С. В. Мухигулашвили, Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 4, 477–484

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 4, с. 477–484

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.7

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2004 г. С. В. Мухигулашвили

1. Постановка задачи и основные обозначения. Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение

$$u''(t) = p(u)(t) + q(t) \tag{1.1}$$

при краевых условиях

$$u(a) = c_1, \quad u(b) = c_2, \tag{1.2}$$

где $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{C}([a,b]) \to L([a,b])$ – линейный оператор и $q \in L([a,b])$.

Под решением задачи (1.1), (1.2) мы понимаем функцию $u \in \widetilde{\mathbb{C}}'([a,b])$, удовлетворяющую условию (1.2) и почти всюду на $[a,b]$ уравнению (1.1).

Задаче (1.1), (1.2) посвящена обширная литература (см. [1–9] и приведенную там библиографию). Однако с достаточной полнотой она изучена лишь в случае, когда $p(u)(t) \equiv p_0(t)u(t)$ (см., например, [3]).

В предлагаемой работе рассматривается вопрос однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) при условии, что p – неотрицательный оператор (см. определение 2.1). Получены в определенном смысле неулучшаемые достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2), обобщающие некоторые ранее известные результаты. Отдельное внимание уделяется случаю, когда (1.1) – уравнение с отклоняющимися аргументами, т.е. имеет вид

$$u''(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)u(\tau_j(t)) + q(t), \tag{1.3}$$

где $q, p_j \in L([a,b])$ и $\tau_j : [a,b] \to [a,b]$ – измеримые функции.

На протяжении всей работы используются следующие обозначения: $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; $\mathbb{C}([a,b])$ – пространство непрерывных функций $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|u\|_C = \max\{|u(t)| : a \le t \le b\}$; $\widetilde{\mathbb{C}}'([a,b])$ – множество функций $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной; $L([a,b])$ – множество функций $q : [a,b] \to \mathbb{R}$, суммируемых на $[a,b]$ в смысле Лебега; для любого $x \in \mathbb{R}$ $[x]_+ = (|x| + x)/2$.

2. Формулировка основных результатов. Сначала введем следующие определения.

Определение 2.1. Линейный оператор $p : \mathbb{C}([a,b]) \to L([a,b])$ называется неотрицательным, если для любой неотрицательной функции $x \in \mathbb{C}([a,b])$ почти всюду на $[a,b]$ выполняется неравенство $p(x)(t) \ge 0$.

Определение 2.2. Скажем, что линейный оператор $p : \mathbb{C}([a,b]) \to L([a,b])$ сосредоточен на множестве $A \subset [a,b]$, если для любой такой функции $x \in \mathbb{C}([a,b])$, что $x(t) = 0$ при $t \in A$, почти всюду на $[a,b]$ выполняется равенство $p(x)(t) \equiv 0$.

Тогда справедливы следующие предложения.

Теорема 2.1$_1$. *Пусть p – неотрицательный оператор и существуют числа $\alpha \in [a,b]$, $\beta \in [\alpha, b]$ такие, что p сосредоточен на множестве $[a,\alpha] \cup [\beta, b]$,*

$$\beta - \alpha \ne b - a \tag{2.1$_1$}$$

и

$$\int_a^b p(1)(s)\,ds \le 16\,\frac{b-a}{(b-a)^2-4\delta^2}, \tag{2.2}$$

где $\delta = [\beta-\alpha-(b-a)/2]_+$. *Тогда задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение.*

Теорема 2.1$_2$. *Пусть* p *– неотрицательный оператор и существуют числа* $\alpha,\beta\in[a,b]$ *такие, что* p *сосредоточен на множестве* $[\alpha,\beta]$,

$$\alpha<\beta \tag{2.1$_2$}$$

и выполняется условие (2.2), где $\delta=[(b-a)/2-(\beta-\alpha)]_+$. *Тогда задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение.*

Замечание 2.1. Легко заметить, что если в теореме 2.1_i $(i=1,2)$ нарушается условие (2.1_i), то задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение без дополнительного ограничения относительно малости выражения $\int_a^b p(1)(s)\,ds$.

Замечание 2.2. Теоремы 2.1_1 и 2.1_2 обобщают результаты, полученные в работе [9]. В частности, там показано, что задача (1.1), (1.2) при условии неотрицательности оператора p имеет одно и только одно решение, если выполняется условие $\int_a^b p(1)(s)\,ds \le 16/(b-a)$, которое, как там же показано, является оптимальным.

Пример 2.1. Данный пример показывает, что в теореме 2.1_1 условие (2.2) является оптимальным в том смысле, что его нельзя заменить условием

$$\int_a^b p(1)(s)\,ds \le 16\,\frac{b-a}{(b-a)^2-4\delta^2}+\varepsilon, \tag{2.2$_\varepsilon$}$$

какой бы малой ни была постоянная $\varepsilon\in]0,1[$. Пусть $a=0$, $b=1$, $\delta\in]0,1/4[$, $\varepsilon_0\in]0,1/8[$ и положительные постоянные α, β, μ_i, ν_i $(i=1,2)$ определены равенствами

$$\mu_1=\frac{1-2\delta-4\varepsilon_0}{4},\quad \mu_2=\frac{1-2\delta+4\varepsilon_0}{4},\quad \nu_1=\frac{3+2\delta-4\varepsilon_0}{4},\quad \nu_2=\frac{3+2\delta+4\varepsilon_0}{4},$$

$$\alpha=\mu_1+\varepsilon_0,\quad \beta=\nu_2-\varepsilon_0.$$

Пусть также $x\in\widetilde{\mathbb{C}}'([\mu_1,\mu_2])$ и $y\in\widetilde{\mathbb{C}}'([\nu_1,\nu_2])$ – любые такие функции, которые удовлетворяют условиям

$$x(\mu_1)=x(\mu_2)=1,\quad x'(\mu_1)=\frac{1}{\mu_1},\quad x'(\mu_2)=-\frac{1}{\mu_1+\delta};\quad x''(t)\le 0 \quad \text{при} \quad \mu_1\le t\le\mu_2, \tag{2.3$_1$}$$

$$y(\nu_1)=y(\nu_2)=-1,\quad y'(\nu_1)=-\frac{1}{\mu_1+\delta},\quad y'(\nu_2)=\frac{1}{\mu_1};\quad y''(t)\ge 0 \quad \text{при} \quad \nu_1\le t\le\nu_2. \tag{2.3$_2$}$$

Определим в таком случае функции $u_0\in\widetilde{\mathbb{C}}'([0,1])$, $\tau:[0,1]\to\{\mu_1,\nu_2\}$ и оператор $p:\mathbb{C}([0,1])\to L([0,1])$ равенствами

$$u_0(t)=\begin{cases} t/\mu_1 & \text{при} \quad 0\le t\le\mu_1,\\ x(t) & \text{при} \quad \mu_1<t<\mu_2,\\ (1-2t)/(\nu_1-\mu_2) & \text{при} \quad \mu_2\le t\le\nu_1,\\ y(t) & \text{при} \quad \nu_1<t<\nu_2,\\ (t-1)/\mu_1 & \text{при} \quad \nu_2\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\mu_1 & \text{при} \quad u_0''(t)\ge 0,\\ \nu_2 & \text{при} \quad u_0''(t)<0,\end{cases}\qquad p(x)(t)=|u_0''(t)|\,x(\tau(t)). \tag{2.4}$$

Тогда неотрицательный оператор p в силу определения α и β сосредоточен на множестве $[0,\alpha]\cup[\beta,1]$ и ввиду (2.3_1), (2.3_2), (2.4) имеем

$$\int\limits_a^b p(1)(s)\,ds=\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} y''(s)\,ds-\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2} x''(s)\,ds=2\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_1+\delta}\right)=16\,\frac{1-4\varepsilon_0}{(1-4\varepsilon_0)^2-4\delta^2},$$

откуда с учетом равенства

$$\lim_{\varepsilon_0\to0}\frac{1-4\varepsilon_0}{(1-4\varepsilon_0)^2-4\delta^2}=\frac{1}{1-4\delta^2}$$

для достаточно малого ε следует существование ε_0 такого, что $\int_a^b p(1)(s)\,ds=16/(1-4\delta^2)+\varepsilon$, где $\delta=\beta-\alpha-(b-a)/2$. Значит, выполняются все требования теоремы 2.1_1 при $a=0$, $b=1$, кроме (2.2), вместо которого выполняется условие (2.2_ε). С другой стороны, из определения u_0 и (2.4) следует, что $p(u_0)(t)=|u_0''(t)|\,u_0(\tau(t))$, $u_0(\tau(t))=\operatorname{sign}u_0''(t)$, т.е. u_0 – ненулевое решение однородной задачи $u''(t)=p(u)(t)$; $u(a)=0$, $u(b)=0$ при $a=0$, $b=1$ и, значит, нарушается заключение теоремы 2.1_1.

Аналогичная конструкция позволяет построить пример, показывающий, что в теореме 2.1_2 условие (2.2) также нельзя заменить условием (2.2_ε).

Следствие 2.1_1. *Пусть p – неотрицательный оператор и существуют постоянные $\alpha\in[a,b]$, $\beta\in[\alpha,b]$, $\gamma\in[1,+\infty[$ такие, что выполняется условие (2.1_1), p сосредоточен на множестве $[a,\alpha]\cup[b,\beta]$,*

$$b-a>16^{1-\gamma},\quad \frac{b-a}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{16^{1-\gamma}}{b-a}}\right)\le\beta-\alpha \tag{2.5_1}$$

и

$$\int\limits_a^b p(1)(s)\,ds\le16^\gamma. \tag{2.6}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение.

Следствие 2.1_2. *Пусть p – неотрицательный оператор и существуют постоянные $\alpha,\beta\in[a,b]$, $\gamma\in[1,+\infty[$ такие, что выполняется условие (2.1_2), p сосредоточен на множестве $[\alpha,\beta]$,*

$$b-a>16^{1-\gamma},\quad \beta-\alpha\le\frac{b-a}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{16^{1-\gamma}}{b-a}}\right) \tag{2.5_2}$$

и справедливо условие (2.6). Тогда задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение.

Следствие 2.2_1. *Пусть функции p_j неотрицательны и существуют постоянные $\alpha\in[a,b]$, $\beta\in[\alpha,b]$ такие, что выполняется условие (2.1_1), почти всюду на $[a,b]$*

$$\tau_j(t)\in[a,\alpha]\cup[\beta,b]\quad(j=\overline{1,m}) \tag{2.7_1}$$

и

$$\sum_{j=1}^m\int\limits_a^b p_j(s)\,ds\le16\,\frac{b-a}{(b-a)^2-4\delta^2}, \tag{2.8}$$

где $\delta=[\beta-\alpha-(b-a)/2]_+$. Тогда задача (1.3), (1.2) имеет одно и только одно решение.

Следствие 2.2_2. *Пусть функции p_j неотрицательны и существуют постоянные $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что выполняется условие (2.1_2), почти всюду на $[a,b]$*

$$\alpha\le\tau_j(t)\le\beta\quad(j=\overline{1,m}) \tag{2.7_2}$$

и справедливо условие (2.8), где $\delta=[(b-a)/2-(\beta-\alpha)]_+$. Тогда задача (1.3), (1.2) имеет одно и только одно решение.

3. Вспомогательные предложения.

Лемма 3.1$_1$. *Пусть* $\alpha \in [a,b]$, $\beta \in [\alpha,b]$ *и* $\delta = [\beta-\alpha-(b-a)/2]_+$. *Тогда для любого* $c \in]a,b[$ *справедлива оценка*

$$\left(\frac{(s_1-a)(c-s_1)(s_2-c)(b-s_2)}{(b-c)(c-a)}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{(b-a)^2-4\delta^2}{8(b-a)} \quad \textit{при} \quad s_1 \in [a,c]\cap([a,\alpha[\cup]\beta,b]), \quad s_2 \in [c,b]\cap([a,\alpha[\cup]\beta,b]). \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\beta-\alpha \le (b-a)/2$. Тогда $\delta = 0$ и с учетом известного числового неравенства

$$4\lambda_1\lambda_2 \le (\lambda_1+\lambda_2)^2 \tag{3.2}$$

получим

$$\left(\frac{(s_1-a)(c-s_1)(s_2-c)(b-s_2)}{(b-c)(c-a)}\right)^{1/2} \le \frac{((c-a)(b-c))^{1/2}}{4} \le \frac{b-a}{8}, \tag{3.3}$$

т.е. справедлива оценка (3.1).

Теперь рассмотрим случай $\beta-\alpha > (b-a)/2$, откуда следует, что

$$\delta = \beta-\alpha-(b-a)/2. \tag{3.4}$$

Определим функции $\gamma_a, \gamma_b : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ равенствами $\gamma_a(x) = \min\{|(a+x)/2-s| :\ s \in [a,\alpha] \cup \cup [\beta,b]\}$, $\gamma_b(x) = \min\{|(b+x)/2-s| :\ s \in [a,\alpha]\cup[\beta,b]\}$ и заметим, что

$$\max\{(s_1-a)(c-s_1) :\ s_1 \in [a,\alpha]\cup[\beta,b]\} = (s_1^*-a)(c-s_1^*), \tag{3.5$_1$}$$

$$\max\{(s_2-c)(b-s_2) :\ s_2 \in [a,\alpha]\cup[\beta,b]\} = (s_2^*-c)(b-s_2^*), \tag{3.5$_2$}$$

где $s_1^* = (a+c)/2-\gamma_a(c)$, $s_2^* = (b+c)/2-\gamma_b(c)$. Тогда с учетом (3.5$_1$), (3.5$_2$) и неравенства (3.2) для любого $c \in]a,b[$ получим

$$\left(\frac{(s_1-a)(c-s_1)(b-s_2)(s_2-c)}{(b-c)(c-a)}\right)^{1/2} \le \left(\frac{c-a}{4}-\frac{\gamma^2(c)}{c-a}\right)^{1/2}\left(\frac{b-c}{4}-\frac{\gamma_b^2(c)}{b-c}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{4}-\frac{\gamma_a^2(c)}{c-a}-\frac{\gamma_b^2(c)}{b-c}\right) \quad \text{при} \quad s_1 \in [a,c]\cap([a,\alpha[\cup]\beta,b]), \quad s_2 \in [c,b]\cap([a,\alpha[\cup]\beta,b]). \tag{3.6}$$

Теперь отметим, что любое $c \in]a,b[$ обязательно удовлетворяет одному из следующих трех условий: i) $(a+c)/2 \le \alpha$; ii) $(a+c)/2 > \alpha$, $(b+c)/2 < \beta$; iii) $\beta \le (b+c)/2$.

В случае выполнения условия i) ввиду равенства (3.4) имеем $(b+c)/2-\alpha \ge (b+a)/2-\alpha \ge \delta$, $\beta-(b+c)/2 \ge \beta-(b+2\alpha-a)/2 = \delta$, откуда следует, что $\gamma_b(c) \ge \delta$. Также из условия i) ясно, что $\gamma_a(c) = 0$. Тогда из (3.6) вытекает справедливость оценки (3.1).

В случае выполнения условия ii) имеем

$$\frac{b+c}{2}-\alpha > \beta-\frac{b+c}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a+c}{2}-\alpha < \beta-\frac{a+c}{2}, \tag{3.7}$$

так как если нарушается первое (второе) из неравенств (3.7), получаем $c \le \alpha+\beta-b$ ($c \ge \alpha+\beta-a$), что противоречит первому (второму) из неравенств условия ii). Теперь заметим, что из условий ii) и (3.7) следует, что $\gamma_a(c) = (a+c-2\alpha)/2$, $\gamma_b(c) = (2\beta-b-c)/2$, и тогда

$$\frac{b-a}{4}-\frac{\gamma_a^2(c)}{c-a}-\frac{\gamma_b^2(c)}{b-c} = \alpha-a+b-\beta-f(c), \tag{3.8}$$

где функция $f : [2\alpha - a, 2\beta - b] \to \mathbb{R}_+$ определена равенством $f(x) = (\alpha - a)^2/(x - a) + (b-\beta)^2/(b-x)$. Рассмотрев производную от f, получим, что f достигает своего минимума в точке $x_1 = [(\alpha - a)b + (b - \beta)a]/(\alpha - a + b - \beta)$, т.е.

$$\alpha - a + b - \beta - f(c) \le (\alpha - a + b - \beta)(\beta - \alpha)/(b - a). \tag{3.9}$$

Из (3.6), (3.8) и (3.9) с учетом равенств $2(\alpha - a + b - \beta) = b - a - 2\delta$, $2(\beta - \alpha) = b - a + 2\delta$, которые вытекают из (3.4), следует справедливость оценки (3.1).

В случае выполнения условия iii) ввиду равенства (3.4) имеем

$$(a + c)/2 - \alpha \ge (a + 2\beta - b)/2 - \alpha = \delta, \quad \beta - (a + c)/2 \ge \beta - (a + b)/2 \ge \delta,$$

откуда следует, что $\gamma_a(c) \ge \delta$. Также из условия iii) ясно, что $\gamma_b(c) = 0$. Тогда из (3.6) вытекает справедливость оценки (3.1). Лемма доказана.

Лемма 3.1$_2$. *Пусть* $\alpha \in [a,b]$, $\beta \in]\alpha, b]$ *и* $\delta = [(b - a)/2 - (\beta - \alpha)]_+$. *Тогда для любого* $c \in]\alpha,\beta[$ *справедлива оценка*

$$\left(\frac{(s_1 - a)(c - s_1)(s_2 - c)(b - s_2)}{(b - c)(c - a)}\right)^{1/2} \le \frac{(b - a)^2 - 4\delta^2}{8(b - a)} \quad \textit{при} \quad \alpha \le s_1 < c, \quad c < s_2 \le \beta. \tag{3.10}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\beta - \alpha > (b - a)/2$. Тогда $\delta = 0$ и с учетом неравенства (3.2) получим оценку (3.3), из которой вытекает справедливость оценки (3.10) при $\delta = 0$.

Теперь рассмотрим случай $(b - a)/2 > \beta - \alpha$, откуда следует, что

$$\delta = (b - a)/2 - (\beta - \alpha). \tag{3.11}$$

Определим функции $\gamma_a, \gamma_b : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ равенствами $\gamma_a(x) = \min\{|(a+x)/2-s| : \alpha \le s \le \beta\}$, $\gamma_b(x) = \min\{|(b + x)/2 - s| : \alpha \le s \le \beta\}$ и заметим, что $\max\{(s_1 - a)(c - s_1) : \alpha \le s_1 \le c\} = (s_1^*-a)(c-s_1^*)$, где $s_1^* = (a+c)/2-\gamma_a(c)$, и $\max\{(s_2-c)(b-s_2) : c \le s_2 \le \beta\} = (s_2^*-c)(b-s_2^*)$, где $s_2^* = (b + c)/2 - \gamma_b(c)$. Тогда аналогично доказательству леммы 3.1$_1$ получим

$$\left(\frac{(s_1 - a)(c - s_1)(s_2 - c)(b - s_2)}{(b - c)(c - a)}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{b - a}{4} - \frac{\gamma_a^2(c)}{c - a} - \frac{\gamma_b^2(c)}{b - c}\right) \quad \text{при} \quad \alpha \le s_1 < c, \quad c < s_2 \le \beta, \quad \alpha < c < \beta. \tag{3.12}$$

Теперь отметим, что любое $c \in]\alpha, \beta[$ обязательно удовлетворяет одному из следующих трех условий: i) $\alpha < (b + c)/2 \le \beta$; ii) $(a + c)/2 < \alpha$, $(c + b)/2 > \beta$; iii) $\alpha \le (a + c)/2 < \beta$.

В случае выполнения условия i) ввиду равенства (3.11) имеем $\alpha - (a + c)/2 \ge \alpha - (a + 2\beta - b)/2 = \delta$, откуда следует неравенство $\gamma_a(c) \ge \delta$. Из условия i) ясно, что $\gamma_b(c) = 0$. Тогда из (3.12) вытекает справедливость оценки (3.10).

В случае выполнения условия ii) имеем $0 < (b+c)/2-\beta < (b+c)/2-\alpha$, $0 < \alpha-(a+c)/2 < \beta - (a + c)/2$. Тогда $\gamma_a(c) = (2\alpha - a - c)/2$, $\gamma_b(c) = (b + c - 2\beta)/2$ и справедливо равенство (3.8). Отсюда, рассуждая аналогично доказательству леммы 3.1$_1$, с учетом (3.11) и (3.12) устанавливаем справедливость оценки (3.10).

В случае выполнения условия iii) ввиду равенства (3.11) имеем $\beta - (a + c)/2 \ge \beta - (a + \beta)/2 \ge \delta$, откуда следует неравенство $\gamma_b(c) \ge \delta$. Из условия iii) ясно, что $\gamma_a(c) = 0$. Тогда из (3.12) вытекает справедливость оценки (3.10). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $\alpha \in [a,b]$, $\beta \in [\alpha, b]$ *и неотрицательный оператор* $p : \mathbb{C}([a,b]) \to L([a,b])$ *сосредоточен на множестве* A, *определенном одним из следующих равенств:*

i) $A = [a,\alpha] \cup [\beta, b]$;

ii) $A = [\alpha, \beta]$.

Тогда для любой функции $v_0 \in \mathbb{C}([a,b])$ *справедлива оценка*

$$\min\{v_0(t) : t \in A\}g(1)(t) \le g(v_0)(t) \le \max\{v_0(t) : t \in A\}g(1)(t) \quad \textit{при} \quad a \le t \le b. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть v_1 – любая непрерывная функция, такая, что

$$v_1(t) = v_0(t) \quad \text{при} \quad t \in A \tag{3.14}$$

и $\min\{v_0(t):\ t \in A\} \le v_1(t) \le \max\{v_0(t):\ t \in A\}$ при $t \in [a,b] \setminus A$. Тогда в силу неотрицательности оператора p справедлива оценка

$$\min\{v_0(t):\ t \in A\} p(1)(t) \le p(v_1)(t) \le p(1)(t) \max\{v_0(t):\ t \in A\} \quad \text{при} \quad a \le t \le b. \tag{3.15}$$

С другой стороны, так как оператор p сосредоточен на множестве A, в силу равенства (3.14) имеем $p(v_0)(t) = p(v_1)(t)$ при $a \le t \le b$, откуда и из (3.15) сразу следует справедливость оценки (3.13). Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов. Рассмотрим наряду с задачей (1.1), (1.2) соответствующую однородную задачу

$$v''(t) = p(v)(t), \tag{4.1}$$

$$v(a) = 0, \quad v(b) = 0. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 2.1$_1$. В силу фредгольмовости задача (1.1), (1.2) имеет одно и только одно решение, если однородная задача (4.1), (4.2) имеет только нулевое решение.

Допустим, что при условиях теоремы задача (4.1), (4.2) имеет такое ненулевое решение v_0, что для некоторого $\delta \in \{-1, 1\}$

$$\sigma v_0(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,\alpha] \cup [\beta, b]. \tag{4.3}$$

Тогда в силу условий (4.2) существует множество положительной меры $I \subset [a,b]$ такое, что

$$\sigma v_0''(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{4.4}$$

Непрерывная функция

$$v_1(t) = \begin{cases} v_0(t) & \text{при} \quad t \in [a,\alpha] \cup [\beta, b], \\ v_0(\beta)\dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha} + v_0(\alpha)\dfrac{\beta-t}{\beta-\alpha} & \text{при} \quad t \in]\alpha,\beta[\end{cases}$$

в силу (4.3) удовлетворяет неравенству

$$\sigma v_1(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \tag{4.5}$$

и так как оператор p сосредоточен на множестве $[a,\alpha] \cup [\beta,b]$, то $p(v_0)(t) = p(v_1)(t)$ при $a \le t \le b$, т.е. $v_0''(t) = p(v_1)(t)$ при $a \le t \le b$. Из последнего равенства в силу (4.5) и неотрицательности p имеем $\sigma v_0''(t) \ge 0$ при $a \le t \le b$, что противоречит неравенству (4.4). Полученное противоречие показывает, что каждое ненулевое решение задачи (4.1), (4.2) принимает как положительные, так и отрицательные значения на множестве $[a,\alpha] \cup [\beta,b]$ (заметим, что может случиться так, что $v_0(t) \ne 0$ при $t \in]a,\alpha] \cup [\beta,b[$). Определим теперь числа t_1, $t_2 \in]a,\alpha] \cup [\beta,b[$ равенствами

$$v_0(t_1) = \max\{v_0(t):\ t \in [a,\alpha] \cup [\beta,b]\}, \quad v_0(t_2) = \min\{v_0(t):\ t \in [a,\alpha] \cup [\beta,b]\}$$

и отметим, что

$$v_0(t_2) < 0, \quad v_0(t_1) > 0. \tag{4.6}$$

Не ограничивая общности, допустим, что $t_1 < t_2$. Тогда найдется точка $c \in]t_1, t_2[$ такая, что $v_0(c) = 0$, и с помощью функции Грина задач

$$v''(t) = 0 \quad \text{при} \quad a \le t \le c; \quad v(a) = 0, \quad v(c) = 0,$$

$$v''(t) = 0 \quad \text{при} \quad c \le t \le b; \quad v(c) = 0, \quad v(b) = 0$$

получим соответственно представления

$$v_0(t_1) = -\frac{c-t_1}{c-a}\int\limits_a^{t_1}(s-a)\,p(v_0)(s)\,ds - \frac{t_1-a}{c-a}\int\limits_{t_1}^{c}(c-s)\,p(v_0)(s)\,ds, \tag{4.7$_1$}$$

$$|v_0(t_2)| = \frac{b-t_2}{b-c}\int\limits_c^{t_2}(s-c)\,p(v_0)(s)\,ds + \frac{t_2-c}{b-c}\int\limits_{t_2}^{b}(b-s)\,p(v_0)(s)\,ds. \tag{4.7$_2$}$$

Теперь, заметив, что выполняются все требования леммы 3.2 при $A = [a,\alpha]\cup[\beta,b]$, с учетом неравенств (3.13), (4.6) из (4.7_1) и (4.7_2) находим оценки

$$0 < \frac{v_0(t_1)}{|v_0(t_2)|} \le \frac{c-t_1}{c-a}\int\limits_a^{t_1}(s-a)\,p(1)(s)\,ds + \frac{t_1-a}{c-a}\int\limits_{t_1}^{c}(c-s)\,p(1)(s)\,ds,$$

$$0 < \frac{|v_0(t_2)|}{v_0(t_1)} \le \frac{b-t_2}{b-c}\int\limits_c^{t_2}(s-c)\,p(1)(s)\,ds + \frac{t_2-c}{b-c}\int\limits_{t_2}^{b}(b-s)\,p(1)(s)\,ds,$$

откуда легко получим строгие неравенства

$$0 < \frac{v_0(t_1)}{|v_0(t_2)|} < \frac{(c-t_1)(t_1-a)}{c-a}\int\limits_a^{c}p(1)(s)\,ds, \quad 0 < \frac{|v_0(t_2)|}{v_0(t_1)} < \frac{(b-t_2)(t_2-a)}{b-c}\int\limits_c^{b}p(1)(s)\,ds. \tag{4.8}$$

Перемножая неравенства (4.8), учитывая неравенство (3.2), а также имея в виду определение точек t_1, t_2 и c, получим

$$1 < \frac{1}{2}\int\limits_a^{b}p(1)(s)\,ds\cdot\max\left\{\left(\frac{(s_1-a)(c-s_1)(s_2-c)(b-s_2)}{(c-a)(b-c)}\right)^{1/2} : \ s_1\in A_c,\ s_2\in B_c,\ a<c<b\right\}, \tag{4.9}$$

где $A_c = [a,c]\cap([a,\alpha]\cup[\beta,b])$, $B_c = [c,b]\cap([a,\alpha]\cup[\beta,b])$. Но в силу леммы 3.1_1 неравенство (4.9) противоречит условию (2.2), т.е. наше допущение неверно и $v_0\equiv 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.1_1. Как уже отмечено, нам достаточно показать, что задача (4.1), (4.2) имеет только нулевое решение.

Допустим, что при условиях теоремы задача (4.1), (4.2) имеет такое ненулевое решение v_0, что для некоторого $\sigma\in\{-1,1\}$

$$\sigma v_0(t)\ge 0 \quad \text{при} \quad \alpha\le t\le\beta. \tag{4.10}$$

Тогда в силу условий (4.2) существует множество положительной меры $I\subset[a,b]$ такое, что выполняется неравенство (4.4). Непрерывная функция

$$v_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{\alpha-a}\,v_0(\alpha) & \text{при} \quad a\le t<\alpha, \\ v_0(t) & \text{при} \quad \alpha\le t\le\beta, \\ \dfrac{b-t}{b-\beta}\,v_0(\beta) & \text{при} \quad \beta<t\le b \end{cases}$$

в силу (4.10) удовлетворяет неравенству (4.5), и так как оператор p сосредоточен на множестве $[\alpha,\beta]$, то $p(v_0)(t) = p(v_1)(t)$ при $a\le t\le b$. Отсюда, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.1_1, получим, что каждое ненулевое решение задачи (4.1), (4.2) меняет знак на множестве $[\alpha, \beta]$. Определим теперь числа $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ равенствами

$$v_0(t_1) = \max\{v_0(t) : \alpha \le t \le \beta\}, \quad v_0(t_2) = \min\{v_0(t) : \alpha \le t \le \beta\}$$

и отметим, что выполняются неравенства (4.6). Не ограничивая общности, положим $t_1 < t_2$. Тогда найдется точка $c \in]t_1, t_2[$ такая, что $v_0(c) = 0$. В таком случае, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.1_1, получим, что справедливы представления (4.7_1) и (4.7_2) и выполняются все требования леммы 3.2 при $A = [\alpha, \beta]$, откуда следует неравенство

$$1 < \frac{1}{2}\int_a^b p(1)(s)\,ds \cdot \max\left\{\left(\frac{(s_1-a)(c-s_1)(s_2-c)(b-s_2)}{(c-a)(b-c)}\right)^{1/2} : \alpha \le s_1 \le c,\ c \le s_2 \le \beta,\ a \le c \le \beta\right\}. \tag{4.11}$$

Но ввиду леммы 3.1_2 неравенство (4.11) противоречит условию (2.2), т.е. наше допущение неверно и $v_0 \equiv 0$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 2.1_i $(i = 1, 2)$. Из условий (2.5_i) следует, что $\delta \ne 0$ и $16^{\gamma-1} \le (b-a)/[(b-a)^2 - 4\delta^2]$. Учитывая последнее неравенство в (2.6), получим, что выполняется условие (2.2), т.е. выполняются все требования теоремы 2.1_i, откуда и вытекает справедливость следствия.

Доказательство следствия 2.2_i $(i = 1, 2)$. Определим оператор $p : \mathbb{C}([a, b]) \to L([a, b])$ равенством $p(x)(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t) x(\tau_j(t))$. Тогда из неотрицательности функций p_j $(j = \overline{1, m})$ следует неотрицательность оператора p, а условие (2.8) перепишется в виде (2.2). С другой стороны, из условия (2.7_i) следует, что оператор p сосредоточен на множестве $[a, \alpha] \cup [\beta, b]$ при $i = 1$ и на множестве $[\alpha, \beta]$ при $i = 2$, т.е. выполняются все требования теоремы 2.1_i, откуда и вытекает справедливость следствия.

Работа поддержана INTAS (проект YS 2001-2/80).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.
2. *Hale J.* Theory of functional differential equations. New York; Heidelberg; Berlin, 1977.
3. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
4. *Kiguradze I., Půža B.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 12. P. 106–113.
5. *Kiguradze I., Půža B.* // Czechosl. Math. J. 1997. V. 47. № 2. P. 341–373.
6. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 10. P. 125–128.
7. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 10. P. 150–152.
8. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk Brun. Math. 2000. V. 8. P. 1–72.
9. *Mukhigulashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2000. V. 20. P. 1–112.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
05.03.2003 г.