ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 640–649

УДК 539. 3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫЙ СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Н. Н. Шавлакадзе[1],*, О. М. Джохадзе[1], С. С. Харибегашвили[1]

[1] *Тбилисский государственный университет, Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия*

** e-mail: nusha1961@yahoo.com*

Поступила в редакцию 10.10.2019 г.
После доработки 04.07.2020 г.
Принята к публикации 15.07.2020 г.

Рассматривается задача определения механического поля в однородной полуплоскости, подкрепленной конечным однородным стрингером, материал которого подчиняется нелинейному закону Гука. Контакт между пластинкой и стрингером осуществляется тонким слоем клея. Поставленная задача редуцируется к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению. Используя принцип неподвижной точки Шаудера доказывается существование решения этого уравнения. Доказывается единственность решения поставленной задачи. Применяя метод малого параметра нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение сводится к системе рекуррентных линейных сингулярных интегральных уравнений второго рода.

Ключевые слова: контактная задача, нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение, принцип Шаудера, метод малого параметра

DOI: 10.31857/S0032823520050100

Введение. В инженерных конструкциях и механизмах, машиностроении и кораблестроении, проектировании летательных аппаратов особенно важное значение имеют задачи подкрепления массивных упругих тел тонкостенными упругими элементами (включениями, стрингерами, накладками), которые относятся к неклассическим гранично-контактным и смешанным задачам.

Были получены [1–4] точные и приближенные решения статических и динамических контактных задач для разных областей, усиленных упругими тонкими накладками как постоянной, так и переменной жесткости, изучено поведение контактных напряжений в концах линии контакта в зависимости от закона изменения геометрических и физических параметров задачи. Библиография различных контактных задач приводится в монографии [1], где рассматриваются плоские контактные задачи о передаче нагрузки от полубесконечного или конечного стрингера (включения) к упругой полуплоскости или плоскости. Задачи сведены к сингулярному интегродифференциальному уравнению Прандтля, получены различные аналитические методы его решения. Рассматривалась [4] контактная задача для анизотропной полуплоскости с упрочняющимися накладками конечной длины, она сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения при определённых граничных условиях. Решались [5–8] контактные задачи для изотропной и ортотропной кусочно-однородной плоскости, а также для клиновидной анизотропной пластины с

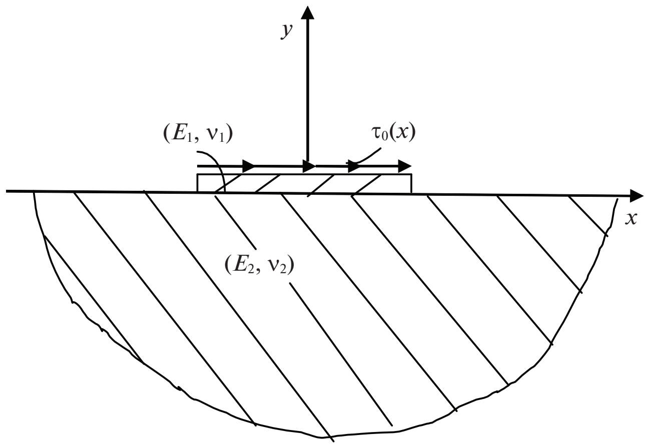

Рис. 1. Геометрия задачи.

полубесконечной и конечной накладкой. В работе [9] стрингер конечной длины приклеен к пластинке с тонким однородным слоем клея, который находится в условиях чистого сдвига. Изгибом стрингера пренебрегается, и он находится в условиях одноосного напряженного состояния. Рассмотрены [10—13] различные задачи, касающиеся контактного взаимодействия упругих тел с тонким слоем клея. Изучалась задача [14, 15] об упругой полубесконечной пластине, которая на конечном отрезке своей границы усилена стрингером из линейно-упругого и нелинейно-упругого материала общего вида. В линейном случае найдены асимптотические оценки, точные и приближенные решения полученного интегродифференциального уравнения, а в нелинейном — доказывается существование и единственность решения полученного нелинейного интегродифференциального уравнения, эквивалентного интегральному уравнению типа Гаммерштейна. Нелинейная деформация упругого тела исследуется в [16, 17].

В представленной работе рассматривается задача взаимодействия упругого стрингера к упругой полуплоскости, когда контакт между пластинкой и стрингером осуществляется тонким слоем клея. Доказывается существование и единственность решения полученного нелинейного интегрального уравнения, которое при помощи метода малого параметра сводится к решению системы рекуррентных линейных интегральных уравнений второго рода.

1. Постановка задачи и ее редукция к нелинейному интегральному уравнению. Пусть линейно-упругая бесконечная пластинка (занимающая нижнюю полуплоскость комплексной плоскости) с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 на конечном отрезке $[-1,1]$ оси Ox усилена нелинейно-упругим стрингером в виде накладки конечной длины и достаточно малой толщины h_1, модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, загруженной тангенциальной силой интенсивности $\tau_0(x)$. Контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с модулем упругости E_0, коэффициентом Пуассона ν_0 и шириной h_0. В условиях плоского напряженного состояния требуется определить касательное контактное напряжение $\tau(x)$, действующего на отрезке соединения стрингера с пластинкой (рис. 1).

Материал стрингера удовлетворяет нелинейному закону Гука

$$\varepsilon_x^{(1)}(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{E} g(\sigma_x^{(1)}(x)), \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x)$ и $u_1(x)$ – деформация и перемещение точек стрингера, соответственно, $\sigma_x^{(1)}(x)$ – осевое напряжение по направлению оси Ox, $E = \dfrac{E_1}{1-\nu_1^2}$, $\sigma_x^{(1)}(x) = \dfrac{1}{h_1}\int_{-1}^{x}[\tau(t)-\tau_0(t)]dt$, $g: R \to R$ – непрерывная, вообще говоря нелинейная, заданная функция.

Условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{-1}^{1}[(\tau(x)-\tau_0(x)]dx = 0 \tag{1.2}$$

Предполагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь [9, 10]

$$u_1(x) - u_2(x,0) = k_0\tau(x), \quad |x|<1, \quad k_0 = \frac{2h_0(1+\nu_0)}{E_0}, \tag{1.3}$$

где $u_2(x,y)$ – перемещения точек пластинки вдоль оси Ox.

В результате интегрирования уравнения (1.1) получим

$$u_1(x) = \frac{1}{E}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}[\tau(s)-\tau_0(s)]ds\right)dt + u_1(-1) \tag{1.4}$$

На основе известных результатов (см., например [18]), деформация граничных точек пластинки по оси Ox, вызванной распределенными по интервалу $(-1,1)$ касательными напряжениями интенсивности $\tau(x)$, представляется в виде

$$u_2(x,0) = -\frac{(3-4\nu_2)(1+\nu_2)}{4\pi E_2(1-\nu_2)}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau(t)dt + C, \quad |x|<1 \tag{1.5}$$

На основании условия контакта (1.3) вдоль линии соединения стрингера с основанием, с учетом (1.4) и (1.5), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi(t)dt + f(x), \quad |x|<1, \tag{1.6}$$

где $\varphi(x) = \tau(x) - \tau_0(x)$,

$$\lambda = \frac{(3-4\nu_2)(1+\nu_2)}{4E_2(1-\nu_2)}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau_0(t)dt + \frac{C^*}{k_0}, \quad C^* = u_1(-1) - C$$

В уравнение (1.6) неизвестная постоянная C^* определяется из условия (1.2), т.е.

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = 0 \tag{1.7}$$

С другой стороны, вводя обозначение $\int_{-1}^{x}\varphi(s)ds = \psi(x)$, уравнение (1.6) примет вид

$$k_0\psi''(x) = \frac{1}{E}g(\psi(x)) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)dt}{t-x} - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(t)dt}{t-x}, \quad |x|<1 \tag{1.8}$$

при условии

$$\psi(1) = 0 \tag{1.9}$$

Таким образом, поставленная гранично-контактная задача (1.1)–(1.5) эквивалентно редуцирована к решению нелинейного интегрального уравнения (1.6) при условии (1.7) или к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению (1.8) при условии (1.9). Относительно функции $f(x)$ будем предполагать, что она принадлежит классу Гёльдера (H) на сегменте $[-1, 1]$. Решение уравнения (1.6) ищется в классе непрерывных функций в смысле Гёльдера (H) на том же сегменте.

Решение задачи (1.8), (1.9) ищется в классе непрерывных функций на сегменте $[-1, 1]$, первая производная которых ограничена в точках $x = \pm 1$, а вторая производная принадлежит классу H^* [18, 19].

2. Существование решения уравнения (1.6). Уравнение (1.6) при условии (1.7) представим в следующем операторном виде

$$\varphi = A\varphi, \tag{2.1}$$

где

$$A\varphi := A_0\varphi - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(A_0\varphi)\,dx, \tag{2.2}$$

а

$$(A_0\varphi)(x) := \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi(t)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau_0(t)dt \tag{2.3}$$

Пусть

$$|g(\xi)| \le M_1|\xi|^{\alpha} + M_2, \quad \alpha \ge 0, \quad \xi \in R, \quad M_i = \text{const} \ge 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.4}$$

Из (2.3) с учетом (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned}
|(A_0\varphi)(x)| &\le \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x}\left|g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)\right|dt + \\
&+ \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right||\varphi(t)|\,dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right||\tau_0(t)|\,dt \le \\
&\le \frac{M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right|^{\alpha}dt + \frac{2M_2}{Ek_0} + \frac{\lambda}{\pi k_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C)\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right|dt \le \\
&\le \frac{2^{\alpha+1}M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\|\varphi\|_C^{\alpha} + \frac{2M_2}{Ek_0} + \frac{\lambda}{Ek_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C)\int_{-1}^{1}|\ln|x-t||dt
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Принимая во внимание оценку

$$\int_{-1}^{1}|\ln|x-t||dt = \int_{x-1}^{x+1}|\ln|s||ds \le 2\int_{0}^{2}|\ln s|ds = 4\ln 2$$

выражение $A\varphi$ из (2.2) с учетом (2.5) оценивается следующим образом

$$|(A\varphi)(x)| \le \frac{2^{\alpha+2}M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\|\varphi\|_C^{\alpha} + \frac{4M_2}{Ek_0} + \frac{8\lambda\ln 2}{Ek_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C) \tag{2.6}$$

Рассмотрим неравенство

$$a + br^{\alpha} \le r \tag{2.7}$$

относительно$r \ge 0$, где $a, b = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} \ge 0$

Как известно [20, 21]:

1) если $0 \le \alpha < 1$, то для любых a и b всегда существует $r > 0$, удовлетворяющий неравенству (2.7);

2) если $\alpha = 1$, то $b < 1$ и неравенство (2.7) имеет решение $r \geq \dfrac{a}{1-b}$;

3) если $\alpha > 1$ и имеет место неравенство $a \leq \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha b)^{-(\alpha-1)^{-1}}$, то тогда существует хотя бы одно положительное решение неравенства (2.7).

Опираясь на эти заключения, связанные с неравенством (2.7), в котором

$$a = \frac{4(M_2 + 2\lambda \ln 2\|\tau_0\|_C)}{\gamma}, \quad b = \frac{2^{\alpha+2}M_1}{\gamma h_1^{\alpha}}$$

при условии

$$\gamma := Ek_0 - 8\lambda \ln 2 > 0 \tag{2.8}$$

получим, что в силу (2.6) оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле (2.2), переводит шар $B(0,r) := \{\chi \in C([0,1]) : \|\chi\|_{C([0,1])} \leq r\}$ в себя:

а) для достаточно большого фиксированного r в случае $0 \leq \alpha < 1$

б) для произвольного $r \geq \dfrac{a}{1-b}$ в случае $\alpha = 1$ и $b < 1$, т.е.

$$r \geq \frac{4h_1^{\alpha}(M_2 + 2\lambda \ln 2\|\tau_0\|_C)}{\gamma h_1^{\alpha} - 2^{\alpha+2}M_1}$$

при

$$E > \frac{8\lambda \ln 2 h_1^{\alpha} + 2^{\alpha+2}M_1}{k_0 h_1^{\alpha}} \tag{2.9}$$

в) в случае $\alpha > 1$, при

$$E > \max\left\{\frac{4(M_2 + 2\lambda \ln 2(\|\tau_0\|_C + 1))}{k_0}, \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^{\alpha-1}\frac{2^{\alpha+2}\alpha M_1}{k_0 h_1^{\alpha}} + \frac{8\lambda \ln 2}{k_0}\right\} \tag{2.10}$$

Поскольку оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ является компактным, согласно принципа неподвижной точки Шаудера [21] интегральное уравнение (2.1) имеет хотя бы одно непрерывное решение, которое, опираясь на результаты, изложенные в работе ([19], стр. 175), будет принадлежать классу H.

Замечание 1. Неравенства (2.8)–(2.10), наложенные на жесткость E материала стрингера, показывают естественные условия, выражающие как возможность ее увеличения, так и существование широкого возможного спектра значений геометрических и физических параметров материала пластинки, стрингера и клея.

Существование решения интегрального уравнения (1.6) в классе непрерывных на сегменте $[-1, 1]$ функций обеспечивает ограниченность искомых контактных напряжений на концах тонкостенного элемента, в то время, как в условиях жесткого контакта, как известно, контактные напряжения имеют особенность в указанных сингулярных точках.

3. Единственность решения поставленной задачи. Теперь покажем, что если задача (1.1)–(1.6) имеет решение, то оно единственное.

Действительно, предположим, что задача допускает два возможных различных решения $u_2^{(1)}(x,y)$ и $u_2^{(2)}(x,y)$. Из соотношений (1.1) и (1.3) получаем

$$E\frac{du_1^{(j)}(x)}{dx} = g(\varphi_j(x)); \quad |x| < 1$$

$$u_1^{(j)}(x) - u_2^{(j)}(x,0) = k_0\tau^{(j)}(x),$$

где

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{h_1}\int_{-1}^{x}[\tau^{(j)}(t) - \tau_0(t)]dt; \quad j = 1,2,$$

$\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ – соответствующие искомые контактные напряжения, а $u_1^{(1)}(x)$, $u_1^{(2)}(x)$ – соответствующие перемещения точек стрингера. Разность этих решений $u(x,y) = u_2^{(1)}(x,y) - u_2^{(2)}(x,y)$ удовлетворяет основным уравнениям теории упругости при отсутствии внешних сил, а для ее граничного значения имеем

$$E\frac{du(x,0)}{dx} + Ek_0\frac{d\tau^{(0)}(x)}{dx} = \frac{1}{h_1}\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right)K(x) \tag{3.1}$$
$$u_0(x) - u(x,0) = k_0\tau^0(x),$$

где

$$u_0(x) = u_1^{(1)}(x) - u_1^{(2)}(x), \quad \tau^0(t) = \tau^{(1)}(t) - \tau^{(2)}(t)$$

$$K(x) = \int_0^1 g'[\varphi_1(x) + \theta(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))]d\theta$$

Как известно, согласно формуле Остроградского–Грина имеет место следующее соотношение [18]

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = \iint_S (\lambda\theta^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{xy}^2))dxdy, \tag{3.2}$$

где X_n, Y_n, u, v – компоненты внешних напряжений и смещений на границе L пластинки, соответственно, $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, а $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}, e_{zz}$ – компоненты деформации.

Учитывая (3.1), интеграл в левой части выражения (3.2) имеет вид

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = \int_{-1}^{1}\tau^0(x)u(x,0)dx = \int_{-1}^{1}\tau^0(x)[u_0(x) - k_0\tau^0(x)]dx =$$
$$= -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx + \int_{-1}^{1}u_0(x)d\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right) = -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx + \left[u_0(t)\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right]_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1}u_0'(x)\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right)dx = -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx - Eh_1\int_{-1}^{1}u_0'^2(x)\frac{dx}{K(x)} \tag{3.3}$$

Так как подынтегральная функция правой части формулы (3.2) представляет собой положительно определенную квадратичную форму, имея в виду (3.3), можно заключить, что если $g' > 0$, оба решения $u_2^{(1)}(x,y)$ и $u_2^{(2)}(x,y)$ дают одинаковые компоненты деформации и напряжения, что означает, задача (1.1)–(1.6) не может иметь более одного решения.

4. Построение решения задачи (1.8), (1.9) при помощи метода малого параметра. Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$k_0\psi''(x) = \delta g(\psi(x)) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)dt}{t-x} - f_0(x); \quad |x| < 1, \tag{4.1}$$

где $\delta = \dfrac{1}{E}$, $f_0(x) = \dfrac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{\tau_0(t)dt}{t-x}$.

Будем предполагать, что функции $f_0(x)$ принадлежит классу $C^1[-1,1]$.

Когда δ малый параметр, т.е. материал стрингера – жесткий, представим решение уравнения (4.1) в виде ряда по степеням δ:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \psi_k(x) = \psi_0(x) + \delta\psi_1(x) + \delta^2\psi_2(x) + \delta^3\psi_3(x) + O(\delta^4) \tag{4.2}$$

В предположении, что функция g – аналитическая и разлагается в ряд Маклорена: $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$ на всей действительной оси, будем иметь

$$g(\psi(x)) = g(0) + \frac{g'(0)}{1}\psi(x) + \frac{g''(0)}{1\times 2}\psi^2(x) + \frac{g'''(0)}{1\times 2\times 3}\psi^3(x) + \cdots \tag{4.3}$$

Подставляя разложения (4.2) и (4.3) в уравнение (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим систему рекуррентных уравнений относительно ψ_k

$$k_0\psi_0''(x) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\psi_0'(t)dt}{t-x} - f_0(x); \quad |x| < 1 \quad \text{и т.д.} \tag{4.4}$$

при условиях

$$\psi_k(\pm 1) = 0; \quad k \ge 0 \tag{4.5}$$

Таким образом, решение уравнения (1.8) при условии (1.9) сводится к решению системы рекуррентных линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (4.4) при условиях (4.5). Решения каждого из этих уравнений (относительно функций $\psi_k'(x)$, $k \ge 0$) с учетом (4.5) представляются в виде ряда ортогональных многочленов Чебышёва [22] в классе функций, ограниченных на обеих концах линии интегрирования. С применением метода ортогональных многочленов уравнения (4.4) при условиях (4.5) сводятся к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, квазивполне регулярных при любых конечных значениях параметров k_0 и λ.

В виде образца рассмотрим первое уравнение из системы (4.4), решение которого будем искать в виде

$$\psi_0'(x) = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k} U_{k-1}(x), \tag{4.6}$$

где числа X_k подлежат определению, а $U_{k-1}(x)$ – ортогональные многочлены Чебышева второго рода, $k = 1, 2, \ldots$.

На основе известных соотношений [22] для ортогональных многочленов Чебышёва

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t)dt}{t-x} = -\pi T_k(x), \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}U_{k-1}(x)\right) = -\frac{kT_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.7}$$

подставляя выражения (4.6) и (4.7) в первое уравнение системы (4.4), умножая обе части полученного равенства на $T_m(x)$ и интегрируя на интервале $(-1,1)$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_m - \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_{mk}}{k} X_k = f_m; \quad m = 1, 2, \ldots k_0, \tag{4.8}$$

где

$$R_{mk} = \int_{-1}^{1} T_m(x)T_k(x)dx, \quad f_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f_0(x)T_m(x)dx,$$

а $T_k(x)$ – ортогональные многочлены Чебышёва первого рода.

Исследуем систему (4.8) на регулярность в классе ограниченных последовательностей. Используя известные соотношения для полиномов Чебышёва первого рода получаем

$$R_{mk} = \begin{cases} 0, \quad m = k+1, \quad m = k-1 \\ -\dfrac{(-1)^{k+m}+1}{2}\left[\dfrac{1}{(m+k)^2-1} + \dfrac{1}{(m-k)^2-1}\right], \quad m \neq k+1, \quad m \neq k-1 \end{cases}$$

и, соответственно,

$$S_m = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{R_{mk}}{k}\right| \to 0, \quad m \to \infty \tag{4.9}$$

а при помощи формулы интегрирования по частям можно показать, что свободный член этой системы f_m стремится к нулю при $m \to \infty$ со скоростью не менее, чем m^{-1}, т.е.

$$f_m = O(m^{-1}); \quad m \to \infty \tag{4.10}$$

Таким образом, из (4.9) и (4.10) следует, что система (4.8) квазивполне регулярна для любых положительных значений параметров k_0 и λ в классе ограниченных последовательностей [23, 24].

В качестве примера рассмотрим случай $g(u) = u^2$. Тогда система рекуррентных уравнений (4.4) принимает вид:

$$\begin{gathered} L\psi_0(x) = -f_0(x), \quad L\psi_1(x) = \psi_0^2(x), \quad L\psi_2(x) = 2\psi_0(x)\psi_1(x) \\ \ldots \\ L\psi_k(x) = \sum_{i+j=k-1}\psi_i(x)\psi_j(x); \quad |x| < 1, \end{gathered} \tag{4.11}$$

где $L\psi(x) = k_0\psi''(x) + \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)dt}{t-x}$

Из системы (4.11) следует, что $\|\psi_n\|_C \le 4^{n-1}\left\|L^{-1}\right\|_{C^1\to C}^{2n+1}\|f_0\|_{C^1}^{n+1}$, и ряд (4.2) сходится при условии

$$\delta \le \frac{\delta_0}{4\left\|L^{-1}\right\|_{C^1\to C}\|f_0\|_{C^1}}, \quad 0 < \delta_0 = \text{const} < 1 \tag{4.12}$$

Замечание 2. Хорошо известна общая теорема Пуанкаре [25] о разложении решения нелинейных дифференциальных уравнений по степеням малого параметра. Тогда в случае нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения вида (4.1) при конкретных нелинейных функциях g, например, для степенных функций, можно получить условие вида (4.12) относительно малого параметра δ, при котором ряд (4.2) сходится. Соответственно, решение уравнения (4.1) при условиях (1.9) можно построить в виде ряда (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Банцури Р.Д.* Контактная задача для анизотропного клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 568 –571.
3. *Нуллер Б.М.* О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 306–316.

4. *Саркисян В.С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: ЕГУ, 1983. 534 с.
5. *Shavlakadze N.* The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion // Acta Appl. Math. 2007. V. 99. № 1. P. 29–51.
6. *Банцури Р.Д., Шавлакадзе Н.Н.* Контактная задача для кусочно-однородной ортотропной пластинки с конечным включением // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 133–138.
7. *Shavlakadze N.* The solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity // ZAMM. 2011. V. 91. № 12. P. 979–992.
8. *Shavlakadze N., Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F.* The contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a finite inclusion of variable cross-section // MMS. 2017. V. 22. № 6. P. 1326–1333.
9. *Lubkin J.I., Lewis I.C.* Adhesive shear flow for an axially loaded finite stringer bonded to an infinite sheet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1970. № 23. P. 521–533.
10. *Kesari H., Lew A.* Adhesive frictionless contact between an elastic isotropic half-space and rigid axisymetric punch // J. Elasticity. 2011. V. 106. № 2. P. 203–224.
11. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and elastic multi-layer coated substrate.// Intern. J. Solids &Struct. 2016. V. 87. P. 1–10.
12. *Borodich F.M.* The Hertz-Type and adhesive contact problem for depth-sensing indentation // Adv. Appl. Mech. 2014. V. 47. P. 225–366.
13. *Selvadurai A.P.S., Katebi A.* An Adhesive contact problem for an incompressible non-homogeneous elastic half-space // Acta Mech. 2015. V. 226. № 2. P. 249–265.
14. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С, Шавлакадзе Н.Н.* Приближенные и точные решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, связанного с контактной задачей теории упругости // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 114–124.
15. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С, Шавлакадзе Н.Н.* Контактное взаимодействие пластинки с нелинейно-упругим стрингером // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 101–110.
16. *Nonlinear Elasticity*: Theory and Application / *Ed. by Fu Y.B., Ogden R.W.* Cambridge: Univ. Press, 2001. 525 p.
17. *Luo A.C.J.* Nonlinear Deformable-Body, Dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 161–199.
18. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
19. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
20. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 302 с.
21. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
22. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.
23. *Канторович Л., Крылов В.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
24. *Канторович Л., Акилов Г.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
25. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнении. М.: Изд. технико-теорет. лит., 1950. 436 с.

The Contact Problem for Elastic Plate, on the Border which is Adhered Nonlinearly Deformable Stringer of Finite Length

N. N. Shavlakadze[a,#], O. M. Jokhadze[a] and S. S. Kharibegashvili[a]

[a] *Tbilisi State University, Pazmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia*
[#] *e-mail: nusha1961@yahoo.com*

A problem of determining the mechanical field in a homogeneous half-plane supposed by a finite homogeneous stringer, material of which obeys the nonlinear Hooke's law, is considered. The contact between the plate and stringer is realized by a thin glue layer. The posed problem is reduced to a nonlinear singular integro-differential equation. Using the Schauder fixed-point principle existence of a solution for this equation is proved. The uniqueness of the solution of the problem is proved. Using small parameter method, a system of recurrence linear singular integral equations of the first kind is obtained.

Keywords: contact problem, nonlinear integro-differential equation, Schauder principle, small parameter method

REFERENCES

1. *Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coverings and Layers. Moscow: Nauka, 1983. 487 p. (in Russian)
2. *Bantsuri R.* The contact problem for an anisotropic wedge with an elastic fastening // Dokl. Akad. Nauk SSSR ,1975, vol. 222, no. 3, P. 568–571.
3. *Nuller B.* The deformation of an elastic wedge- shaped plate supported by a rod of variable stiffness and a method of solving mixed problems // JAMM, 1976, vol. 40, no. 2, pp. 306–316.
4. *Sargsyan V.S.* Some Problems of the Mathematical Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Yerevan: YSU, 1983. 534 p. (in Russian)
5. *Shavlakadze N.* The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion // Acta Appl. Math., 2007, vol. 99, no. 1, pp. 29–51.
6. *Bantsuri R., Shavlakadze N.* The contact problem for piecewise homogeneous orthotropic plane with finite inclusion // JAMM, 2011, vol.75, no. 1, pp. 93–97.
7. *Shavlakadze N.* The solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity // ZAMM, 2011, vol. 91, no. 12, pp. 979–992.
8. *Shavlakadze N., Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F.* The contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a finite inclusion of variable cross-section // MMS, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1326–1333.
9. *Lubkin J.I., Lewis I.C.* Adhesive shear flow for an axially loaded finite stringer bonded to an infinite sheet// Quart. J. Mech. Appl. Math., 1970, no. 23, pp. 521–533.
10. *Kesari H., Lew A.* Adhesive frictionless contact between an elastic isotropic half-space and rigid axisymetric punch // J. Elasticity, 2011, vol. 106, no. 2, pp. 203–224.
11. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and elastic multi-layer coated substrate // Intern. J. Solids &Struct., 2016, vol. 87, pp. 1–10.
12. *Borodich F.M.* The Hertz-Type and adhesive contact problem for Depth-Sensing indentation // Adv. Appl. Mech., 2014, vol. 47, pp. 225–366.
13. *Selvadurai A.P.S., Katebi A.* An Adhesive contact problem for an incompressible non-homogeneous elastic half-space // Acta Mech., 2015, vol. 226, no. 2, pp. 249–265.
14. *Jokhadze O., Kharibegashvili S., Shavlakadze N.* Approximate and exact solution of a singular integro-differential equation related to contact problem of elasticity theory // JAMM, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 114–124.
15. *Jokhadze O, Kharibegashvili S, Shavlakadze N.* Contact interaction of the plate with a nonlinear elastic stringer // Mech. Solids, 2020, vol. 54, no. 3, pp. 440–447.
16. Nonlinear Elasticity: Theory and Application / *Ed. by Fu Y.B., Ogden R.W.* Cambridge: Univ. Press, 2001. 525 p.
17. *Luo A.C.J.* Nonlinear Deformable-Body, Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. pp. 161–199.
18. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian)
19. *Muskhelishvili N.I.* Singular Integral Equations. Moscow: Nauka, 1968. 511 p. (in Russian)
20. *Krasnov M.L.* Integral Equations. Moscow: Nauka, 1975. 302 p. (in Russian)
21. *Trenogin V.A.* Functional analysis. Moscow: Nauka, 1980. 495 p. (in Russian)
22. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. Moscow: Fizmatlit, 1962. 500 p. (in Russian)
23. *Kantorovich L., Krylov V.* Approximate Methods of Higher Analysis. Moscow; Leningrad: Fizmatgiz, 1962. 708 p. (in Russian)
24. *Kantorovich L., Akilov G.* Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1977. 741 p. (in Russian)
25. *Golubev V.V.* Lecture on the Analytical Theory of Differential Equations. Moscow: Izd. Tech. Teor. Lit, 1950. 436 p. (in Russian)