С. В. Мухигулашвили, О разрешимости периодической задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 2006, том 42, номер 3, 356–365

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 3, с. 356–365

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2006 г. С. В. Мухигулашвили

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Постановка задачи и основные обозначения. Пусть ω – положительное число. На отрезке $[0,\omega]$ рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$u''(t) = f(u)(t) \tag{1.1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\omega) \quad (i = 0, 1). \tag{1.2}$$

В случае, когда f является оператором Немыцкого, т.е. когда $f(u)(t) = f_0(t, u(t), u'(t))$, задача (1.1), (1.2) изучена достаточно подробно (см., например, [1–11, 13–15] и приведенную там библиографию), а в общем случае остается пока еще малоизученной.

В предлагаемой работе методом априорных оценок получены в некотором смысле оптимальные, эффективные достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2), которые, с одной стороны, обобщают известную теорему Ласоты и Опяла [14], а с другой стороны, дополняют результаты работ [12, 16–20], касающиеся разрешимости периодической задачи для функционально-дифференциальных уравнений.

Мы будем использовать следующие обозначения: $R =]-\infty, +\infty[$; $R_+ = [0, +\infty[$; $C([a,b];R)$ – пространство непрерывных функций $u : [a,b] \to R$ с нормой $\|u\|_C = \max\{|u(t)| : a \le t \le b\}$; $C'([a,b];R)$ – пространство функций $u : [a,b] \to R$, непрерывных вместе со своей первой производной, с нормой $\|u\|_{C'} = \|u\|_C + \|u'\|_C$; $\widetilde{C}'([a,b];R)$ – множество функций $u : [a,b] \to R$, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной; $L([a,b];R)$ – пространство функций $q : [a,b] \to R$, суммируемых на $[a,b]$ в смысле Лебега, с нормой $\|q\|_L = \int_a^b |q(s)|\,ds$. Для любого $x \in R$ обозначаем $[x]_+ = (|x| + x)/2$, $[x]_- = (|x| - x)/2$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $f : C'([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$ является непрерывным оператором, удовлетворяющим условию

$$\sup\{|f(x)(\cdot)| : \ \|x\|_{C'} \le r\} \in L([0,\omega];R_+) \quad \text{при} \quad r > 0.$$

Под решением задачи (1.1), (1.2) понимаем функцию $u \in \widetilde{C}'([0,\omega];R)$, удовлетворяющую условиям (1.2) и почти всюду на $[0,\omega]$ уравнению (1.1).

Определение 1.1. Оператор $p : C([a,b];R) \to L([a,b];R)$ принадлежит множеству P_{ab}, если для любой функции $x \in C([a,b];R_+)$ почти всюду на $[a,b]$ выполняется неравенство $p(x)(t) \ge 0$.

Определение 1.2. Пусть $A \subseteq [a,b]$ – непустое множество. Оператор $\ell : C([a,b];R) \to$ $\to L([a,b];R)$ принадлежит множеству $K_{ab}(A)$, если для любой функции $x \in C([a,b];R)$, удовлетворяющей условию $x(t) = 0$ при $t \in A$, почти всюду на $[a,b]$ справедливо равенство $p(x)(t) = 0$.

Замечание 1.1. Пусть $A \subseteq [0,\omega]$ – непустое множество и $\ell(x)(t) = p(t)x(\tau(t))$, где $p \in L([0,\omega];R)$, $\tau : [0,\omega] \to [0,\omega]$ – измеримая функция. Пусть, кроме того, либо $\tau(t) \in A$ при $0 \le t \le \omega$, либо $p(t) = 0$ при $\tau(t) \in [0,\omega] \setminus A$. Тогда имеет место включение $\ell \in K_{0\omega}(A)$.

Определение 1.3. Функция $\eta : R \times R_+ \to R_+$ принадлежит множеству M_ω, если $\eta(\cdot, r) \in L([0,\omega];R_+)$ при $r \in R_+$, $\eta(t,\cdot)$ не убывает при почти всех $t \in [0,\omega]$ и

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_0^\omega \eta(s,r)\,ds = 0. \tag{1.3}$$

1.2. Формулировка основных результатов. Для любого непустого множества $A \subseteq R$ положим $\rho_A(t) = \inf\{|t-s| : s \in A\}$, $\sigma_A(t) = \rho_A(t) + \rho_A(t+\omega/2)$.

Теорема 1.1. *Пусть существуют операторы*

$$g_0 : C'([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R), \quad p_0 : C'([0,\omega];R) \times C([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$$

и функции $p, g \in L([0,\omega];R_+)$, $\eta \in M_\omega$ *такие, что для любого* $x \in C'([0,\omega];R)$ *почти всюду на* $[0,\omega]$ *выполняются условия*

$$(f(x)(t) - p_0(x,x)(t) - g_0(x)(t)x'(t))\operatorname{sign} x(t) \ge -\eta(t, \|x\|_{C'}), \tag{1.4}$$

$$|g_0(x)(t)| \le g(t), \quad p_0(x,1)(t) \le p(t). \tag{1.5}$$

Пусть, кроме того,

$$\int_0^\omega p_0(x,1)(s)\,ds \ge \alpha_0 \quad \textit{при} \quad x \in C'([0,\omega];R), \tag{1.6}$$

$$p_0(x,\cdot) \in P_{0\omega} \cap K_{0\omega}(A) \quad \textit{при} \quad x \in C'([0,\omega];R), \tag{1.7}$$

где $A \subseteq [0,\omega]$ *– непустое множество,* $\alpha_0 > 0$ *и*

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2\right) \int_0^\omega p(s)\,ds < \frac{16}{\omega} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\omega g(s)\,ds\right\}, \quad \delta = \min\{\sigma_A(t) : 0 \le t \le \omega/2\}. \tag{1.8}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) разрешима.

Замечание 1.2. В случаях, когда множество $A \subseteq [0,\omega]$ имеет некоторые конкретные виды, вычислять минимум функции σ_A не сложно. Например, если $\alpha, \beta \in [0,\omega]$, $\alpha \le \beta$, и $A = [\alpha,\beta]$ $(A = [0,\alpha] \cup [\beta,\omega])$, то $\delta = [\omega/2 - (\beta-\alpha)]_+$ $(\delta = [\omega/2 - (\beta-\alpha)]_-)$.

Замечание 1.3. В работе [18] построен пример, показывающий оптимальность условия (1.8) в том смысле, что его нельзя заменить условием

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2\right) \int_0^\omega p(s)\,ds < \frac{16+\varepsilon}{\omega} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\omega g(s)\,ds\right\},$$

какой бы малой ни была постоянная $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$u''(t) = \ell(u)(t) + f_1(u)(t), \tag{1.9}$$

где $\ell : C([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$ – линейный неотрицательный оператор, а $f_1 : C'([0,\omega];R) \to \to L([0,\omega];R)$ – непрерывный оператор такой, что $\sup\{|f_1(x)(\cdot)| : \|x\|_{C'} \le r\} \in L([0,\omega];R_+)$ при $r > 0$.

Следствие 1.1. *Пусть* $\eta \in M_\omega$ *и для любого* $x \in C'([0,\omega];R)$ *почти всюду на* $[0,\omega]$ *соблюдается условие*

$$f_1(x)(t)\operatorname{sign} x(t) \geq -\eta(t, \|x\|_{C'}). \tag{1.10}$$

Пусть, кроме того, существуют непустое множество $A \subseteq [0,\omega]$ *и постоянная* $d \geq 16$ *такие, что*

$$\ell \in P_{0\omega} \cap K_{0\omega}(A), \tag{1.11}$$

$$0 < \int\limits_0^\omega \ell(1)(s)\,ds < \frac{d}{\omega}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{16}{d}\right)^{1/2} \leq \sigma_A(t) \quad \textit{при} \quad 0 \leq t \leq \omega/2. \tag{1.13}$$

Тогда задача (1.9), (1.2) разрешима.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами

$$u''(t) = p(t, u(\tau_0(t)), u'(\tau_1(t)))u(\tau(t)) + q(t, u(t), u(\mu_0(t)), u'(\mu_1(t))) \tag{1.14}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''(t) = p(t, u(t), u'(t))u(t) + q_0(t, u(t), u'(t)), \tag{1.15}$$

где $p : [0,\omega] \times R^2 \to R$, $q : [0,\omega] \times R^3 \to R$ и $q_0 : [0,\omega] \times R^2 \to R$ удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, а $\tau, \tau_i, \mu_i : [0,\omega] \to [0,\omega]$ $(i = 0,1)$ – измеримые функции.

Следствие 1.2. *Пусть* $\eta \in M_\omega$, $p \in L([0,\omega];R)$ *и для любых* $x_1, x_2, x_3 \in R$ *почти всюду на* $[0,\omega]$ *соблюдаются условия*

$$q(t, x_1, x_2, x_3)\operatorname{sign} x_1 \geq -\eta(t, |x_1| + |x_2| + |x_3|), \tag{1.16}$$

$$0 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p(t). \tag{1.17}$$

Пусть, кроме того, существуют непустое множество $A \subseteq [0,\omega]$ *и число* $\alpha_0 > 0$ *такие, что*

$$\int\limits_0^\omega p(s, x_1, x_2)\,ds > \alpha_0 \quad \textit{при} \quad x_1, x_2 \in R, \tag{1.18}$$

$$\left(1 - 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2\right)\int\limits_0^\omega p(s)\,ds < \frac{16}{\omega}, \quad \delta = \min\{\sigma_A(t) : \ 0 \leq t \leq \omega/2\} \tag{1.19}$$

и либо $\tau(t) \in A$ *при* $0 \leq t \leq \omega$, *либо* $p(t, x_1, x_2) = 0$ *при* $\tau(t) \in [0,\omega] \setminus A$ *для любых* $x_1, x_2 \in R$. *Тогда задача (1.14), (1.2) разрешима.*

Следствие 1.3. *Пусть* $\eta \in M_\omega$, $p \in L([0,\omega];R)$ *и для любых* $x_1, x_2 \in R$ *почти всюду на* $[0,\omega]$ *выполняются условия (1.17),*

$$q_0(t, x_1, x_2)\operatorname{sign} x_1 \geq -\eta(t, |x_1| + |x_2|). \tag{1.20}$$

Пусть, кроме того, существуют непустое множество $A \subseteq [0,\omega]$ *и число* $\alpha_0 > 0$ *такие, что имеют место условия (1.19), а также для любых* $x_1, x_2 \in R$ *условия (1.18) и* $p(t, x_1, x_2) = 0$ *при* $\tau(t) \in [0,\omega] \setminus A$. *Тогда задача (1.15), (1.2) разрешима.*

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Вспомогательные неравенства. Из лемм 2.1–2.5, доказанных в работе [19], сразу следует справедливость следующих предложений.

Лемма 2.1. *Пусть* $\ell_1 \in P_{ab} \cap K_{ab}(D)$, *где* $D \subseteq [a,b]$ *– непустое множество. Тогда для любой функции* $v_0 \in C([a,b];R)$ *почти всюду на* $[a,b]$ *справедлива оценка*

$$\min\{v_0(s):\ s \in \bar{D}\}\ell_1(1)(t) \le \ell_1(v_0)(t) \le \max\{v_0(s):\ s\in \bar{D}\}\ell_1(1)(t).$$

Лемма 2.2. *Пусть функции* $\widetilde{g} \in L([a_1,a_2];R_+)$, $\widetilde{g_1} \in L([a_1,a_2];R)$, G *– функция Грина задачи*

$$v''(t) = \widetilde{g}_1(t)v'(t) \quad \text{при} \quad a_1 \le t \le a_2, \quad v(a_1)=0, \quad v(a_2)=0 \tag{2.1}$$

и почти всюду на $[a_1,a_2]$ *выполняется неравенство*

$$|\widetilde{g_1}(t)| \le \widetilde{g}(t). \tag{2.2}$$

Тогда справедлива оценка

$$|G(t,s)| \le \frac{a_2-a_1}{4}\exp\biggl(\int\limits_{a_1}^{a_2}\widetilde{g}(\xi)\,d\xi\biggr) \quad \text{при} \quad (t,s)\in[a_1,a_2]\times[a_1,a_2]. \tag{2.3}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $D \subseteq [a,b]$ *– непустое множество и числа* $b_i, c_i \in [a,b]$ $(i=1,2)$ *такие, что* $b_1 < c_1 \le b_2 < c_2$,

$$\bar{D}\cap\ ]b_1,c_1[\ \ne \emptyset, \qquad \bar{D}\cap\ ]b_2,c_2[\ \ne\emptyset. \tag{2.4}$$

Пусть также функции $\widetilde{g}_1 \in L([a,b];R)$, $\widetilde{g},\widetilde{p} \in L([a,b];R_+)$, *выполняется условие (2.2) при* $t\in[a,b]$ *и* G_i $(i=1,2)$ *– функция Грина задачи (2.1) при* $a_1=b_i$, $a_2=c_i$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{b_1}^{c_1}|G_1(t_1,s)|\widetilde{p}(s)\,ds\int\limits_{b_2}^{c_2}|G_2(t_2,s)|\widetilde{p}(s)\,ds \le \mu^2 \quad \text{при} \quad t_i\in\bar{D}\cap\ ]b_i,c_i[\quad (i=1,2), \tag{2.5}$$

где

$$\mu = \frac{(b-a)^2-4\delta_1^2}{16(b-a)}\int\limits_a^b\widetilde{p}(s)\,ds\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_a^b\widetilde{g}(s)\,ds\biggr),$$

$$\delta_1 = \min\{\sigma_D(t):\ a\le t\le (a+b)/2\}. \tag{2.6}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $A\subseteq[0,\omega]$ *– непустое множество и число* δ *определено в (1.8). Тогда для произвольного* $a\in[0,\omega[$, *если* $D = A\cup\{t+\omega:\ t\in A\}\cap[a,a+\omega]$ *и число* δ_1 *определено равенством (2.6) при* $b=a+\omega$, *справедливо неравенство*

$$\delta_1 \ge \delta. \tag{2.7}$$

Доказательство. Сначала введем обозначения $A_1 = \{t+\omega:\ t\in A\}$, $B = A\cup A_1$ и покажем, что

$$\min\{\sigma_B(t):\ 0\le t\le 3\omega/2\} = \delta. \tag{2.8}$$

Пусть $\alpha = \inf A$, $\beta=\sup A$ и точка $t_0\in[0,3\omega/2]$ такая, что $\sigma_B(t_0)=\min\{\sigma_B(t):\ 0\le t\le 3\omega/2\}$. Допустим, что $t_1\in[0,3\omega/2]$ и $t_1\notin\bar{B}$, $t_1+\omega/2\notin\bar{B}$, тогда $0<\min\{\rho_B(t_1),\rho_B(t_1+\omega/2)\}=\varepsilon$ и справедливо одно из следующих условий:

$$\sigma_B(t_1-\varepsilon)\le\sigma_B(t_1) \quad \text{и} \quad \rho_B(t_1-\varepsilon)=0 \quad \text{либо} \quad \rho_B(t_1+\omega/2-\varepsilon)=0$$

или

$$\sigma_B(t_1+\varepsilon) \le \sigma_B(t_1) \quad \text{и} \quad \rho_B(t_1+\varepsilon) = 0 \quad \text{либо} \quad \rho_B(t_1+\omega/2+\varepsilon) = 0.$$

Ввиду этого, не ограничивая общности, можем предполагать, что

$$t_0 \in \bar{B} \quad \text{или} \quad t_0 + \omega/2 \in \bar{B}. \tag{2.9}$$

Из определения числа δ в (1.8) и включения $A \subseteq [0, \omega]$ ясно, что

$$\min\{\sigma_A(t): \ 0 \le t \le 3\omega/2\} = \delta. \tag{2.10}$$

Сначала допустим, что $0 \le t_0 \le \beta - \omega/2$. Тогда из включения $\beta \in \bar{A}$ следует, что

$$\inf\{|t_0 + \omega i/2 - s|: \ s \in B\} = \inf\{|t_0 + \omega i/2 - s|: \ s \in A\} \quad (i = 0, 1), \tag{2.11}$$

т.е. $\sigma_B(t_0) = \sigma_A(t_0)$, и в силу (2.10)

$$\sigma_B(t_0) \ge \delta. \tag{2.12}$$

Пусть теперь

$$\beta - \omega/2 < t_0 \le \beta, \tag{2.13}$$

и заметим, что или

$$(t_0 + \omega/2) - \beta \le \alpha + \omega - (t_0 + \omega/2), \tag{2.14$_1$}$$

или

$$(t_0 + \omega/2) - \beta > \alpha + \omega - (t_0 + \omega/2). \tag{2.14$_2$}$$

Если выполняется условие (2.14$_1$), из (2.13) и включения $\beta \in \bar{A}$ вытекает справедливость равенств (2.11). Следовательно, $\sigma_B(t_0) = \sigma_A(t_0)$ и в силу (2.10) справедлива оценка (2.12). Пусть теперь имеет место неравенство (2.14$_2$). Если $\alpha + \omega > t_0 + \omega/2$, ввиду (2.13) ясно, что $t_0 + \omega/2 \notin \bar{B}$. Отсюда с учетом (2.9), (2.10), (2.14$_2$) и включений $\alpha, \beta \in \bar{A}$ получим

$$\sigma_B(t_0) = \rho_B(t_0 + \omega/2) = \alpha + \omega/2 - t_0 \ge \rho_A(\alpha + \omega/2) \ge \delta.$$

Если $\alpha + \omega \le t_0 + \omega/2$, то $t_0 + \omega/2 \in \bar{A}_1$ и

$$\inf\{|t_0 + \omega/2 - s|: \ s \in B\} = \inf\{|t_0 + \omega/2 - s|: \ s \in A_1\} = \inf\{|t_0 - \omega/2 - s|: \ s \in A\}.$$

Значит, $\rho_B(t_0 + \omega/2) = \rho_A(t_0 - \omega/2)$ и в силу соотношений (2.10) и (2.13)

$$\sigma_B(t_0) = \rho_B(t_0) + \rho_B(t_0 + \omega/2) = \rho_A(t_0) + \rho_A(t_0 - \omega/2) = \sigma_A(t_0 - \omega/2) \ge \delta.$$

Следовательно, справедливо условие (2.12).

В случае $\beta \le t_0 \le t_0 + \omega/2 \le \alpha + \omega$ ясно, что $t_0 - \alpha \le \alpha + \omega - t_0$ и $t_0 - \beta \le \alpha + \omega - t_0$. Тогда в силу (2.10) и включения $\beta \in \bar{A}$ получим $\sigma_B(t_0) = \alpha + \omega/2 - \beta \ge \rho_A(\alpha + \omega/2) = \sigma_A(\alpha) \ge \delta$. Следовательно, выполняется условие (2.12).

Рассмотрим теперь случай

$$\beta \le t_0 \le \alpha + \omega \le t_0 + \omega/2. \tag{2.15}$$

Из (2.15) следует, что

$$\inf\{|t_0 + \omega/2 - s|: \ s \in B\} = \inf\{|t_0 + \omega/2 - s|: \ s \in A_1\} =$$

$$= \inf\{|t_0 - \omega/2 - s|: \ s \in A\} \ge \inf\{|t_0 - \omega/2 - s|: \ s \in B\}$$

и тогда

$$\sigma_B(t_0) = \rho_B(t_0) + \rho_B(t_0 + \omega/2) \ge \rho_B(t_0 - \omega/2) + \rho_B(t_0) = \sigma_B(t_0 - \omega/2). \tag{2.16}$$

Из (2.15) ясно, что $t_0 - \omega/2 \le \alpha + \omega$, и по этому из рассмотренных выше случаев следует неравенство $\sigma_B(t_0 - \omega/2) \ge \delta$. Отсюда и из (2.16) вытекает справедливость неравенства (2.12).

Наконец, заметим, что случай $\alpha + \omega \leq t_0$ легко сводится к уже рассмотренным случаям. Следовательно, $\sigma_B(t) \geq \delta$ при $0 \leq t \leq 3\omega/2$. С другой стороны, так как $A \subset B$, ясно, что $\sigma_B(t) \leq \sigma_A(t)$ при $0 \leq t \leq 3\omega/2$. Из последних двух неравенств и определения числа δ в (1.8) следует справедливость (2.8). Тогда из (2.6), (2.8), включения $D \subseteq B$ и неравенства $a + \omega \leq 3\omega/2$ вытекает справедливость неравенства (2.7). Лемма доказана.

2.2. Леммы об априорных оценках.

Лемма 2.5. *Пусть функции* $\ell \in P_{0\omega} \cap K_{0\omega}(A)$, $g_1 \in L([0,\omega]; R)$, $g, p \in L([0,\omega]; R_+)$ *и почти всюду на* $[0,\omega]$ *соблюдаются условия*

$$|g_1(t)| \leq g(t), \quad \ell(1)(t) \leq p(t). \tag{2.17}$$

Пусть, кроме того,

$$\int_0^\omega \ell(1)(s)\,ds \geq \alpha_0 \tag{2.18}$$

и выполняется условие (1.8), где $A \subseteq [0,\omega]$ *– непустое множество,* $\alpha_0 > 0$ *и константа* δ *определяется равенством (1.8). Тогда найдется постоянная* $r > 0$ *такая, что для каждой функции* $v \in \widetilde{C}'([0,\omega]; R)$, *удовлетворяющей почти всюду на* $[0,\omega]$ *условиям*

$$(v''(t) - \ell(v)(t) - g_1(t)v'(t)) \operatorname{sign} v(t) \geq -q(t) \tag{2.19}$$

и

$$v^{(i)}(0) = v^{(i)}(\omega) \quad (i = 0, 1), \tag{2.20}$$

где $q \in L([0,\omega]; R_+)$, *справедлива оценка*

$$\|v\|_{C'} \leq r\|q\|_L. \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть $v \in \widetilde{C}'([0,\omega]; R)$ – функция, удовлетворяющая условиям (2.19), (2.20). В силу условий (2.20) найдется точка $a \in [0,\omega[$ такая, что $v'(a) = 0$. Пусть тогда $C_\omega([a,a+\omega]; R) = \{x \in C([a,a+\omega]; R) : x^{(i)}(a) = x^{(i)}(a+\omega)\ (i = 0,1)\}$, непрерывные операторы $\gamma : L([0,\omega]; R) \to L([a,a+\omega]; R)$, $\ell_1 : C_\omega([a,a+\omega]; R) \to L([a,a+\omega]; R)$ и функции $v_0 \in C_\omega([a,a+\omega]; R)$, $\widetilde{g}_1 \in L([a,a+\omega]; R)$, $\widetilde{g}, \widetilde{q} \in L([a,a+\omega]; R_+)$ определены равенствами

$$\gamma(x)(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при} \quad a \leq t \leq \omega, \\ x(t-\omega) & \text{при} \quad \omega < t \leq a+\omega, \end{cases} \quad \ell_1(x)(t) = \gamma(\ell(\gamma^{-1}(x)))(t),$$

$$v_0(t) = \gamma(v)(t), \quad \widetilde{g}(t) = \gamma(g)(t), \quad \widetilde{g}_1(t) = \gamma(g_1)(t), \quad \widetilde{q}(t) = \gamma(q)(t), \quad \widetilde{p}(t) = \gamma(p)(t) \tag{2.22}$$

и $D = A \cup \{t+\omega :\ t \in A\} \cap [a,a+\omega]$. Тогда из определений (2.22), включения $\ell \in P_{0\omega} \cap K_{0\omega}(A)$ и условий (2.17) следует, что $\|\widetilde{g}\|_L = \|g\|_L$, $\|\widetilde{g}_1\|_L = \|g_1\|_L$, $\|\widetilde{p}\|_L = \|p\|_L$, $\|\widetilde{q}\|_L = \|q\|_L$, $\int_a^{a+\omega} \ell_1(1)(s)\,ds = \int_0^\omega \ell(1)(s)\,ds$, почти всюду на $[0,\omega]$ выполняются неравенства

$$|\widetilde{g}_1(t)| \leq \widetilde{g}(t), \quad \ell_1(1)(t) \leq \widetilde{p}(t) \tag{2.23}$$

и

$$\ell_1 \in P_{aa+\omega} \cap K_{aa+\omega}(D). \tag{2.24}$$

Более того, из неравенства (2.19) и определений (2.22) следует, что почти всюду на $[a,a+\omega]$

$$\frac{d}{dt}\left(v_0'(t)\exp\left\{-\int_a^t \widetilde{g}_1(s)\,ds\right\}\right)\operatorname{sign} v_0(t) \geq (\ell_1(v_0)(t)\operatorname{sign} v_0(t) - \widetilde{q}(t))\exp\left\{-\int_a^t \widetilde{g}_1(s)\,ds\right\} \tag{2.25}$$

и существует функция $q_1 \in L([a,a+\omega]; R_+)$ такая, что

$$v_0''(t) = \ell_1(v_0)(t) + \widetilde{g}_1(t)v_0'(t) + (q_1(t) - \widetilde{q}(t))\operatorname{sign} v_0(t). \tag{2.26}$$

Из определения точки a и условий (2.20) также вытекает, что

$$v_0'(a) = 0, \quad v_0'(a+\omega) = 0. \tag{2.27}$$

Пусть теперь $t_0 \in]a, b[$, для которой $v_0(t_0)v_0'(t_0) \neq 0$. Тогда, если

$$v_0(t_0)v_0'(t_0) > 0 \quad (v_0(t_0)v_0'(t_0) < 0)$$

в силу условий (2.27) найдется точка $t_0' \in]t_0, a+\omega]$ $(t_0' \in [a, t_0[\,)$ такая, что $v_0'(t_0') = 0$ и

$$v_0'(t)\operatorname{sign} v_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_0 \le t < t_0' \quad (v_0'(t)\operatorname{sign} v_0(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_0' < t \le t_0). \tag{2.28}$$

Интегрируя неравенство (2.25) от t_0 до t_0' (от t_0' до t_0), с учетом (2.28) получаем неравенство

$$|v_0(t_0)| \le -\int\limits_{\min(t_0,t_0')}^{\max(t_0,t_0')} (l_1(v_0)(s)\operatorname{sign} v_0(s) - \widetilde{q}(s))\exp\biggl\{-\int\limits_a^s \widetilde{g}_1(\zeta)\,d\zeta\biggr\}ds\exp\biggl\{\int\limits_a^{t_0} \widetilde{g}_1(\zeta)\,d\zeta\biggr\}. \tag{2.29}$$

Рассмотрим случай, когда для некоторого числа $\sigma \in \{-1, 1\}$ справедливо неравенство

$$\sigma v_0(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad a \le t \le a+\omega. \tag{2.30}$$

В силу определения точки t_0 и условий (2.23), (2.24) и (2.30) из неравенства (2.29) следует, что

$$\|v_0'\|_C \le \|q\|_L e^{\|g\|_L}. \tag{2.31}$$

С другой стороны, проинтегрировав неравенство (2.25) от a до $a+\omega$, с учетом соотношений (2.18), (2.23) и (2.27) получим, что

$$\min\{|v_0(s)|:\ a \le s \le a+\omega\} \le \|q\|_L {\alpha_0}^{-1} e^{\|g\|_L}. \tag{2.32}$$

Тогда из очевидного неравенства

$$\|v_0\|_C \le \min\{|v_0(s)|:\ a \le s \le a+\omega\} + \omega\|v_0'\|_C \tag{2.33}$$

с учетом неравенств (2.31) и (2.32) следует, что

$$\|v_0\|_{C'} \le r_1\|q\|_L, \tag{2.34}$$

где $r_1 = (1+\omega+{\alpha_0}^{-1})e^{\|g\|_L}$.

Пусть теперь v_0 – знакопеременная функция и точка $a \in [0, \omega[$ такая, что

$$v_0(a) = 0, \quad v_0(a+\omega) = 0. \tag{2.35}$$

Предположим также, что точка $a \in [0, \omega[$, фигурирующая в определении (2.22), удовлетворяет условиям (2.35), и рассмотрим случай, когда для некоторого числа $\sigma \in \{-1, 1\}$ выполняется неравенство

$$\sigma v_0(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in D. \tag{2.36}$$

Тогда в силу условий (2.35) для произвольного $t^* \in D$ найдутся точки $a_1 \in [0, t^*[$, $a_2 \in$ $\in]t^*, a+\omega]$ такие, что

$$v_0(a_1) = 0, \quad v_0(a_2) = 0, \quad \sigma v_0(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad a_1 \le t \le a_2. \tag{2.37}$$

В таком случае, если G – функция Грина задачи (2.1), из равенства (2.26) следует представление

$$|v_0(t^*)| = \sigma\int\limits_{a_1}^{a_2} G(t^*, s)(l_1(v_0)(s) + (q_1(s) - \widetilde{q}(s))\operatorname{sign} v_0(s))\,ds.$$

Отсюда с учетом неположительности функции G, произвольности $t^* \in D$, условий (2.23), (2.24), (2.37) и оценки (2.3) получим оценку $|v_0(t)| \le r_1'\|q\|_L$ при $t \in D$, где $r_1' = (\omega/4)e^{\|g\|_L}$. Подставив эту оценку в неравенство (2.29), с учетом определения точки t_0, условия (2.24) и леммы 2.1 при $b = a + \omega$ придем к оценке $\|v_0'\|_C \le r_2'\|q\|_L$, где $r_2' = (r_1' \int_0^\omega p(s)\,ds + 1)e^{\|g\|_L}$. С другой стороны, так как $v_0(a) = 0$, из (2.33) с учетом последней оценки следует, что

$$\|v_0\|_{C'} \le r_2\|q\|_L, \tag{2.38}$$

где $r_2 = (1+\omega)r_2'$.

Наконец, рассмотрим случай, когда функция v_0 принимает как отрицательные, так и положительные значения на множестве D. Тогда, если

$$v_0(t_1) = \min\{v_0(t) :\ t \in \overline{D}\}, \quad v_0(t_2) = \max\{v_0(t) :\ t \in \overline{D}\}, \tag{2.39}$$

ясно, что

$$v_0(t_1) < 0, \quad v_0(t_2) > 0. \tag{2.40}$$

Допустим, что $t_1 < t_2$ (при $t_1 > t_2$ доказательство аналогично). Тогда существует точка $c \in]t_1, t_2[$, в которой $v_0(c) = 0$, т.е. найдутся точки b_i, c_i $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\begin{gathered} a \le b_1 < t_1 < c_1 \le c, \quad c \le b_2 < t_2 < c_2 \le a + \omega, \\ v_0(b_i) = 0, \quad v_0(c_i) = 0, \quad (-1)^i v_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad b_i < t < c_i \quad (i = 1, 2). \end{gathered} \tag{2.41}$$

С учетом соотношений (2.40) и (2.41) из равенства (2.26) следуют представления

$$|v_0(t_i)| = \int\limits_{b_i}^{c_i} |G_i(t_i, s)|[(-1)^{i-1} l_1(v_0)(s) - q_1(s) + \widetilde{q}(s)]\,ds \quad (i = 1, 2), \tag{2.42}$$

где G_i – функция Грина задачи (2.1) при $a_1 = b_i$, $a_2 = c_i$. Отсюда с учетом соотношений (2.23), (2.39), оценки (2.3) и неотрицательности функции q_1 получим неравенство

$$|v_0(t_i)| \le |v_0(t_{3-i})| \int\limits_{b_i}^{c_i} |G_i(t_i, s)|\widetilde{p}(s)\,ds + r_1'\|q\|_L. \tag{2.43$_i$}$$

Подставив (2.43_1) в (2.43_2), затем (2.43_2) в (2.43_1) и сложив полученные неравенства, придем к оценке

$$(|v_0(t_1)| + |v_0(t_2)|)\left(1 - \int\limits_{b_1}^{c_1} |G_1(t_1, s)|\widetilde{p}(s)\,ds \int\limits_{b_2}^{c_2} |G_2(t_2, s)|\widetilde{p}(s)\,ds\right) \le r_3'\|q\|_L, \tag{2.44}$$

где $r_3' = r_1'(2 + r_1' \int_0^\omega \widetilde{p}(s)\,ds)$. В силу условий (2.23), (2.39) и (2.41) выполняются все требования леммы 2.3 при $b = a + \omega$, согласно которой, из (2.44) вытекает оценка

$$(|v_0(t_1)| + |v_0(t_2)|)(1 - \mu^2) \le r_3'\|q\|_L. \tag{2.45}$$

С другой стороны, из условия (1.8) и неравенства (2.7) получим, что $\mu < 1$. В силу последнего неравенства и (2.39) из (2.45) следует, что $|v(t)| \le (r_3'/(1-\mu^2))\|q\|_L$ при $t \in D$. Отсюда, согласно лемме 2.1 и (2.23), вытекает оценка

$$-l_1(v_0)(t)\,\mathrm{sign}\,v_0(t) \le \frac{r_3'}{1-\mu^2}\|q\|_L \widetilde{p}(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le a + \omega. \tag{2.46}$$

Учитывая неравенство (2.46) в (2.29), получаем оценку $\|v_0'\|_{C'} \le r_3\|q\|_L$, где

$$r_3 = \left(1 + \frac{r_3'}{1-\mu^2}\int\limits_0^\omega p(s)\,ds\right)e^{\|g\|_L}.$$

С учетом последней оценки и равенства $v_0(a) = 0$ из (2.33) следует, что $\|v_0\|_{C'} \le r_4\|q\|_L$, где $r_4 = (1+\omega)r_3$. Из этой оценки, неравенств (2.34), (2.38) и определения функции v_0 следует справедливость оценки (2.21), где $r = \max(r_1, r_2, r_4)$. Лемма доказана.

Определение 2.1. Говорят, что оператор $h : C'([0,\omega];R) \times C'([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$ принадлежит множеству V_ω, если он непрерывен и выполняются следующие условия:

i) $h(x,.) : C'([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$ – линейный оператор для каждого $x \in C'([0,\omega];R)$;

ii) для любых $x, y \in C'([0,\omega];R)$ почти всюду на отрезке $[0,\omega]$ выполняется неравенство $|h(x,y)(t)| \le \alpha(t, \|x\|_{C'})\|y\|_{C'}$, где функция $\alpha : [0,\omega] \times R_+ \to R_+$ интегрируема по первому аргументу и не убывает по второму;

iii) существует положительное число r_0 такое, что для каждого $x \in C'([0,\omega];R)$ и $q^* \in L([0,\omega];R)$ любое решение задачи

$$v''(t) = h(x,v)(t) + q^*(t), \quad v^{(i)}(0) = 0, \quad v^{(i)}(\omega) = 0 \quad (i = 0,1) \tag{2.47}$$

удовлетворяет оценке $\|v\|_{C'} \le r_0\|q^*\|_L$.

Наконец, приведем теорему об априорной оценке, доказанную в работе [12].

Лемма 2.6. *Пусть существуют число $r_0' > 0$ и оператор $h \in V_\omega$ такие, что для всех $\lambda \in]0,1[$ любое решение задачи*

$$v''(t) = (1-\lambda)h(v,v)(t) + \lambda f(v)(t), \quad v^{(i)}(0) = 0, \quad v^{(i)}(\omega) = 0 \quad (i = 0,1), \tag{2.48}$$

удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{C'} \le r_0'. \tag{2.49}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) разрешима.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Определим оператор $h : C'([0,\omega];R) \times C'([0,\omega];R) \to L([0,\omega];R)$ равенством $h(x,y)(t) = p_0(x,y)(t) + g_0(x)(t)y'(t)$ и покажем справедливость включения

$$h \in V_\omega. \tag{3.1}$$

Легко проверить, что из соотношений (1.5) и (1.7) следует справедливость условий i) и ii) определения 2.1 при $\alpha(t,y) = g(t) + p(t)$. Пусть теперь x – произвольная функция из $C'([a,b];R)$ и v – произвольное решение задачи (2.47). Тогда v также будет решением задачи (2.19), (2.20), где

$$\ell(y)(t) \equiv p_0(x,y)(t), \quad g_1(t) \equiv g_0(x)(t), \quad q(t) \equiv |q^*(t)|. \tag{3.2}$$

В силу условий (1.4)–(1.8) выполняются все требования леммы 2.5, откуда и следует справедливость условия iii) определения 2.1 при $r_0 = r$, т.е. справедливо включение (3.1).

Допустим теперь, что v является решением задачи (2.48). В таком случае ввиду условия (1.4) v будет решением задачи (2.19), (2.20), где оператор ℓ и функция g_1 определяются равенствами (3.2) при $x(t) \equiv v(t)$ и $q(t) \equiv \eta(t, \|v\|_{C'})$. Тогда из леммы 2.5 вытекает справедливость оценки $\|v\|_{C'} \le r\int_0^\omega \eta(s, \|v\|_{C'})\,ds$, откуда с учетом (1.3) следует существование $r_0' > 0$ такой, что выполняется оценка (2.49), т.е. в силу леммы 2.6 задача (1.1), (1.2) разрешима.

Доказательство следствия 1.1. Из неравенств (1.12) и (1.13) следует справедливость неравенства (1.8), где $p(t) \equiv \ell(1)(t)$, $g(t) \equiv 0$. С другой стороны, если $f(x)(t) \equiv \ell(x)(t) + f_1(x)(t)$, то из соотношений (1.10)–(1.12) следует справедливость условий (1.4)–(1.7) при

$g_0(x)(t) \equiv 0$, $p_0(x,y)(t) \equiv \ell(y)(t)$, т.е. выполняются все требования теоремы 1.1. Следствие доказано.

Доказательство следствия 1.2. Из замечания 1.1 и условия (1.17) следует справедливость включения (1.7), где $p_0(x,y)(t) \equiv p(t, x(\tau_0(t)), x'(\tau_1(t)))y(\tau(t))$. С другой стороны, если $f(x)(t) \equiv p(t, x(\tau_0(t)), x'(\tau_1(t)))x(\tau(t)) + q(t, x(t), x(\mu_0(t)), x'(\mu_1(t)))$, то из неравенств (1.16)–(1.19) вытекает справедливость условий (1.4)–(1.6) и (1.8) при $g_0(x)(t) \equiv 0$, т.е. выполняются все требования теоремы 1.1. Следствие доказано.

Справедливость следствия 1.3 вытекает непосредственно из следствия 1.2.

Работа поддержана грантом CRDF/GRDF (проект 3318).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Capieto A., Mavhin J., Zanolin F.* // J. Differ. Equat. 1990. V. 88. P. 347–395.
2. *Bates F., Ward Y.* // Pacific J. Math. 1979. V. 84. № 2. P. 275–282.
3. *Ding T., Iannacci R., Zanolin F.* // J. Differ. Equat. 1993. V. 105. P. 364–409.
4. *Ding T., Zanolin F.* // Nonlinear Anal. 1991. V. 17. № 7. P. 635–653.
5. *Fabry C., Habels P.* // Arch. math. 1993. V. 60. P. 266–276.
6. *Гегелия Г.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 390–396.
7. *Kiguradze I.* // Proc. of IV Conf. on Nonlinear Oscillations. Academia. Prague, 1968. P. 175–180.
8. *Кигурадзе И.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
9. *Kiguradze I.* // Nonlinear Anal. 2000. V. 40. № 1–8. P. 309–321.
10. *Кигурадзе И., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 72–78.
11. *Kiguradze I., Kusano T.* // Ann. Mat. Pura Appl. 2001. V. 180. № 3. P. 285–301.
12. *Kiguradze I., Puža B.* // Georgian Math. J. 1999. V. 6. № 1. P. 47–66.
13. *Kiguradze I., Staněk S.* // Nonlinear Anal. 2002. V. 48. № 7. P. 1065–1075.
14. *Lasota A., Opial Z.* // Ann. Polon. Math. 1964. V. 16. № 1. P. 69–94.
15. *Lasota A., Szafraniec F.* // Ann. Polon. Math. 1966. V. 18. № 1. P. 339–344.
16. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1995. V. 5. P. 125–126.
17. *Mawhin J.* // J. Differ. Equat. 1971. V. 10. № 1. P. 240–261.
18. *Мухигулашвили С.В.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 477–484.
19. *Мухигулашвили С.В., Шремр И.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1353–1362.
20. *Staněk S.* // Math. Notes, Miskolc. 2000. V. 1. № 1. P. 63–81.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
30.08.2004 г.