ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 8, с. 1030–1041

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.8

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

© 2002 г. **И. Т. Кигурадзе, Н. Л. Парцвания, И. П. Ставроулакис**

Посвящается светлой памяти
Т.А. Чантурия

1. Формулировка основных результатов. Пусть C_{loc} – пространство непрерывных функций $x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ с топологией равномерной сходимости на каждом сегменте из $[0, +\infty[$, L_{loc} – пространство локально интегрируемых по Лебегу функций с топологией сходимости в среднем на каждом сегменте из $[0, +\infty[$, а $f : C_{\mathrm{loc}} \to L_{\mathrm{loc}}$ – непрерывный оператор. Рассмотрим функционально дифференциальное уравнение порядка $n \geq 2$

$$u^{(n)}(t) = f(u)(t). \tag{1.1}$$

Осцилляционным свойствам таких уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1–17] и цитированную там литературу). Тем не менее в случае, когда f является оператором опережения, упомянутые свойства остаются недостаточно изученными. В предлагаемой работе предпринята попытка восполнения этого пробела. Некоторые частные случаи доказанных ниже теорем были анонсированы в заметках [18, 19].

Введем следующее

Определение 1.1. Оператор $g : C_{\mathrm{loc}} \to L_{\mathrm{loc}}$ называется оператором опережения, если для почти всех $t \in]0, +\infty[$ и произвольных функций $u, v \in C_{\mathrm{loc}}$, удовлетворяющих равенству $u(s) = v(s)$ при $s \geq t$, имеем $g(u)(t) = g(v)(t)$.

Определение 1.2. Оператор $g : C_{\mathrm{loc}} \to L_{\mathrm{loc}}$ называется неубывающим, если для любых $u, v \in C_{\mathrm{loc}}$, удовлетворяющих неравенствам $u(s) \geq v(s)$ при $s \geq 0$, имеем $g(u)(t) \geq g(v)(t)$ при почти всех $t \in]0, +\infty[$.

Осцилляционные свойства уравнения (1.1) нами изучаются при предположениях, что

$$f : C_{\mathrm{loc}} \to L_{\mathrm{loc}} \ \text{ – непрерывный, нечетный оператор опережения} \tag{1.2}$$

и для некоторого $k \in \{1, 2\}$

$$(-1)^k f \ \text{ не убывает.} \tag{1.3_k}$$

Под решением уравнения (1.1) в промежутке $[a, +\infty[\subset [0, +\infty[$ понимается функция $u : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, которая вместе со своими первыми $n-1$ производными абсолютно непрерывна на каждом сегменте из $[a, +\infty[$ и почти всюду на $[a, +\infty[$ удовлетворяет уравнению (1.1), где $u(t) = u(a)$ при $0 \leq t \leq a$.

Решение u уравнения (1.1), определенное на некотором промежутке $[a, +\infty[\subset [0, +\infty[$, называется правильным, если оно не равняется тождественно нулю в произвольной окрестности $+\infty$.

Правильное решение называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, а в противном случае – неколеблющимся.

Следуя [1, 2], скажем, что уравнение (1.1) обладает свойством A, если каждое его правильное решение при четном n является колеблющимся, а при нечетном n – либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$\lim_{t \to +\infty} u^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) обладает свойством B, если каждое его правильное решение при четном n является либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (1.4), либо удовлетворяющим условию

$$\lim_{t\to+\infty}|u^{(i)}(t)|=+\infty \quad (i=0,\dots,n-1), \tag{1.5}$$

а при нечетном n – либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (1.5).

Пусть $m\in\{0,\dots,n-2\}$. По определению 10.5 из [9] уравнение (1.1) обладает свойством A_m (свойством B_m), если каждое его правильное решение является либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$\lim_{t\to+\infty}u^{(i)}(t)=0 \quad (i=m,\dots,n-1) \tag{1.6}$$

(либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (1.5), либо удовлетворяющим условию (1.6)).

Справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть выполнены условия (1.2), (1.3_1) (условия (1.2), (1.3_2)). Тогда для наличия у уравнения (1.1) свойства A (свойства B) необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством A_0 (свойством B_0).*

При каждом $\ell\in\{1,\dots,n\}$ положим

$$h_\ell(t,x)=t^{\ell-1}x, \quad f_\ell(t,x)=t^{n-\ell}|f(h_\ell(\cdot,x))(t)| \tag{1.7_ℓ}$$

и для произвольных $a\ge 0$ и $c>0$ рассмотрим начальную задачу

$$v'(t)=\frac{1}{(n-1)!}\,f_\ell(t,v(t)), \quad v(a)=c. \tag{1.8_ℓ}$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия (1.2), (1.3_k) и найдется $m\in\{0,\dots,n-2\}$ такое, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} f_{m+1}(t,\delta)\,dt=+\infty \quad \textit{при} \quad \delta>0 \tag{1.9}$$

и при произвольных $a\ge 0$, $c>0$ задача (1.8_{ℓ_k}), где

$$\ell_k=m+1+2^{-1}(1+(-1)^{n-m+k}), \tag{1.10}$$

не имеет определенного на $[a,+\infty[$ верхнего решения. Тогда в случае $k=1$ $(k=2)$ уравнение (1.1) обладает свойством A_m (свойством B_m).

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия (1.2), (1.3_k) и найдутся числа $m\in\{0,\dots,n-2\}$, $\delta_0>0$ и непрерывная функция $\omega:\,]0,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ такие, что*

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\omega(x)}<+\infty, \tag{1.11}$$

$$f_{m+1}(t,x)\ge f_{m+1}(t,\delta_0)\omega(x) \quad \textit{при} \quad t\ge 0, \quad x>0. \tag{1.12}$$

Тогда в случае $k=1$ $(k=2)$ условие (1.9) необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1.1) обладало свойством A_m (свойством B_m).

Теорема 1.3. *Пусть $m\in\{0,\dots,n-2\}$, $n-m$ нечетно (четно) и выполнены условия (1.2) и (1.3_1) (условия (1.2) и (1.3_2)). Пусть, далее, найдутся локально интегрируемая функция $g:[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[$ и непрерывная функция $\omega:\,]0,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ такие, что*

$$f_{m+2}(t,x)\ge g(t)\omega(x) \quad \textit{при} \quad t\ge 0, \quad x>0 \tag{1.13}$$

и вместе с (1.11) выполнено условие

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty. \tag{1.14}$$

Тогда условие (1.9) необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1.1) обладало свойством A_m (свойством B_m).

При произвольных $\ell \in \{1,\dots,n\}$ и $a \in [0,+\infty[$ через $v_{a,\ell}$ обозначим максимально продолженное вправо верхнее решение задачи

$$v'(t) = \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\, f_\ell\big(t, v(t)\big), \quad v(a) = 1. \tag{1.15$_\ell$}$$

Теоремы 1.1–1.3 касаются случая, когда промежутки определения функций $v_{a,\ell}$ ($\ell = m+1,\dots,n$) являются конечными. Ниже рассмотрим случай, когда упомянутые промежутки совпадают с $[a,+\infty[$.

При произвольных $n_0 \in \{0,\dots,n-2\}$ и $k \in \{1,2\}$ через $\mathcal{N}^{(k)}_{n_0,n}$ обозначим множество тех $\ell \in \{n_0,\dots,n\}$, для которых $\ell+n+k$ четно.

Теорема 1.4. *Пусть $m \in \{0,\dots,n-2\}$ и наряду с (1.2), (1.3$_k$) выполнены условия*

$$\int_0^{+\infty} f_\ell(t,\delta)\,dt = +\infty \quad \textit{при} \quad \delta > 0 \quad (\ell = m+1,\dots,n). \tag{1.16}$$

Пусть, далее, при произвольных $a \ge 0$ и $\ell \in \{m+1,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(k)}_{m+1,n}$ задача (1.15$_\ell$) имеет определенное на $[a,+\infty[$ верхнее решение $v_{a,\ell}$ и справедливо равенство)*

$$\int_a^{+\infty} t^{n-\ell-1} |f(w_{a,\ell})(t)|\,dt = +\infty, \quad w_{a,\ell}(t) = t^{\ell-1} v_{a,\ell}(t). \tag{1.17}$$

Тогда в случае $k=1$ ($k=2$) уравнение (1.1) обладает свойством A_m (свойством B_m).

Теорема 1.5. *Пусть $m \in \{0,\dots,n-2\}$, $n-m$ нечетно (четно) и выполнены условия (1.2), (1.3$_1$) (условия (1.2), (1.3$_2$)). Пусть, далее, для любого $\delta > 0$ найдутся положительные числа a, γ и η такие, что*

$$f_\ell(t,\delta) \ge \gamma t f_{m+1}(t,\eta) \quad \textit{при} \quad t \ge a \quad (\ell = m+2,\dots,n). \tag{1.18}$$

Тогда условие (1.9) необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1.1) обладало свойством A_m (свойством B_m).

В качестве примеров рассмотрим функционально дифференциальные уравнения

$$u^{(n)}(t) = (-1)^k \sum_{i=1}^{j} \int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} |u(s)|^{\lambda_i} \operatorname{sgn} u(s)\, d_s p_i(s,t), \tag{1.19$_k$}$$

$$u^{(n)}(t) = (-1)^k \int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} u(s)\, d_s p(s,t), \tag{1.20$_k$}$$

*) Если $k=2$ и $m=n-2$, то условие (1.17) отпадает, ибо $\mathcal{N}^{(2)}_{n-1,n} = \{n\}$.

где $k \in \{1,2\}$, $j \geq 1$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\ldots,j)$. Кроме того, всюду ниже будем считать, что τ и $\tau_0 : [0,+\infty[\, \to [0,+\infty[$ суть непрерывные, а p и $p_i : [0,+\infty[\, \times [0,+\infty[\, \to [0,+\infty[$ $(i = 1,\ldots,j)$ – не убывающие по первому аргументу функции, удовлетворяющие условиям $\tau(t) > \tau_0(t) \geq t$ при $t \geq 0$, $p(s,\cdot) \in L_{\mathrm{loc}}$, $p_i(s,\cdot) \in L_{\mathrm{loc}}$ $(i = 1,\ldots,j)$ при $s \geq 0$.

Из теорем 1.1–1.5 вытекают следующие предложения.

Следствие 1.1. *Пусть* $j \geq 2$, $j_0 \in \{1,\ldots,j-1\}$, $m \in \{0,\ldots,n-2\}$ *и* $\lambda_i > 1$ $(i = j_0+1,\ldots,j)$. *Тогда условие*

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-m-1}\Big[\sum_{i=j_0+1}^{j}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{m\lambda_i}\,d_s p_i(s,t)\Big]\,dt = +\infty \tag{1.21}$$

достаточно, а если

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-m-1}\Big[\sum_{i=1}^{j_0}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{m\lambda_i}\,d_s p_i(s,t)\Big]\,dt < +\infty, \tag{1.22}$$

то и необходимо для того, чтобы уравнение (1.19_1) *(уравнение* (1.19_2)*) обладало свойством* A_m *(свойством* B_m*).*

Следствие 1.2. *Пусть* $j \geq 2$, $j_0 \in \{1,\ldots,j-1\}$, $\lambda_i > 1$ $(i = j_0+1,\ldots,j)$, $m \in \{0,\ldots,n-2\}$, $n-m$ *нечетно (четно) и*

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-m-2}\Big[\sum_{i=j_0+1}^{j}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{(m+1)\lambda_i}\,d_s p_i(s,t)\Big]\,dt = +\infty. \tag{1.23}$$

Тогда условие

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-m-1}\Big[\sum_{i=1}^{j_0}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{m\lambda_i}\,d_s p_i(s,t)\Big]\,dt = +\infty \tag{1.24}$$

достаточно, а если

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-m-1}\Big[\sum_{i=j_0+1}^{j}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{m\lambda_i}\,d_s p_i(s,t)\Big]\,dt < +\infty, \tag{1.25}$$

то и необходимо для того, чтобы уравнение (1.19_1) *(уравнение* (1.19_2)*) обладало свойством* A_m *(свойством* B_m*).*

Следствие 1.3. *Пусть* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_i < 1$ $(i = 1,\ldots,j)$, $m \in \{0,\ldots,n-2\}$,

$$\int\limits_0^{+\infty} g_\ell(t)\,dt = +\infty \quad (\ell = m+1,\ldots,n), \tag{1.26}$$

где

$$g_\ell(t) = t^{n-\ell}\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{(\ell-1)\lambda_i}\,d_s p_i(s,t), \tag{1.27_ℓ}$$

и для каждого $\ell \in \{m+1,\ldots,n-1\}\cap\mathcal{N}^{(1)}_{m+1,n}$ $(\ell \in \{m+1,\ldots,n-1\}\cap\mathcal{N}^{(2)}_{m+1,n})$ *соблюдается условие*

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-\ell-1}\Big[\sum_{i=1}^{j}\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{(\ell-1)\lambda_i}\Big(\int\limits_0^{s} g_\ell(\xi)\,d\xi\Big)^{\lambda_i/(1-\lambda_1)} d_s p_i(s,t)\Big]\,dt = +\infty. \tag{1.28}$$

Тогда уравнение (1.19_1) *(уравнение* (1.19_2)*) обладает свойством* A_m *(свойством* B_m*).*

Следствие 1.4. *Пусть* $0 < \lambda_1 \le \lambda_i < 1$ $(i = 1, \dots, j)$, $m \in \{0, \dots, n-2\}$, $n - m$ *нечетно (четно) и*

$$\liminf_{t \to +\infty} (t^{-2/\lambda_1} \tau_0(t)) > 0. \tag{1.29}$$

Тогда для наличия у уравнения (1.19_1) *(у уравнения* (1.19_2)*) свойства* A_m *(свойства* B_m*) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{+\infty} t^{n-m-1} \Bigg[\sum_{i=1}^{j} \int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{m\lambda_i}\, d_s p_i(s,t) \Bigg]\, dt = +\infty. \tag{1.30}$$

Следствие 1.5. *Пусть* $m \in \{0, \dots, n-2\}$,

$$\int_0^{+\infty} g_{m+1}(t)\, dt = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} t^{n-\ell_k-1} \Bigg[\int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{\ell_k-1} \exp\bigg(\frac{1}{\ell_k!(n-\ell_k)!} \int_0^s g_{\ell_k}(\xi)\, d\xi \bigg)\, d_s p(s,t) \Bigg]\, dt = +\infty,$$

где ℓ_k *– число, заданное равенством (1.10), и* $g_\ell(t) = t^{n-\ell} \int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{\ell-1}\, d_s p(s,t)$. *Тогда при* $k = 1$ $(k = 2)$ *уравнение* (1.20_k) *обладает свойством* A_m *(свойством* B_m*).*

Следствие 1.6. *Пусть* $m \in \{0, \dots, n-2\}$, $n - m$ *нечетно (четно) и* $\liminf\limits_{t \to +\infty} (t^{-2} \tau_0(t)) > 0$. *Тогда условие* $\int_0^{+\infty} t^{n-m-1} [\int_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^m\, d_s p(s,t)]\, dt = +\infty$ *необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение* (1.20_1) *(уравнение* (1.20_2)*) обладало свойством* A_m *(свойством* B_m*).*

Следствия 1.3 и 1.4 представляют собой обобщения теорем 1.1 и 1.2 из [13], касающихся осцилляционных свойств дифференциального уравнения Эмдена–Фаулера n-го порядка с опережением.

2. Вспомогательные предложения. Через $\widetilde{C}_{\mathrm{loc}}^{n-1}([a_0, +\infty[)$ обозначим множество функций $u : [a_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми $n-1$ производными на каждом конечном отрезке промежутка $[a_0, +\infty[$. Из лемм 1.1–1.3 монографии [9] вытекает следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $u \in \widetilde{C}_{\mathrm{loc}}^{n-1}([a_0, +\infty[)$,

$$u(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \ge a_0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{mes}\{s \in [t, +\infty[\, :\, u^{(n)}(s) \ne 0\} > 0 \quad \textit{при} \quad t \ge a_0 \tag{2.2}$$

и для некоторого $k \in \{1, 2\}$ *почти всюду на* $[a_0, +\infty[$ *соблюдается неравенство*

$$(-1)^k u^{(n)}(t) \ge 0. \tag{2.3}$$

Тогда найдутся $a_1 \in [a_0, +\infty[$ *и* $\ell \in \mathcal{N}_{0,n}^{(k)}$ *такие, что либо* $\ell \le n-1$ *и*

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad (i = 0, \dots, \ell), \quad (-1)^{i-\ell} u^{(i)}(t) > 0 \quad (i = \ell, \dots, n-1) \quad \textit{при} \quad t \ge a_1, \tag{2.4}$$

$$\int_{a_1}^{+\infty} t^{n-\ell-1} |u^{(n)}(t)|\, dt < +\infty, \tag{2.5}$$

либо $k = 2$, $\ell = n$ *и*

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad (i = 0, \dots, \ell-1) \quad \text{при} \quad t \ge a_1. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Пусть функция* $u \in \widetilde{C}^{n-1}_{\mathrm{loc}}([a_1,+\infty[)$ *почти всюду на* $[a_1,+\infty[$ *удовлетворяет неравенству (2.3), где* $k\in\{1,2\}$. *Пусть, кроме того, для некоторого* $\ell \in \{1,\dots,n-1\}\cap\mathcal{N}^{(k)}_{0,n}$ *выполнены неравенства (2.4) и*

$$\int\limits_{a_1}^{+\infty} t^{n-\ell}|u^{(n)}(t)|\,dt=+\infty. \tag{2.7}$$

Тогда найдется $a\in[a_1,+\infty[$ *такое, что*

$$u(t)\ge \frac{t^{\ell-1}}{\ell!}\,u^{(\ell-1)}(t) \quad \text{при} \quad t\ge a, \tag{2.8}$$

$$u^{(\ell-1)}(t) > \ell! + \frac{1}{(n-\ell)!}\int\limits_a^t s^{n-\ell}|u^{(n)}(s)|\,ds \quad \text{при} \quad t\ge a. \tag{2.9}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.3 из [9], для достаточно большого $a\in[a_1,+\infty[$ на $[a,+\infty[$ соблюдаются неравенства $(\ell-i)u^{(i)}(t)\ge tu^{(i+1)}(t)$ $(i=0,\dots,\ell-1)$. Отсюда непосредственно вытекает неравенство (2.8).

В силу четности числа $n-\ell-k$ и условия (2.3) при почти всех $s\in[a_1,+\infty[$ имеем $(-1)^{n-\ell}s^{n-\ell}u^{(n)}(s)=s^{n-\ell}|u^{(n)}(s)|$. Если обе части этого тождества разделим на $(n-\ell)!$ и проинтегрируем от a_1 до t, то получим

$$\sum_{i=\ell-1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1-\ell}}{(i+1-\ell)!}\,t^{i+1-\ell}u^{(i)}(t)=c+\frac{1}{(n-\ell)!}\int\limits_{a_1}^t s^{n-\ell}|u^{(n)}(s)|\,ds, \tag{2.10}$$

где $c=\sum_{i=\ell-1}^{n-1}((-1)^{i-1-\ell}/(i+1-\ell)!)a_1^{i+1-\ell}u^{(i)}(a_1)$. Однако, согласно (2.7), для достаточно большого $a\in[a_1,+\infty[$ имеем $c+((n-\ell)!)^{-1}\int_{a_1}^a s^{n-\ell}|u^{(n)}(s)|\,ds>\ell!$. Если наряду с этим учтем и условие (2.4), то из (2.10) получим неравенство (2.9). Лемма доказана.

Ниже нам придется применить следующую очевидную лемму об интегральном неравенстве.

Лемма 2.3. *Пусть функция* $\varphi:[a,+\infty[\times[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[$ *локально интегрируема по первому аргументу и является непрерывной и не убывающей по второму аргументу. Пусть, кроме того, существуют положительное число* c *и непрерывная функция* $y:[0,+\infty[\,\to$ $\to\,]0,+\infty[$ *такие, что*

$$y(t)>c+\int\limits_a^t\varphi(s,y(s))\,ds \quad \textit{при} \quad t\ge a.$$

Тогда задача $z'(t)=\varphi(t,z(t))$, $z(a)=c$ *в промежутке* $[a,+\infty[$ *имеет верхнее решение* z^* *и* $y(t)>z^*(t)\ge c$ *при* $t\ge a$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия (1.2), (1.3*$_k$*), (1.16), где* $k=1$ $(k=2)$, $m\in$ $\in\{0,\dots,n-2\}$, *и уравнение (1.1) не обладает свойством* A_m *(свойством* B_m*). Тогда найдутся* $a_1\ge0$, $a\ge a_1$ *и* $\ell\in\{m+1,\dots,n-1\}\cap\mathcal{N}^{(k)}_{m+1,n}$ *такие, что уравнение (1.1) имеет определенное на* $[a_1,+\infty[$ *решение* u, *удовлетворяющее условиям (2.4), (2.5), а задача (1.15*$_\ell$*) имеет определенное на* $[a,+\infty[$ *верхнее решение* $v_{a,\ell}$ *и*

$$u(t)>t^{\ell-1}v_{a,\ell}(t)\ge t^{\ell-1} \quad \textit{при} \quad t\ge a. \tag{2.11}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу условий (1.2), (1.3$_k$) и равенств (1.7$_\ell$) для произвольного $\ell\in\{1,\dots,n\}$ имеем $f_\ell(t,x)\equiv(-1)^k t^{n-\ell}f(h_\ell(\cdot,x))(t)\,\mathrm{sgn}\,x$ и

$$f_\ell(t,y)\ge f_\ell(t,x)\ge0 \quad \text{при} \quad t\ge0, \quad y\ge x\ge0. \tag{2.12}$$

В силу условий (1.2), (1.3_k) и отсутствия у уравнения (1.1) свойства A_m (свойства B_m) на некотором промежутке $[a_0,+\infty[$ существует решение u этого уравнения, которое наряду с (2.1) и (2.3) удовлетворяет неравенствам

$$\lim_{t\to+\infty} u^{(m)}(t) > 0, \tag{2.13}$$

$$\lim_{t\to+\infty} |u^{(n-1)}(t)| < +\infty. \tag{2.14}$$

Покажем, что u удовлетворяет и условию (2.2). В самом деле, в противном случае для некоторого $a_1 \in [a_0,+\infty[$ мы имели бы

$$u^{(n)}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge a_1 \tag{2.15}$$

и $u(t) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i t^{i-1}$ при $t \ge a_1$, где $\ell \in \{m+1,\dots,n\}$ и $c_\ell > 0$. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что

$$u(t) > \delta t^{\ell-1} \quad \text{при} \quad t \ge a_1. \tag{2.16}$$

Если наряду с этой оценкой и равенствами (1.7_ℓ), (2.15) учтем и условия (1.2) и (1.3_k), то получим $0 = t^{n-\ell}|u^{(n)}(t)| = t^{n-\ell}|f(u)(t)| \ge f_\ell(t,\delta)$ при $t \ge a_1$. Но это противоречит условию (1.16), что и доказывает справедливость условия (2.2).

Согласно лемме 2.1 и условию (2.13), найдутся $a_1 \in [a_0,+\infty[$ и $\ell \in \mathcal{N}^{(k)}_{m,n}$ такие, что либо $\ell \le n-1$ и выполнены условия (2.4), (2.5), либо $k=2$, $\ell = n$ и выполнены неравенства (2.6).

Покажем сперва, что $\ell \le n-1$. Допустим противное, что $\ell = n$. Тогда $k=2$ и выполнены неравенства (2.3) и (2.6). Поэтому найдется положительное число δ такое, что $u(t) \ge t^{n-1}\delta$ при $t \ge a_1$. Если наряду с этим учтем условия (1.2), (1.3_2) и (1.16), то найдем $u^{(n-1)}(t) = u^{(n-1)}(a_1) + \int_{a_1}^t f(u)(s)\,ds > \int_{a_1}^t f_n(s,\delta)\,ds \to +\infty$ при $t\to+\infty$. Но это противоречит условию (2.14). Тем самым мы доказали, что $\ell \in \{m,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(k)}_{m,n}$ и функция u удовлетворяет условиям (2.4), (2.5).

Если допустим, что $\ell = m$, то ввиду (2.13) будем иметь $u(t) \ge \delta t^m$ при $t \ge a_1$, где δ – некоторая положительная постоянная. На основании этого неравенства и условий (1.2), (1.3_k) и (1.16) находим, что $\int_{a_1}^{+\infty} t^{n-m-1}|u^{(n)}(t)|\,dt = \int_{a_1}^{+\infty} t^{n-m-1}|f(u)(t)|\,dt \ge \int_{a_1}^{+\infty} f_{m+1}(t,\delta)\,dt = +\infty$. Но это противоречит условию (2.5). Полученное противоречие и доказывает, что $\ell \in \{m+1,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(k)}_{m,n}$.

Согласно (2.4), для некоторого $\delta > 0$ выполняются (2.16). Поэтому $\int_{a_1}^{+\infty} t^{n-\ell}|u^{(n)}(t)|\,dt = \int_{a_1}^{+\infty} t^{n-\ell}|f(u)(t)|\,dt \ge \int_{a_1}^{+\infty} f_\ell(t,\delta)\,dt$. Отсюда в силу (1.16) и вытекает равенство (2.7).

По лемме 2.2 существует $a \in [a_1,+\infty[$ такое, что функция u удовлетворяет неравенствам (2.8) и (2.9). Если наряду с этим учтем условия (1.2), (1.3_k) и положим $y(t) = u^{(\ell-1)}(t)/\ell!$, то найдем $|u^{(n)}(t)| = |f(u)(t)| \ge t^{\ell-n} f_\ell(t,y(t))$ при $t \ge a$ и $y(t) > 1 + (\ell!(n-\ell)!)^{-1}\int_a^t f_\ell(s,y(s))\,ds$ при $t \ge a$. Отсюда, согласно лемме 2.3 и условию (2.12), вытекает, что задача (1.15_ℓ) имеет определенное на $[a,+\infty[$ верхнее решение $v_{a,\ell}$ и $u^{(\ell-1)}(t) > \ell! v_{a,\ell}(t) \ge \ell!$ при $t \ge a$. Следовательно, справедлива оценка (2.11). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $\ell_0 \in \{0,\dots,n-2\}$, $k \in \{1,2\}$ и выполнены условия (1.2), (1.3_k). Пусть, кроме того, при произвольных $a \ge 0$, $c > 0$ задача (1.8_{ℓ_0}) не имеет определенного на $[a,+\infty[$ верхнего решения. Тогда*

$$\int_0^{+\infty} f_\ell(t,\delta)\,dt = +\infty \quad \textit{при} \quad \delta > 0 \quad (\ell = \ell_0,\dots,n) \tag{2.17}$$

и при произвольных $a \ge 0$ и $\ell \in \{\ell_0,\dots,n-1\}$ задача (1.15_ℓ) не имеет определенного на $[a,+\infty[$ верхнего решения.

Доказательство. Допустим, что при некоторых $a_0 \geq 0$ и $\ell \in \{\ell_0, \dots, n-1\}$ задача $v'(t) = (\ell\,!(n-\ell)!)^{-1} f_\ell(t, v(t))$, $v(a_0) = 1$ имеет определенное на $[a_0, +\infty[$ верхнее решение v. Положим $w(t) = t^{\ell-\ell_0} v(t)$. Тогда в силу (1.2), (1.3_k) и (1.7_ℓ) будем иметь $h_\ell(s, v(t)) \geq h_{\ell_0}(s, w(t)) > 0$ при $s \geq t \geq a_0$,

$$f_\ell(t, v(t)) = (-1)^k t^{n-\ell} f(h_\ell(\cdot, v(t)))(t) \geq (-1)^k t^{n-\ell} f(h_{\ell_0}(\cdot, w(t)))(t) = t^{\ell_0-\ell} f_{\ell_0}(t, w(t))$$

при $t \geq a_0$. Поэтому

$$w(t) = t^{\ell-\ell_0} + \frac{1}{(n-\ell)!\ell!} t^{\ell-\ell_0} \int_{a_0}^{t} f_\ell(s, v(s))\, ds > c + \frac{1}{(n-1)!} t^{\ell-\ell_0} \int_{a}^{t} s^{\ell_0-\ell} f_{\ell_0}\big(s, w(s)\big)\, ds \geq$$

$$\geq c + \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{t} f_{\ell_0}(s, w(s))\, ds \quad \text{при} \quad t \geq a,$$

где $a = a_0 + 2$, $c = 1$. Отсюда по лемме 2.3 и условию (2.12) вытекает существование определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения задачи (1.8_{ℓ_0}). Но это противоречит одному из условий леммы. Полученное противоречие доказывает, что при произвольных $a \geq 0$ и $\ell \in \{\ell_0, \dots, n-1\}$ задача (1.15_ℓ) не имеет определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения.

Аналогично покажем, что, каковы бы ни были $a \geq 0$ и $c > 0$, задача (1.8_ℓ) не имеет определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения не только при $\ell \in \{\ell_0, \dots, n-1\}$, но и при $\ell = n$.

Для завершения доказательства леммы нам остается показать, что выполнены равенства (2.17). В самом деле, в противном случае нашлись бы $\ell \in \{\ell_0, \dots, n\}$, $\delta > 0$, $c \in]0, \delta[$ и $a > 0$ такие, что $\delta > c + ((n-1)!)^{-1} \int_a^t f_\ell(s, \delta)\, ds$ при $t \geq a$. Отсюда по лемме 2.3 вытекает существование верхнего решения задачи (1.8_ℓ), определенного на $[a, +\infty[$. С другой стороны, согласно сказанному выше, задача (1.8_ℓ) не имеет такого верхнего решения. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть $a \geq 0$, $m \in \{0, \dots, n-1\}$ и $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, m)$. Рассмотрим задачу о существовании решения u уравнения (1.1), определенного на $[a, +\infty[$ и удовлетворяющего условиям

$$u^{(i)}(a) = c_i \quad (i = 0, \dots, m-1), \qquad \lim_{t \to +\infty} u^{(m)}(t) = c_m. \tag{2.18_m}$$

В случае, когда $m = 0$, под условием (2.18_m) будем понимать условие $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = c_0$.

Лемма 2.6. *Пусть $k \in \{1, 2\}$, $m \in \{0, \dots, n-1\}$ и оператор f удовлетворяет условиям (1.2), (1.3_k). Тогда условие (1.9) необходимо для того, чтобы уравнение (1.1) обладало свойством A_m или B_m. Более того, если нарушено условие (1.9), то найдутся положительные постоянные a_0 и γ_i $(i = 0, \dots, m)$ такие, что при произвольных $a \geq a_0$ и $c_i \in [-\gamma_i, \gamma_i]$ $(i = 0, \dots, m)$ задача (1.1), (2.18_m) имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Пусть нарушено условие (1.9). Тогда найдутся $a_0 > 1$, $\delta_0 > 0$ и $\gamma_m \in]0, \delta_0[$ такие, что

$$a_0 \geq 2(\delta_0 - \gamma_m)^{-2}, \qquad \int_{a_0}^{+\infty} f_{m+1}(s, \delta_0)\, ds \leq \frac{\delta_0 - \gamma_m}{2}. \tag{2.19}$$

В случае $m \geq 1$ числа γ_i $(i = 0, \dots, m-1)$ выберем таким образом, чтобы $(\delta_0 - \gamma_m) \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \leq 1$.

Через $C([a, +\infty[)$ обозначим банахово пространство непрерывных, ограниченных функций $x : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_C = \sup\{|x(t)| : t \geq a\}$. Для произвольной $x \in C([a, +\infty[)$ положим $y_0(x)(t) = x(t)$ при $t \geq a$, $y_0(x)(t) = x(a)$ при $0 \leq t \leq a$. Если же $m \geq 1$, то положим

$$y_m(x)(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_i}{i!} (t-a)^i + \frac{1}{(m-1)!} \int_{a}^{t} (t-s)^{m-1} x(s)\, ds \quad \text{при} \quad t \geq a$$

и $y_m(x)(t) = y_m(x)(a)$ при $0 \leq t \leq a$.

Пусть $a \geq a_0$ и $c_i \in [-\gamma_i, \gamma_i]$ $(i = 0, \ldots, m)$. В шаре $\mathcal{B} = \{x \in C([a, +\infty[) : \|x\|_C \leq \leq (\gamma_m + \delta_0)/2\}$ рассмотрим оператор

$$g(x)(t) = c_m - \frac{1}{(n-m-1)!} \int\limits_t^{+\infty} (t-s)^{n-m-1} f(y_m(x))(s)\, ds. \tag{2.20}$$

Тогда в силу условий (1.2), (1.3_k) и (2.19) будем иметь $|y_m(x)(t)| \leq h_{m+1}(t, \delta_0)$, $|f(y_m(x))(t)| \leq \leq |f(h_{m+1}(\cdot, \delta_0))(t)| = t^{m+1-n} f_{m+1}(t, \delta_0)$ и

$$|g(x)(t)| \leq \gamma_m + \int\limits_t^{+\infty} f_{m+1}(s, \delta_0)\, ds \leq \frac{\gamma_m + \delta_0}{2} \quad \text{при} \quad t \geq a.$$

Из этих неравенств и условия (1.2) вытекает, что $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ является вполне непрерывным оператором. Согласно принципу Шаудера, существует $x \in \mathcal{B}$ такое, что $x(t) = g(x)(t)$ при $t \geq a$. Положим $u(t) = y_m(x)(t)$ при $t \geq a$. В силу (2.20) функция u является решением задачи (1.1), (2.18_m).

Из разрешимости задачи (1.1), (2.18_m) при произвольных $c_i \in [-\gamma_i, \gamma_i]$ $(i = 0, \ldots, m)$ вытекает существование бесконечного множества решений уравнения (1.1) таких, что $0 < \lim\limits_{t \to +\infty} |u^{(m)}(t)| < +\infty$. Следовательно, уравнение (1.1) не обладает ни свойством A_m, ни свойством B_m. Лемма доказана.

3. Доказательства основных результатов.

Доказательство предложения 1.1. Для определенности будем считать, что выполнены условия (1.2) и (1.3_1), ибо случай, когда наряду с (1.2) выполняется условие (1.3_2), рассматривается аналогично.

Согласно определениям свойств A и A_0, ясно, что если уравнение (1.1) обладает свойством A (если n нечетно и уравнение (1.1) обладает свойством A_0), то оно обладает и свойством A_0 (свойством A). Поэтому для доказательства предложения 1.1 достаточно установить, что если n четно и уравнение (1.1) обладает свойством A_0, то оно не имеет неколеблющегося правильного решения. Допустим противное, что уравнение (1.1) имеет неколеблющееся правильное решение u, определенное на некотором промежутке $[a_0, +\infty[$. Тогда в силу условий (1.2), (1.3_1) и наличия у уравнения (1.1) свойства A_0 можем считать, что u удовлетворяет условиям (1.4) и (2.1)–(2.3), где $k = 1$. С другой стороны, по лемме 2.1 для некоторых $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $a_1 \in [a_0, +\infty[$ функция u удовлетворяет неравенствам (2.4). Но это противоречит условию (1.4), что и доказывает справедливость предложения 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Заметим прежде всего, что если выполнены условия теоремы 1.1, то по лемме 2.5 выполнены и равенства (1.16), и при произвольных $a \geq 0$ и $\ell \in \{\ell_k, \ldots, n-1\}$ задача (1.15_ℓ) не имеет определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения.

Предположим теперь, что $k = 1$ $(k = 2)$ и уравнение (1.1) не обладает свойством A_m (свойством B_m). Тогда по лемме 2.4 при некоторых $a \geq 0$ и $\ell \in \{\ell_k, \ldots, n-1\}$ задача (1.15_ℓ) имеет определенное на $[a, +\infty[$ верхнее решение. С другой стороны, согласно сказанному выше, упомянутая задача не имеет такого верхнего решения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1.2. По лемме 2.6 условие (1.9) является необходимым для наличия у уравнения (1.1) свойства A_m или B_m. Следовательно, нам остается показать, что если $k = 1$ $(k = 2)$ и выполнено (1.9), то уравнение (1.1) обладает свойством A_m (свойством B_m). Заметим сперва, что в силу условий (1.9), (1.11) и (1.12) задача $(1.8_{\,m+1})$ не имеет определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения при произвольных $a \geq 0$ и $c > 0$. Этот факт по лемме 2.5 гарантирует выполнение равенств (1.16) и отсутствие у задачи (1.15_ℓ) определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения при произвольных $a \geq 0$ и $\ell \in \{m+1, \ldots, n-1\}$. Отсюда вытекает, что уравнение (1.1) обладает свойством A_m (свойством B_m), ибо в противном случае по лемме 2.4 задача (1.15_ℓ) имела бы определенное на $[a, +\infty[$ верхнее решение при некоторых $a \geq 0$ и $\ell \in \{m+1, \ldots, n-1\}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.3. По лемме 2.6 условие (1.9) является необходимым для наличия у уравнения (1.1) свойства A_m (свойства B_m). Покажем его достаточность.

В силу нечетности (четности) числа $n-m$ из (1.10) следует, что $\ell_1 = m+2$ $(\ell_2 = m+2)$. Согласно этому и условиям (1.11), (1.13), (1.14), задача (1.8_{ℓ_1}) (задача (1.8_{ℓ_2})) не имеет определенного на $[a,+\infty[$ верхнего решения, каковы бы ни были $a \geq 0$ и $c > 0$. Если теперь применим теорему 1.1, то наличие у уравнения (1.1) свойства A_m (свойства B_m) станет очевидным.

Доказательство теоремы 1.4. Допустим противное, что $k = 1$ $(k = 2)$ и уравнение (1.1) не обладает свойством A_m (свойством B_m). Тогда по лемме 2.4 найдутся $a_1 \geq 0$, $a \geq a_1$ и $\ell \in \{m+1,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(k)}_{m+1,n}$ такие, что уравнение (1.1) имеет определенное на $[a_1,+\infty[$ решение u, удовлетворяющее условиям (2.5) и (2.11). С другой стороны, в силу условия (1.3_k) из (2.5) и (2.11) имеем $\int_a^{+\infty} t^{n-\ell-1}|f(w_{a,\ell})(t)|\,dt \leq \int_a^{+\infty} t^{n-\ell-1}|f(u)(t)|\,dt = \int_a^{+\infty} t^{n-\ell-1}|u^{(n)}(t)|\,dt <$ $< +\infty$, что противоречит условию (1.17). Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1.5. Необходимость условия (1.9) для наличия у уравнения (1.1) свойства A_m (свойства B_m) вытекает из леммы 2.6.

Прежде чем приступить к доказательству достаточности, заметим, что условия (1.9) и (1.18) гарантируют выполнение равенств (1.16).

Предположим теперь, что выполнено условие (1.9) и тем не менее уравнение (1.1) не обладает свойством A_m (свойством B_m). Тогда по лемме 2.4 найдутся $a_1 \geq 0$, $a \geq a_1$ и $\ell \in \{m+1,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(1)}_{m+1,n}$ $(\ell \in \{m+1,\dots,n-1\} \cap \mathcal{N}^{(2)}_{m+1,n})$ такие, что уравнение (1.1) имеет определенное на $[a,+\infty[$ решение u, удовлетворяющее условиям (2.5) и (2.11). Кроме того, ввиду нечетности (четности) числа $n-m$ ясно, что $\ell \geq m+2$.

Для $\delta = 1$ выберем положительные числа a, γ и η таким образом, чтобы выполнялось неравенство (1.18). Тогда с учетом равенств (1.7_ℓ) и условий (1.2), (1.3_k) и (2.11) будем иметь $t^{n-\ell-1}|u^{(n)}(t)| = t^{n-\ell-1}|f(u)(t)| \geq t^{-1} f_\ell(t,1) \geq \gamma f_{m+1}(t,\eta)$ при $t \geq a$. Отсюда в силу (2.5) вытекает, что $\int_a^{+\infty} f_{m+1}(t,\eta)\,dt < +\infty$. Но это противоречит условию (1.9). Полученное противоречие доказывает теорему.

Уравнения (1.19_k) и (1.20_k), о которых идет речь в следствиях 1.1–1.6, получаются из уравнения (1.1) соответственно в случаях, когда

$$f(u)(t) = (-1)^k \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} |u(s)|^{\lambda_i} \operatorname{sgn} u(s)\, d_s p_i(s,t), \tag{3.1}$$

$$f(u)(t) = (-1)^k \int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} u(s)\, d_s p(s,t). \tag{3.2}$$

Согласно ограничениям, наложенным на функции τ_0, τ, p_i $(i = 1,\dots,n)$ и p, в обоих этих случаях оператор f удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3_k). С другой стороны, если f допускает представление (3.1), то с учетом (1.7_ℓ) находим, что

$$f_\ell(t,x) = t^{n-\ell} \sum_{i=1}^{j} \Bigg(\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{(\ell-1)\lambda_i}\, d_s p_i(s,t) \Bigg) |x|^{\lambda_i}; \tag{3.1_ℓ}$$

если же f допускает представление (3.2), то

$$f_\ell(t,x) = t^{n-\ell} \Bigg(\int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{\ell-1}\, d_s p(s,t) \Bigg) |x|. \tag{3.2_ℓ}$$

Доказательство следствия 1.1. Для каждого $\ell \in \{1, \dots, n\}$ из (3.1_ℓ) находим, что

$$f_\ell(t,x) \ge g_\ell(t) x^{\lambda(x)} \quad \text{при} \quad t \ge 0, \quad x \ge 0, \tag{3.3_ℓ}$$

где

$$g_\ell(t) = t^{n-\ell} \sum_{i=j_0+1}^{j} \int\limits_{\tau_0(t)}^{\tau(t)} s^{(\ell-1)\lambda_i}\, d_s p_i(s,t), \tag{3.4_ℓ}$$

$\lambda(x) = \min\{\lambda_i : \ i = j_0+1, \dots, j\} > 1$ при $x \ge 1$ и $\lambda(x) = \max\{\lambda_i : \ i = j_0+1, \dots, j\}$ при $0 \le x < 1$. Кроме того,

$$g_\ell(t) \ge g_{m+1}(t) \quad \text{при} \quad t \ge 1 \quad (\ell = m+1, \dots, n), \tag{3.5}$$

так как $\tau_0(t) \ge t$ и $\lambda_i > 1$ $(i = j_0+1, \dots, j)$.

Предположим сперва, что выполнено равенство (1.21). Тогда в силу (3.3_ℓ), (3.4_ℓ) и (3.5) выполнены равенства (1.16), и при произвольных $a \ge 0$, $c > 0$ и $\ell \in \{m+1, \dots, n\}$ задача (1.8_ℓ) не имеет определенного на $[a, +\infty[$ верхнего решения. Отсюда по теореме 1.1 вытекает, что уравнение (1.19_1) (уравнение (1.19_2)) обладает свойством A_m (свойством B_m).

Перейдем к рассмотрению случая, когда нарушено равенство (1.21) и выполнено условие (1.22). Тогда в силу (3.1_{m+1}) нарушено условие (1.9) и по лемме 2.6 уравнение (1.19_1) (уравнение (1.19_2)) не обладает свойством A_m (свойством B_m). Следствие доказано.

Доказательство следствия 1.2. Положим $\omega(x) = x^{\lambda(x)}$ и $g(t) = g_{m+2}(t)$. Тогда в силу (1.23), (3.3_{m+2}) и (3.4_{m+2}) соблюдаются условия (1.11), (1.13) и (1.14). С другой стороны, если выполнено условие (1.25), то, согласно представлению (3.1_{m+1}), равенство (1.9) соблюдается тогда и только тогда, когда выполняется равенство (1.24). Если теперь применим теорему 1.3, то справедливость следствия 1.2 станет очевидной.

Доказательство следствия 1.3. Ввиду того, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_i < 1$ $(i = 1, \dots, j)$, при каждом $\ell \in \{1, \dots, n\}$ из (3.1_ℓ) вытекает неравенство (3.3_ℓ), где g_ℓ – функция, заданная равенством (1.27_ℓ), $\lambda(x) = 1$ при $0 \le x < 1$ и $\lambda(x) = \lambda_1$ при $x \ge 1$.

Из (1.26) и (3.3_ℓ), с одной стороны, вытекают равенства (1.16), а с другой стороны, – оценки

$$v_{a,\ell}(t) > \left[\frac{1-\lambda_1}{\ell!(n-\ell)!} \int\limits_a^t g_\ell(s)\, ds \right]^{1/(1-\lambda_1)} \quad \text{при} \quad t \ge a \quad (\ell = 1, \dots, n-1), \tag{3.6}$$

где $v_{a,\ell}$ – верхнее решение задачи (1.15_ℓ). Согласно этим оценкам и условию (1.28), из (3.1) вытекает равенство (1.17) при произвольных $a \ge 0$ и $\ell \in \{m+1, \dots, n-1\} \cap \mathcal{N}^{(k)}_{m+1,n}$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 1.4, поэтому в случае $k = 1$ $(k = 2)$ уравнение (1.19_k) обладает свойством A_m (свойством B_m).

Доказательство следствия 1.4. В силу (1.27_ℓ) и (1.29) найдутся $a > 1$ и $\gamma_0 > 0$ такие, что $g_\ell(t) \ge t^{m+1-\ell}[\tau_0(t)]^{(\ell-1-m)\lambda_1} g_{m+1}(t) \ge \gamma_0 t g_{m+1}(t)$ при $t \ge a$ $(\ell = m+2, \dots, n)$. Эти оценки наряду с неравенствами (3.3_ℓ) $(\ell = m+2, \dots, n)$ гарантируют выполнение неравенств (1.18) для произвольного $\delta > 0$, где $\gamma = \gamma_0 \delta^{\lambda(\delta)}$ и $\eta = 1$. С другой стороны, согласно представлению (3.1_ℓ), для выполнения равенства (1.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (1.30). Если теперь применим теорему 1.5, то справедливость следствия 1.4 станет очевидной.

Следствия 1.5 и 1.6 доказываются аналогично следствиям 1.3 и 1.4. Разница в доказательствах заключается лишь в том, что вместо (3.1) и (3.1_ℓ) используются представления (3.2) и (3.2_ℓ), согласно чему вместо (3.6) имеем $v_{a,\ell}(t) \ge \exp((\ell!(n-\ell)!)^{-1} \int_a^t g_\ell(s)\, ds)$ при $t \ge a$ $(\ell = 1, \dots, n-1)$.

Работа поддержана научным грантом Министерства развития Греции в рамках двустороннего научно-технологического сотрудничества между Республикой Греция и Грузией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 419–436.
2. *Кигурадзе И.Т.* // Тр. V Междунар. конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1970. Т. 1. С. 293–298.
3. *Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А.* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тбилиси, 1977.
4. *Kusano T.* // J. Differential Equations. 1982. V. 45. № 1. P. 75–84.
5. *Dahiya R.S., Kusano T., Naito M.* // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 98. № 2. P. 332–340.
6. *Драхлин М.Е.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 396–402.
7. *Ladde G. S., Lakshmikantham V., Zhang B.G.* Oscillation theory of differential equations with deviating arguments. New York, 1987.
8. *Werbowski J.* // Fukcial. Ekvac. 1987. V. 30. P. 69–79.
9. *Kiguradze I.T., Chanturia T.A.* Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. Dordrecht; Boston; London, 1993.
10. *Koplatadze R.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1994. V. 3. P. 1–179.
11. *Lomtatidze A.* // Georgian Math. J. 1997. V. 4. № 2. P. 129–138.
12. *Кигурадзе И.Т., Ставроулакис И.П.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 751–757.
13. *Kiguradze I., Stavroulakis I.P.* // Appl. Anal. 1998. V. 70. № 1–2. P. 97–112.
14. *Agarwal R.P., Grace S.R.* // Comput. Math. Appl. 1999. V. 38. № 5–6. P. 143–153.
15. *Koplatadze R., Kvinikadze G., Stavroulakis I.P.* // Georgian Math. J. 1999. V. 6. № 6. P. 553–566.
16. *Адамец Л., Ломтатидзе А.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 6. С. 755–762.
17. *Litsyn E., Stavroulakis I.P.* // Nonlinear Anal. 2001. V. 47. № 6. P. 3877–3883.
18. *Kiguradze I., Partsvania N., Stavroulakis I.P.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2001. V. 24. P. 146–150.
19. *Kiguradze I., Partsvania N., Stavroulakis I.P.* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2002. V. 25. P. 156–158.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси,
Иоаннинский университет, Греция

Поступила в редакцию
01.02.2002 г.

УДК 517.929.8

К и г у р а д з е И.Т., П а р ц в а н и я Н.Л., С т а в р о у л а к и с И.П. **Об осцилляционных свойствах функционально дифференциальных уравнений высших порядков с опережением** // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1030–1041.

Для функционально дифференциальных уравнений порядка $n \geq 2$ установлены необходимые и достаточные условия наличия так называемых свойств A_m и B_m. В частности, для некоторых классов таких уравнений найдены критерии колеблемости всех правильных решений.

Библиогр. 19 назв.