С. В. Мухигулашвили, И. Шремр, О разрешимости задачи Дирихле для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 10, 1353–1362

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 10, с. 1353–1362

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.7

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2005 г. С. В. Мухигулашвили, И. Шремр

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Постановка задачи и основные обозначения. На отрезке $[a,b]$ рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$u''(t) = f(u)(t) \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{1.2}$$

Задаче (1.1), (1.2) посвящена обширная литература (см. [1–8] и приведенную там библиографию). Однако с достаточной полнотой она изучена лишь в случае, когда $f(u)(t) = f_0(t, u(t), u'(t))$ (см., например, [9–13]).

В настоящей работе получены в некотором смысле оптимальные эффективные достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2). При этом используется метод априорных оценок и ограничения, наложенные на оператор f, носят односторонний характер. Отдельное внимание уделяется случаю, когда (1.1) – уравнение с отклоняющимся аргументом или обыкновенное дифференциальное уравнение.

Будем использовать следующие обозначения: $R =]-\infty, +\infty[$; $R_+ = [0, +\infty[$; $C([a,b];R)$ – пространство непрерывных функций $u : [a,b] \to R$ с нормой $\|u\|_C = \max\{|u(t)| : a \le t \le b\}$; $C'([a,b];R)$ – пространство функций $u : [a,b] \to R$, непрерывных вместе со своей первой производной, с нормой $\|u\|_{C'} = \|u\|_C + \|u'\|_C$; $\widetilde{C}'([a,b];R)$ – множество функций $u : [a,b] \to R$, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной; $L([a,b];R)$ – пространство функций $q : [a,b] \to R$, суммируемых на $[a,b]$ в смысле Лебега с нормой $\|q\|_L = \int_a^b |q(s)|\,ds$. Для любого $x \in R$ $[x]_+ = (|x| + x)/2$, $[x]_- = (|x| - x)/2$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $f : C'([a,b];R) \to L([a,b];R)$ является непрерывным оператором, удовлетворяющим условию $\sup\{|f(x)(\cdot)| : \|x\|_{C'} \le r\} \in L([a,b];R_+)$ при $r > 0$. Под решением задачи (1.1), (1.2) понимаем функцию $u \in \widetilde{C}'([a,b];R)$, удовлетворяющую условиям (1.2) и почти всюду на $[a,b]$ уравнению (1.1).

Определение 1.1. Оператор $p : C([a,b];R) \to L([a,b];R)$ принадлежит множеству P_{ab}, если он линейный и для любой функции $x \in C([a,b];R_+)$ почти всюду на $[a,b]$ выполняется неравенство $p(x)(t) \ge 0$.

Определение 1.2. Пусть $A \subseteq [a,b]$ – непустое множество. Оператор $\ell : C([a,b];R) \to L([a,b];R)$ принадлежит множеству $K_{ab}(A)$, если для любой функции $x \in C([a,b];R)$, удовлетворяющей условию $x(t) = 0$ при $t \in A$, почти всюду на $[a,b]$ выполняется равенство $p(x)(t) = 0$.

Замечание 1.1. Пусть $A \subseteq [a,b]$ – непустое множество и $\ell(x)(t) = p(t)x(\tau(t))$, где $p \in L([a,b];R)$, $\tau : [a,b] \to [a,b]$ – измеримая функция. Пусть, кроме того, либо $\tau(t) \in A$ при $a \le t \le b$, либо $p(t) = 0$ при $\tau(t) \in [a,b] \setminus A$. Тогда имеет место включение $\ell \in K_{ab}(A)$.

Определение 1.3. Функция $\eta : R \times R_+ \to R_+$ принадлежит множеству M_{ab}, если $\eta(\cdot, r) \in L([a,b]; R_+)$ при $r \in R_+$, $\eta(t, \cdot)$ не убывает при почти всех $t \in [a,b]$ и

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \int_a^b \eta(s, r)\, ds = 0. \tag{1.3}$$

1.2. Формулировка основных результатов. Для любого непустого множества $A \subseteq R$ положим $\rho_A(t) = \inf\{|t - s| : \ s \in A\}$, $\sigma_A(t) = \rho_A(t) + \rho_A(t + (b-a)/2)$.

Теорема 1.1. *Пусть существуют операторы*

$$g_0 : C'([a,b]; R) \to L([a,b]; R), \quad p_0 : C'([a,b]; R) \times C([a,b]; R) \to L([a,b]; R)$$

и функции $p, g \in L([a,b]; R_+)$, $\eta \in M_{ab}$ *такие, что для любого* $x \in C'([a,b]; R)$ *почти всюду на* $[a,b]$ *соблюдаются условия*

$$(f(x)(t) - p_0(x,x)(t) - g_0(x)(t)x'(t)) \operatorname{sign} x(t) \ge -\eta(t, \|x\|_{C'}), \tag{1.4}$$

$$|g_0(x)(t)| \le g(t), \quad p_0(x, 1)(t) \le p(t). \tag{1.5}$$

Пусть, кроме того,

$$p_0(x, \cdot) \in P_{ab} \cap K_{ab}(A) \quad \textit{при} \quad x \in C'([a,b]; R), \tag{1.6}$$

где $A \subseteq [a,b]$ *– непустое множество и*

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{b-a}\right)^2\right) \int_a^b p(s)\, ds < \frac{16}{b-a} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^b g(s)\, ds\right\}, \quad \textit{где} \quad \delta = \min\left\{\sigma_A(t) : a \le t \le \frac{b+a}{2}\right\}. \tag{1.7}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) разрешима.

Замечание 1.2. В случаях, когда множество $A \subseteq [a,b]$ имеет некоторые конкретные виды, вычислять минимум функции σ_A несложно. Например, если $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha \le \beta$, и $A = [\alpha, \beta]$ ($A = [a, \alpha] \cup [\beta, b]$), то $\delta = [(b-a)/2 - (\beta - \alpha)]_+$ ($\delta = [(b-a)/2 - (\beta - \alpha)]_-$).

Замечание 1.3. В работе [8] построен пример, показывающий оптимальность условия (1.7) в том смысле, что его нельзя заменить условием

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{b-a}\right)^2\right) \int_a^b p(s)\, ds < \frac{16 + \varepsilon}{b-a} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^b g(s)\, ds\right\},$$

какой бы малой ни была постоянная $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$u''(t) = \ell(u)(t) + f_1(u)(t), \tag{1.8}$$

где оператор $\ell : \ C([a,b]; R) \to L([a,b]; R)$ линейный неотрицательный, а $f_1 : C'([a,b]; R) \to L([a,b]; R)$ – непрерывный оператор такой, что $\sup\{|f_1(x)(\cdot)| : \ \|x\|_{C'} \le r\} \in L([a,b]; R_+)$ при $r > 0$.

Следствие 1.1. *Пусть* $\eta \in M_{ab}$ *и для любого* $x \in C'([a,b]; R)$ *почти всюду на* $[a,b]$ *выполняется условие*

$$f_1(x)(t) \operatorname{sign} x(t) \ge -\eta(t, \|x\|_{C'}). \tag{1.9}$$

Пусть, кроме того, существуют непустое множество $A \subseteq [a,b]$ *и постоянная* $d \ge 16$ *такие, что*

$$\ell \in P_{ab} \cap K_{ab}(A), \tag{1.10}$$

$$\int\limits_a^b \ell(1)(s)\,ds < \frac{d}{b-a}, \tag{1.11}$$

и

$$2^{-1}(b-a)\sqrt{1-16/d} \le \sigma_A(t) \quad \textit{при} \quad a \le t \le (b+a)/2. \tag{1.12}$$

Тогда задача (1.8), (1.2) разрешима.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами

$$u''(t) = p(t, u(\tau_0(t)), u'(\tau_1(t)))u(\tau(t)) + q(t, u(t), u(\mu_0(t)), u'(\mu_1(t))) \tag{1.13}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''(t) = p(t, u(t), u'(t))u(t) + q_0(t, u(t), u'(t)), \tag{1.14}$$

где $p : [a,b] \times R^2 \to R$, $q : [a,b] \times R^3 \to R$ и $q_0 : [a,b] \times R^2 \to R$ удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, а $\tau, \tau_i, \mu_i : [a,b] \to [a,b]$ $(i = 0,1)$ – измеримые функции.

Следствие 1.2. *Пусть $\eta \in M_{ab}$, $p \in L([a,b]; R_+)$ и для любых $x_1, x_2, x_3 \in R$ почти всюду на $[a,b]$ выполняются условия*

$$q(t, x_1, x_2, x_3)\operatorname{sign} x_1 \ge -\eta(t, |x_1| + |x_3|), \tag{1.15}$$

$$0 \le p(t, x_1, x_2) \le p(t). \tag{1.16}$$

Пусть, кроме того, существует непустое множество $A \subseteq [a,b]$ такое, что

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{b-a}\right)^2\right)\int\limits_a^b p(s)\,ds < \frac{16}{b-a}, \quad \delta = \min\left\{\sigma_A(t) : a \le t \le \frac{b+a}{2}\right\} \tag{1.17}$$

и либо $\tau(t) \in A$ при $a \le t \le b$, либо $p(t, x_1, x_2) = 0$ при $\tau(t) \in [a,b] \setminus A$ для любых $x_1, x_2 \in R$. Тогда задача (1.13), (1.2) разрешима.

Следствие 1.3. *Пусть $\eta \in M_{ab}$, $p \in L([a,b]; R_+)$ и для любых $x_1, x_2 \in R$ почти всюду на $[a,b]$ выполняются условия (1.16) и*

$$q_0(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_1 \ge -\eta(t, |x_1| + |x_2|). \tag{1.18}$$

Пусть, кроме того, существует непустое множество $A \subseteq [a,b]$ такое, что выполняется условие (1.17) и $p(t, x_1, x_2) = 0$ при $t \in [a,b] \setminus A$ для любых $x_1, x_2 \in R$. Тогда задача (1.14), (1.2) разрешима.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Вспомогательные неравенства.

Лемма 2.1. *Функции ρ_A, $\sigma_A : R \to R_+$ непрерывны и*

$$\rho_A(t) = \rho_{\bar A}(t) \quad \textit{при} \quad t \in R, \tag{2.1}$$

где $\bar A$ – замыкание множества A.

Доказательство. Так как $A \subseteq \bar A$, ясно, что

$$\rho_{\bar A}(t) \le \rho_A(t) \quad \text{при} \quad t \in R. \tag{2.2}$$

Пусть $t_0 \in R$ – любая точка, тогда $\rho_A(t_0) \le |t_0 - s|$ при $s \in A$. Далее, пусть $s_0 \in \bar A$ и последовательность $s_n \in A$ $(n \in N)$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s_0$. В этом случае $\rho_A(t_0) \le$

$\leq \lim\limits_{n\to+\infty} |t_0 - s_n| = |t_0 - s_0|$, т.е. $\rho_{\bar{A}}(t) \geq \rho_A(t)$ при $t \in R$. Из последнего неравенства и (2.2) следует равенство (2.1).

Для любых $s \in A$, $t_1, t_2 \in R$ справедливо неравенство $||t_2 - s| - |s - t_1|| \leq |t_2 - t_1|$. Далее, ясно, что $\rho_A(t_i) \leq |t_i - s| \leq |t_2 - t_1| + |t_{3-i} - s|$ $(i = 1, 2)$. Тогда $\rho_A(t_i) - |t_2 - t_1| \leq \rho_A(t_{3-i})$, в силу чего получим неравенство $|\rho_A(t_2) - \rho_A(t_1)| \leq |t_2 - t_1|$, т.е. ρ_A, а значит, и σ_A непрерывны. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $A \subseteq [a, b]$ *– непустое множество и точка* $c \in]a, b[$ *такая, что*

$$\bar{A} \cap [a, c] \neq \emptyset, \quad \bar{A} \cap [c, b] \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

Тогда справедлива оценка

$$\left(\frac{(c - t_1)(t_1 - a)(b - t_2)(t_2 - c)}{(c - a)(b - c)}\right)^{1/2} \leq \frac{(b - a)^2 - 4\delta^2}{8(b - a)} \quad \text{при} \quad t_1 \in A_c, \quad t_2 \in B_c, \tag{2.4}$$

где $A_c = \bar{A} \cap [a, c]$, $B_c = \bar{A} \cap [c, b]$ *и* δ *такое, как в формуле (1.7).*

Доказательство. Пусть

$$\sigma_1 = \rho_A((a + c)/2); \quad \sigma_2 = \rho_A((c + b)/2), \tag{2.5}$$

тогда из определения δ ясно, что $\sigma_1 + \sigma_2 \geq \delta$.

Рассмотрим два возможных случая $\max\{\sigma_1, \sigma_2\} \geq \delta$, $\max\{\sigma_1, \sigma_2\} < \delta$. Из (2.3) и (2.5) следуют равенства $\max\{(c - t_1)(t_1 - a) : t_1 \in A_c\} = (c - t_1')(t_1' - a)$, $\max\{(b - t_2)(t_2 - c) : t_2 \in B_c\} = (b - t_2')(t_2' - c)$, где $t_1' = (a + c)/2 - \sigma_1$, $t_2' = (c + b)/2 - \sigma_2$. Поэтому в силу известного числового неравенства

$$d_1 d_2 \leq (d_1 + d_2)^2/4, \tag{2.6}$$

получим

$$\left(\frac{(c - t_1)(t_1 - a)(b - t_2)(t_2 - c)}{(c - a)(b - c)}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{c - a}{4} - \frac{\sigma_1^2}{c - a}\right)^{1/2} \left(\frac{b - c}{4} - \frac{\sigma_2^2}{b - c}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{b - a}{4} - \frac{\sigma_1^2}{c - a} - \frac{\sigma_2^2}{b - c}\right) \quad \text{при} \quad t_1 \in A_c, \quad t_2 \in B_c. \tag{2.7}$$

Сначала допустим, что $\max\{\sigma_1, \sigma_2\} \geq \delta$. Тогда

$$\frac{b - a}{4} - \frac{\sigma_1^2}{c - a} - \frac{\sigma_2^2}{b - c} \leq \frac{b - a}{4} - \frac{(\max\{\sigma_1, \sigma_2\})^2}{b - a} \leq \frac{(b - a)^2 - 4\delta^2}{4(b - a)},$$

откуда вместе с (2.7) вытекает справедливость неравенства (2.4). Пусть теперь соблюдается $\max\{\sigma_1, \sigma_2\} < \delta$. Тогда из леммы 2.1 следует существование $\alpha, \beta \in \bar{A}$ таких, что

$$\rho_A((a + c)/2) = |(a + c)/2 - \alpha|, \quad \rho_A((c + b)/2) = |(c + b)/2 - \beta|. \tag{2.8}$$

Отсюда с учетом (2.5) вытекает, что

$$(b - a)/4 - \sigma_1^2/(c - a) - \sigma_2^2/(b - c) = b - a - (\beta - \alpha) - \eta(c), \tag{2.9}$$

где $\eta(t) = (\alpha - a)^2/(t - a) + (b - \beta)^2/(b - t)$ при $a < t < b$. Нетрудно проверить, что η достигает своего минимума на интервале $]a, b[$ в точке $t_0 = ((\alpha - a)b + (b - \beta)a)/(b - a - (\beta - \alpha))$. С учетом этого получим оценку

$$b - a - (\beta - \alpha) - \eta(c) \leq (b - a - (\beta - \alpha))(\beta - \alpha)/(b - a). \tag{2.10}$$

Пусть теперь

$$\sigma = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}. \tag{2.11}$$

Тогда из (2.5) и (2.8) следует, что справедливо одно из следующих неравенств:

$$\alpha \le (a+c)/2 - \sigma \tag{2.12$_1$}$$

или

$$\alpha \ge (a+c)/2 + \sigma, \tag{2.12$_2$}$$

а также одно из неравенств

$$\beta \ge (c+b)/2 + \sigma \tag{2.13$_1$}$$

или

$$\beta \le (c+b)/2 - \sigma. \tag{2.13$_2$}$$

Допустим, выполняется неравенство (2.12_1). Покажем, что тогда справедливо неравенство (2.13_1). Действительно, если допустим противное, что выполняется неравенство (2.13_2), с учетом (2.8), (2.12_1), получим, что $\rho_A((a+c)/2-\sigma) \le (a+c)/2-\sigma-\alpha = \rho_A((a+c)/2)-\sigma$, $\rho_A((c+b)/2-\sigma) \le (c+b)/2-\sigma-\beta = \rho_A((c+b)/2)-\sigma$. Отсюда в силу (2.5) и (2.11) следует оценка $\sigma_A((a+c)/2-\sigma) \le (\sigma_1-\sigma)+(\sigma_2-\sigma) = \max\{\sigma_1,\sigma_2\}-\sigma$, которая ввиду неравенства $\max\{\sigma_1,\sigma_2\} < \delta$ противоречит определению δ, т.е. β удовлетворяет неравенству (2.13_1). Тогда из (2.5), (2.8) с учетом (2.12_1) и (2.13_1) получим, что $\sigma_1 = (a+c)/2-\alpha$, $\sigma_2 = \beta-(c+b)/2$, и, значит,

$$\beta - \alpha = \sigma_1 + \sigma_2 + (b-a)/2. \tag{2.14$_1$}$$

Если теперь допустим, что выполняется неравенство (2.12_2), то аналогично предыдущему случаю удостоверимся в справедливости (2.13_2), откуда с учетом (2.5), (2.8) и (2.12_2) следует равенство

$$\beta - \alpha = (b-a)/2 - (\sigma_1+\sigma_2). \tag{2.14$_2$}$$

Тогда в силу неравенства $\sigma_1+\sigma_2 \ge \delta$ в случае равенств (2.14_1) и (2.14_2) получим, что

$$(b-a-(\beta-\alpha))\frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{(b-a)^2-4(\sigma_1+\sigma_2)^2}{4(b-a)} \le \frac{(b-a)^2-4\delta^2}{4(b-a)}. \tag{2.15}$$

Значит, из (2.7), (2.9), (2.10) и (2.15) следует справедливость оценки (2.4) и в случае, когда выполняется неравенство $\max\{\sigma_1,\sigma_2\} < \delta$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\ell \in P_{ab} \cap K_{ab}(A)$, где $A \subseteq [a,b]$ – непустое множество. Тогда для любой функции $v \in C([a,b];R)$ почти всюду на $[a,b]$ справедлива оценка*

$$\min\{v(s):\ s\in\bar{A}\}\ell(1)(t) \le \ell(v)(t) \le \max\{v(s):\ s\in\bar{A}\}\ell(1)(t).$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$ и

$$v_0(t) = \begin{cases} v(\alpha) & \text{при} \quad t\in[a,\alpha[, \\ v(t) & \text{при} \quad t\in\bar{A}, \\ \dfrac{v(\mu(t))-v(\nu(t))}{\mu(t)-\nu(t)}(t-\nu(t))+v(\nu(t)) & \text{при} \quad t\in[\alpha,\beta]\setminus\bar{A}, \\ v(\beta) & \text{при} \quad t\in]\beta,b], \end{cases}$$

где $\mu(t)=\min\{s\in\bar{A}:\ t\le s\}$, $\nu(t)=\max\{s\in\bar{A}:\ t\ge s\}$ при $\alpha\le t\le\beta$. Из этих определений ясно, что $v_0\in C([a,b];R)$,

$$\min\{v(s):\ s\in\bar{A}\} \le v_0(t) \le \max\{v(s):\ s\in\bar{A}\} \quad \text{при} \quad a\le t\le b, \tag{2.16}$$

$$v_0(t) = v(t) \quad \text{при} \quad t\in A. \tag{2.17}$$

Ввиду (2.16) получим, что

$$\min\{v(s):\ s\in\bar{A}\}\ell(1)(t) \le \ell(v_0)(t) \le \max\{v(s):\ s\in\bar{A}\}\ell(1)(t) \quad \text{при} \quad a\le t\le b. \tag{2.18}$$

С другой стороны, в силу (2.17) и включения $\ell \in K_{ab}(A)$ получим $\ell(v_0)(t) = \ell(v)(t)$ при $a \le t \le b$. Отсюда и из (2.18) сразу следует справедливость леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть $g \in L([a_1, a_2]; R_+)$, $g_1 \in L([a_1, a_2]; R)$ и G – функция Грина задачи*

$$v''(t) = g_1(t)v'(t) \quad \text{при} \quad a_1 \le t \le a_2, \quad v(a_1) = 0, \quad v(a_2) = 0 \tag{2.19}$$

и почти всюду на $[a_1, a_2]$ справедливо неравенство

$$|g_1(t)| \le g(t). \tag{2.20}$$

Тогда справедлива оценка

$$|G(t,s)| \le \frac{W(t,s)}{a_2 - a_1} \exp\biggl(\int\limits_{a_1}^{a_2} g(\xi)\,d\xi\biggr) \quad \text{при} \quad (t,s) \in [a_1, a_2] \times [a_1, a_2], \tag{2.21}$$

где $W(t,s) = \begin{cases} (s - a_1)(a_2 - t) & \text{при} \quad s \le t, \\ (t - a_1)(a_2 - s) & \text{при} \quad s > t. \end{cases}$

Доказательство. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [13]) известно, что

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{v_1(s)v_2(t)}{v_2(a_1)} \exp\biggl(-\displaystyle\int\limits_{a_1}^{s} g_1(\xi)\,d\xi\biggr) & \text{при} \quad a_1 \le s < t \le a_2, \\ -\dfrac{v_1(t)v_2(s)}{v_2(a_1)} \exp\biggl(-\displaystyle\int\limits_{a_1}^{s} g_1(\xi)\,d\xi\biggr) & \text{при} \quad a_1 \le t \le s \le a_2, \end{cases} \tag{2.22}$$

где v_i $(i = 1, 2)$ – решения уравнения $v''(t) = g_1(t)v'(t)$ при начальных условиях $v_1^{(j)}(a_1) = j$, $v_2^{(j)}(a_2) = -j$ $(j = 0, 1)$ и на $[a_1, a_2]$ справедливы оценки

$$(t - a_i) \exp\biggl(-\int\limits_{a_i}^{t} [g_1(s)]_-\,ds\biggr) \le (-1)^{i-1} v_i(t) \le (t - a_i) \exp\biggl(\int\limits_{a_i}^{t} [g_1(s)]_+ \cdot ds\biggr).$$

Подставив эти оценки в (2.22) с учетом неравенства (2.20), сразу удостоверимся в справедливости оценки (2.21). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $A \subseteq [a, b]$ – непустое множество и числа $b_i, c_i \in [a, b]$ $(i = 1, 2)$ такие, что $b_1 < c_1 < b_2 < c_2$,*

$$\bar{A} \cap]b_1, c_1[\ne \emptyset, \quad \bar{A} \cap]b_2, c_2[\ne \emptyset. \tag{2.23}$$

Пусть также $g_1 \in L([a, b]; R)$, $g, p \in L([a, b]; R_+)$, выполняется условие (2.20) при $t \in [a, b]$ и G_i $(i = 1, 2)$ – функция Грина задачи (2.19) при $a_1 = b_i$, $a_2 = c_i$. Тогда, если $t_1 \in A_1$, $t_2 \in B_1$, справедлива оценка

$$\int\limits_{b_1}^{c_1} |G_1(t_1, s)| p(s)\,ds \int\limits_{b_2}^{c_2} |G_2(t_2, s)| p(s)\,ds \le \mu^2, \tag{2.24}$$

где $A_1 = \bar{A} \cap]b_1, c_1[$, $B_1 = \bar{A} \cap]b_2, c_2[$,

$$\mu = \frac{(b-a)^2 - 4\delta^2}{16(b-a)} \int\limits_a^b p(s)\,ds \exp\biggl\{\frac{1}{2} \int\limits_a^b g(s)\,ds\biggr\},$$

и δ определяется равенством (1.7).

Доказательство. Пусть $c = (c_1 + b_2)/2$, множества A_c, B_c определены в лемме 2.2. Тогда так как $A_1 \subseteq A_c$, $B_1 \subseteq B_c$ ввиду (2.23), выполняются условия (2.3) и для любых $t_1 \in A_c$, $t_2 \in B_c$ справедливы оценки

$$\frac{(c_1 - t_1)(t_1 - b_1)}{c_1 - b_1} \le \frac{(c - t_1)(t_1 - a)}{c - a}, \quad \frac{(c_2 - t_2)(t_2 - b_2)}{c_2 - b_2} \le \frac{(b - t_2)(t_2 - c)}{b - c}.$$

Отсюда в силу леммы 2.2 при $t_1 \in A_1$, $t_2 \in B_1$ следует неравенство

$$\left(\frac{(c_1 - t_1)(t_1 - b_1)(c_2 - t_2)(t_2 - b_2)}{(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}\right)^{1/2} \le \frac{(b-a)^2 - 4\delta^2}{8(b-a)}. \tag{2.25}$$

Из леммы 2.4 при $b_i = a_1$, $c_i = a_2$ в силу (2.21), если $t_1 \in A_1$, $t_2 \in B_1$, получим оценки

$$\int\limits_{b_i}^{c_i} |G_i(t_i, s)| p(s)\, ds \le \frac{(c_i - t_i)(t_i - b_i)}{c_i - b_i} \int\limits_{b_i}^{c_i} p(s)\, ds \exp\left(\int\limits_{b_i}^{c_i} g(s)\, ds\right). \tag{2.26$_i$}$$

Перемножая (2.26_1) и (2.26_2) и учитывая неравенства (2.6) и (2.25), убеждаемся в справедливости оценки (2.24). Лемма доказана.

2.2. Леммы об априорных оценках.

Лемма 2.6. *Пусть $A \subseteq [a,b]$ – непустое множество, $\ell \in P_{ab} \cap K_{ab}(A)$, $g_1 \in L([a,b]; R)$, $g, p \in L([a,b]; R_+)$, почти всюду на $[a,b]$ выполняются условия (2.20), (1.7) и*

$$\ell(1)(t) \le p(t). \tag{2.27}$$

Тогда найдется постоянная $r > 0$, зависящая только от функций g, p, такая, что для произвольной функции $v \in \widetilde{C}'([a,b]; R)$, удовлетворяющей неравенству

$$(v''(t) - \ell(v)(t) - g_1(t) v'(t)) \operatorname{sign} v(t) \ge -q(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b \tag{2.28}$$

и условиям

$$v(a) = 0, \quad v(b) = 0, \tag{2.29}$$

где $q \in L([a,b]; R_+)$, справедлива оценка

$$\|v\|_{C'} \le r \|q\|_L. \tag{2.30}$$

Доказательство. Легко заметить, что из (2.28) следует существование функции $q_1 \in$ $\in L([a,b]; R_+)$ такой, что

$$v''(t) = \ell(v)(t) + g_1(t) v'(t) + (q_1(t) - q(t)) \operatorname{sign} v(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b. \tag{2.31}$$

Теперь рассмотрим случай, когда для некоторого $\sigma \in \{-1, 1\}$

$$\sigma v(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in A. \tag{2.32}$$

Пусть $t_0 \in A$. Не ограничивая общности, можем считать, что $v(t_0) \ne 0$. Тогда из (2.29) и (2.32) следует существование точек $a_1 \in [a, t_0[$, $a_2 \in]t_0, b]$ таких, что

$$v(a_1) = 0, \quad v(a_2) = 0, \quad \sigma v(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad a_1 \le t \le a_2. \tag{2.33}$$

С учетом неположительности функции Грина G задачи (2.19) и (2.33) из (2.31) следует представление

$$|v(t_0)| = \sigma \int\limits_{a_1}^{a_2} |G(t_0, s)| [(q(s) - q_1(s)) \operatorname{sign} v(s) - \ell(v)(s)]\, ds. \tag{2.34}$$

С другой стороны, в силу леммы 2.3 из (2.32) вытекает неравенство

$$\sigma\ell(v)(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b. \tag{2.35}$$

Из (2.34) с учетом (2.33), (2.35), неотрицательности функции q_1, оценки (2.21) и произвольности $t_0 \in A$ получим, что

$$|v(t)| \leq r_1 \|q\|_L \quad \text{при} \quad t \in A, \tag{2.36}$$

где $r_1 = 4^{-1}(b-a)e^{\|g\|_L}$. Пусть теперь функция v на множестве A принимает как отрицательные, так и положительные значения. Тогда, если

$$v(t_1) = \min\{v(t) : \ t \in \bar{A}\}, \quad v(t_2) = \max\{v(t) : \ t \in \bar{A}\}, \tag{2.37}$$

ясно, что

$$v(t_1) < 0, \quad v(t_2) > 0. \tag{2.38}$$

Допустим, что $t_1 < t_2$ (при $t_1 > t_2$ доказательство полностью аналогично). Тогда в силу (2.38) существует точка $c \in]t_1, t_2[$, в которой $v(c) = 0$, т.е. найдутся b_i, c_i $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\begin{gathered} a \leq b_1 < t_1 < c_1 \leq c, \quad c \leq b_2 < t_2 < c_2 \leq b, \\ v(b_i) = 0, \quad v(c_i) = 0, \quad (-1)^i v(t) > 0 \quad \text{при} \quad b_i < t < c_i \quad (i = 1, 2). \end{gathered} \tag{2.39}$$

С учетом (2.38) и (2.39) из (2.31) следует равенство

$$|v(t_i)| = \int\limits_{b_i}^{c_i} |G_i(t_i, s)| [(-1)^{i-1}\ell(v)(s) - q_1(s) + q(s)]\, ds, \tag{2.40}$$

где G_i – функция Грина задачи (2.19) при $b_i = a_1$, $c_i = a_2$, $i = 1, 2$. Из (2.40) с учетом (2.27), (2.37), (2.38), леммы 2.3 и неотрицательности q_1 получим оценки

$$|v(t_i)| \leq |v(t_{3-i})| \int\limits_{b_i}^{c_i} |G_i(t_i, s)| p(s)\, ds + r_1 \|q\|_L. \tag{2.41_i}$$

Подставив (2.41_1) в (2.41_2), затем (2.41_2) в (2.41_1) и сложив полученные неравенства, придем к оценке

$$(|v(t_1)| + |v(t_2)|)\left(1 - \int\limits_{b_1}^{c_1} |G_1(t_1, s)| p(s)\, ds \int\limits_{b_2}^{c_2} |G_2(t_2, s)| p(s)\, ds\right) \leq r_2', \tag{2.42}$$

где $r_2' = r_1(2 + r_1 \int_a^b p(s)\, ds)\|q\|_L$. Теперь заметив, что в силу условий (2.37), (2.39) выполняются все требования леммы 2.5, оценка (2.42) с учетом (2.24) запишется в виде

$$(|v(t_1)| + |v(t_2)|)(1 - \mu^2) \leq r_2'. \tag{2.43}$$

Поскольку в силу условия (1.7) $\mu < 1$, с учетом (2.37) из (2.43) получим, что

$$|v(t)| \leq r_2 \|q\|_L \quad \text{при} \quad t \in A, \tag{2.44}$$

где $r_2 = r_2'/(1 - \mu^2)$. С другой стороны, легко заметить, что из (2.28) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(v'(t) \exp\left\{-\int\limits_a^t g_1(s)\, ds\right\}\right) \operatorname{sign} v(t) \geq -(\ell(|v|)(t) + q(t)) \exp\left\{-\int\limits_a^t g_1(s)\, ds\right\} \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b. \tag{2.45}$$

Пусть теперь точка $t_3 \in]a,b[$ такая, что $v(t_3)v'(t_3) \neq 0$. Тогда, если $v(t_3)v'(t_3) > 0$ ($v(t_3)v'(t_3) < 0$), в силу условий (2.29) найдется $t_4 \in]t_3, b]$ ($t_4 \in [a, t_3[$) такая, что $v'(t_4) = 0$ и $v'(t)\operatorname{sign} v(t) > 0$ при $t_3 \leq t < t_4$ ($v'(t)\operatorname{sign} v(t) < 0$ при $t_4 < t \leq t_3$). Интегрируя неравенство (2.45) от t_3 до t_4 (от t_4 до t_3) с учетом последнего неравенства и (2.20), в силу определения t_3 и t_4 получаем $\|v'\|_C \leq (\int_a^b \ell(|v|)(s)\,ds + \|q\|_L)e^{\|g\|_L}$. Отсюда в силу леммы 2.3 и оценок (2.36), (2.44) имеем $\|v'\|_C \leq r_3\|q\|_L$, где $r_3 = (\max(r_1, r_2)\int_a^b p(s)\,ds + 1)e^{\|g\|_L}$. С другой стороны, из условий (2.29) следует, что $\|v\|_C \leq (b-a)\|v'\|_C$, т.е. справедлива оценка (2.30) при $r = (1 + b - a)r_3$. Лемма доказана.

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор $h : C'([a,b];R)\times C'([a,b];R) \to L([a,b];R)$ принадлежит множеству V_{ab}, если он непрерывен и выполняются следующие три условия:

i) $h(x,\cdot) : C'([a,b];R) \to L([a,b];R)$ – линейный оператор для каждого $x \in C'([a,b];R)$;

ii) для любых $x, y \in C'([a,b];R)$ почти всюду на отрезке $[a,b]$ справедливо неравенство $|h(x,y)(t)| \leq \alpha(t, \|x\|_{C'})\|y\|_{C'}$, где функция $\alpha : [a,b] \times R_+ \to R_+$ интегрируема по первому аргументу и неубываема по второму;

iii) существует положительное число r_0 такое, что для каждого $x \in C'([a,b];R)$ и $q^* \in L([a,b];R)$ любое решение задачи

$$v''(t) = h(x,v)(t) + q^*(t), \quad v(a) = 0, \quad v(b) = 0, \tag{2.46}$$

удовлетворяет оценке $\|v\|_{C'} \leq r_0\|q^*\|_L$.

Наконец, приведем теорему об априорной оценке, доказанную в работе [2].

Лемма 2.7. *Пусть существуют число $r_0' > 0$ и оператор $h \in V_{ab}$ такие, что для всех $\lambda \in]0,1[$ любое решение задачи*

$$v''(t) = (1-\lambda)h(v,v)(t) + \lambda f(v)(t), \quad v(a) = 0, \quad v(b) = 0, \tag{2.47}$$

удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{C'} \leq r_0'. \tag{2.48}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) разрешима.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Определим оператор $h : C'([a,b];R) \times C'([a,b];R) \to L([a,b];R)$ равенством $h(x,y)(t) = p_0(x,y)(t) + g_0(x)(t)y'(t)$ и покажем справедливость включения $h \in V_{ab}$. Легко проверить, что из (1.5) и (1.6) следует справедливость условий i) и ii) определения 2.1 при $\alpha(t,y) = p(t) + g(t)$. Пусть теперь x – произвольная функция из $C'([a,b];R)$ и v – произвольное решение задачи (2.46). Тогда v также будет решением задачи (2.28), (2.29), где

$$\ell(y)(t) \equiv p_0(x,y)(t), \quad g_1(t) \equiv g_0(x)(t), \quad q(t) \equiv |q^*(t)|. \tag{3.1}$$

В силу условий (1.5)–(1.7) выполняются все требования леммы 2.6, откуда и следует справедливость условия iii) при $r_0 = r$, т.е. справедливо включение $h \in V_{ab}$.

Допустим теперь, что v является решением задачи (2.47). Тогда ввиду условия (1.4) v будет решением задачи (2.28), (2.29), где оператор ℓ и функция g_1 определяются равенствами (3.1) при $x(t) \equiv v(t)$ и $q(t) \equiv \eta(t, \|v\|_{C'})$. Поэтому из леммы 2.6 вытекает справедливость оценки $\|v\|_{C'} \leq r\int_a^b \eta(s, \|v\|_{C'})\,ds$, откуда с учетом условия (1.3) следует существование числа $r_0' > 0$ такого, что соблюдается оценка (2.48), т.е. в силу леммы 2.7 задача (1.1), (1.2) разрешима.

3.2. Доказательство следствия 1.1. Из (1.11) и (1.12) следует справедливость неравенства (1.7), где $p(t) \equiv \ell(1)(t)$, $g(t) \equiv 0$. С другой стороны, если $f(x)(t) \equiv \ell(x)(t) + f_1(x)(t)$, из (1.9) и (1.10) следует справедливость условий (1.4)–(1.6) при $g_0(x)(t) \equiv 0$, $p_0(x,y)(t) \equiv \ell(y)(t)$, т.е. выполняются все требования теоремы 1.1.

3.3. Доказательство следствия 1.2. Из замечания 1.1 и условия (1.16) следует справедливость включения (1.6), где $p_0(x,y)(t) \equiv p(t, x(\tau_0(t)), x'(\tau_1(t)))y(\tau(t))$. С другой стороны, если $f(x)(t) \equiv p(t, x(\tau_0(t)), x'(\tau_1(t)))x(\tau(t)) + q(t, x(t), x(\mu_0(t)), x'(\mu_1(t)))$, то из (1.15) и (1.17) следует справедливость условий (1.4), (1.5) и (1.7) при $g_0(x)(t) \equiv 0$, т.е. выполняются все требования теоремы 1.1. Следствие доказано.

Справедливость следствия 1.3 вытекает непосредственно из следствия 1.2.

Работа поддержана CRDF/GRDF (проект 3318) и Агентством Чешской Республики (проект 201/04/P183).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kiguradze I.* // Funct. Differ. Equat. 2003. V. 10. № 1–2. P. 259–281.
2. *Kiguradze I., Puža B.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 12. P. 106–113.
3. *Кигурадзе И.Т., Пужа Б.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 185–194.
4. *Kiguradze I., Puža B.* // Nonlinear Anal. 2000. V. 42. P. 229–242.
5. *Kiguradze I., Puža B.* // Funct. Differ. Equat. 2002. V. 9. № 3–4. P. 405–422.
6. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 10. P. 125–128.
7. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Some Two-Point Boundary Value Problems For Second Order Functional Differential Equations. Brno, 2000.
8. *Мухигулашвили С.В.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 477–484.
9. *Agarwal R.* Boundary value problems for higher order differential equations. Singapore, 1986.
10. *Гудков В., Клоков Ю., Лепин А., Пономарев В.* // Двухточечные краевые задачи для обыкновенных уравнений. Рига, 1973.
11. *Кигурадзе И.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
12. *Кигурадзе И.Т., Лежава Н.Р.* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 2147–2161.
13. *Кигурадзе И., Шехтер Б.* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Новейш. достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси,
Математический институт Чешской академии наук,
г. Брно

Поступила в редакцию
30.08.2004 г.