ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

$$\int_{\Omega} edu.$$

22-23 АПРЕЛЯ, 2011 ГОДА
КАРШИ

MODERN MATHEMATICS' PROBLEMS
(MMP'2011)

THE CONFERENCE

devoted to 20 anniversary of independence
of the Republic of Uzbekistan

ORGANIZED BY:

Karshi State University and
Karshi subsidiary of Tashkent University
of Information Technologies

PROCEEDINGS

$$\int\limits_{\Omega} edu.$$

ТРУДЫ

НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

посвященная 20 летию независимости
Республики Узбекистан

ОРГАНИЗАТОРЫ:

Каршинский государственный университет и
Каршинский филиал Ташкентского Университета
Информационных Технологий

22-23 АПРЕЛЯ, 2011 ГОДА, КАРШИ

СОДЕРЖАНИЕ

1-ЧАСТЬ

Azerbaijan, 2-4 June, cc.44-49. 2008.
8. Жураева Н.Ю. *Растущие полигармонические функции и задача Коши*. Узбекский математический журнал. 2, с.70-74. 2009.

Об одной задаче различения гипотез

Петре Бабилуа[1*], Бесарион Дочвири[1], Омар Пуртухия[2], Григол Сохадзе[1***]**
Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили,
0143, Университетская 3, Тбилиси, Грузия.
E-mail: [1*]petre.babilua@tsu.ge; [1**]besarion.dochviri@tsu.ge, [1***]grigol.sokhadze@tsu.ge
[2]Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили, 0143, Университетская 3, Тбилиси, Грузия; Институт Математики АН Грузии им. А. Размадзе, 0143, Университетская 2, Тбилиси, Грузия.
E-mail: omar.purtukhia@tsu.ge; o.purtukhia@gmail.com

Аннотация. Изучается вопрос о порядке аппроксимации непрерывной схемы.
Дискретными схемами в задаче различения гипотез о среднем значении стандартного винеровского процесса. Получены оценки скорости сходимости оптимальных моментов остановки и границ областей остановки к соответствующим величинам непрерывной задачи.

2000 AMS классификация: 60J05, 91B28, 91B70
Ключевые слова и фразы: винеровский процесс, гипотеза, оптимальная остановка, момент остановки, решающее правило, цена.

1. Пусть наблюдается случайный процесс $\xi = (\xi_t), t \geq 0$, с дифференциалом

$$d\xi_t = \theta dt + dw_t, \tag{1}$$

где $w = (w_t), t \geq 0$, -- стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, а θ – неизвестный параметр.

Рассмотрим условно-экстремальную постановку задачи различения двух простых гипотез относительно параметра θ (см. [1], гл. 4, \$1, \$2). Предположим, что неизвестный параметр θ принимает два значение: $\theta = 0$ (гипотеза H_0) и $\theta = 1$ (гипотеза H_1).

Введем следующие обозначения:

1) $\Re^{\xi} = \{\tau\}$ -- класс моментов остановки относительно семейства σ- алгебр $\Im_t^{\xi} = \sigma\{\xi_s, s \leq t\}$, причем $E_i(\tau) < \infty$, $i = 0, 1$, где E_i -- усреднение по мере P_i, индуцированной процессом ξ при $\theta = 0$ и $\theta = 1$,

2) $D^{\xi} = \{d\}$ -- совокупность $\Im_{\tau}^{\xi}$-измеримых функций $d = d(\omega)$, принимающих два значения: 0 и 1,

3) $K^{\xi}(\alpha, \beta)$ -- класс решающих правил $\delta = (\tau, d)$, $\tau \in \Re^{\xi}$, $d \in D^{\xi}$, для которых

$$\alpha(\delta) = P_0(d = 1) \leq \alpha, \ \beta(\delta) = P_1(d = 0) \leq \beta,$$

где $\alpha(\delta)$ и $\beta(\delta)$ -- вероятности ошибок первого и второго рода .

Задача состоит в отыскании такого (оптимального) решающего правила $\bar{\delta} = (\bar{\tau}, \bar{d}) \in K^{\xi}(\alpha, \beta)$, для которого $E_i(\bar{\tau}) \leq E_i(\tau), i = 0,1,$ для любого $\delta = (\tau, d) \in K^{\xi}(\alpha, \beta)$. При этом, если $\bar{d} = 0$, то принимается гипотеза H_0, а если $\bar{d} = 1$, то принимается гипотеза H_1.

Рассмотрим теперь т. н. дискретную и вспомогательну... следующие обозначения:

1)' $\mathfrak{R}^{\xi}_{\Delta,j}=\{\tau^{j}_{\Delta}\}$, $j=1,2$ -- класс моментов остановки относительно семейства σ-алгебр $\mathfrak{I}^{\xi}_{t,\Delta,1}=\sigma\{\xi_0,\xi_\Delta,\dots,\xi_t\}$, $\mathfrak{I}^{\xi}_{t,\Delta,2}=\sigma\{\xi_s, s\le t\}$, $t\in\Delta_R=\{0,\Delta,\dots,n\Delta,\dots\}$, причем $E_i(\tau^{j}_{\Delta})<\infty$, $i=0,1$; $j=1,2$, где E_i -- усреднение по мере P_i, индуцированной процессом ξ при $\theta=0$ и $\theta=1$,

2)' $D^{\xi}_{\Delta,j}=\{d^{j}_{\Delta}\}$ -- совокупность $\mathfrak{I}^{\xi}_{\tau^{j}_{\Delta},\Delta,j}$ -измеримых функций $d^{j}_{\Delta}=d^{j}_{\Delta}(\omega)$, принимающих два значения: 0 и 1,

3)' $K^{\xi}_{\Delta,j}(\alpha,\beta)$ -- класс решающих правил $\delta^{j}_{\Delta}=(\tau^{j}_{\Delta},d^{j}_{\Delta})$, $j=1,2$, с $\tau^{j}_{\Delta}\in\mathfrak{R}^{\xi}_{\Delta,j}$, $d^{j}_{\Delta}\in D^{\xi}_{\Delta,j}$, для которых

$$\alpha(\delta^{j}_{\Delta})=P_0(d^{j}_{\Delta}=1)\le\alpha,\quad \beta(\delta^{j}_{\Delta})=P_1(d^{j}_{\Delta}=0)\le\beta.$$

Предполагается, что в дискретной задаче ($j=1$) наблюдается последовательность

$$\xi_t=\theta\cdot t+w_t,\ t\in\Delta_R, \tag{2}$$

а во вспомогательной задаче ($j=2$) – процесс (1) , причем в обоих случаях моменты остановки $\tau^{j}_{\Delta}\in\Delta_R$, $j=1,2$. В этом случае каждая из этих двух задач состоит в определении решающего правила $\bar\delta^{j}_{\Delta}=(\bar\tau^{j}_{\Delta},\bar d^{j}_{\Delta})\in K^{\xi}_{\Delta,j}(\alpha,\beta)$, для которого $E_i(\bar\tau^{j}_{\Delta})\le E_i(\tau^{j}_{\Delta})$, $i=0,1$; $j=1,2$, для любого $\delta^{j}_{\Delta}=(\tau^{j}_{\Delta},d^{j}_{\Delta})\in K^{\xi}_{\Delta,j}(\alpha,\beta)$, $j=1,2$. При этом решающее правило $\bar\delta^{j}_{\Delta}$, $j=1,2$, называется оптимальным.

Для решения рассматриваемой задачи используем байесовскую постановку дискретной и вспомогательной задач [1].

Предположим, что на вероятностном пространстве $(\overline{\Omega},\overline{\mathfrak{I}},P^{\pi})$ задан случайный процесс

$$\overline{X}_t=\overline{\theta}\cdot t+\overline{w}_t,$$

где $\overline{w}_t$ стандартный винеровский процесс, $\overline{\theta}=\overline{\theta}(\omega)$ случайная величина такая, что

$$P^{\pi}(\overline{\theta}=0)=\pi,\quad P^{\pi}(\overline{\theta}=1)=1-\pi,\quad 0\le\pi\le1.$$

Пусть $\mathfrak{R}^{\overline{X},\Delta,j}=\{\sigma^{j}_{\Delta}\}$ -- класс моментов остановки относительно семейства $\mathfrak{I}^{\overline{X},\Delta,j}=\{\mathfrak{I}^{\overline{X},\Delta,j}_t\}$, $t\in\Delta_R$, $j=1,2$. Обозначим через $D^{\overline{X},\Delta,j}=\{h^{j}_{\Delta}\}$ совокупность $\mathfrak{I}^{\overline{X},\Delta,j}_t$ - измеримых функций, принимающих два значения 0 и 1 и пусть $K^{\overline{X},\Delta,j}$ – класс решающих правил $\gamma^{j}_{\Delta}=(\sigma^{j}_{\Delta},h^{j}_{\Delta})$.

В байесовской постановке в дискретной задаче ($j=1$) наблюдается случайная последовательность

$$\overline{X}_t=\overline{\theta}\cdot t+\overline{w}_t,\quad t\in\Delta_R,$$

а в вспомогательной задаче ($j = 2$) -- процесс

$$\overline{X}_t = \overline{\theta} \cdot t + \overline{w}_t, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

В обоих случаях требуется определить π- байесовское решающее правило $\overline{\gamma}_\Delta^{j,\pi} = (\overline{\sigma}_\Delta^{j,\pi}, \overline{h}_\Delta^{j,\pi})$, для которого

$$\rho^{j,\pi} = \inf_{\gamma_\Delta^j} \rho^\pi(\gamma_\Delta^j) = \rho^\pi(\overline{\gamma}_\Delta^{j,\pi}),$$

где $\gamma_\Delta^j \in K^{\overline{X},\Delta,j}$, а

$$\rho^\pi(\gamma_\Delta^j) = cE^\pi(\sigma_\Delta^j) + aP^\pi(\overline{\theta} = 0, h_\Delta^j = 0) +$$
$$+ bP^\pi(\overline{\theta} = 1, h_\Delta^j = 1), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Заметим, что как и в [4] можно доказать справедливость равенства $\rho^{1,\pi} = \rho^{2,\pi}$, которое используется в доказательствах ниже приводимых утверждений.

2. Отметим, что задачу различения гипотез можно изучить как задачу оптимальной остановки однородного стандартного марковского процесса (см. [1], гл. 4, \$1, \$2, а также работы [2], [3], [4]). Хорошо известно, что в задаче различения гипотез для процесса (1), при условии $\alpha + \beta < 1$, оптимальное решающее правило $\overline{\delta} = (\overline{\tau}, \overline{d}) \in K^\xi(\alpha, \beta)$ существует и определяется следующим образом:

$$\overline{\tau} = \inf\{t \geq 0 : \lambda_{\overline{\tau}} \notin (\ln A, \ln B)\}, \tag{4}$$

$$\overline{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\overline{\tau}} \geq \ln B, \\ 0, & \lambda_{\overline{\tau}} \leq \ln A, \end{cases} \tag{5}$$

где $\lambda_t = \xi_t - \dfrac{t}{2}$, а $\ln A$ и $\ln B$ некоторые постоянные границы продолжения (прекращения) наблюдений; при этом

$$E_0(\overline{\tau}) = \frac{(1-\alpha)\ln\dfrac{1-\alpha}{\beta} + \alpha \ln\dfrac{\alpha}{1-\beta}}{2}, \tag{6}$$

$$E_1(\overline{\tau}) = \frac{\beta \ln\dfrac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{2}. \tag{7}$$

Лемма 1. В задаче различения двух гипотез для процесса (2) оптимальное решающее правило $\overline{\delta}_\Delta^1 = (\overline{\tau}_\Delta^1, \overline{d}_\Delta^1) \in K_{\Delta,1}^\xi(\alpha, \beta)$ существует и определяется следующим образом:

$$\overline{\tau}_\Delta^1 = \inf\{t \geq 0 : t \in \Delta_R, \lambda_t \notin (\ln B_\Delta, \ln A_\Delta)\}, \tag{8}$$

$$\overline{d}_\Delta^1 = \begin{cases} 1, & \lambda_{\overline{\tau}_\Delta^1} \geq \ln A_\Delta, \\ 0, & \lambda_{\overline{\tau}_\Delta^1} \leq \ln B_\Delta, \end{cases} \tag{9}$$

где $\lambda_t = \xi_t - \dfrac{t}{2}$, $t \in \Delta_R$, а $\ln A_\Delta$ и $\ln B_\Delta$ некоторые постоянные границы.

Лемма 2. Оптимальное решающее правило дискретной задачи является оптимальным и во вспомогательном задаче.

Теорема 1. Пусть $\Delta \le 1$, $\alpha + \beta < 1$ и определены моменты остановки (4), (8). Тогда имеет место следующая оценка:

$$|E_i(\overset{-1}{\tau}_{\Delta}) - E_i(\bar{\tau})| \le \Delta, \quad i = 0,1. \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть $\Delta \le 1$, $\alpha + \beta < 1$ и определены постоянные границы $\ln A$, $\ln B$, $\ln A_{\Delta}$ и $\ln B_{\Delta}$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$|\ln A_{\Delta} - \ln A| < \frac{2}{f(1)}\sqrt{\Delta}, \tag{11}$$

$$|\ln B_{\Delta} - \ln B| < \frac{2}{f(1)}\sqrt{\Delta}, \tag{12}$$

где функция $f = f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Работа частично финансируется Грузинским Национальным Научным Фондом, грантамы ## GNSF/ST 09_471_ 3-104 и GNSF/ST 09_383_3-106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. , Статистический последовательный анализ, Москва, Наука, 1976.
2. Dochviri B., Shashiashvili M., On the optimal stopping of a homogeneous Markov process on a finite time interval, Math. Nachr., 150, 269-281, 1992.
3. Dochviri B., Optimal stopping of a nonterminating homogeneous standard Markov process on a finite time interval, Proc. Steklov Ints. Math., Issue 4, 97-106, 1994.
4. Шашиашвили М., О порядке аппроксимации дискретными схемами задач оптимальной остановки марковских процессов, Сообщ. АН Грузии, 84, 3, 529-532, 1976.

Математическое моделирование краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

Р.К. Бердиев, М.Б. Баклушин, Ч.Б. Нармурадов
Термиз давлат университети, Термез
E-mail: munisabonu@mail.ru

Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned} \mu_1\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{k_1}{2}\frac{\partial^2 y^2}{\partial x^2} - k_2\frac{y-h}{m_2} + \varepsilon(t) \\ \mu_3\frac{\partial h}{\partial t} &= T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_2\frac{y-h}{m_2} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

С помощью данной системы описываются многие физические процессы, например неустановившееся движение грунтовых вод в трехслойной среде, содержащий анизотропный пласт.

Вопросы математического моделирования некоторых трудноформализуемых и сложных объектов изложены в [2].