ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 2, с. 101–110

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНКИ С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ

© 2019 г. О. М. Джохадзе[a], С. С. Харибегашвили[a], Н. Н. Шавлакадзе[a,*,**]

[a] *Тбилисский государственный университет, математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия*

**e-mail: nusha@rmi.ge*

***e-mail: nusha1961@yahoo.com*

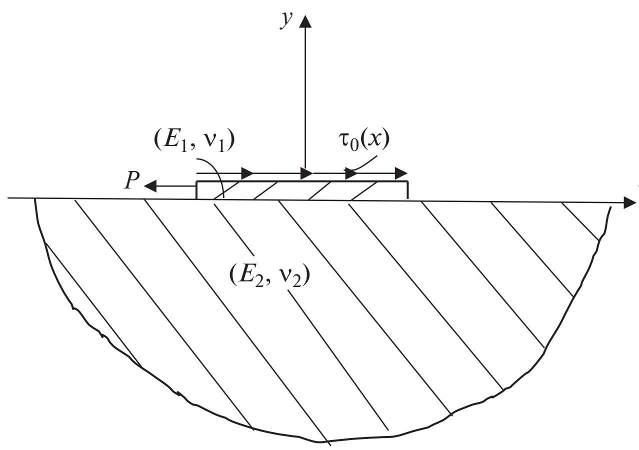
Поступила в редакцию 10.06.2017 г.
После доработки 06.02.2018 г.
Принята к публикации 06.02.2018 г.

Рассматривается задача определения механического поля в однородной полуплоскости, подкрепленной конечным однородным стрингером, материал которого подчиняется нелинейному закону Гука. Поставленная задача редуцируется к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению. Используя принцип неподвижной точки Шаудера доказывается существование решения этого уравнения. При помощи метода малого параметра получается система рекуррентных линейных сингулярных интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: контактная задача, нелинейное интегродифференциальное уравнение, принцип Шаудера, метод малого параметра

DOI: 10.1134/S0572329919010033

Введение. В работах [1–4] были получены точные и приближенные решения статических и динамических контактных задач для разных областей, усиленных упругими тонкими накладками как постоянной, так и переменной жесткости, изучено поведение контактных напряжений в концах линии контакта в зависимости от закона изменения геометрических и физических параметров задачи. Библиография различных контактных задач приводится в монографии [1], где рассматриваются плоские контактные задачи о передаче нагрузки от полубесконечного или конечного стрингера (включения) к упругой полуплоскости или плоскости. Задачи сведены к интегродифференциальному уравнению Прандтля, получены различные аналитические методы его решения. В [4] расматривается контактная задача для анизотропной полуплоскости с упрочняющимися накладками конечной длины, она сводится к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях. Контактные задачи для изотропной и ортотропной кусочно-однородной плоскости, а также для клиновидной анизотропной пластины с полубесконечной и конечной накладкой были решены в [5–8]. При нашей постановке задачи рассматривается упругая полубесконечная пластинка, которая на конечном отрезке своей границы усилена стрингером из нелинейно-упругого материала общего вида. Доказывается существование и единственность решения полученного нелинейного интегродифференциального уравнения. Для конкретного случая “нелинейности” получено условие относительно малого параметра, при выполнении которого решение



Фиг. 1

полученной системы рекуррентных линейных уравнений представляется в виде сходящегося ряда по степеням этого параметра.

1. Постановка задачи и ее редукция к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению (НСИДУ). Пусть линейно-упругая полубесконечная пластинка с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 на конечном отрезке $[-1, 1]$ оси Ox усилена нелинейно-упругим стрингером в виде накладки конечной длины и достаточно малой толщины h_1, модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, загруженной тангенциальной силой интенсивности $\tau_0(x)$. Пусть далее, к одному из концов стрингера приложена сосредоточенная горизонтальная сила P (фиг. 1).

В условиях плоского напряженного состояния требуется определить контактные напряжения, действующие на отрезке соединения стрингера с пластинкой.

Материал стрингера удовлетворяет нелинейному закону Гука [1, 4]

$$\varepsilon_x^{(1)}(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{E} g(\sigma_x^{(1)}(x)) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x)$ и $u_1(x)$ – соответственно деформация и перемещение точек стрингера, $\sigma_x^{(1)}(x)$ – осевое напряжение по направлению оси Ox, $E = E_1 \big/ (1 - \nu_1^2)$.

Из условия равновесия любой конечной части стрингера имеем

$$\sigma_x^{(1)}(x) = \frac{1}{S_0}\left[P - d\int_{-1}^{x} \tau(t)dt - \int_{-1}^{x} \tau_0(t)dt\right] \tag{1.2}$$

где $\tau(x)$ – неизвестное тангенциальное контактное напряжение, отнесенное к единице ширины стрингера, S_0 – площадь его поперечного сечения, d – эффективная ширина, по которой он контактируется с основанием.

Основываясь на равенства (1.1) и (1.2), деформацию точек стрингера можно выразить в виде

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{1}{E} g(\varphi(x)), \qquad |x| < 1 \tag{1.3}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{S_0}\left[P - d\int_{-1}^{x} \tau(t)dt - \int_{-1}^{x} \tau_0(t)dt\right]$$

Условие равновесия стрингера имеет вид

$$\varphi(1) = 0 \tag{1.4}$$

На основе известных результатов (см., например, [9]), деформация граничных точек пластинки по оси Ox, вызванной распределенными по интервалу $(-1,\ 1)$ тангенциальными напряжениями интенсивности $\tau(x)$, представляется в виде

$$\varepsilon_x^{(2)}(x) := \frac{du_2(x,0)}{dx} = -\frac{2}{\pi E_2}\int_{-1}^{1} \frac{\tau(t)dt}{t-x}, \qquad |x| < 1 \tag{1.5}$$

где $u_2(x,y)$ — перемещения точек пластинки вдоль оси Ox.

На основании условия контакта

$$\varepsilon_x^{(1)}(x) = \varepsilon_x^{(2)}(x), \quad |x| \le 1 \tag{1.6}$$

вдоль линии соединения стрингера с основанием с учетом (1.3) и (1.5) получим

$$-\frac{2}{\pi E_2}\int_{-1}^{1} \frac{\tau(t)dt}{t-x} = \frac{1}{E} g(\varphi(x)), \quad |x| < 1 \tag{1.7}$$

В обозначениях

$$\lambda = \frac{2S_0E}{E_2 d}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{\pi S_0}\int_{-1}^{1} \frac{\tau_0(t)dt}{t-x}$$

уравнение (1.7) перепишем в виде

$$g(\varphi(x)) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(t)dt}{t-x} = f(x), \quad |x| < 1 \tag{1.8}$$

при условиях

$$\varphi(-1) = P/S_0, \quad \varphi(1) = 0 \tag{1.9}$$

Здесь интегралы в (1.8) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, поставленная гранично-контактная задача для упругой изотропной полубесконечной пластинки, усиленной на своей границе нелинейно-упругим стрингером конечной длины, эквивалентно сведена к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения (1.8) при граничных условиях (1.9). Решение задачи (1.8), (1.9) ищется в классе непрерывных функций в смысле Гельдера (H) на сегменте $[-1,1]$, производная которых принадлежит классу H^* [9, 10]. Относительно $f(x)$ будем предполагать, что она также принадлежит классу H^* на сегменте $[-1,1]$.

2. Существование решения задачи (1.8), (1.9). Нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение (1.8) при граничных условиях (1.9) преобразуем теперь к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. С этой целью воспользовавшись известной формулой обращения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в классе функций, неограниченных на обеих концах сегмента [10, 11], получим

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\pi\lambda\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}g(\varphi(t))dt}{t-x} + \frac{1}{\pi\lambda\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)dt}{t-x} + \frac{C_0}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.1}$$

Интегрируя обе части уравнения (10) будем иметь

$$\begin{gathered}\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-xt+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-xt-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}g(\varphi(t))dt + \\ + \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}f(t)dt + C_0\arcsin x + C\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь постоянные C_0 и C определяются из граничных условии (1.9):

$$C_0 = -\frac{P}{\pi S_0}, \quad C = \frac{P}{2S_0}$$

Замена переменных $x = \cos\pi s, t = \cos\pi u, 0 \le s, u \le 1$, в уравнении (2.2), после элементарных преобразованный, дает

$$\begin{gathered}\psi(s) - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \sin\pi u\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}(s+u)}{\sin\frac{\pi}{2}(s-u)}\right|\right]g(\psi(u))du = \\ = -\frac{1}{\lambda}\int_0^1\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}(s+u)}{\sin\frac{\pi}{2}(s-u)}\right|\right]f_1(u)du + \frac{P}{S_0}s\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\psi(s) = \varphi(\cos\pi s), f_1(s) = f(\cos\pi s)\sin\pi s$. Уравнение (2.3) представляет собой уравнение типа Гаммерштейна. Перепишем ее следующем в операторном виде

$$\psi = A\psi$$

$$\begin{gathered}A\psi = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \sin\pi u\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}(s+u)}{\sin\frac{\pi}{2}(s-u)}\right|\right]g(\psi(u))du - \\ -\frac{1}{\lambda}\int_0^1\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}(s+u)}{\sin\frac{\pi}{2}(s-u)}\right|\right]f_1(u)du + \frac{P}{S_0}s\end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть,

$$\begin{gathered}|g(\xi)| \le M_1|\xi|^{\alpha} + M_2, \quad \alpha \ge 0, \quad \xi \in R, \\ M_i = \mathrm{const} \ge 0, \quad i = 1, 2\end{gathered} \tag{2.5}$$

Вводя обозначение $Q(s,u) = \left|\dfrac{\sin(\pi/2)(s+u)}{\sin(\pi/2)(s-u)}\right|, s,u \in [0,1]$ выражение $A\psi$ из формулы (2.4) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |A\psi| &\le \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |\ln Q(s,u)||g(\psi(u)| \, du + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |\ln Q(s,u)||f_1(u)| \, du + \frac{P}{S_0} \le \\ &\le \frac{1}{\lambda}\left\{M_1\int_0^1 |\ln Q(s,u)||\psi(u)|^{\alpha} \, du + M_2\int_0^1 |\ln Q(s,u)| \, du\right\} + \\ &+ \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |\ln Q(s,u)||f_1(u)| \, du + \frac{P}{S_0} \le \\ &\le \frac{1}{\lambda}\left\{(M_1\|\psi\|_C^{\alpha} + M_2 + \|f_1\|_C)\int_0^1 |\ln Q(s,u)| \, du\right\} + \frac{P}{S_0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь оценим следующий интеграл $\int_0^1 |\ln Q(s,u)| ds$. С этой целью рассмотрим функцию $q(x) = x^{\varepsilon}\ln x, 0 < x \le 1, \varepsilon > 0$, находим ее критическую точку $x_0 = e^{-1/\varepsilon}$ и учитывая, что $q(e^{-1/\varepsilon}) = -1/\varepsilon e$, заключаем:

$$\sup_{0<x\le 1}|q(x)| = \frac{1}{e\varepsilon} =: M_{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{2.7}$$

Так как

$$\sin x \ge \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}(\pi - x), & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \tag{2.8}$$

получим

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|^{-\varepsilon} \le \begin{cases} (t+s)^{-\varepsilon}, & 0 \le s \le 1-t \\ (2-(t+s))^{-\varepsilon}, & s \ge 1-t \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}(t-s)\right|^{-\varepsilon} \le |t-s|^{-\varepsilon}, \quad 0 \le s,t \le 1 \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.9) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|\right| ds &\le \int_0^1 \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|^{\varepsilon}}\left|\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|^{\varepsilon}\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|\right| ds \le \\ &\le M_{\varepsilon}\int_0^1 \frac{ds}{\left|\sin\frac{\pi}{2}(t+s)\right|^{\varepsilon}} \le \frac{M_{\varepsilon}}{1-\varepsilon}[2 - t^{1-\varepsilon} - (1-t)^{1-\varepsilon}] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.10) имеем

$$\int_0^1 \left|\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(t-s)\right|\right| ds \le \int_0^1 \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{2}(t-s)\right|^{\varepsilon}} \left|\left|\sin\frac{\pi}{2}(t-s)\right|^{\varepsilon} \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(t-s)\right|\right| ds \le$$
$$\le M_\varepsilon \int_0^1 \frac{ds}{|t-s|^{\varepsilon}} = \frac{M_\varepsilon}{1-\varepsilon}[t^{1-\varepsilon} + (1-t)^{1-\varepsilon}] \quad (2.12)$$

Но так как, при $\varepsilon = 1/2$, величина $\varepsilon(1-\varepsilon)$ достигает максимума, поэтому учитывая (2.11) и (2.12), получим

$$\int_0^1 |\ln Q(s,t)| ds \le \int_0^1 \left|\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(s+t)\right|\right| ds + \int_0^1 \left|\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}(s-t)\right|\right| ds \le \frac{M_\varepsilon}{1-\varepsilon}[2 - t^{1-\varepsilon} - (1-t)^{1-\varepsilon}] +$$
$$+ \frac{M_\varepsilon}{1-\varepsilon}[t^{1-\varepsilon} + (1-t)^{1-\varepsilon}] = \frac{2M_\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (2.13)$$

Поэтому в силу (2.7) из (2.13) будем иметь

$$\int_0^1 |\ln Q(s,u)| ds \le \frac{8}{e} \quad (2.14)$$

Учитывая (2.13), из (2.6) получим

$$\|A\psi\|_C \le \frac{8M_1}{e\lambda}\|\psi\|_C^{\alpha} + \frac{8}{e\lambda}(M_2 + \|f_1\|_C) + \frac{P}{S_0} \quad (2.15)$$

Рассмотрим неравенство

$$a + br^{\alpha} \le r \quad (2.16)$$

относительно $r \ge 0$, где $a, b = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} \ge 0$.

Как известно [12, 13]

1) если $0 \le \alpha < 1$, то для любых a и b всегда существует $r > 0$, удовлетворяющий неравенству (2.16);

2) если $\alpha = 1$, то достаточно потребовать, чтобы $b < 1$, тогда неравенство (2.16) имеет решение $r \ge \dfrac{a}{1-b}$;

3) если $\alpha > 1$ и имеет место неравенство $a \le \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(\alpha b)^{-(\alpha-1)^{-1}}$, то тогда существует хотя бы одно положительное решение неравенства (2.16).

Опираясь на эти заключения, связанные с неравенством (2.16), в котором

$$a = \frac{8}{e\lambda}(M_2 + \|f_1\|_C) + \frac{P}{S_0}, \quad b = \frac{8M_1}{e\lambda}$$

получим, что в силу (2.15) оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле (2.4), переводит шар $B(0,r) := \{\psi \in C([0,1]) : \|\psi\|_{C([0,1])} \le r\}$ в себя:

а) для достаточно большого фиксированного r в случае $0 \le \alpha < 1$;

б) для произвольного $r \geq a/(1-b)$ в случае $\alpha = 1$ и $b < 1$, то есть

$$r \geq \frac{\frac{8}{e}(M_2 + \|f_1\|_{C([0,1])}) + \frac{P}{S_0}\lambda}{\lambda - \frac{8}{e}M_1}$$

в случае $\lambda > (8/e)M_1$;

в) при $\alpha > 1$ в случае

$$\lambda > \max\left\{\frac{8}{e}(M_2 + \|f_1\|_{C([0,1])}, \frac{8\alpha M_1}{e}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{P}{S_0}\right)^{\alpha-1}\right\}$$

Поскольку оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ является компактным, то по принципу неподвижной точки Шаудера [13] интегральное уравнение (2.3) имеет хотя бы одно непрерывное решение, которое, опираясь на результаты, изложенные в работе [10, стр. 175], будет принадлежать также классу H.

3. **Единственность решения поставленной задачи.** Теперь покажем, что если задача (1.1)–(1.6) имеет решение, то оно единственное.

Действительно, предположим, что задача допускает два решения $u^{(1)}(x, y)$ и $u^{(2)}(x, y)$, граничные значения которых на границе пластинки $u_0^{(j)}(x) = u^{(j)}(x, 0)$, с учетом условия контакта (1.6), удовлетворяют следующим соотношениям

$$\frac{du_0^{(j)}(x)}{dx} = \frac{1}{E}g(\varphi_j(x)), \quad |x| < 1$$

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{S_0}[P - d\int_{-1}^{x}\tau_j(t)dt - \int_{-1}^{x}\tau_0(t)dt], \quad j = 1, 2$$

где $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ – соответствующие искомые контактные напряжения. Разность этих решений $u(x, y) = u^{(1)}(x, y) - u^{(2)}(x, y)$ удовлетворяет основным уравнениям теории упругости при отсутствии внешних сил, а для ее граничного значения имеем

$$E\frac{du(x,0)}{dx} = -\frac{d}{S_0}\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right)K(x) \tag{3.1}$$

$$\tau^0(t) = \tau_1(t) - \tau_2(t), \quad K(x) = \int_0^1 g'[\varphi_1(x) + \omega(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]d\omega$$

Как известно, согласно формуле Остроградского–Грина имеет место следующее соотношение [9]

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = \iint_S (\lambda\theta^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{xy}^2))dxdy \tag{3.2}$$

где X_n, Y_n, u, v – соответственно, компоненты внешних напряжений и смещений на границе L пластинки, $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, а e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}, e_{zz} – компоненты деформации.

Учитывая (3.1), интеграл в левой части формулы (3.2) имеет вид

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = -\int_{-1}^{1} \tau^0(t)u_0(t)dt = -\int_{-1}^{1} u_0(t)d\left(\int_{-1}^{t} \tau^0(\eta)d\eta\right) =$$

$$-[u_0(t)\int_{-1}^{t} \tau^0(\eta)d\eta]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u_0'(t)\left(\int_{-1}^{t} \tau^0(\eta)d\eta\right)dt = -\frac{S_0 E}{d}\int_{-1}^{1} u_0'^2(t)\frac{dt}{K(t)} \tag{3.3}$$

$$u_0(x) = u(x,0)$$

Так как подинтегральная функция правой части формулы (3.2) представляет собой положительно определенную квадратичную форму, имея в виду представление (3.3), можно заключить, что если $g' > 0$, оба решения $u^{(1)}(x,y)$ и $u^{(2)}(x,y)$ дают одинаковые компоненты деформации и одинаковые компоненты напряжения. Это означает, что задача (1.1)–(1.6) имеет единственное решение.

4. Построение решения при помощи метода малого параметра. Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\lambda_0 g(\varphi(x)) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)dt}{t-x} = f_0(x), \quad |x| < 1 \\ \lambda_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad f_0(x) = \frac{1}{\pi S_0}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(t)dt}{t-x}\end{gathered} \tag{4.1}$$

Когда λ_0 является малым параметром, то есть материал стрингера является жестким, представим решение уравнения (4.1) в виде ряда по степеням малого параметра λ_0:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_0^k\varphi_k(x) = \varphi_0(x) + \lambda_0\varphi_1(x) + \lambda_0^2\varphi_2(x) + \lambda_0^3\varphi_3(x) + O(\lambda_0^4). \tag{4.2}$$

В предположении, что функция g является аналитической функцией, разлагающаяся в ряд Маклорена: $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$ на всей действительной оси, будем иметь

$$g(\varphi(x)) = g(0) + \frac{g'(0)}{1}\varphi(x) + \frac{g''(0)}{1\cdot 2}\varphi^2(x) + \frac{g'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi^3(x) + \cdots. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.1), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ_0, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0'(t)dt}{t-x} = -f_0(x), \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1'(t)dt}{t-x} = g(0) + g'(0)\varphi_0(x) + \frac{1}{2}g''(0)\varphi_0^2(x) + \frac{1}{6}g'''(0)\varphi_0^3(x), \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2'(t)dt}{t-x} = g'(0)\varphi_1(x) + g''(0)\varphi_0(x)\varphi_1(x) + \frac{1}{2}g'''(0)\varphi_0^2(x)\varphi_1(x), \quad |x| < 1$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3'(t)dt}{t-x} = g'(0)\varphi_2(x) + \frac{1}{2}g''(0)\varphi_1^2(x) + g''(0)\varphi_0(x)\varphi_2(x) + \frac{1}{2}g'''(0)\varphi_0(x)\varphi_1^2(x) \\ + \frac{1}{2}g'''(0)\varphi_0^2(x)\varphi_2(x), \quad |x| < 1\end{gathered} \tag{4.4}$$

при условиях

$$\varphi_0(-1) = P/S_0, \quad \varphi_0(1) = 0 \tag{4.5}$$

$$\varphi_k(-1) = 0, \quad \varphi_k(1) = 0, \quad k \geq 1 \tag{4.6}$$

Таким образом, решение уравнения (1.8) при условии (1.9) сводится к решению системы рекуррентных линейных сингулярных интегральных уравнений (4.4) первого рода при условиях (4.5) и (4.6). Решения каждого из этих уравнений с учетом (4.5), (4.6) представляются в явном виде с применением формулы обращения интеграла типа Коши [10, 11] в классе функций, неограниченных на обеих концах линии интегрирования.

В качестве примера рассмотрим случай $g(u) = u^2$. Тогда система рекуррентных уравнений (4.4) принимает вид:

$$L\varphi_0(x) = -f_0(x),$$

откуда в силу (2.2) и (4.5):

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1 - tx + \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1 - x - \sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}} f_0(t)dt - \frac{P}{\pi S_0}\arcsin x + \frac{P}{2S_0}$$

$$L\varphi_1(x) = \varphi_0^2(x)$$

$$L\varphi_2(x) = 2\varphi_0(x)\varphi_1(x)$$

$$L\varphi_3(x) = 2\varphi_0(x)\varphi_2(x) + \varphi_1^2(x)$$

$$L\varphi_4(x) = 2\varphi_0(x)\varphi_3(x) + 2\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots$$

$$L\varphi_k(x) = \sum_{i+j=k-1} \varphi_i(x)\varphi_j(x), \quad |x| < 1\ldots \tag{4.7}$$

$$L\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\psi'(t)dt}{t - x}$$

Из (4.7) следует, что $\|\varphi_n\|_C \leq 4^{n-1}\|L^{-1}\|^{2n+1}_{H^*\to C}\,\|f_0\|^{n+1}_{H^*}$, и ряд (4.2) сходится при условии

$$\lambda_0 \leq \frac{\delta}{4\|L^{-1}\|^2\,\|f_0\|}, \quad 0 < \delta = \text{const} < 1 \tag{4.8}$$

Заключение. Для нелинейных дифференциальных уравнений нам известна общая теорема Пуанкаре [14] о разложении решения по степеням малого параметра. Для нелинейного интегрального уравнения вида (4.1) при конкретных нелинейных функциях g из достаточно широкого класса функций можно получить условие вида (4.8) относительно малого параметра λ_0, при котором ряд (4.2) сходится. Соответственно, решение уравнении (4.1) при условиях (1.9) можно построить в виде ряда (4.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке национального научного фонда им. Ш. Руставели (грант № FR/86/5-109/14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Банцури Р.Д.* Контактная задача для анизотропного клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 568–571.
3. *Нуллер Б.М.* О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 306–316.
4. *Саркисян В.С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: ЕГУ, 1983. 534 с.
5. *Shavlakadze N.* The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion // Acta Appl. Math. 2007. V. 99. № 1. P. 29–51.
6. *Банцури Р.Д., Шавлакадзе Н.Н.* Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с конечным включением // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 133–139.
7. *Bantsuri R., Shavlakadze N.* The boundary-contact problems electroelasticity for piezo-electric plate with inclusion and half space with cut. (Russian) Prikl. Mat. i Mech. 78, 2014. № 4. P. 583–594. Eng. Transl // J. Appl. Math. Mech. 78, 2014. № 4. P. 93–97.
8. *Shavlakadze N.* The effective solution of two–dimensional integro-differential equations and their applications in the theory of viscoelasticity // J. of Appl. Mathem. and Mechs. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 1–10, 2015. doi 10.1002/zamm.201400091
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. Изд. физ. мат. лит. 1963. 487 с.
12. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука. 1975.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
14. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнении. Изд. технико-теорет. лит. 1950. 436 с.