

**ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ  
МАТЕМАТИКИ**

$\int_{\Omega} edu.$

**22-23 АПРЕЛЯ, 2011 ГОДА  
КАРШИ**

**MODERN MATHEMATICS' PROBLEMS  
(MMP'2011)**

**THE CONFERENCE**

devoted to 20 anniversary of independence  
of the Republic of Uzbekistan

ORGANIZED BY:

*Karshi State University and  
Karshi subsidiary of Tashkent University  
of Information Technologies*

**PROCEEDINGS**

*J edu.*

$\Omega$

**ТРУДЫ**

**НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ  
МАТЕМАТИКИ**

посвященная 20 летию независимости  
Республики Узбекистан

ОРГАНИЗАТОРЫ:

*Каршинский государственный университет и  
Каршинский филиал Ташкентского Университета  
Информационных Технологий*

22-23 АПРЕЛЯ, 2011 ГОДА, КАРШИ

**СОДЕРЖАНИЕ**  
**1-ЧАСТЬ**

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | Нормурадов М.Т. Предисловие   | 5  |
| 2.  | Boboyarova N. Laplace transform of the space $L^1(R^+)$   | 6  |
| 3.  | Dochviri B., Dochviri T., Purtukhia O. and Sokhadze G. On the modeling of the standard options pricing process                              | 7  |
| 4.  | Faysullayeva S.F. Some results for the first-order autoregressive model   | 10 |
| 5.  | Imomov A. A. To'xtayev E. On connection between the Q-processes and the Branching Processes allowing Immigration                            | 11 |
| 6.  | Lakaev S. N., Holmatov Sh. Yu. Some consequences of the implicit function theorem   | 14 |
| 7.  | Lukyanova N. A. Semenova D. Entropy analysis of the eventological distributions   | 17 |
| 8.  | Murodov Sh. N. The period of the generators of a class of evolution algebras  | 21 |
| 9.  | Nadaraya E., Babilua P., Sokhadze G. On one nonparametric estimate of a Bernoulli regression function                                       | 22 |
| 10. | Rozikov U. A. A dynamical system with multi-dimensional-time  | 27 |
| 11. | Safarov A. R. Fazasi $D_\infty$ maxsuslikka ega bo'lgan trigonometrik integrallarning tekis baholari  | 30 |
| 12. | Semenova D. V., Nartov Y. V. Markowitz's Direct Eventological Problem   | 33 |
| 13. | Нормурадов М.Т., Абдушукуров А.А., Шарипов О.Ш., Хусанбоев Я.М., Аликулов Э.О., Имомов А.А. Академик Ш.Қ. Фармонов 70 ёшда                  | 37 |
| 14. | Абдикаликов Ф.А. Асимптотические представления для оценок условной функции распределения по неполным данным при непараметрической регрессии | 39 |
| 15. | Абдирахмонова Р.Э. Геометрическое строение множества квадратичных автоморфизмов   | 40 |
| 16. | Абдукаримов А., Исломов И. Обобщение формулы Грина для управления Гельмгольца   | 42 |
| 17. | Абдуллаев Ж. И., Мамеров Б. У. Panjaradagi bir zarrachali sistema Hamiltonianining xos qiymatlari   | 44 |
| 18. | Абдурахманов С., Турметов Б. О разрешимости краевой задачи для уравнения гельмгольца с граничным оператором дробного дифференцирование      | 47 |
| 19. | Абдушукуров А.А., Душатов Н.Т. Оценивание функциональных характеристик по зависимым неполным данным   | 48 |
| 20. | Абзалимов Р.Р., Абдикайимова Г. Экспоненциальные оценки для вероятности уклонений суммы случайных полей и закон повторного логарифма        | 50 |
| 21. | Абулов М.О. О разрешимости смешанной задачи для одного нелинейного уравнения высокого порядка   | 53 |
| 22. | Адашев Ж.К. Классификация подкласса комплексных естественным образом градуированных алгебр зинбиеля   | 55 |
| 23. | Азимов Ж.Б., Асимптотические свойства ветвящихся процессов Фостера-Пейкса с убывающей иммиграцией   | 58 |
| 24. | Аликулов Э.О. Условия связности графика многозначных отображений  | 60 |
| 25. | Аликулов Э.О., Хамраев А. Ю. Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора  | 62 |
| 26. | Алимов Х. Н., Эрназарова Н.Х. Об одном классе задач управления с распределенными параметрами  | 64 |
| 27. | Алишев А. Асимптотические интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром                                   | 68 |
| 28. | Аллаков И., Абраев Б. О количестве решении пары линейных уравнений с тремя простыми переменными   | 70 |
| 29. | Ашурова З. Р., Жураева Н.Ю., Саидов У. Интегральное представление для одного класса полигармонических функции                               | 73 |
| 30. | Бабилуа П., Dochviri B., Purtukhia O., Sokhadze G. Об одной задаче различения гипотез   | 77 |
| 31. | Бердиев Р.К., Баклушин М.Б., Нормурадов Ч.Б. Математическое моделирование   | 80 |

### Об одной задаче различения гипотез

Петре Бабилуа<sup>1\*</sup>, Бесарион Дочвири<sup>1\*\*</sup>, Омар Пуртухия<sup>2</sup>, Григол Сохадзе<sup>1\*\*\*</sup>

Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили,  
0143, Университетская 3, Тбилиси, Грузия.

E-mail: <sup>1\*</sup>petre.babilua@tsu.ge; <sup>1\*\*</sup>besarion.dochviri@tsu.ge, <sup>1\*\*\*</sup>grigol.sokhadze@tsu.ge

<sup>2</sup>Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили, 0143, Университетская 3, Тбилиси, Грузия; Институт Математики АН Грузии им. А. Размадзе, 0143, Университетская 2, Тбилиси, Грузия.

E-mail: omar.purtukhia@tsu.ge; o.purtukhia@gmail.com

**Аннотация.** Изучается вопрос о порядке аппроксимации непрерывной схемы.

Дискретными схемами в задаче различения гипотез о среднем значении стандартного винеровского процесса. Получены оценки скорости сходимости оптимальных моментов остановки и границ областей остановки к соответствующим величинам непрерывной задачи.

**2000 AMS классификация:** 60J05, 91B28, 91B70

**Ключевые слова и фразы:** винеровский процесс, гипотеза, оптимальная остановка, момент остановки, решающее правило, цена.

1. Пусть наблюдается случайный процесс  $\xi = (\xi_t), t \geq 0$ , с дифференциалом

$$d\xi_t = \theta dt + dw_t, \quad (1)$$

где  $w = (w_t), t \geq 0$ , -- стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , а  $\theta$  -- неизвестный параметр.

Рассмотрим условно-экстремальную постановку задачи различения двух простых гипотез относительно параметра  $\theta$  (см. [1], гл. 4, §1, §2). Предположим, что неизвестный параметр  $\theta$  принимает два значения:  $\theta = 0$  (гипотеза  $H_0$ ) и  $\theta = 1$  (гипотеза  $H_1$ ).

Введем следующие обозначения:

1)  $\mathfrak{R}^\xi = \{\tau\}$  -- класс моментов остановки относительно семейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{F}_t^\xi = \sigma\{\xi_s, s \leq t\}$ , причем  $E_i(\tau) < \infty, i = 0, 1$ , где  $E_i$  -- усреднение по мере  $P_i$ , индуцированной процессом  $\xi$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = 1$ ,

2)  $D^\xi = \{d\}$  -- совокупность  $\mathfrak{F}_\tau^\xi$ -измеримых функций  $d = d(\omega)$ , принимающих два значения: 0 и 1,

3)  $K^\xi(\alpha, \beta)$  -- класс решающих правил  $\delta = (\tau, d), \tau \in \mathfrak{R}^\xi, d \in D^\xi$ , для которых  $\alpha(\delta) = P_0(d = 1) \leq \alpha, \beta(\delta) = P_1(d = 0) \leq \beta$ ,

где  $\alpha(\delta)$  и  $\beta(\delta)$  -- вероятности ошибок первого и второго рода.

Задача состоит в отыскании такого (оптимального) решающего правила  $\bar{\delta} = (\bar{\tau}, \bar{d}) \in K^\xi(\alpha, \beta)$ , для которого  $E_i(\bar{\tau}) \leq E_i(\tau), i = 0, 1$ , для любого  $\delta = (\tau, d) \in K^\xi(\alpha, \beta)$ . При этом, если  $\bar{d} = 0$ , то принимается гипотеза  $H_0$ , а если  $\bar{d} = 1$ , то принимается гипотеза  $H_1$ .

Рассмотрим теперь т. н. дискретную и вспомогательную следующие обозначения:

- 1)  $\mathfrak{R}_{\Delta, j}^{\xi} = \{\tau_{\Delta}^j\}$ ,  $j=1, 2$  -- класс моментов остановки относительно семейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{F}_{t, \Delta, 1}^{\xi} = \sigma\{\xi_0, \xi_{\Delta}, \dots, \xi_t\}$ ,  $\mathfrak{F}_{t, \Delta, 2}^{\xi} = \sigma\{\xi_s, s \leq t\}$ ,  $t \in \Delta_R = \{0, \Delta, \dots, n\Delta, \dots\}$ , причем  $E_i(\tau_{\Delta}^j) < \infty$ ,  $i=0, 1$ ;  $j=1, 2$ , где  $E_i$  -- усреднение по мере  $P_i$ , индуцированной процессом  $\xi$  при  $\theta=0$  и  $\theta=1$ ,
- 2)  $D_{\Delta, j}^{\xi} = \{d_{\Delta}^j\}$  -- совокупность  $\mathfrak{F}_{\Delta, j}^{\xi}$ -измеримых функций  $d_{\Delta}^j = d_{\Delta}^j(\omega)$ , принимающих два значения: 0 и 1,
- 3)  $K_{\Delta, j}^{\xi}(\alpha, \beta)$  -- класс решающих правил  $\delta_{\Delta}^j = (\tau_{\Delta}^j, d_{\Delta}^j)$ ,  $j=1, 2$ , с  $\tau_{\Delta}^j \in \mathfrak{R}_{\Delta, j}^{\xi}$ , для которых

$$\alpha(\delta_{\Delta}^j) = P_0(d_{\Delta}^j = 1) \leq \alpha, \quad \beta(\delta_{\Delta}^j) = P_1(d_{\Delta}^j = 0) \leq \beta. \quad (2)$$

Предполагается, что в дискретной задаче ( $j=1$ ) наблюдается последовательность  $\xi_t = \theta \cdot t + w_t$ ,  $t \in \Delta_R$ ,

а во вспомогательной задаче ( $j=2$ ) -- процесс (1), причем в обоих случаях моменты остановки  $\tau_{\Delta}^j \in \Delta_R$ ,  $j=1, 2$ . В этом случае каждая из этих двух задач состоит в определении решающего правила  $\bar{\delta}_{\Delta}^j = (\bar{\tau}_{\Delta}^j, \bar{d}_{\Delta}^j) \in K_{\Delta, j}^{\xi}(\alpha, \beta)$ , для которого  $E_i(\bar{\tau}_{\Delta}^j) \leq E_i(\tau_{\Delta}^j)$ ,  $i=0, 1$ ;  $j=1, 2$ , для любого  $\delta_{\Delta}^j = (\tau_{\Delta}^j, d_{\Delta}^j) \in K_{\Delta, j}^{\xi}(\alpha, \beta)$ ,  $j=1, 2$ . При этом решающее правило  $\bar{\delta}_{\Delta}^j$ ,  $j=1, 2$ , называется оптимальным.

Для решения рассматриваемой задачи используем байесовскую постановку дискретной и вспомогательной задач [1].

Предположим, что на вероятностном пространстве  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{F}}, P^{\pi})$  задан случайный процесс

$$\bar{X}_t = \bar{\theta} \cdot t + \bar{w}_t,$$

где  $\bar{w}_t$  стандартный винеровский процесс,  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\omega)$  случайная величина такая, что

$$P^{\pi}(\bar{\theta} = 0) = \pi, \quad P^{\pi}(\bar{\theta} = 1) = 1 - \pi, \quad 0 \leq \pi \leq 1.$$

Пусть  $\mathfrak{R}^{\bar{X}, \Delta, j} = \{\sigma_{\Delta}^j\}$  -- класс моментов остановки относительно семейства  $\mathfrak{F}^{\bar{X}, \Delta, j} = \{\mathfrak{F}_t^{\bar{X}, \Delta, j}\}$ ,  $t \in \Delta_R$ ,  $j=1, 2$ . Обозначим через  $D^{\bar{X}, \Delta, j} = \{h_{\Delta}^j\}$  совокупность  $\mathfrak{F}_t^{\bar{X}, \Delta, j}$ -измеримых функций, принимающих два значения 0 и 1 и пусть  $K^{\bar{X}, \Delta, j}$  -- класс решающих правил  $\gamma_{\Delta}^j = (\sigma_{\Delta}^j, h_{\Delta}^j)$ .

В байесовской постановке в дискретной задаче ( $j=1$ ) наблюдается случайная последовательность

$$\bar{X}_t = \bar{\theta} \cdot t + \bar{w}_t, \quad t \in \Delta_R,$$

а в вспомогательной задаче ( $j = 2$ ) -- процесс

$$\bar{X}_t = \bar{\theta} \cdot t + \bar{w}_t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

В обоих случаях требуется определить  $\pi$ -байесовское решающее правило  $\gamma_{\Delta}^{j,\pi} = (\bar{\sigma}_{\Delta}^{j,\pi}, \bar{h}_{\Delta}^{j,\pi})$ , для которого

$$\rho^{j,\pi} = \inf_{\gamma_{\Delta}^j} \rho^{\pi}(\gamma_{\Delta}^j) = \rho^{\pi}(\bar{\gamma}_{\Delta}^{j,\pi}),$$

где  $\gamma_{\Delta}^j \in K^{\bar{X}, \Delta, j}$ , а

$$\begin{aligned} \rho^{\pi}(\gamma_{\Delta}^j) &= cE^{\pi}(\sigma_{\Delta}^j) + aP^{\pi}(\bar{\theta} = 0, h_{\Delta}^j = 0) + \\ &+ bP^{\pi}(\bar{\theta} = 1, h_{\Delta}^j = 1), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что как и в [4] можно доказать справедливость равенства  $\rho^{1,\pi} = \rho^{2,\pi}$ , которое используется в доказательствах ниже приводимых утверждений.

2. Отметим, что задачу различения гипотез можно изучать как задачу оптимальной остановки однородного стандартного марковского процесса (см. [1], гл. 4, §1, §2, а также работы [2], [3], [4]). Хорошо известно, что в задаче различения гипотез для процесса (1), при условии  $\alpha + \beta < 1$ , оптимальное решающее правило  $\bar{\delta} = (\bar{\tau}, \bar{d}) \in K^{\xi}(\alpha, \beta)$  существует и определяется следующим образом:

$$\bar{\tau} = \inf\{t \geq 0 : \lambda_{\tau} \notin (\ln A, \ln B)\}, \quad (4)$$

$$\bar{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\bar{\tau}} \geq \ln B, \\ 0, & \lambda_{\bar{\tau}} \leq \ln A, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\lambda_t = \xi_t - \frac{t}{2}$ , а  $\ln A$  и  $\ln B$  некоторые постоянные границы продолжения (прекращения) наблюдений; при этом

$$E_0(\bar{\tau}) = \frac{(1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta}}{2}, \quad (6)$$

$$E_1(\bar{\tau}) = \frac{\beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{2}. \quad (7)$$

**Лемма 1.** В задаче различения двух гипотез для процесса (2) оптимальное решающее правило  $\bar{\delta}_{\Delta}^{-1} = (\bar{\tau}_{\Delta}^{-1}, \bar{d}_{\Delta}^{-1}) \in K_{\Delta,1}^{\xi}(\alpha, \beta)$  существует и определяется следующим образом:

$$\bar{\tau}_{\Delta}^{-1} = \inf\{t \geq 0 : t \in \Delta_R, \lambda_t \notin (\ln B_{\Delta}, \ln A_{\Delta})\}, \quad (8)$$

$$\bar{d}_{\Delta}^{-1} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\bar{\tau}_{\Delta}^{-1}} \geq \ln A_{\Delta}, \\ 0, & \lambda_{\bar{\tau}_{\Delta}^{-1}} \leq \ln B_{\Delta}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\lambda_t = \xi_t - \frac{t}{2}$ ,  $t \in \Delta_R$ , а  $\ln A_{\Delta}$  и  $\ln B_{\Delta}$  некоторые постоянные границы.

**Лемма 2.** Оптимальное решающее правило дискретной задачи является оптимальным и во вспомогательном задаче.

**Теорема 1.** Пусть  $\Delta \leq 1$ ,  $\alpha + \beta < 1$  и определены моменты остановки (4), (8). Тогда имеет место следующая оценка:

$$|E_i(\bar{\tau}_\Delta^{-1}) - E_i(\bar{\tau})| \leq \Delta, \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\Delta \leq 1$ ,  $\alpha + \beta < 1$  и определены постоянные границы  $\ln A$ ,  $\ln B$ ,  $\ln A_\Delta$  и  $\ln B_\Delta$ . Тогда имеют место следующие оценки:

$$|\ln A_\Delta - \ln A| < \frac{2}{f(1)} \sqrt{\Delta}, \quad (11)$$

$$|\ln B_\Delta - \ln B| < \frac{2}{f(1)} \sqrt{\Delta}, \quad (12)$$

где функция  $f = f(x)$  определяется равенством

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Работа частично финансируется Грузинским Национальным Научным Фондом, гранты ## GNSF/ST 09\_471\_3-104 и GNSF/ST 09\_383\_3-106.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А., Статистический последовательный анализ, Москва, Наука, 1976.
2. Dochviri B., Shashvashvili M., On the optimal stopping of a homogeneous Markov process on a finite time interval, Math. Nachr., 150, 269-281, 1992.
3. Dochviri B., Optimal stopping of a nonterminating homogeneous standard Markov process on a finite time interval, Proc. Steklov Ints. Math., Issue 4, 97-106, 1994.
4. Шашиашвили М., О порядке аппроксимации дискретными схемами задач оптимальной остановки марковских процессов, Сообщ. АН Грузии, 84, 3, 529-532, 1976.

### Математическое моделирование краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

**Р.К. Бердиев, М.Б. Баклушин, Ч.Б. Нармурадов**

Термиз давлат университети, Термез

E-mail: munisabonu@mail.ru

Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений [1]

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{k_1}{2} \frac{\partial^2 y^2}{\partial x^2} - k_2 \frac{y-h}{m_2} + \varepsilon(t) \\ \mu_3 \frac{\partial h}{\partial t} &= T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_2 \frac{y-h}{m_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

С помощью данной системы описываются многие физические процессы, например неустановившееся движение грунтовых вод в трехслойной среде, содержащий анизотропный пласт. Вопросы математического моделирования некоторых трудноформализуемых и сложных объектов изложены в [2].