

УДК 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СПИНА – 1/2 В ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

© 2015 г. А.М. Хведелидзе, И.А. Рогожин

<sup>1</sup> Институт квантовой физики и инженерных технологий, Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия

<sup>2</sup> Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия  
virus-atl@inbox.ru

Изучается движение заряженной частицы спина-1/2 в интенсивном лазерном поле, моделируемом в виде плоской монохроматической электромагнитной волны. Влияние магнитной составляющей силы Лоренца учитывается вне рамок дипольного приближения с использованием точного решения классических уравнений движения для заряженной частицы. В квазиклассическом приближении получено эффективное уравнение Паули с релятивистскими поправками, определяющее эволюцию спина. На основе численного решения полученного уравнения предсказан резонансный характер процесса переворота спина, имеющий место при выполнении определенных соотношений между интенсивностью и поляризацией лазера.

Ключевые слова: спин, лазер, квазиклассическое приближение, уравнение Риккати.

### SIMULATION OF SPIN-1/2 DYNAMICS INDUCED BY LASER FIELD

*A.M. Khvedelidze, I.A. Rogozhin*

Institute of Quantum Physics and Engineering Technology, Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia

Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Dynamics of a charged spin-1/2 particle moving in a strong laser modelled by a monochromatic electromagnetic plane wave is studied. The full Heaviside-Lorentz interaction of charge with a high intensity radiation is taken into account without using of the dipole approximation, employing the exact solution to the classical equations of motion for charge. The effective Pauli equation with relativistic corrections for spin is derived. Based on the numeric studies of the derived equation the resonance character of the spin-flip process is predicted for a certain values of intensity and polarisation of the laser.

Key words: spin, laser, quasi-classical approximation, Riccati equation.

### 1. Введение

Создание лазеров с интенсивностью импульса вплоть до 10 Вт/см<sup>2</sup> открыло принципиально новые перспективы как теоретических, так и экспериментальных исследований в области сильных взаимодействий света с веществом [1]. Взаимодействие монохроматического света слабой интенсивности с веществом (слабый режим взаимодействия) хорошо изучено и описывается в рамках нерелятивистского дипольного приближе-

ния. Изучение динамики заряженных частиц под воздействием интенсивных электромагнитных полей указывает на качественные отклонения от привычных нерелятивистских представлений. В частности, это касается обычного адиабатического поведения спина заряженной частицы. В настоящей статье предложена модель и описан эффект резонансного поведения спина при взаимодействии с сильным лазером, вместо привычной прецессии спина в режиме слабого взаимодействия.

Рассмотрим движение заряженной массивной ( $m$ ) частицы спина-1/2 в поле лазера, моделируемого плоской эллиптически поляризованной монохроматической волной:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\mathbf{k}_L \mathbf{x} - \omega_L t) \hat{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = E_0 \cos(\mathbf{k}_L \mathbf{x} - \omega_L t) [\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{k}}_L]. \quad (1)$$

Здесь трехмерные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  обозначают электрическое и магнитное поля волны,  $\mathbf{k}_L$  – волновой вектор, ортогональный вектору поляризации  $\hat{\mathbf{e}}$ ,  $E_0$  – амплитуду,  $\omega_L$  – частоту. Постоянная интенсивность волны  $I_L := c(E_0^2 / 8\pi)$  определяет характерную шкалу взаимодействия лазера с зарядом ( $e$ ) с помощью безразмерного параметра [2]:

$$\eta^2 = \frac{e^2}{\omega_L^2 m^2 c^2} E_0^2. \quad (2)$$

Как показывает анализ задачи, параметр  $\eta^2$  задает степень релятивизма заряженной частицы. Нерелятивистское электрическое дипольное приближение оказывается справедливым лишь при  $\eta^2 \ll 1$ . В этом случае можно пренебречь запаздыванием в фазе электрического поля:  $\omega_L t - \mathbf{k}_L \mathbf{x} \approx \omega_L t$  и обнулить магнитную часть силы Лоренца. В результате уравнения движения Ньютона линеаризуются и заряд совершает простое гармоническое движение с частотой, равной частоте электромагнитной волны [3]. В соответствии с этим на спин частицы  $S$  действует сила Лармора и он прецессирует с угловой частотой  $\omega_S = \omega_L / 2g$ , где  $g$  – гиромагнитное отношение частицы. Согласно стандартному квантово-механическому расчету, амплитуда переворота спина-1/2 в поле (1) с круговой поляризацией и  $\eta^2 \ll 1$  равна нулю

$$P_{\downarrow\uparrow}^{Dipole} = \left(1 + \frac{2}{g^2 \eta^2}\right)^{-1} \sin^2\left(\frac{\omega_L}{2g} t\right) = o(\eta^2). \quad (3)$$

Совершенно иная картина возникает при  $\eta^2 \approx 1$ . С ростом интенсивности лазера возникает необходимость учета факторов запаздывания электромагнитного взаимодействия, влияния магнитной составляющей силы Лоренца и прецессии Томаса [4]. Как будет показано ниже, в результате этих поправок, взамен нерелятивистской прецессии имеет место резонансный переворот спина. Будет сформулирована модель взаимодействия лазер-частица, существенно использующая представление для классической траектории заряда, полученное в [5] без применения дипольного приближения. Поведение спина частицы будет описано в квазиклассическом подходе с помощью уравнения Паули, учитывающего релятивистские поправки, обусловленные интенсивностью лазера.

Заметим, что предложенная модель максимально приспособлена к описанию квазирелятивистского режима взаимодействия, когда справедливо разложение функций по степеням  $\eta^2$ . В силу того что вне дипольного приближения динамические уравнения являются существенно нелинейными, для их решения были привлечены численные методы. С их помощью нами детально изучен процесс переворота спина заряженной частицы, индуцированный взаимодействием с интенсивным лазером, и установлен его резонансный характер.

## 2. Формулировка модели

В качестве простейшей модели лазерного поля выберем волну (1), распространяющуюся вдоль оси  $z$ ,  $k_L = (0, 0, 1)$ . Соответствующий скалярный потенциал может быть обнулен, а трехмерный вектор потенциал зафиксируем в виде

$$\mathbf{A} = a \left( \varepsilon \cos(\omega_L \xi), \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin(\omega_L \xi), 0 \right), \quad (4)$$

где  $a = E_0 / \omega_L$ ,  $\xi = t - (z/c)$  – фаза,  $\varepsilon \in [0, 1]$  – параметр поляризации. Относительно заряженной частицы предположим, что её гиромагнитное отношение равно  $g$ , спин равен  $1/2$  в единицах, задаваемых константой Планка  $\hbar$ , то есть  $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$  со стандартными матрицами Паули  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Предположим, что частица находится в состоянии  $|\psi\rangle$ , которое допускает квазиклассическое разложение

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0,1} \sum_{\alpha=\pm} c_{\alpha,k} |\psi_\alpha\rangle \otimes |\chi_k\rangle. \quad (5)$$

В *заряд-спиновом* разложении (5) фигурируют два линейно независимых квазиклассических решения  $|\psi_\pm\rangle$  уравнения Шредингера для заряда во внешнем поле (4):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(t, x) \right)^2 |\psi\rangle, \quad (6)$$

а состояния спина подчиняются следующему уравнению эволюции:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\chi(t)\rangle, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{H} = -\left( \frac{ge}{2mc} \left( \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right) + \frac{1}{2c^2} \left[ \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] \right) \mathbf{S}. \quad (8)$$

Заметим, что выражение для оператора Гамильтона (8) имеет прозрачную физическую интерпретацию. Функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  являются компонентами электрического и магнитного поля лазера (1), рассчитанные вдоль классической траектории заряда, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  в лабораторной системе отсчета. При этом комбинация  $\mathbf{B} - (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$

является магнитном полем в сопутствующей заряду системе отсчета. Последний член в (8) описывает спиновую прецессию Томаса, вызванную ненулевой кривизной траектории (ускорением частицы  $d\mathbf{v}/dt$ ).

### 3. Схема вычислений

Дальнейший анализ уравнений (6) и (7) основан на классической нерелятивистской проблеме Гамильтона-Якоби для движения бесспиновой заряженной частицы в электромагнитном поле (4). Как показано ниже, решение данной задачи позволяет определить не только квазиклассическое решение уравнения Шредингера (6), но и найти явный вид эффективного спин-лазерного взаимодействия (8).

**3.1. Модель классической динамики заряда.** Для компактности формул предположим, что траектория заряда проходит через начало координат:  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ . Помимо этого зафиксируем систему отсчета, в которой компонента скорости частицы, ортогональная распространению волны, усредненная по времени, также обнуляется:  $\langle \mathbf{v}_\perp \rangle = 0$ .

Согласно [4] производящая функция Гамильтона-Якоби бесспиновой заряженной частицы, движущейся в плоской электромагнитной волне  $(A_\perp(\xi), 0)$ , представима в виде

$$F(\xi, \mathbf{\Pi}) = -c(mc - \Pi_z)\xi + c \int_0^\xi \sqrt{(mc - \Pi_z)^2 + W(u, \mathbf{\Pi}_\perp)} du, \quad (9)$$

где

$$W(\xi, \mathbf{\Pi}_\perp) = -\frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}_\perp^2 + 2\frac{e}{c} \mathbf{A}_\perp \mathbf{\Pi}_\perp. \quad (10)$$

Произвольные константы  $\Pi_z$  и  $\mathbf{\Pi}_\perp$  в (9) и (10) фиксируются начальной скоростью частицы. Таким образом, в соответствии с видом производящей функции (9), имеем следующую квазиклассическую волновую функцию заряда в поле лазера<sup>1</sup>:

$$\langle \mathbf{x}t | \Psi_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{|\partial F / \partial \xi|}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et + \mathbf{\Pi}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}F\right]. \quad (11)$$

Далее, заимствуем из статьи [5] выражения вектора скорости,

$$\mathbf{v} = c \left( -c\eta\varepsilon \operatorname{cn}(u, \mu), \eta\sqrt{1-\varepsilon^2} \operatorname{sn}(u, \mu), 1 - \gamma_z \operatorname{dn}(u, \mu) \right), \quad (12)$$

и  $z$ -проекции радиус-вектора частицы

$$z(t) = ct - \frac{c}{\omega_L} \operatorname{am}(u, \mu), \quad (13)$$

необходимые для вычисления гамильтониана (8). В (12) использованы стандартные обозначения [6] для эллиптических функций Якоби ( $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{dn}$ ) и амплитуды  $\operatorname{am}(u, \mu)$  в (13).

<sup>1</sup> С целью упрощения мы предположили, что в (5) отличен от нуля лишь коэффициент  $c_{+,0}$

Аргумент этих функций,  $u = \omega'_L$  представляет собой масштабированное лабораторное время  $t$ , причем фактор  $\omega'_L = \gamma_z \omega_L$ ,  $\gamma_z = 1 - (v_z(0)/c)$  указывает на нерелятивистский сдвиг Доплера частоты лазера  $\omega_L$ . Модуль  $\mu$  определяется характеристиками лазера и частицы<sup>2</sup>:  $\gamma_z^2 \mu^2 = (1 - 2\varepsilon^2)\eta^2$ .

**3.2. Динамика спина-1/2.** Приведенные выше формулы (12)-(13) позволяют представить гамильтониан взаимодействия спина (8) в виде

$$\mathbf{H}(t) = -\mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{S}$$

с вектором

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \eta \omega'_L \sqrt{1 - \varepsilon^2} [(g + 1) \operatorname{dn}(\omega'_L t, \mu) - \gamma_z] \operatorname{cn}(\omega'_L t, \mu), \quad (14)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \omega'_L \varepsilon [(g + 1) \operatorname{dn}(\omega'_L t, \mu) - \gamma_z (1 - \mu^2)] \operatorname{sn}(\omega'_L t, \mu), \quad (15)$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{2} \eta^2 \omega_L \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} [g - \gamma_z \operatorname{dn}(\omega'_L t, \mu)]. \quad (16)$$

Таким образом, эффективное взаимодействие лазерного поля со спином частицы описывается однородным магнитным полем, представляющим суперпозицию осциллирующей компоненты (14)-(15) и малой, “почти постоянной” компоненты (16).

#### 4. Переворот спина в лазерном поле

В этом пункте представлены результаты численного анализа уравнения эволюции спина (7) и рассчитана амплитуда переворота спина. Будет определен режим взаимодействия лазер-частица, при котором переворот спина имеет резонансный характер.

**4.1. Резонансный переворот спина в поле лазера круговой поляризации.** Приведем вначале результат для случая лазера круговой поляризации,  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ . В этом случае известна явная аналитическая форма для амплитуды переворота спина [7]:

$$P_{\downarrow\uparrow} = \frac{k^2 \eta^2}{k^2 \eta^2 + (\eta^2 - \eta_*^2)^2} \sin^2(\omega_S t), \quad (17)$$

где  $k^2 = 2g^2 / (1 - g)^2$ . Резонанс наступает при интенсивности, равной  $\eta_*^2 = 4 / (g - 1)$ . Спин осциллирует с частотой  $\omega_S$ , величина которой зависит не только от частоты лазера  $\omega_L$ , но и его интенсивности следующим образом:

$$\omega_S = \frac{\omega_L |1 - g|}{8} \sqrt{k^2 \eta^2 + (\eta^2 - \eta_*^2)^2}. \quad (18)$$

<sup>2</sup> В (12)-(13) модуль  $\mu$  принимает значение в фундаментальной области,  $0 < \mu^2 < 1$ . Вне фундаментальной области решение строится за счет применения модулярных преобразований функций Якоби (детали см. в [5]).

#### 4.2. Резонансный переворот спина в поле лазере произвольной поляризации.

Для изучения общего случая динамики спина в эллиптически поляризованном поле лазера воспользуемся известным методом сведения системы линейных уравнений (7) к уравнению Риккати (см. [8]). Представим решение уравнения (7) в виде

$$|\chi(t)\rangle = U(t,0)|\chi(0)\rangle,$$

с оператором эволюции  $U(t, t_0)$ , заданным в факторизованной форме

$$U(t,0) = \exp(a(t)S_+) \exp(b(t)S_0) \exp(c(t)S_-), \quad (19)$$

где  $S_{\pm} = 1/2(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$  и  $S_0 = 1/2\sigma_3$ . Три неизвестные функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  задают эволюцию состояния спина  $1/2$ . При этом функция  $a(t)$  определяет вероятности перехода между состояниями с фиксированными значениями проекции спина на ось z:

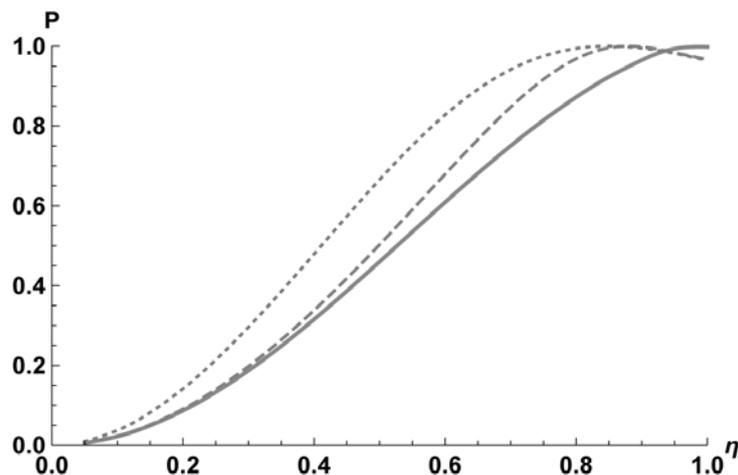
$$P_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{1+|a|^2}, \quad P_{\uparrow\downarrow} = \frac{|a|^2}{1+|a|^2}. \quad (20)$$

Согласно представлению оператора эволюции (19), функция  $a(t)$  удовлетворяет уравнению Риккати

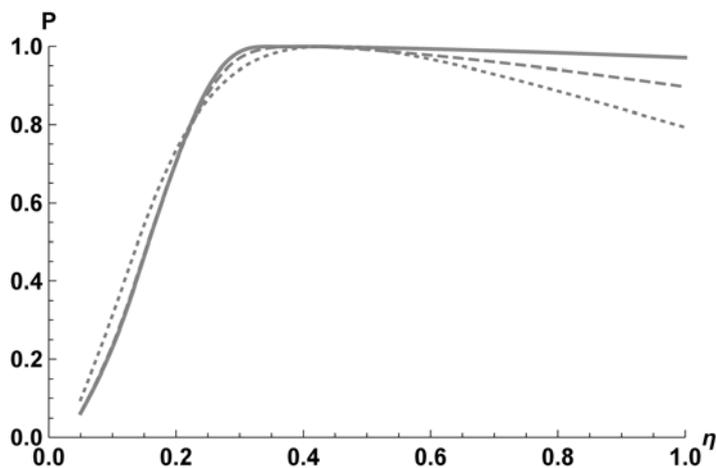
$$\frac{da}{dt} = i(-\Omega_- + \Omega_0 a + \Omega_+ a^2), \quad (21)$$

с функциями  $\Omega_{\pm} = 1/2(\Omega_1 \pm i\Omega_2)$  и  $\Omega_0 = 1/2\Omega_3$ .

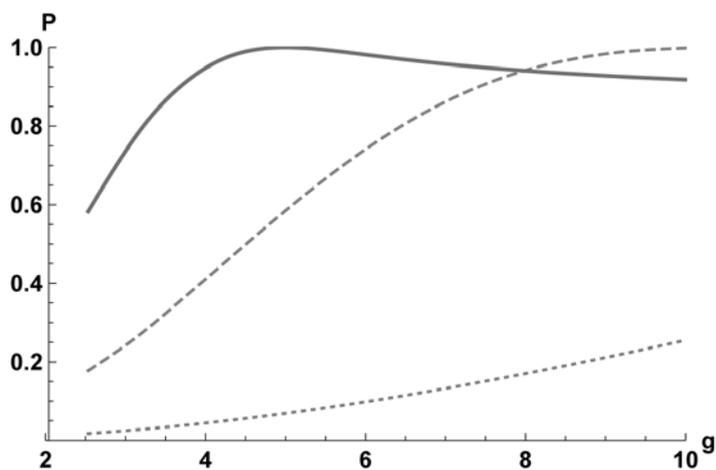
**4.3. Результаты численных расчетов.** Численный анализ уравнения (21) позволил проанализировать зависимость вероятности переходов (20) от интенсивности, поляризации света, а также гиромагнитного отношения заряженной частицы.



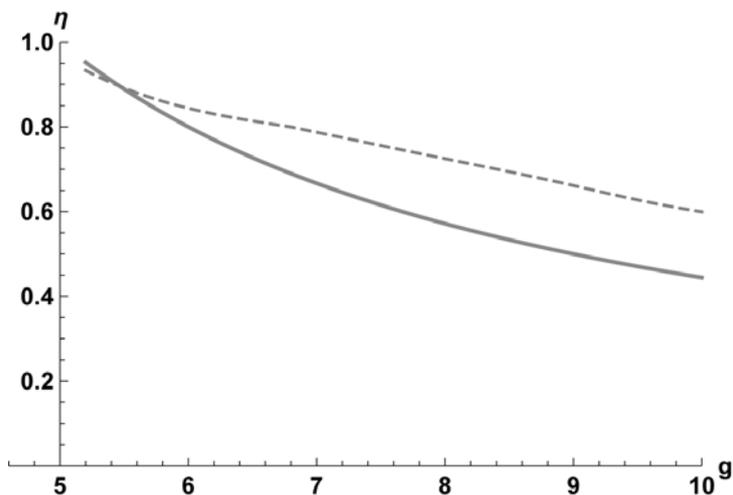
**Рис.1.** Зависимость вероятности переворота спина от интенсивности при гиромагнитном отношении  $g = 6$  и трех значениях поляризации. (—  $\epsilon=0.6$ , - - -  $\epsilon=0.4$ , ····  $\epsilon=0.65$ ).



**Рис.2.** Зависимость вероятности переворота спина от интенсивности при гиромагнитном отношении  $g = 20$  и трех значениях поляризации. (—  $\epsilon=0.6$ , - - -  $\epsilon=0.4$ , - · -  $\epsilon=0.65$ ).



**Рис.3.** Зависимость вероятности перехода от величины гиромагнитного отношения при трех значениях интенсивности лазера. (- · -  $\epsilon=0.2$ , - - -  $\epsilon=0.6$ , —  $\epsilon=0.9$ ).



**Рис.4.** Кривые значений интенсивности и гиромагнитного отношения, при которых наступает резонансный переворот спина —  $\epsilon=1/\sqrt{2}$ , - - -  $\epsilon=1/2$ .

В качестве примера на рис.1 и рис.2 приведены кривые зависимости вероятности переворота спина от интенсивности для различных значений гиромагнитного отношения и поляризации лазера.

Рис.3 демонстрирует зависимость вероятности перехода от величины гиромагнитного отношения для различных значений интенсивности радиации.

На рис.4 «резонансные кривые» описывают множество тех значений интенсивности и гиромагнитного значения, при которых имеет место резонансный переворот спина для круговой и эллиптической поляризации  $\epsilon = 0.5$ .

## 5. Заключение

Изучено движение заряженной частицы спина-1/2 в интенсивном лазерном поле, моделируемом в виде плоской монохроматической электромагнитной волны. Влияние магнитной составляющей силы Лоренца учтено с помощью решения классических уравнений движения для заряженной частицы. В квазиклассическом приближении получено эффективное уравнение Паули с релятивистскими поправками, определяющее эволюцию спина. На основе численного решения уравнения Паули предсказан резонансный характер процесса переворота спина.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *G. Mourou, T. Tajima.* More intense, shorter pulses // *Science*, 2011, v.311, p.41-42.
2. *E.S. Sarachik, G.T. Schappert.* Classical theory of the scattering of intense laser radiation by free electrons // *Phys. Rev.*, 1970, v.D1, p.2738-2753.
3. *L.D. Landau, E.M. Lifshitz.* The Classical Theory of Fields. – Oxford, Pergamon Press, 1975, 404p.
4. *L.H. Thomas.* The motion of spinning electrons // *Nature*, 1926, v.117, p.514.
5. *P. Jameson, A. Khvedelidze.* Classical dynamics of a charged particle in laser field beyond the dipole approximation // *Phys. Rev.*, 2008, v.A77, p.053403.
6. *E.T. Whittaker, G.N. Watson.* A Course of Modern Analysis. – Cambridge University Press, 1996, 612 p.
7. *A. Khvedelidze.* Effect of a strong laser on spin precession // *Selected Problems of Modern Physics.* – Dubna, 2009, c.365-367.
8. *V.S. Popov.* Feynman disentangling of noncommuting operators and group representation theory // *Physics-Uspekhi*, 2007, v.177, №12, p.1217-1238.

Поступила в редакцию 30.03.2015