О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете, *Дифференц. уравнения*, 2006, том 42, номер 11, 1571–1580

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 11, с. 1571–1580

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2006 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2006. Т. 42. № 6).

Э. А. Бакирова, Д. С. Джумабаев (Алматы, Казахстан) "Корректная разрешимость линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения" (29 сентября 2006 г.).

На отрезке $[0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K(t,s)x(s)\,ds + f(t), \quad Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $d \in R^n$, функции $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на отрезке $[0,T]$, функция $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T] \times [0,T]$. Задача (1) аппроксимируется задачей

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)hy[(j-1)h] + f(t), \quad By(0) + Cy(T) = d, \tag{2}$$

где $h > 0: \ mh = T, \ K_j(t) = K[t,(j-1)h], \ t \in (0,T), \ j = \overline{1,m}$.

Теорема 1. *Задача (1) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существует такое $h_0 > 0$, что для всех $h \in (0,h_0] : \ mh = T$ задача (2) корректно разрешима с не зависящей от h константой.*

Через $Q_\nu(h)$ обозначим $nm \times nm$-матрицу $(q_{ij}(h))$, $i,j = \overline{1,m}$, с блочными элементами $q_{11}(h) = h[B + hCH^1_{\nu,m}(h)]$, $q_{1s}(h) = h^2CH^s_{\nu,m}(h)$, $s = \overline{2,m-1}$, $q_{1m}(h) = hC[I + D_{\nu,m}(h) + hH^m_{\nu,m}(h)]$, $q_{ij}(h) = hH^j_{\nu,i-1}(h)$, $i = \overline{2,m}$, $j \neq i-1$, $j \neq i$, $j = \overline{2,m}$, $q_{ii-1}(h) = I + D_{\nu,i-1}(h) + hH^{i-1}_{\nu,i-1}(h)$, $q_{ii} = -I + hH^i_{\nu,i-1}(h)$, $i = \overline{2,m}$, где

$$D_{\nu r}(h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)\,d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)\,d\tau_\nu \ldots d\tau_1,$$

$$H^j_{\nu r}(h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} K_j(\tau_1)\,d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} K_j(\tau_\nu)\,d\tau_\nu \ldots d\tau_1,$$

$$\|A(t)\| = \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}(t)| \le \alpha, \quad \|K(t,s)\| \le \beta, \quad \alpha,\beta \text{ – константы.}$$

Теорема 2. *Задача (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существует $\nu \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(h) : R^{nm} \to R^{nm}$ обратима и выполняется неравенство*

$$q_\nu(h) = \|[Q_\nu(h)]^{-1}\| \max(1, h\|C\|) \left\{ \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] [1 + \beta T h] - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \right\} < 1.$$

В. В. Быков (Москва) "Об измеримости некоторых характеристических частот линейного уравнения" (29 сентября 2006 г.).

Для заданного натурального n обозначим через $\mathcal{E}^n$ множество уравнений

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbf{R}^+,$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами, образующими строку $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ (которую будем отождествлять с соответствующим уравнением).

Определим [1] главные частоты знаков (соответственно нулей) уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ с помощью формул

$$\omega_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(y,t), \quad \omega_{\underline{i}}^0(a) \equiv \sup_{L \in G_*^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^0(y,t), \quad i = 1,\ldots,n,$$

где через $G_*^i(a)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства решений уравнения a с выколотым нулевым решением, через $\nu(y,t)$ – число смен знака решения y на интервале $(0;t)$, а через $\nu^0(y,t)$ – число нулей того же решения на том же промежутке.

Теорема. *Пусть M – замкнутое подмножество $\mathbf{R}$, а отображение $\mu : M \to \mathcal{E}^n$ непрерывно в смысле компактно-открытой топологии на $\mathcal{E}^n$. Тогда функции $\omega_{\underline{1}}^0 \circ \mu$, $\omega_{\underline{n}}^0 \circ \mu$ и $\omega_{\underline{i}} \circ \mu$, $i = 2,\ldots,n$, измеримы по Лебегу, а их сужения на некоторое плотное в M множество типа G_δ непрерывны.*

Замечание. Из результата работы [1] следует, что в условиях теоремы функция $\omega_{\underline{1}} \circ \mu$ принадлежит второму классу Бэра.

Литература. 1. Сергеев И.Н. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6. С. 852.

Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова (Минск, Беларусь) "Оценки характеристических и нижних показателей решений линейных систем Коппеля–Конти" (6 октября 2006 г.).

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами и фундаментальными матрицами $X_A(t)$.

Определение [1, с. 131; 2]. Будем говорить, что система (1_A) принадлежит множеству L^pD с параметром $p > 0$, если для нее существуют такие взаимно дополнительные проекторы P_1 и P_2, $P_1 + P_2 = E$, что выполнены неравенства

$$\int_0^t \|X_A(t)P_1X_A^{-1}(\tau)\|^p\,d\tau \leq C_p(A) < +\infty, \quad \int_t^{+\infty} \|X_A(t)P_2X_A^{-1}(\tau)\|^p\,d\tau \leq D_p(A) < +\infty, \quad t \geq 0.$$

В случае $P_1 = E$, $P_2 = 0$ соответствующее множество L^pD, $p > 0$, обозначают через L^pS, а в случае $P_1 = 0$, $P_2 = E$ – через L^pN.

Теорема 1. *Если система (1_A) принадлежит множеству L^pS (множеству L^pN) при $p > 0$, то ее старший характеристический показатель $\lambda_n(A)$ (младший характеристический показатель $\lambda_1(A)$) удовлетворяет оценке $\lambda_n(A) \leq -[pC_p(A)]^{-1} < 0$ (оценке $\lambda_1(A) \geq [pD_p(A)]^{-1} > 0$) при $p > 0$.*

Теорема 2. *Если система (1_A) принадлежит множеству L^pD, $p > 0$, с взаимно дополнительными проекторами P_1 и P_2, то характеристические показатели $\lambda[x_1]$ и $\lambda[x_2]$ любых ее нетривиальных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с начальными векторами $x_i(0) \in P_iR^n$, $i = 1, 2$, удовлетворяют оценкам*

$$\lambda[x_1] \leq -[pC_p(A)]^{-1} < 0, \quad \lambda[x_2] \geq [pD_p(A)]^{-1} > 0, \quad p > 0.$$

Для нижних показателей Перрона $\pi[x]$ нетривиальных решений $x(t)$ систем (1_A) из множества L^pN, $p > 0$, оценка, аналогичная полученной выше для характеристических показателей $\lambda[x]$, уже не имеет места.

Теорема 3. *Для любых конечных или бесконечных чисел $\lambda \in (0, +\infty]$ и $\omega \in [-\infty, \lambda]$ существует такое принадлежащее пересечению $\bigcap_{p>0} L^pN$ одномерных множеств L^pN, $p > 0$, скалярное уравнение (1_a) с кусочно-непрерывным коэффициентом $a : [0, +\infty) \to R^1$, что все его нетривиальные решения $x(t)$ имеют характеристический Ляпунова $\lambda[x] = \lambda$ и нижний Перрона $\pi[x] = \omega$ показатели.*

Вместе с тем справедлива и

Теорема 4. *Если система (1_A) с ограниченными кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ коэффициентами принадлежит множеству L^pN при $p > 0$, то нижние показатели $\pi[x]$ ее нетривиальных решений $x(t)$ удовлетворяют оценке $\pi[x] \geq [pD_p(A)]^{-1} > 0$, $p > 0$.*

Литература. 1. Coppel W.A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston, 1965. 2. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. V. 9. № 1. P. 23–26.

И. Н. Сергеев (Москва) "Класс Бэра старшей частоты корней линейного уравнения" (6 октября 2006 г.).

Множество $\mathcal{E}_n$ $(n>1)$ всех уравнений

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)\dot y+a_n(t)y=0,\quad t\in\mathbf{R}^+,$$

определяемых соответствующими наборами $a\equiv(a_1,\ldots,a_n)$ непрерывных ограниченных коэффициентов, наделим *равномерной* или компактно-открытой на $\mathbf{R}^+$ топологией. Назовем *старшей (нижней характеристической) частотой корней* уравнения $a\in\mathcal{E}_n$ величину

$$\omega(a)\equiv\sup_{y\in\mathcal{S}_*(a)}\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\nu(y,t),$$

где $\mathcal{S}_*(a)$ – множество всех ненулевых решений этого уравнения, а $\nu(y,t)$ – число всех *корней* (т.е. всех нулей с учетом их кратности) решения y на интервале $(0;\pi t)$. Для функции $\omega:\mathcal{E}_n\to\mathbf{R}$ с помощью методов работы [1] доказывается

Теорема 1. *Старшая частота корней в смысле равномерной топологии на $\mathcal{E}_n$ при $n=2$ непрерывна, а при $n>2$ разрывна.*

Теорема 2. *Старшая частота корней принадлежит в точности второму классу Бэра в смысле компактно-открытой топологии на $\mathcal{E}_n$ при любом $n>1$, а в смысле равномерной при любом $n>2$.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

Н. Б. Искакова (Алматы, Казахстан) "Корректная разрешимость периодической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом" (13 октября 2006 г.).

На отрезке $[-\tau,T]$ рассматривается краевая задача вида

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+f(t),\quad t\in[0,T],\quad x\in R^n,\quad \tau>0, \tag{1}$$

$$x(z)=\operatorname{diag}[x(0)]\varphi(z),\quad z\in[-\tau,0], \tag{2}$$

$$x(0)=x(T), \tag{3}$$

где τ – запаздывание, $n\times n$-матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на отрезке $[0,T]$, $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, заданная на начальном множестве $[-\tau,0]$ и такая, что $\varphi_i(0)=1$, $i=\overline{1,n}$. Через α, β обозначим числа, ограничивающие сверху нормы матриц $A(t)$, $B(t)$ соответственно.

Вводятся натуральные числа l, ν и по исходным данным $A(t)$, $B(t)$, $\varphi(t)$ составляется матрица специальной структуры $Q_\nu(l)$.

Теорема. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu\in\mathbb{N}$ существует $l=l(\nu)$, при котором матрица $Q_\nu(l):\ R^{nNl}\to R^{nNl}$ обратима и выполняется неравенство*

$$q_\nu(l)=\|[Q_\nu(l)]^{-1}\|\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\alpha\tau}{l}\right)^{\nu}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\rho!}\left(\frac{\beta\tau}{l}\sum_{k_1=0}^{\nu-1}\frac{1}{k_1!}\left(\frac{\alpha\tau}{l}\right)^{k_1}\right)^{\rho}P(l)<1,$$

где

$$P(l)=\max_{1\le i\le N-1}\left\{e^{\alpha\tau/l}\sum_{k_1=1}^{i}\left(\frac{\beta\tau}{l}e^{\alpha\tau/l}\right)^{k_1}+e^{\alpha\tau/l}-1+\left(\frac{\beta\tau}{l}e^{\alpha\tau/l}\right)^{i+1}\max_{s\in[-\tau,0]}\|\varphi(s)\|\right\}.$$

А. Ф. Рожин (Москва) "О полунепрерывности сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной системы" (13 октября 2006 г.).

Множество $\mathcal{M}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ всех линейных систем

$$\dot x=A(t)x+f(t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными оператор-функциями A, ограниченными на $\mathbb{R}^+$, и неоднородностями f, имеющими неположительный показатель Ляпунова, наделим топологией, задаваемой семейством норм (ниже систему (1) обозначаем через (A,f))

$$\|(A,f)\|_\alpha=\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(\|A(t)\|+e^{-\alpha t}|f(t)|),\quad \alpha\in\mathbb{R}^+.$$

Определение 1 [1]. Для всякого $i = 0, \ldots, n$ назовем *i-м показателем Ляпунова* неоднородной системы (1) величину

$$\lambda_i(A, f) = \inf_{L \in \mathcal{A}_i^n} \sup_{x \in L} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_{A,f}(t, 0)x\|,$$

где $\mathcal{A}_i^n$ – множество всех i-мерных аффинных подпространств $L \subset \mathbb{R}^n$, а $X_{A,f}$ – оператор Коши системы (1).

Задача [1]. Для всякого $i \in \{0, \ldots, n\}$ найти условие на решения системы (1), необходимое и достаточное для того, чтобы эта система была точкой полунепрерывности сверху i-го показателя Ляпунова, рассматриваемого как функция на $\mathcal{M}^n$.

Определение 2 [2]. Верхним центральным неоднородным показателем однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

называется величина

$$\varkappa(A) = \lim_{T \to \infty} \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{mT} \ln \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{j=k}^{m-1} H(A, T, k, j),$$

где при всех $T > 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$ и $j = k, k+1, \ldots$ обозначено

$$H(A, T, k, j) = \begin{cases} \dfrac{D(A, T, k) - 1}{\ln D(A, T, k)}, & \text{если} \quad j = k \quad \text{и} \quad D(A, T, k) \neq 1, \\ 1, & \text{если} \quad j = k \quad \text{и} \quad D(A, T, k) = 1, \\ D(A, T, k), & \text{если} \quad j > k, \end{cases}$$

$D(A, T, k) = \|X_A((k+1)T, kT)\|$, а X_A – оператор Коши системы (2).

Поставленную задачу в случае $i = n$ решает

Теорема. *Старший показатель λ_n полунепрерывен сверху в точке $(A, f) \in \mathcal{M}^n$ тогда и только тогда, когда $\lambda_n(A, f) = \varkappa(A)$.*

Литература. 1. Морозов О.И. Показатели Ляпунова неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1991. 2. Миллионщиков В.М. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1085.

М. Д. Малых (Москва) “О краевых задачах математической теории волноведущих систем” (20 октября 2006 г.).

Простейшая задача, описывающая возбуждение гармонических колебаний в области X, ограниченной идеально проводящими стенками, состоит в отыскании функции v, удовлетворяющей задаче

$$\Delta v + \lambda q v = f \quad \text{в} \quad X, \quad v|_{\partial X} = 0 \tag{1}$$

с некоторыми условиями излучения, при заданных: $q - 1$ – вещественнозначной кусочно-непрерывной финитной функции (заполнение области X), λ – комплекснозначном спектральном параметре и f – функции с компактным носителем.

При рассмотрении этой задачи в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ ее решение перестает быть функцией переменной $x \in X$ и топология евклидова пространства X теряется. Тем не менее имеется некоторая связь между этой топологией и спектральными характеристиками задачи (1), рассматриваемой в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$. Например, можно указать на аналог теоремы Вейля–фон Неймана, в которой “вводится” топология X: существенный спектр задачи (1) не меняется при компактной деформации области X. Эта теорема установлена Джонсом (1954 г.) для случая, когда исходная область – цилиндр или конус. Для ее доказательства в общем случае мы рассматриваем сначала весьма общий объект – ко-пучок гильбертовых пространств $\mathcal{H}(X)$ на произвольном топологическом пространстве X, т.е. каждому открытому множеству $U \subset X$ ставится в соответствие такое сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}(U)$, что вложение $U \subset U'$ влечет за собой включение $\mathfrak{H}(U) \subset \mathfrak{H}(U')$, и доказываем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть X_1 и X_2 – произвольные топологические пространства, на которых заданы ко-пучки $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ и два ограниченных оператора A_1 и A_2 соответственно. Пусть в X_i имеется открытое множество U_i такое, что операторы A_i компактны на дополнениях $Z_i = X_i - U_i$ и существует унитарный оператор $\mathfrak{U}_1 : \mathfrak{H}_1(U_1) \mapsto \mathfrak{H}_2(U_2)$, переводящий сужение A_1 в A_2:*

$$(w, \mathfrak{U}_1^* A_2 \mathfrak{U}_1 v) = (w, A_1 v) \quad \forall v, w \in \mathfrak{H}_1(U_1).$$

Тогда существует унитарный оператор $\mathfrak{U}$, отображающий $\mathfrak{H}_1(X_1)$ на $\mathfrak{H}_2(X_2)$ и такой, что $K := A_1 - \mathfrak{U}^* A_2 \mathfrak{U}$ – компактный оператор в $\mathfrak{H}_1(X_1)$ и $K\mathfrak{H}_1(U_1) = 0$.

А. А. Козлов (Минск, Беларусь) "Глобальная управляемость показателей Ляпунова линейной системы с прямоугольной матрицей коэффициентов при управлении" (27 октября 2006 г.).

Рассматривается линейная система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами и показателями Ляпунова $\lambda_1(A+BU) \leq \ldots \ldots \leq \lambda_n(A+BU)$. Задача глобального управления характеристическими показателями Ляпунова состоит в построении для системы (1) такого кусочно-непрерывного и ограниченного на положительной полуоси управления $U(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, которое обеспечило бы равенства $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, где $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$ – заранее заданные вещественные числа. Задачи такого типа изучались в [1, 2].

Теорема 1. *Пусть $m \geq n$. Если существуют кусочно-непрерывная и ограниченная на числовой прямой матричная функция $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при каждом $t_0 \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det(B(t)C(t))|\, dt \geq \alpha,$$

то показатели Ляпунова системы (1) глобально управляемы.

Следствие 1. *Пусть $m \geq n$. Если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждом $t_0 \geq 0$ у матрицы B найдется квадратная подматрица $\mathcal{B}$ порядка n, для которой выполняется неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det \mathcal{B}(\tau)|\, d\tau \geq \alpha,$$

то показатели Ляпунова системы (1) глобально управляемы.

Заметим, что следствие 1 является эквивалентной переформулировкой теоремы 1.

Литература. 1. Тонков Е.Л. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. 2. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2004.

А. А. Щеглова (Иркутск) "О существовании решения нелинейной алгебро-дифференциальной системы" (27 октября 2006 г.).

Рассмотрим нелинейную алгебро-дифференциальную систему

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1), \tag{1}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t,x,y)$ определена в области $\mathcal{D} = \{(t,x,y):\ t \in T,\ \|x - \bar{x}\| < K_0,\ \|y - \bar{y}\| < K_1\} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$; $x(t)$ – искомая n-мерная вектор-функция. Предполагается, что

$$\det \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} = 0 \quad \forall (t,x,y) \in \mathcal{D}.$$

Пусть в области $\mathcal{D}$ функция $F(t,x,y)$ имеет $r+1$ $(0 \leq r \leq n)$ непрерывную частную производную по каждому из своих аргументов: $F(t,x,y) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$. Обозначим

$$\mathcal{F}_r(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}) = 0, \quad t \in T, \tag{2}$$

где при любой n-мерной функции $x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$: $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$ $\forall t \in T$, левая часть системы (2) представляет собой совокупность функции $F(t,x(t),x'(t))$ и r ее полных производных по t. Обозначим

$$\Gamma_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x'}, \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x''}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x^{(r+1)}}\right), \quad D_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}, \Gamma_r\right).$$

Систему (2) будем рассматривать как систему конечных уравнений с независимыми переменными $t, x, x', x'', \ldots, x^{(r+1)}$. Зададим для системы (1) начальные данные

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Допустим, что существует точка $a = (t_0, x_0, a_1, \ldots, a_{r+1})$ $(a_i \in \mathbf{R}^n,\ i = \overline{1, r+1})$, удовлетворяющая уравнениям (2) и такая, что

$$\operatorname{rank} D_r(t_0, x_0, a_1, \ldots, a_{r+1}) = n(r+1). \tag{4}$$

Тогда по теореме о неявной функции из системы (2) можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $(x^{\mathrm{т}}, (x')^{\mathrm{т}}, \ldots, (x^{(r+1)})^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ (обозначим их буквой ξ) как функции переменной t и остальных n компонент этого вектора (будем обозначать их η):

$$\xi = \xi(t,\eta) \quad \forall (t,\eta) \in \mathcal{W} = \{(t,\eta):\ t \in T_\varepsilon = [t_0, t_0+\varepsilon) \subset T,\ \|\eta - \eta_0\| < K_\eta\},$$

где $(\xi^{\mathrm{т}}, \eta^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} = P(x^{\mathrm{т}}, (x')^{\mathrm{т}}, \ldots, (x^{(r+1)})^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$, $(\xi_0^{\mathrm{т}}, \eta_0^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} = P(x_0^{\mathrm{т}}, a_1^{\mathrm{т}}, \ldots, a_{r+1}^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$, $\xi, \xi_0 \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$, $\eta, \eta_0 \in \mathbf{R}^n$, P – матрица перестановок; т обозначает транспонирование. Обозначим через $\bar{\Gamma}_r(t,\eta)$ матрицу, получающуюся при подстановке функции $\xi(t,\eta)$ в $\Gamma_r(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)})$.

Теорема 1. *Пусть: 1)* $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$; *2) существует решение* $a = (t_0, x_0, a_1, \ldots, a_{r+1}) \in \mathbf{R}^{n(r+2)+1}$ *системы (2), удовлетворяющее условию (4); 3)* $\operatorname{rank} \bar{\Gamma}_r(t,\eta) = \mathrm{const}$ $\forall (t,\eta) \in \mathcal{W}$.

Для того чтобы в некоторой окрестности точки a *была определена функция*

$$L(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}, \mathcal{F}_r(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)})),$$

обладающая непрерывными частными производными по своим аргументам и такая, что

$$\forall x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T_\varepsilon):\ (t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}\ \forall t \in T_\varepsilon,$$

$$L(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}, \mathcal{F}_r(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)})) = x' + \psi(t,x), \quad L(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}, 0) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система

$$(X_0(t,\eta); X_1(t,\eta); \ldots; X_r(t,\eta))\bar{\Gamma}_r(t,\eta) = (E_n; O_n; \ldots; O_n) \tag{5}$$

была поточечно разрешима в области $\mathcal{W}$ *(*E_n *– единичная матрица порядка* n; O_n *– нулевая* $n \times n$ *-матрица).*

Теорема 2. *Пусть: 1)* $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{2r+1}(\mathcal{D})$; *2) начальные данные (3) таковы, что существует решение* $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, 2r+1}$, *системы конечных уравнений* $\mathcal{F}_{2r}(t_0, x_0, x', \ldots, x^{(2r+1)}) = 0$ *такое, что* $\operatorname{rank} D_{2r}(t_0, x_0, a_1, \ldots, a_{2r+1}) = n(2r+1)$; *3)* $\operatorname{rank} \bar{\Gamma}_r(t,\eta) = \mathrm{const}$ $\forall (t,\eta) \in \mathcal{W}$; *4) система (5) поточечно разрешима в области* $\mathcal{W}$.

Тогда на некотором интервале $T_\varepsilon = [t_0; t_0+\varepsilon) \subseteq T$ *существует решение задачи (1), (3).*

Н. Т. Орумбаева (Алматы, Казахстан) "Корректная разрешимость полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений" (3 ноября 2006 г.).

На полосе $\bar{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $n \times n$-матрицы $A(x,t)$, $C(x,t)$, n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$.

Возьмем шаг $h > 0$ такой, что $Nh = T$, натуральное число ν и составим $nN \times nN$-матрицу $Q_\nu(x,h)$ с главной диагональю $[hI, -I, \ldots, -I]$, поддиагональю $[I + D_{\nu 1}(x,h), \ldots, I + D_{\nu N-1}(x,h)]$, блоком $-h[I + D_{\nu N}(x,h)]$, стоящим в верхнем правом углу, и остальными нулевыми элементами, где

$$D_{\nu r}(x, rh) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\eta_1)\,d\eta_1 + \ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\eta_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\eta_{\nu-1}} A(x,\eta_\nu)\,d\eta_\nu \ldots d\eta_1.$$

Теорема. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых* h, ν *для всех* $x \in [0,\omega]$ *матрица* $Q_\nu(x,h)$ *обратима и выполняется неравенство*

$$q_\nu(x,h) = \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1 + \|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\| \max(1,h) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right] \le \mu < 1,$$

где $\alpha(x) = \max\limits_{t \in [0,T]} \|A(x,t)\|$, $\mu = \mathrm{const}$.

М. Н. Оспанов (Алматы, Казахстан) "О свойствах решений на полосе систем гиперболических уравнений со смешанной производной" (10 ноября 2006 г.).

На полосе $\bar\Omega = [0,\omega] \times (-\infty,\infty)$ рассматривается система линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

где $A(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$ непрерывны и, вообще говоря, не ограничены на $\bar\Omega$.

Через $C_*(\bar\Omega, R^n)$ обозначим пространство ограниченных функций $u:\ \bar\Omega \to R^n$, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0,\omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0,\omega]$ с нормой $\|u\|_* = \sup\limits_{(x,t)\in\bar\Omega} \|u(x,t)\|$, $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$.

Исследуются решения системы (1), удовлетворяющие условиям

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in R, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C_*(\bar\Omega, R^n), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная на R вместе со своей производной $\dot\psi(t)$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) элементы матрицы $A(x,t)$ – функции $a_{ij}(x,t)$ непрерывны на $\bar\Omega$ и удовлетворяют неравенствам

$$|a_{ii}(x,t)| \geq \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} |a_{ij}(x,t)| + \theta(x,t), \quad i = \overline{1,n},$$

где функция $\theta(x,t)$ непрерывна на $\bar\Omega$ и $\theta(x,t) \geq \theta_0 = \mathrm{const} > 0$;

2) для любых $(x,t) \in \bar\Omega$ имеет место неравенство

$$\frac{\theta(x,t)}{|a_{ii}(x,t)|} \geq \eta > 0, \quad \eta = \mathrm{const};$$

3) столбцы матриц $\dfrac{A(x,t)}{\theta(x,t)}$, $\dfrac{C(x,t)}{\theta(x,t)}$, вектор-функции $f(x,t)$, $\psi(t)\theta(x,t)$ принадлежат $C_*(\bar\Omega, R^n)$;

4) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|x - \bar x| < \delta$, $x, \bar x \in [0,\omega]$, следует неравенство

$$\left|\frac{\theta(x,t) - \theta(\bar x,t)}{\theta(x,t)}\right| < \varepsilon$$

для всех $t \in R$;

5) $\dfrac{\theta(x,t)}{\theta(x,\bar t)} \leq c_1$, $c_1 = \mathrm{const}$, для любых $|t - \bar t| < d$, $x \in [0,\omega]$.

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $u^*(x,t)$ и его смешанная производная $\dfrac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t\,\partial x}$ принадлежит $C_*(\bar\Omega, R^n)$.

И. Т. Кигурадзе (Тбилиси, Грузия) "О краевых задачах периодического типа для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков" (17 ноября 2006 г.).

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$u^{(n)} = f(t, u, \ldots, u^{(n-1)}), \tag{1}$$

$$u^{(n)} = f_0(t, u) \tag{1_0}$$

с краевыми условиями

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} u^{(k-1)}(a) + \beta_{ik} u^{(k-1)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$ и α_{ik}, β_{ik} и γ_i – вещественные постоянные, а $f:\ [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_0:\ [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функции, удовлетворяющие локальным условиям Каратеодори.

Пусть

$$\nu_n(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(x_{n-k+1}x_k-y_{n-k+1}y_k) \quad \text{при} \quad n=2m$$

и

$$\nu_n(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(x_{n-k+1}x_k-y_{n-k+1}y_k)-(-1)^m(x_{m+1}^2-y_{m+1}^2)/2 \quad \text{при} \quad n=2m+1.$$

Нас интересует случай, когда существуют числа $j\in\{1,2\}$ и $\mu>0$ такие, что при любых $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ соблюдается неравенство

$$(-1)^{m+j}\nu_n(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)\le\mu\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}x_k+\beta_{ik}y_k)\right|. \tag{3_j}$$

Что же касается функций f и f_0, они на множествах $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ и $[a,b]\times\mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам

$$p(t)h(|x_1|)-q(t)\le(-1)^{m+j}f(t,x_1,\ldots,x_n)\operatorname{sgn}x_1\le p^*(t,|x_1|), \tag{4_j}$$

$$(-1)^{m+j}f_0(t,x)\operatorname{sgn}x\ge p(t)h(|x|)-q(t), \tag{5_j}$$

$$(-1)^{m+j}(f_0(t,x)-f_0(t,y))>0 \quad \text{при} \quad x>y, \tag{6_j}$$

где p и $q\in[a,b]\to[0,+\infty[$ – интегрируемые функции, $h:\ [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ – неубывающая функция, а $p^*:[a,b]\times[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ – интегрируемая по первому аргументу и не убывающая по второму аргументу функция. Кроме того,

$$\int_a^b p(t)\,dt>0, \quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если $n=2m$, $j=1$ $(n=2m+1,\ j\in\{1,2\})$ и выполнены условия (3_j), (4_j), (7), то задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.*

При $n=2m$ частными случаями условий (2) являются краевые условия

$$\alpha_iu^{(i-1)}(a)+\alpha_{m+i}u^{(n-i)}(a)=\gamma_i, \quad \beta_iu^{(i-1)}(b)+\beta_{m+i}u^{(n-i)}(b)=\gamma_{m+i}, \quad i=1,\ldots,m, \tag{8}$$

$$u^{(i-1)}(a)=\eta_iu^{(i-1)}(b)+\gamma_i, \quad u^{(n-i)}(a)=u^{(n-i)}(b)/\eta_i+\gamma_{m+i}, \quad i=1,\ldots,m. \tag{9}$$

При $n=2m+1$ к краевым условиям (8) (краевым условиям (9)) добавляется одно из следующих двух условий:

$$u^{(m)}(a)=\eta u^{(m)}(b)+\gamma_n, \tag{10_1}$$

$$u^{(m)}(b)=\eta u^{(m)}(a)+\gamma_n. \tag{10_2}$$

Здесь

$$\begin{gathered}(-1)^{m+i+j}\alpha_i\alpha_{m+i}\ge0, \quad (-1)^{m+i+j}\beta_i\beta_{m+i}\le0,\\ |\alpha_i|+|\alpha_{m+i}|>0, \quad |\beta_i|+|\beta_{m+i}|>0, \quad i=1,\ldots,m,\end{gathered} \tag{11_j}$$

$$\eta_i\ne0, \quad i=1,\ldots,m. \tag{12}$$

Следствие 1. *Если $n=2m$ и выполнены условия (4_1), (7), (11_1) (условия (4_1), (7), (12)), то задача (1), (8) (задача (1), (9)) имеет хотя бы одно решение.*

Следствие 2. *Пусть $n=2m+1$, $j\in\{1,2\}$ и выполнены условия (4_j), (7), (11_j) (условия (4_j), (7), (12)). Если, кроме того, $|\eta|\le1$, то задача (1), (8), (10_j) (задача (1), (9), (10_j)) имеет хотя бы одно решение.*

Теорема 2. *Если $n=2m$, $j=1$ $(n=2m+1,\ j\in\{1,2\})$ и выполнены условия (3_j), (5_j), (6_j) и (7), то задача (1_0), (2) имеет одно и только одно решение.*

Следствие 3. *Пусть $n=2m$ и выполнены условия (5_1), (6_1), (7) и (11_1) (условия (5_1), (6_1), (7) и (12)). Тогда задача (1_0), (8) (задача (1_0), (9)) имеет одно и только одно решение.*

Следствие 4. *Пусть $n = 2m+1$, $j \in \{1,2\}$ и выполнены условия (5_j), (6_j), (7) и (11_j) (условия (5_j), (6_j), (7) и (12)). Если, кроме того, $|\eta| \le 1$, то задача (1_0), (8), (10_j) (задача (1_0), (9), (10_j)) имеет одно и только одно решение.*

Работа поддержана INTAS (проект 03-51-5007).

Н. Парцвания (Тбилиси, Грузия) "Об ограниченных решениях нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка" (24 ноября 2006 г.).

Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$, а $f :]a,b[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая локальным условиям Каратеодори. Для дифференциального уравнения

$$u'' = f(t,u,u') \tag{1}$$

рассмотрим задачи об ограниченных решениях

$$\sigma_1(t) \le u(t) \le \sigma_2(t) \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{2_1}$$

$$\lim_{t\to a} u(t) = c, \quad \sigma_1(t) \le u(t) \le \sigma_2(t) \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{2_2}$$

где $\sigma_1 :]a,b[\to \mathbb{R}$ и $\sigma_2 :]a,b[\to \mathbb{R}$ – нижняя и верхняя функции уравнения (1) (см. [1, определение 3.2]) такие, что $\sigma_1(t) \le \sigma_2(t)$ при $a < t < b$.

Пусть $k \in \{1,2\}$. Решение u_0 задачи (1), (2_k) называется *минимальным (максимальным)*, если произвольное решение u этой задачи удовлетворяет неравенству $u(t) \ge u_0(t)$ ($u(t) \le u_0(t)$) при $a < t < b$.

Разрешимость задач (1), (2_1) и (1), (2_2) доказана при довольно общих ограничениях на функцию f (см., например, [1] и приведенную там библиографию). Однако вопрос о существовании экстремальных решений упомянутых задач оставался открытым. Приведенные ниже теоремы восполняют этот пробел.

Определение 1. Функция $f \in \mathcal{B}(\sigma_1,\sigma_2)$, если существует непрерывная функция $\rho :]a,b[\to [0,+\infty[$ такая, что для произвольной непрерывной функции $\eta :\ \mathbb{R} \to [0,1]$ каждое решение u дифференциального уравнения

$$u'' = \eta(u')f(t,u,u'), \tag{3}$$

определенное на $]a,b[$ и удовлетворяющее неравенству (2_1), допускает оценку $|u'(t)| \le \rho(t)$ при $a < t < b$.

Определение 2. Функция $f \in \mathcal{B}_a(\sigma_1,\sigma_2)$, если существуют $a_0 \in]a,b[$ и непрерывная функция $\rho :]a,b[\to [0,+\infty[$ такие, что $\int_a^{a_0} \rho(s)\,ds < +\infty$ и для произвольных $t_0 \in]a,a_0[$ и непрерывной функции $\eta :\ \mathbb{R} \to [0,1]$ каждое решение u уравнения (3), определенное на $[t_0,b[$ и удовлетворяющее неравенству $\sigma_1(t) \le u(t) \le \sigma_2(t)$ при $t_0 \le t < b$, допускает оценку $|u'(t)| \le \rho(t)$ при $t_0 \le t < b$.

Теорема 1. *Если $f \in \mathcal{B}(\sigma_1,\sigma_2)$, то задача (1), (2_1) имеет минимальное и максимальное решения.*

Следствие 1. *Пусть на множестве*

$$\{(t,x,y) :\ a < t < b,\ \sigma_1(t) \le x \le \sigma_2(t),\ y \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

соблюдается одно из следующих трех неравенств:

$$f(t,x,y)\,\mathrm{sgn}((t-a_0)y) \ge -h_1(t)(1+|y|) - h_2(t)y^2,$$

$$(-1)^i f(t,x,y)\,\mathrm{sgn}\,y \ge -h_1(t)(1+|y|) - h_2(t)y^2,$$

$$f(t,x,y)\,\mathrm{sgn}\,x \ge -h_1(t)(1+|y|) - h_2(t)y^2,$$

где $a_0 \in]a,b[$, $i \in \{1,2\}$, $h_1 \in L_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$, $h_2 \in C(]a,b[)$. Тогда задача (1), (2_1) имеет минимальное и максимальное решения.

Теорема 2. *Если*

$$\overline{\lim_{t\to a}}\,\sigma_1(t) \le c \le \underline{\lim_{t\to a}}\,\sigma_2(t) \tag{5}$$

и $f \in \mathcal{B}_a(\sigma_1,\sigma_2)$, то задача (1), (2_2) имеет минимальное и максимальное решения.

Следствие 2. *Пусть $a > -\infty$ и выполнено условие (5). Если, кроме того, на множестве (4) соблюдается неравенство $f(t,x,y)\,\mathrm{sgn}\,y \ge -h_1(t)(1+|y|) - h_2(t)y^2$, где $h_1 \in L_{\mathrm{loc}}([a,b[)$ и $h_2 \in C([a,b[)$, то задача (1), (2_2) имеет минимальное и максимальное решения.*

В заключение для уравнения

$$u'' = f_0(t,u) + f_1(t,u,u')u', \tag{6}$$

где $f_0 :]a,b[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f_1 :]a,b[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функции, удовлетворяющие локальным условиям Каратеодори, рассмотрим задачи

$$\sup\{|u(t)| : a < t < b\} < +\infty; \tag{7_1}$$

$$\lim_{t\to a} u(t) = c, \quad \sup\{|u(t)| : a < t < b\} < +\infty. \tag{7_2}$$

На основе теорем 1 и 2 доказываются следующие предложения.

Теорема 3. *Пусть существуют числа* $r_0 > 0$, $a_0 \in]a,b[$ *и функции* $h_i \in L_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$, $i = 0,1$, *такие, что*

$$f_0(t,x)\operatorname{sgn} x \geq h_0(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad a < t < b, \quad |x| \geq r_0, \tag{8}$$

$f_1(t,x,y)\operatorname{sgn}(t - a_0) \geq h_1(t)$ *при* $a < t < b$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *и*

$$\int_a^t \left(\int_\tau^t \exp\left(\int_s^\tau h_1(x)\,dx\right) h_0(s)\,ds\right) d\tau =$$

$$= \int_t^b \left(\int_t^\tau \exp\left(\int_s^\tau h_1(x)\,dx\right) h_0(s)\,ds\right) d\tau = +\infty \quad \text{при} \quad a < t < b. \tag{9}$$

Тогда задача (6), (7_1) имеет минимальное и максимальное решения.

Теорема 4. *Пусть существуют число* $r_0 > 0$ *и функции* $h_i \in L_{\mathrm{loc}}([a,b[)$, $i = 0,1$, *такие, что наряду с (8) выполнены условие* $f_1(t,x,y) \geq h_1(t)$ *при* $a < t < b$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *и условия (9). Тогда задача (6), (7_2) имеет минимальное и максимальное решения.*

Работа поддержана INTAS (проект 03-51-5007).

Литература 1. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.