(0)xy + \frac{b(x)\beta(x) - b(y)\beta(y)}{xb(y) - yb(x)}x^2y^2, \tag{5}$$

где $\beta(x) = \dfrac{b'(x) - b'(0)}{2x}$. В [3] также показано, что $b(x) = \dfrac{\partial\mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}}{\partial y}(x,0)$. Из леммы 1 и предложения 2, ii) следует, что $\mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}$ также может быть определена с помощью классифицирующего отображения формальной группы $\mathscr{F}_{\mathrm{N}}$, если в качестве $b(x)$ взять ограничение инвариантной формы $\omega(x)$. Таким образом, $\mathscr{F}_{\mathrm{N}} = \mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}$.

Следуя [2], авторы работы [4] рассматривают следующую формальную группу, соответствующую роду Кричевера $\mathscr{K}v$:

$$\mathscr{F}_{\mathscr{B}}(u_1,u_2) = u_1c(u_2) + u_2c(u_1) - au_1u_2 - \frac{d(u_1) - d(u_2)}{u_1c(u_2) - u_2c(u_1)}u_1^2u_2^2.$$

Из леммы 1 и предложения 2, ii) следует, что (при $c'(0) = a$) ряд $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}(x,y)$ совпадает с (5), т. е. $c(x) = b(x)$ и $d(x) = -b(x)\beta(x)$.

Следствие 3. *Верны равенства* $\mathscr{F}_{\mathrm{N}} = \mathscr{F}_{\mathrm{Kr}} = \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$, *причем кольцо коэффициентов является фактором кольца Лазара по идеалу, порожденному всеми* A_{ij}, $i,j \geqslant 3$.

В [1] при помощи MAPLE вычислено кольцо коэффициентов формального группового закона Надирадзе $\mathscr{F}_{\mathrm{N}}$ до размерности 26. А именно, найден набор полиномиальных образующих $z_1, z_2, \dots$ кольца Лазара, для которых соотношения малых размерностей имеют вид $5z_5 = z_2z_3 + 2z_1z_4$, $2z_6 = 0$, $z_1z_6 = 0$, $z_3z_6 = 0$, $z_{10} = 0$, $z_5z_6 = 0$, $z_{12} = 0$, а элементы $7z_7$, $2z_8$, $3z_9$, $11z_{11}$ и $13z_{13}$ разложимы. Заметим, что наши вычисления согласуются с результатами работы [3] о структуре кольца коэффициентов формальной группы $\mathscr{F}_{\mathrm{Kr}}$, полученными в терминах уравнения ассоциативности. Здесь новой информацией о группе (а следовательно, о роде) Кричевера, является то, что поскольку $z_{10} = 0$, $z_{12} = 0$, то в размерностях 20 и 24 нет неразложимых элементов. Возникает вопрос, в каких размерностях каждый элемент мультипликативно разложим.

Список литературы

[**1**] M. Bakuradze, M. Jibladze, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **159** (2012), 1–9. [**2**] В. М. Бухштабер, *УМН*, **45**:3(273) (1990), 185–186. [**3**] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 23–44. [**4**] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010, № 16, 3207–3262. [**5**] R. Nadiradze, *Formal group and cohomology theories*, Dissertation for the Doct. of Sci. Degree, Tbilisi, 1995. [**6**] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951. [**7**] D. Quillen, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**:6 (1969), 1293–1298.

М. Бакурадзе (M. Bakuradze)
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: malkhaz.bakuradze@tsu.ge

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
08.04.2013