Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. С. Харибегашвили, О корректной постановке некоторых нелокальных задач для волнового уравнения, *Дифференц. уравнения*, 2003, том 39, номер 4, 539–553

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 188.129.162.82
22 марта 2022 г., 20:22:41

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 4, с. 539–553

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2003 г. С. С. Харибегашвили

В последнее время особый интерес вызывают нелокальные задачи для некоторых классов уравнений в частных производных. В определенной степени это связано с тем обстоятельством, что нелокальные задачи возникают при математическом моделировании некоторых физических и биологических процессов. Для уравнений эллиптического и параболического типов этим вопросам посвящено большое число работ (см., например, [1–11]). Отметить также работы [7, 12–17], в которых рассматриваются уравнения гиперболического типа.

В настоящей работе исследованы некоторые нелокальные задачи для волнового уравнения в случае одного и двух пространственных переменных.

1. В этом пункте рассмотрим волновое уравнение с одной пространственной переменной (уравнение колебаний струны)

$$\Box_1 u := u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Обозначим через D характеристический четырехугольник уравнения (1) с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$ и $C(0,2)$. Пусть $J: OA \to OC$ – отображение, переводящее точку $P \in OA$ в точку $J(P) \in OC$, лежащую на характеристике семейства $x+t=\mathrm{const}$, проходящей через точку P, т.е. если $P=(x,x)\in OA$, то $J(P)=(0,2x)\in OC$.

Для уравнения (1) в области D рассмотрим нелокальную задачу в следующей постановке: найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(P)=\varphi(P), \quad P \in OB, \tag{2}$$

$$u(J(P))=u(P), \quad P\in OA, \tag{3}$$

где φ – заданная непрерывная функция на отрезке OB характеристики $x+t=0$.

Легко проверить, что задача (1)–(3) не является корректно поставленной, поскольку соответствующая ей однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида $u(x,t)=\psi(x+t)$, где $\psi(x)$ – произвольная функция класса $C([0,2])\cap C^2((0,2))$, причем $\psi(0)=0$.

Теперь рассмотрим эту же задачу для уравнения

$$(\Box_1+\lambda)u := u_{tt}-u_{xx}+\lambda u = 0, \quad \lambda=\mathrm{const}\neq 0. \tag{4}$$

В новых переменных $\xi = 2^{-1}(t+x)$, $\eta=2^{-1}(t-x)$ задача (4), (2), (3) в соответствующей области $\Omega: 0<\xi<1,\ 0<\eta<1$ плоскости переменных ξ, η перепишется в виде

$$v_{\xi\eta}+\lambda v = 0, \tag{5}$$

$$v(0,\eta)=\varphi(\eta), \quad 0\le\eta\le 1, \tag{6}$$

$$v(\xi,\xi)=v(\xi,0), \quad 0\le\xi\le 1, \tag{7}$$

где $v(\xi,\eta) := u(\xi-\eta,\xi+\eta)$.

Как известно, любое решение $v(\xi,\eta)$ уравнения (5) класса $C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ представимо в виде [17, с. 66]

$$v(\xi,\eta) = R(\xi,0;\xi,\eta)v(\xi,0)+R(0,\eta;\xi,\eta)v(0,\eta)-R(0,0;\xi,\eta)v(0,0)-$$

$$-\int_0^\xi \frac{\partial R(\sigma,0;\xi,\eta)}{\partial\sigma}\,v(\sigma,0)\,d\sigma-\int_0^\eta \frac{\partial R(0,\tau;\xi,\eta)}{\partial\tau}\,v(0,\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ – функция Римана для уравнения (5).

Функция Римана $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ для уравнения (5) может быть представлена с помощью функции Бесселя нулевого порядка в виде [18, с. 455]

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=J_0\big(2\sqrt{\lambda(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\,\big)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\lambda^k}{(k!)^2}(\xi-\xi_1)^k(\eta-\eta_1)^k. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (6) и (7) и учитывая (9), относительно неизвестной функции $\psi(\xi)=v(\xi,0)$ получим уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^\xi K(\xi,\sigma;\lambda)\psi(\sigma)\,d\sigma=f(\xi),\quad 0\le\xi\le 1; \tag{10}$$

здесь

$$K(\xi,\sigma;\lambda):=\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k\lambda^k}{(k!)^2}(\xi-\sigma)^{k-1}\xi^{k-1}, \tag{11}$$

$$f(\xi):=-\int_0^\xi K(\xi,\tau;\lambda)\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{\xi}(\varphi(\xi)-R(0,0;\xi,\xi)\varphi(0)). \tag{12}$$

Если уравнение (10) разрешимо в классе непрерывных функций $C([0,1])$, то $f(\xi)\in$ $\in C^1([0,1])$ и, дифференцируя обе части равенства (10), в силу (11) получаем

$$\lambda\psi(\xi)+\int_0^\xi \frac{\partial K(\xi,\sigma;\lambda)}{\partial\xi}\psi(\sigma)\,d\sigma=f'(\xi),\quad 0\le\xi\le 1. \tag{13}$$

С учетом (11) и (12) будем иметь

$$f'(\xi)=-\lambda\varphi(\xi)-\int_0^\xi \frac{\partial K(\xi,\tau;\lambda)}{\partial\xi}\varphi(\tau)\,d\tau+\left(\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\right)'-\varphi(0)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)\lambda^k}{(k!)^2}\xi^{2(k-1)}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Задача (4), (2), (3) в классе $C(\overline{D})\cap C^2(D)$ не может иметь более одного решения. Для любой функции φ, такой, что $(\varphi(\xi)-\varphi(0))/\xi\in C^3([0,1])$, задача (4), (2), (3) имеет единственное решение $u(x,t)$ в классе $C^2(\overline{D})$.*

Замечание 1. Поскольку $(\varphi(\xi)-\varphi(0))/\xi=\int_0^1\varphi'(\xi\tau)\,d\tau$, то в теореме 1 достаточно потребовать, чтобы $\varphi\in C^4([0,1])$.

Замечание 2. Отметим, что теорема единственности для задачи (4), (2), (3) справедлива также в классе обобщенных решений $u(x,t)$ класса $C(\overline{D})$, т.е. когда $u(x,t)\in C(\overline{D})$ и $(u,\Box_1\omega+\lambda\omega)_{L_2(D)}=0$ для любого $\omega\in C_0^\infty(D)$. При этом представление (8) имеет место и для обобщенных решений уравнения (4) класса $C(\overline{D})$. Для существования обобщенного решения $u(x,t)$ задачи (4), (2), (3) класса $C(\overline{D})$ достаточно потребовать, чтобы $\varphi\in C^1([0,1])$ и $\varphi\in C^2([0,\varepsilon])$ для сколь угодно малого $\varepsilon>0$. Здесь $(\cdot,\cdot)_{L_2(D)}$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(D)$.

Замечание 3. Как легко проверить, для уравнения (1) корректно поставлена нелокальная задача, в которой вместо (3) задано условие

$$\int\limits_{OJ(P)} u\,ds := \int\limits_0^{2x} u(0,t)\,dt = u(P), \quad P(x,t) \in OA, \tag{15}$$

а условие (2) остается прежним, т.е. задача (1), (2), (15), где $OJ(P)$ – прямолинейный отрезок, соединяющий точки O и $J(P)$.

2. В этом пункте для волнового уравнения

$$\Box_2 u := u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 0 \tag{16}$$

с двумя пространственными переменными рассмотрим один многомерный вариант нелокальной задачи (1), (2), (15). Приведем понятия слабых и сильных обобщенных решений уравнения (16) класса $C(\overline{D})$, а также одно свойство этих решений, записанное в интегральной форме, на основе которого рассмотренная ниже задача будет редуцирована к интегральному уравнению.

Обозначим через $D: -t < x_2 < t,\ 0 < t < +\infty$, двугранный угол, гранями которого являются характеристические поверхности $S_1:\ t - x_2 = 0,\ 0 \le t < +\infty$, и $S_2:\ t + x_2 = 0$, $0 \le t < +\infty$, уравнения (16). Пусть $J_\pm(P)$ – точка пересечения с плоскостью $x_2 = 0$ бихарактеристического луча $\ell_\pm(P):\ x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0 - \tau,\ t = t^0 \pm \tau,\ 0 \le \tau < +\infty$, уравнения (16), проходящего через точку $P(x_1^0, x_2^0, t^0) \in S_1$, т.е. $t^0 = x_2^0 \ge 0$. Очевидно, что $J_\pm(P) = (x_1^0, 0, x_2^0 \pm x_2^0)$. Обозначим через $t_+(P)$ координату точки $J_+(P)$ относительно оси t, т.е. $t_+(P) = 2x_2^0$.

Рассмотрим нелокальную задачу в следующей постановке: найти в области D решение $u(x_1, x_2, t)$ уравнения (16), удовлетворяющее условиям

$$u(P) = \varphi(P), \quad P \in S_2, \tag{17}$$

$$\int\limits_{J_-(P)J_+(P)} u\,ds := \int\limits_0^{t_+(P)} u(x_1, 0, t)\,dt = u(P) + \mu(P), \quad P(x_1^0, x_2^0, t^0) \in S_1, \tag{18}$$

где μ и φ – заданные функции на S_1 и S_2, удовлетворяющие на $S_1 \cap S_2$ условию согласования $(\mu + \varphi)|_{S_1 \cap S_2} = 0$, а $J_-(P)J_+(P)$ – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $J_-(P)$ и $J_+(P)$.

Определение 1. Функцию $u(x_1, x_2, t)$ назовем слабым обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$, если $u \in C(\overline{D})$ и эта функция удовлетворяет уравнению (16) в смысле обобщенных функций [19, с. 8], т.е. $(u, \Box_2\omega)_{L_2(D)} := \int_D u \Box_2 \omega\, dD = 0\ \ \forall \omega \in C_0^\infty(D)$.

Определение 2. Функцию $u(x_1, x_2, t)$ назовем сильным обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$, если $u \in C(\overline{D})$ и для любой подобласти D_1, компактно вложенной в D (т.е. $\overline{D}_1$ является компактом и $\overline{D}_1 \subset D$), существует последовательность u_n регулярных решений уравнения (16) класса $C^2(\overline{D}_1)$, стремящаяся к u в пространстве $C(\overline{D}_1)$: $\|u_n - u\|_{C(\overline{D}_1)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $E(r, t, \tau)$ функцию Вольтерра [17, с. 83]

$$E(r, t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{t - \tau - \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}}{r}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2, \tag{19}$$

представляющую собой решение уравнения (16) внутри конуса

$$K_{x,t}: t - \tau - r = 0, \quad x = (x_1, x_2), \tag{20}$$

характеристического для уравнения (16). Это решение обращается в нуль по конусу (20), но имеет особенности вдоль его оси $r=0$. Пусть $S^i_{x,t}$, $(x,t)\in D$, – часть поверхности S_i, лежащая внутри конуса $K_{x,t}$, $i=1,2$, а $S_{x,t}=S^1_{x,t}\cup S^2_{x,t}$. Как известно, для любого регулярного решения $u(x,t)$ уравнения (16) класса $C^2(\overline{D})$ имеет место интегральное равенство [20, с. 96]

$$\int\limits_{x_2}^{t} u(x_1,x_2,\tau)\,d\tau=\int\limits_{S_{x,t}}\left[u\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}-E(r,t,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial N}\right]ds\quad \forall (x,t)\in D, \tag{21}$$

где N – единичный вектор конормали к $S_{x,t}$ в точке $(y,\tau)\in S_{x,t}$, т.е.

$$N=(\cos\widehat{nx_1},\cos\widehat{nx_2},-\cos\widehat{nt}),\qquad n=(\cos\widehat{nx_1},\cos\widehat{nx_2},\cos\widehat{nt})$$

– единичный вектор внешней нормали к $S_{x,t}$ в точке $(y,\tau)\in S_{x,t}$, причем в правой части равенства (21) переменными интегрирования являются $y=(y_1,y_2)$ и τ. Очевидно, что $N|_{S^1_{x,t}}=(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $N|_{S^2_{x,t}}=(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

Учитывая, что $E|_{K_{x,t}}=0$ и на характеристической поверхности $S_{x,t}$ дифференцирование по направлению конормали $\partial/\partial N$ является внутренним дифференциальным оператором, интегрированием по частям равенство (21) приведем к виду

$$\int\limits_{x_2}^{t} u(x_1,x_2,\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_1-\sqrt{t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{t^2-x_2^2}} u(y_1,0,0)\log\frac{(x_1-y_1)^2+x_2^2}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\,(t+\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-x_2^2})}\,dy_1+$$
$$+2\int\limits_{S_{x,t}} u\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds. \tag{22}$$

Замечание 4. В характеристической полуплоскости $S_1: t-x_2=0$, $0\le t<+\infty$, введем декартову прямоугольную систему координат точек y_1, y_2', одной из осей которой является ось Oy_1, совпадающая с осью Ox_1, а вторую ось Oy_2' направим вдоль бихарактеристического луча с направляющим вектором $(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. Ниже, говоря о функции g, определенной на поверхности S_1 или на $S^1_{x,t}\subset S_1$, будем считать, что она является функцией переменных y_1, y_2', т.е. $g=g(y_1,y_2')$. Очевидно, что $(\partial g/\partial N)|_{S_1}=\partial g(y_1,y_2')/\partial y_2'$, причем на $S_1: ds=dy_1dy_2'$.

Лемма 1. *Оператор T_1, действующий по формуле*

$$(T_1g)(x,t):=\int\limits_{S^1_{x,t}} g\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds,\quad (x,t)\in\overline{D}, \tag{23}$$

является линейным непрерывным оператором из пространства $C(S_1)$ в пространство $C(\overline{D})$, причем

$$(T_1g)(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_1\cup S_2. \tag{24}$$

Оператор T_0, действующий по формуле

$$(T_0g)(x,t):=\int\limits_{S^1_{x,t}} g\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial t}\,ds$$

также является линейным непрерывным оператором из $C(S_1)$ в $C(\overline{D})$, причем

$$(T_0g)(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}t} g(x_1,y_2')\,dy_2',\quad (x,t)\in S_1;\quad (T_0g)(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_2. \tag{25}$$

Доказательство. С учетом того, что на поверхности S_1 переменные y_1, y_2, τ, где $y_2=\tau$, связаны с переменными y_1, y_2' равенством $\tau = y_2'/\sqrt{2}$, будем иметь

$$2\sqrt{2}\pi\,(\partial E(r,t,\tau)/\partial N)|_{S_1} = ((t-\tau)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2)^{-1/2} -$$
$$-(t-\tau)(x_2-y_2)[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{-1}((t-\tau)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2)^{-1/2} =$$
$$=((t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2)^{-1/2} -$$
$$-(t-y_2'/\sqrt{2})(x_2-y_2'/\sqrt{2})[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2]^{-1}((t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2)^{-1/2}. \tag{26}$$

Как легко видеть, когда точка (x,t) принадлежит D, граница $\partial S^1_{x,t}$ плоской области $S^1_{x,t}$ состоит из верхней части параболы $\gamma^1_{x,t}: y_2' = -(\sqrt{2}(t-x_2))^{-1}(y_1-x_1)^2+(t+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2'\ge 0$ и отрезка $\delta^1_{x,t}: x_1-\sqrt{t^2-x_2^2}\le y_1\le x_1+\sqrt{t^2-x_2^2}$, $y_2'=0$ в плоскости переменных y_1, y_2'.

В новых переменных z_1, z_2:

$$y_2'-\sqrt{2}x_2=(t-x_2)z_2,\quad y_1-x_1=(t-x_2)z_1 \tag{27}$$

имеем

$$\begin{aligned}&(t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2=(t-x_2)^2[1-\sqrt{2}z_2-z_1^2],\\&(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2=(t-x_2)^2[z_1^2+z_2^2/2],\\&(t-y_2'/\sqrt{2})(x_2-y_2'/\sqrt{2})=2^{-1}(t-x_2)[z_2-\sqrt{2}]z_2.\end{aligned} \tag{28}$$

При преобразовании (27) область $S^1_{x,t}$ перейдет в плоскую область $\Omega_{x_2,t}$:

$$-(\sqrt{2}/(t-x_2))x_2\le z_2\le(1/\sqrt{2})(1-z_1^2),\quad -((t+x_2)/(t-x_2))^{1/2}\le z_1\le((t+x_2)/(t-x_2))^{1/2},$$

ограниченную параболой $z_2=(1/\sqrt{2})(1-z_1^2)$ и прямой $z_2=-(\sqrt{2}/(t-x_2))x_2$ в плоскости переменных z_1, z_2.

В силу (26)–(28) равенство (23) перепишется в виде

$$(T_1g)(x,t)=(t-x_2)\int\limits_{\Omega_{x_2,t}} G_1(z_1,z_2)g(x_1+(t-x_2)z_1,\sqrt{2}x_2+(t-x_2)z_2)\,dz_1\,dz_2, \tag{29}$$

где

$$G_1(z_1,z_2):=(2\sqrt{2}\pi)^{-1}(1-\sqrt{2}z_2-z_1^2)^{-1/2}-(4\sqrt{2}\pi)^{-1}z_2(z_2-\sqrt{2})[z_1^2+z_2^2/2]^{-1}(1-\sqrt{2}z_2-z_1^2)^{-1/2}.$$

При $(x,t)\in D$, т.е. при $t>|x_2|$ легко показать, что $\int_{\Omega_{x_2,t}}|G_1(z_1,z_2)|\,dz_1\,dz_2<+\infty$, откуда в силу представления (29) непосредственно следует непрерывность функции T_1g в точке (x,t), если $g\in C(S_1)$.

Пусть теперь $(x^0,t^0)\in S_1$, $t^0>0$. Обозначим через $\Pi_{x,t}$, $(x,t)\in D$, прямоугольник $|y-x_1|\le\sqrt{t^2-x_2^2}$, $0\le y_2'\le((t+x_2)/\sqrt{2})$, в плоскости переменных y_1, y_2'. Очевидно, что $S^1_{x,t}\subset\Pi_{x,t}$. Поэтому при $D\ni(x,t)\to(x^0,t^0)$ плоская область $S^1_{x,t}$ стягивается в отрезок $I=\{(x_1,x_2,t)\in S_1:\ x_1=x_1^0,\ x_2=\tau,\ t=\tau,\ 0\le\tau\le t^0\}$, который в плоскости переменных y_1, y_2' (см. замечание 4) представляет собой отрезок $\widetilde{I}:\ y_1=x_1^0$, $0\le y_2'\le\sqrt{2}t^0$. Поскольку $g\in C(S_1)$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\delta<\varepsilon$, что при $|x-x^0|<\delta$, $|t-t^0|<\delta$ будем иметь

$$|g(y_1,y_2')-g(x_1^0,y_2')|<\varepsilon,\quad (y_1,y_2')\in S^1_{x,t}. \tag{30}$$

Полагая $a^2=(t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2=(t-x_2)(t+x_2-\sqrt{2}y_2')$, $a>0$, легко видеть, что

$$\int\limits_{S^1_{x,t}}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\,\frac{g(x_1^0,y_2')}{((t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2)^{1/2}}\,dy_1\,dy_2'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^{(t+x_2)/\sqrt{2}}dy_2'\int\limits_{x_1-a}^{x_1+a}\frac{g(x_1^0,y_2')}{(a^2-(y_1-x_1)^2)^{1/2}}\,dy_1=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\arcsin\frac{y_1-x_1}{a}\bigg|_{y_1=x_1-a}^{y_1=x_1+a}dy_2'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'. \tag{31}$$

Очевидно, что последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_0\widetilde{g})(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{S^1_{x,t}}g(x_1^0,y_2')\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial t}\,ds=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\,dy_2', \tag{32}$$

где $\widetilde{g}(y_1,y_2'):=g(x_1^0,y_2')$, T_0 – оператор из (25), и $-\partial E(r,t,\tau)/\partial t=\partial E(r,t,\tau)/\partial\tau=$ $=(2\pi)^{-1}((t-\tau)^2-r^2)^{-1/2}$, $r^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$.

Из (32) следует, что

$$2\sqrt{2}(T_01)(x,t)=t+x_2. \tag{33}$$

Полагая $M=\max\limits_{0\le y_2'\le\sqrt{2}(t^0+\varepsilon)}|g(x_1^0,y_2')|$ и учитывая, что $t^0=x_2^0$ на S_1, при $|x-x^0|<\delta$, $|t-t^0|<\delta$ в силу (30)–(33) будем иметь

$$\left|(T_0g)(x,t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}t^0}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'\right|=$$

$$=\left|(T_0[g(y_1,y_2')-g(x_1^0,y_2')])(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}t^0}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'\right|\le$$

$$\le\varepsilon|(T_01)(x,t)|+\frac{1}{2}\left|\int\limits_{\sqrt{2}t}^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'\right|\le\varepsilon\frac{1}{2\sqrt{2}}|t+x_2|+\frac{1}{2}M\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(t+x_2)-\sqrt{2}t^0\right|=$$

$$=[\varepsilon|t+x_2|+M|(t-t^0)+(x_2-x_2^0)|\,]/(2\sqrt{2})\le$$

$$\le[\varepsilon(|t-t^0|+|x_2-x_2^0|+|t^0+x_2^0|)+M(|t-t^0|+|x_2-x_2^0|)\,]/(2\sqrt{2})\le$$

$$\le[\varepsilon(2\delta+2t^0)+2\delta M\,]/(2\sqrt{2})\le(\varepsilon+t^0+M)\varepsilon/\sqrt{2}. \tag{34}$$

Из (34) непосредственно следует непрерывность функции T_0g в точке $(x^0,t^0)\in S_1$, а также первое из равенств (25). Непрерывность T_0g в произвольной точке $(x^0,t^0)\in S_2$ и второе равенство из (25) доказываются аналогично.

Введем в рассмотрение оператор $(L_0g)(x,t):=\int_{S^1_{x,t}}G_0(x,t;y_1,y_2')g(y_1,y_2')\,dy_1\,dy_2'$, где

$$G_0(x,t;y_1,y_2'):=$$

$$:= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\,\frac{(t-y_2'/\sqrt{2})(x_2-y_2'/\sqrt{2})}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2]((t-y_2'/\sqrt{2})^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2)^{1/2}}.$$

Отметим, что на отрезке $0 \le y_2' \le (t+x_2)/\sqrt{2}$, где $(x,t)\in D$, т.е. $t>|x_2|$, функция $(x_2-y_2'/\sqrt{2})$ положительна при $0<y_2'<\sqrt{2}x_2$ и отрицательна при $\sqrt{2}x_2<y_2'<(t+x_2)/\sqrt{2}$. С учетом этого и легко проверяемого равенства

$$\int \frac{b}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{a^2-x^2}}+\mathrm{const}, \quad b\ne 0, \quad a\ne 0,$$

по аналогии с (31) будем иметь

$$(L_0\widetilde{g})(x,t)=\int\limits_{S^1_{x,t}} G_0(x,t;y_1,y_2')g(x_1^0,y_2')\,dy_1\,dy_2' =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}x_2}+\int\limits_{\sqrt{2}x_2}^{(t+x_2)/\sqrt{2}}\right)dy_2'\left(t-\frac{y_2'}{\sqrt{2}}\right)g(x_1^0,y_2')\times$$

$$\times\int\limits_{x_1-a}^{x_1+a}\frac{(x_2-y_2'/\sqrt{2})}{[(x_2-y_2'/\sqrt{2})^2+(y_1-x_1)^2]\sqrt{a^2-(y_1-x_1)^2}}\,dy_1=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}x_2}+\int\limits_{\sqrt{2}x_2}^{(t+x_2)/\sqrt{2}}\right)g(x_1^0,y_2')\operatorname{arctg}\frac{(y_1-x_1)(t-y_2'/\sqrt{2})}{(x_2-y_2'/\sqrt{2})\sqrt{a^2-(y_1-x_1)^2}}\Bigg|_{y_1-x_1=-a}^{y_1-x_1=a}dy_2'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{\sqrt{2}x_2}g(x_1^0,y_2')\,dy_2'-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{\sqrt{2}x_2}^{(t+x_2)/\sqrt{2}}g(x_1^0,y_2')\,dy_2', \tag{35}$$

где $\widetilde{g}(y_1,y_2'):=g(x_1^0,y_2')$.

Отметим, что второе слагаемое в (35) стремится к нулю, когда $D\ni(x,t)\to(x^0,t^0)\in S_1$, так как при этом $\sqrt{2}x_2\to\sqrt{2}t^0$ и $(t+x_2)/\sqrt{2}\to\sqrt{2}t^0$. Из (35) так же, как и при доказательстве непрерывности функции T_0g в точке $(x^0,t^0)\in S_1$, следует непрерывность функции L_0g в точке $(x^0,t^0)\in S_1$, причем

$$(L_0g)(x^0,t^0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{\sqrt{2}t^0}g(x_1^0,y_2')\,dy_2', \quad (x^0,t^0)\in S_1. \tag{36}$$

Теперь, поскольку $T_1=T_0/\sqrt{2}-L_0$, получаем, что функция T_1g непрерывна в точке $(x^0,t^0)\in S_1$, причем в силу (25) и (36) будем иметь $(T_1g)(x^0,t^0)=0$, $(x^0,t^0)\in S_1$. Аналогично доказывается непрерывность функции T_1g в точках множества S_2 и $(T_1g)(x^0,t^0)=0$, $(x^0,t^0)\in S_2$, а тем самым и равенство (24).

Из этих же рассуждений следует непрерывность оператора T_1, действующего из пространства $C(S_1)$ в $C(\overline{D})$ в следующем смысле. Пусть X – произвольное компактное подмножество из S_1, D_X – множество тех точек (x,t) из $\overline{D}$, для которых $S^1_{x,t}\subset X$, и пусть $D_X\ne\emptyset$. Тогда найдется такая положительная постоянная $c=c(X)$, что для любого $g\in C(S_1)$ справедливо неравенство $\|T_1g\|_{C(D_X)}\le c(X)\|g\|_{C(X)}$. В таком же смысле имеет место непрерывность оператора T_0, действующего из пространства $C(S_1)$ в $C(\overline{D})$. Тем самым лемма 1 доказана.

Замечание 5. Отметим, что лемма 1 остается справедливой, если вместо поверхности $S^1_{x,t}$ рассмотреть $S^2_{x,t}$ при соответствующих операторах T_0 и T_1.

Лемма 2. *Эквивалентны следующие условия:*

i) *функция u является слабым обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$;*

ii) *функция u является сильным обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$;*

iii) *функция u принадлежит классу $C(\overline{D})$ и для любого $(x,t) \in D$ справедливо равенство (22).*

Доказательство. Условие ii) следует из i). Действительно, пусть u является слабым обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$. Обозначим через $\omega_\varepsilon(x,t) = \varepsilon^{-3}\omega^0(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, функцию усреднения, где $\omega^0 \in C_0^\infty(R^3)$, $\int \omega^0(x,t)\,dt = 1$, $\omega^0 \geq 0$, $\operatorname{supp}\omega^0 = \{(x,t) \in R^3: |x|^2 + t^2 \leq 1\}$ [17, с. 9]. Пусть $D_1 \subset D$ – подобласть, компактно вложенная в D, а ε меньше расстояния $\delta > 0$ между множествами $\overline{D}_1$ и ∂D. Тогда в силу свойств операции свертки [19, с. 9 и 23] функция $u_\varepsilon = u * \omega_\varepsilon$ принадлежит классу $C^\infty(\overline{D}_1)$, в $\overline{D}_1$ является классическим решением уравнения (16) и при $\varepsilon \to 0$ сходится к u в норме пространства $C(\overline{D}_1)$, т.е. имеет место условие ii).

Если выполняется условие ii), то, как легко видеть, функция $u_\varepsilon = u * \omega_\varepsilon \in C^\infty(\overline{D}_\varepsilon)$ является классическим решением уравнения (16) в замкнутой области $\overline{D}_\varepsilon$, где $D_\varepsilon: -t + \sqrt{2}\varepsilon < x_2 < t - \sqrt{2}\varepsilon$, $\sqrt{2}\varepsilon < t < +\infty$. Пусть $S_{x,t,\varepsilon}$, $(x,t) \in D_\varepsilon$, – часть границы ∂D_ε, лежащая внутри характеристического конуса $K_{x,t}$ из (20). Тогда для решения u_ε уравнения (16) справедливо интегральное равенство (22), в котором вместо D и $S_{x,t}$ взято D_ε и $S_{x,t,\varepsilon}$ и которое обозначим через (22_ε). Поскольку в силу леммы 1 линейные операторы, представленные левой и правой частями равенства (22_ε), являются непрерывными в соответствующих пространствах непрерывных функций, а функция $u \in C(\overline{D})$ и для любой подобласти $D_1 \subset D$, компактно вложенной в D, имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{C(\overline{D}_1)} = 0$, то, переходя в интегральном равенстве (22_ε) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (22). Следовательно, из ii) следует iii).

Таким образом, нам осталось лишь показать, что из iii) следует i). Действительно, пусть $u \in C(\overline{D})$ и для любого $(x,t) \in D$ справедливо интегральное равенство (22). Возьмем произвольную функцию $\omega \in C_0^\infty(D)$ и введем в рассмотрение множество $S_\omega^i = \cup_{(x,t)\in \operatorname{supp}\omega} S_{x,t}^i$, $i = 1, 2$. Очевидно, что $S_\omega^i \subset S_i$, $i = 1, 2$. В силу теоремы Вейерштрасса существует последовательность функций $f_n^i \in C^\infty(S_i)$, $\operatorname{diam}\operatorname{supp} f_n^i < +\infty$, $i = 1, 2$, такая, что $\|f_n^i - u|_{S_i}\|_{C(S_\omega^i)} \to 0$ при $n \to \infty$. В работе [20, с. 98] доказано существование единственного решения $u_n \in C^\infty(\overline{D})$ уравнения (16), удовлетворяющего краевым условиям $u_n|_{S_i} = f_n^i$, $i = 1, 2$, для которого справедливо интегральное равенство (22). Так как $\|f_n^i - u|_{S_i}\|_{C(S_\omega^i)} \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу леммы 1 существует предел в правой части равенства (22), а в таком случае существует и предел в левой части этого равенства, т.е. последовательность $v_n(x_1, x_2, t) = \int_{x_2}^t u_n(x_1, x_2, \tau)\,d\tau$ стремится к некоторой непрерывной функции $v(x_1, x_2, t)$ в топологии пространства $C(\overline{D})$. Но $\partial v_n(x_1, x_2, t)/\partial t = u_n(x_1, x_2, t)$ является решением уравнения (16). Далее, согласно условию iii) и лемме 1, имеет место равенство $v(x_1, x_2, t) = \int_{x_2}^t u(x_1, x_2, \tau)\,d\tau$. Поэтому функция $u = \partial v/\partial t$ является слабым обобщенным решением уравнения (16), так как $(u, \Box_2\omega)_{L_2(D)} = (\partial v/\partial t, \Box_2\omega)_{L_2(D)} = -(v, (\partial/\partial t)\Box_2\omega)_{L_2(D)} = -\lim\limits_{n\to\infty}(v_n, (\partial/\partial t)\Box_2\omega)_{L_2(D)} = \lim\limits_{n\to\infty}(\partial v_n/\partial t, \Box_2\omega)_{L_2(D)} = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n, \Box_2\omega)_{L_2(D)} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, что и доказывает лемму 2.

Замечание 6. Ниже без ограничения общности будем считать, что в задаче (16)–(18)

$$u\big|_{S_1\cap S_2} = \varphi\big|_{S_1\cap S_2} = \mu\big|_{S_1\cap S_2} = 0, \tag{37}$$

поскольку в противном случае, если $\varphi|_{S_1\cap S_2} = \widetilde{\lambda}(x_1) \not\equiv 0$, то функция $\widetilde{\lambda}(t + x_1)$ также является решением уравнения (16), и новая неизвестная функция $u_1(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) - \widetilde{\lambda}(t + x_1)$ удовлетворяет уравнению (16) и краевым условиям

$$u_1(P) = \varphi_1(P), \quad P \in S_2; \qquad \int\limits_{J_-(P)J_+(P)} u_1\,ds = u_1(P) + \mu_1(P), \quad P \in S_1,$$

в которых в силу условия согласования $(\mu+\varphi)|_{S_1\cap S_2}=0$ имеем $u_1|_{S_1\cap S_2}=\varphi_1|_{S_1\cap S_2}=$ $=\mu_1|_{S_1\cap S_2}=0$.

Будем искать решение задачи (16)–(18) в классе обобщенных решений уравнения (16) класса $C(\overline{D})$. Тогда в силу леммы 2 краевое условие (18), когда $P=(x_1,t/\sqrt{2},t/\sqrt{2})\in S_1$, т.е. $J(P)=(x_1,0,\sqrt{2}t)$, с учетом (17), (37) и интегрального равенства (22) в соответствии с замечанием 4 запишется в виде уравнения

$$\psi(x_1,t)-\int\limits_{S^1_{J_+(P)}} B(x_1,t;y_1,y_2')\psi(y_1,y_2')\,dy_1\,dy_2'=f(x_1,t) \tag{38}$$

относительно неизвестной функции $\psi(x_1,t):=u|_{S^1_{J_+(P)}}=u(x_1,t/\sqrt{2},t/\sqrt{2})$. Здесь в силу (26), (37)

$$f(x_1,t):=2\int\limits_{S^2_{J_+(P)}}\varphi\frac{\partial E(r,\sqrt{2}t,\tau)}{\partial N}\,ds-\mu(x_1,t),\quad f|_{S_1\cap S_2}=0, \tag{39}$$

$$\begin{gathered}2\sqrt{2}\pi B(x_1,t;y_1,y_2'):=-4\sqrt{2}\pi(\partial E(r,\sqrt{2}t,\tau)/\partial N)|_{S^1_{J_+(P)}}=\\
=-2((\sqrt{2}t-\tau)^2-(x_1-y_1)^2-\tau^2)^{-1/2}|_{\tau=y_2'/\sqrt{2}}-\\
-2\tau(\sqrt{2}t-\tau)[(x_1-y_1)^2+\tau^2]^{-1}((\sqrt{2}t-\tau)^2-(x_1-y_1)^2-\tau^2)^{-1/2}|_{\tau=y_2'/\sqrt{2}}=\\
=2(2t[t-y_2'-(2t)^{-1}(x_1-y_1)^2])^{-1/2}-\\
-y_2'(2t-y_2')[(x_1-y_1)^2+y_2'^2/2]^{-1}(2t[t-y_2'-(2t)^{-1}(x_1-y_1)^2])^{-1/2}.\end{gathered} \tag{40}$$

Для оценки интегрального члена в левой части уравнения (38) воспользуемся следующими соображениями. При преобразовании $y_1=x_1+tz_1$, $y_2'=tz_2$ область $S^1_{J+(P)}$ перейдет в область $\Omega_3:\ -\sqrt{2}\le z_1\le\sqrt{2}$, $0\le z_2\le-(1/2)z_1^2+1$ плоскости переменных z_1, z_2. В свою очередь область Ω_3 при преобразовании $z_1=\sigma$, $z_2=-(2\tau)^{-1}\sigma^2+\tau$ перейдет в треугольник $\widetilde{\Omega}_3:\ 0\le\tau\le1$, $-\sqrt{2}\tau\le\sigma\le\sqrt{2}\tau$ плоскости переменных σ, τ (парабола $z_2=-(2\tau_0)^{-1}z_1^2+\tau_0$ при фиксированном $\tau_0\in(0,1]$ переходит в отрезок $\tau=\tau_0$, $-\sqrt{2}\tau_0\le\sigma\le\sqrt{2}\tau_0$). При этом легко видеть, что

$$\partial(y_1,y_2')/\partial(z_1,z_2)=t^2,\quad (z_1,z_2)\in\Omega_3, \tag{41}$$

$$1\le\partial(z_1,z_2)/\partial(\sigma,\tau)=1+\sigma^2/(2\tau^2)\le2,\quad \sigma^2/(2\tau^2)\le1,\quad (\sigma,\tau)\in\widetilde{\Omega}_3. \tag{42}$$

В плоскости переменных z_1, z_2 введем в рассмотрение области $\Omega_4:\ -\sqrt{2}/4\le z_1\le\sqrt{2}/4$, $0\le z_2\le-2z_1^2+1/4$ и $\Omega_5:\ z_1^2+z_2^2\le1/4$, $z_2\ge0$. Легко проверить, что $\Omega_4\subset\Omega_5\subset\Omega_3$ и тем самым $\Omega_3\setminus\Omega_5\subset\Omega_3\setminus\Omega_4$, поскольку $\sqrt{1/4-z_1^2}\le1/2<7/8=-(1/2)(1/2)^2+1\le-(1/2)z_1^2+1$ при $|z_1|\le1/2$, $-2z_1^2+1/4\le1/4<1/(2\sqrt{2})=\sqrt{1/4-2(1/4)^2}\le\sqrt{1/4-z_1^2}$ при $|z_1|\le\sqrt{2}/4$. При этом с учетом (42) имеют место неравенства

$$(1+\sigma^2/(2\tau))^{-1/2}\partial(z_1,z_2)/\partial(\sigma,\tau)\le2,\quad (\sigma,\tau)\in\widetilde{\Omega}_3,$$

$$1-z_2-(1/2)z_1^2\ge1-1/2-(1/2)(1/4)=3/8,\quad (z_1,z_2)\in\Omega_5,$$

$$\frac{z_2(2-z_2)}{[z_1^2+z_2^2/2]}\le\frac{2z_2}{z_1^2+z_2^2}(2-z_2)\le2\frac{2-z_2}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}\le\frac{4}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}},\quad (z_1,z_2)\in\Omega_5,$$

$$\frac{z_2(2-z_2)}{[z_1^2+z_2^2/2](2(1-z_2-z_1^2/2))^{1/2}}\le\frac{4}{(2(3/8))^{1/2}(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}=\frac{8}{3^{1/2}(z_1^2+z_2^2)^{1/2}},\quad (z_1,z_2)\in\Omega_5,$$

$$\frac{z_2(2-z_2)}{z_1^2+z_2^2/2} \le 2\,\frac{z_2(2-z_2)}{z_1^2+z_2^2} \le 2\,\frac{(1/2)\cdot 2}{1/4} = 8, \quad (z_1,z_2)\in\Omega_3\setminus\Omega_5.$$

Поэтому в силу (40)–(42) будем иметь

$$\int\limits_{S^1_{J_+(P)}} |B(x_1,t;y_1,y_2')|\,dy_1\,dy_2' = \int\limits_{\Omega_3} |B(x_1,t;x_1+tz_1,tz_2)|t^2\,dz_1\,dz_2 =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_3}\frac{1}{(2(1-z_2^2-z_1^2/2))^{1/2}}\,dz_1\,dz_2 + \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_3}\frac{z_2(2-z_2)}{[z_1^2+z_2^2/2](2(1-z_2-z_1^2/2))^{1/2}}\,dz_1\,dz_2 =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{-\sqrt{2}\tau}^{\sqrt{2}\tau}\frac{1}{(2(1-\tau)(1+\sigma^2/(2\tau)))^{1/2}}\,\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(\sigma,\tau)}\,d\sigma +$$

$$+ \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_5}\frac{z_2(2-z_2)}{[z_1^2+z_2^2/2](2(1-z_2-z_1^2/2))^{1/2}}\,dz_1\,dz_2 +$$

$$+ \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_3\setminus\Omega_5}\frac{z_2(2-z_2)}{[z_1^2+z_2^2/2](2(1-z_2-z_1^2/2))^{1/2}}\,dz_1\,dz_2 \le$$

$$\le \frac{t}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{-\sqrt{2}\tau}^{\sqrt{2}\tau}\frac{2}{(2(1-\tau))^{1/2}}\,d\sigma + \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\,\frac{8}{\sqrt{3}}\int\limits_{\Omega_5}\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_3\setminus\Omega_5}\frac{8}{(2(1-z_2-z_1^2/2))^{1/2}}\,dz_1\,dz_2 \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,t\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{-1/2}\,d\tau + \frac{4t}{\sqrt{6}\pi}\int\limits_0^{1/2} dr\int\limits_0^{\pi}\frac{r}{r}\,d\theta + \frac{t}{2\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\Omega_3\setminus\Omega_4} 8(2(1-z_2-z_1^2/2))^{-1/2}\,dz_1\,dz_2 \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,t\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{-1/2}\,d\tau + \frac{4t}{\sqrt{6}\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2t}{\pi}\int\limits_{1/4}^1 d\tau\int\limits_{-\sqrt{2}\tau}^{\sqrt{2}\tau}((1-\tau)(1+\sigma^2/(2\tau)))^{-1/2}\,\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(\sigma,\tau)}\,d\sigma \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,t\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{-1/2}\,d\tau + \frac{2t}{\sqrt{6}} + \frac{2t}{\pi}\int\limits_{1/4}^1 4\sqrt{2}\tau(1-\tau)^{-1/2}\,d\tau \le$$

$$\le \frac{10\sqrt{2}}{\pi}\,t\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{-1/2}\,d\tau + \frac{2}{\sqrt{6}}\,t \le \left(\frac{20\sqrt{2}}{\pi}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)t. \tag{43}$$

Замечание 7. Поскольку функция $B(x_1,t;y_1,y_2')$ имеет слабые особенности, то оператор K, действующий по формуле

$$(K\psi)(x_1,t) := \int\limits_{S^1_{J_+(P)}} B(x_1,t;y_1,y_2')\psi(y_1,y_2')\,dy_1\,dy_2', \tag{44}$$

как легко проверить, является линейным непрерывным оператором из банахова пространства $C(\Sigma_\delta)$ непрерывных ограниченных функций, определенных в замкнутой полосе $\Sigma_\delta = \{(y_1, y_2') \in R^2 : \ -\infty < y_1 < \infty, \ 0 \le y_2' \le \delta\}$ в себя, причем в силу (44) для его нормы имеет место оценка

$$\|K\|_{C(\Sigma_\delta)\to C(\Sigma_\delta)} \le c\delta, \quad c = 20\sqrt{2}/\pi + 2/\sqrt{6}. \tag{45}$$

При $0 < \tau < t$, $0 < \tau < \delta$, $P = (x_1, t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}) \in S_1$ введем множества $\Omega_{P,\tau} = \{(y_1, y_2') \in S^1_{J+(P)} : \ y_2' \ge \tau\}$, $\Sigma_{\delta,\tau} = \{(y_1, y_2') \in \Sigma_\delta : \ y_2' \ge \tau\}$.

Замечание 8. Дословно аналогично можно показать, что оператор K_τ, действующий по формуле

$$(K_\tau\psi)(x_1, t) := \int\limits_{\Omega_{P,\tau}} B(x_1, t; y_1, y_2')\psi(y_1, y_2')\, dy_1\, dy_2' \tag{46}$$

является линейным непрерывным оператором, действующим из пространства $C(\Sigma_{\delta,\tau})$ непрерывных ограниченных функций с областью определения $\Sigma_{\delta,\tau}$ в себя, для нормы которого справедлива оценка

$$\|K_\tau\|_{C(\Sigma_{\delta,\tau})\to C(\Sigma_{\delta,\tau})} \le c_1(\delta - \tau), \tag{47}$$

где положительная постоянная c_1 $(c_1 \ge c)$ не зависит от δ и τ.

Лемма 3. *В классе $C(\Sigma_\delta)$ уравнение (38) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Действительно, пусть $\psi(x_1, t) \in C(\Sigma_\delta)$ – решение соответствующего (38) однородного уравнения, т.е. с учетом (44)

$$\psi(x_1, t) - (K\psi)(x_1, t) = 0, \quad (x_1, t) \in \Sigma_\delta. \tag{48}$$

Отсюда и из (45) непосредственно следует, что при $\delta < c^{-1}$ решение $\psi(x_1, t)$ уравнения (48) тождественно равно нулю в Σ_δ.

Пусть теперь $\delta \ge c^{-1}$. Тогда найдется такое натуральное число k, что $\delta/k < c_1^{-1}$. В силу сказанного выше решение $\psi(x_1, t)$ уравнения (48) равно нулю тождественно в полосе $\Sigma_{\delta/k}$. Поэтому это уравнение в полосе $\Sigma_{2\delta/k,\delta/k}$ с учетом структуры множества $S^1_{J+(P)}$ и (46) можно переписать в виде $\psi(x_1, t) - (K_{\delta/k}\psi)(x_1, t) = 0$, $(x_1, t) \in \Sigma_{2\delta/k,\delta/k}$, откуда теперь уже в силу (47) получаем, что $\psi(x_1, t) = 0$, $(x_1, t) \in \Sigma_{2\delta/k,\delta/k}$.

Продолжая этот процесс, мы последовательно шаг за шагом получаем, что решение $\psi(x_1, t)$ уравнения (48) равно нулю в каждой из полос $\Sigma_{\delta/k}, \Sigma_{2\delta/k,\delta/k}, \ldots, \Sigma_{i\delta/k,((i-1)/k)\delta}, \ldots, \Sigma_{\delta,((k-1)/k)\delta}$, т.е. $\psi(x_1, t)$ равно нулю во всей полосе Σ_δ. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого $f \in C(\Sigma_\delta)$ уравнение (38) однозначно разрешимо в классе $C(\Sigma_\delta)$. При этом если $f(y_1, 0) = 0$, $-\infty < y_1 < +\infty$, то и $\psi(y_1, 0) = 0$, $-\infty < y_1 < +\infty$.*

Доказательство. Действительно, в силу оценки (44), согласно принципу сжатых отображений, уравнение (38) однозначно разрешимо в пространстве $C(\Sigma_{\delta/k})$, где натуральное число k выбрано так, чтобы $\delta/k < c_1^{-1} \le c^{-1}$. При этом решение ψ уравнения (38) в полосе $\Sigma_{\delta/k}$ представимо в виде $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} K^i f$.

Обозначив это решение в полосе $\Sigma_{\delta/k}$ через $\psi_0 \in C(\Sigma_{\delta/k})$, для определения решения уравнения (38) в полосе $\Sigma_{2\delta/k,\delta/k}$ получим уравнение

$$\psi(x_1, t) - (K_{\delta/k})(x_1, t) = f(x_1, t) + \int\limits_{S^1_{J+(P)}\setminus\Omega_{P,\delta/k}} B(x_1, t; y_1, y_2')\psi_0(y_1, y_2')\, dy_1\, dy_2',$$

которое в силу оценки (47) также однозначно разрешимо в пространстве $C(\Sigma_{2\delta/k,\delta/k})$. При этом данное решение будет непрерывным продолжением решения ψ_0 из полосы $\Sigma_{\delta/k}$ в полосу $\Sigma_{2\delta/k,\delta/k}$. Продолжая этот процесс последовательно в полосах $\Sigma_{3\delta/k,2\delta/k}, \ldots, \Sigma_{\delta,((k-1)/k)\delta}$, мы таким образом в пространстве $C(\Sigma_\delta)$ построим решение ψ уравнения (38), единственность которого следует из леммы 3. Легко видеть, что если $f(y_1,0)=0$, $-\infty<y_1<+\infty$, то и $\psi(y_1,0)=0$, $-\infty<y_1<+\infty$, в соответствии с замечанием 6. Лемма 4 доказана.

Ниже под $C^k(\Sigma_\delta)$ мы будем подразумевать банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в замкнутой полосе Σ_δ с конечной нормой

$$\|\psi\|_{C^k(\Sigma_\delta)} := \sum_{\alpha_1+\alpha_2\le k}\sup_{(y_1,y_2')\in\Sigma_\delta}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi(y_1,y_2')}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial {y_2'}^{\alpha_2}}\right| < +\infty, \quad k\ge 0.$$

Лемма 5. *При условиях леммы 4, если $f\in C^k(\Sigma_\delta)$, непрерывное ограниченное решение ψ уравнения (38) будет принадлежать пространству $C^k(\Sigma_\delta)$, $k\ge 1$.*

Доказательство. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением случая $k=1$. В силу (40), (41) и (44) имеем

$$(K\psi)(x_1,t) = \int\limits_{S^1_{J_+(P)}} B(x_1,t;y_1,y_2')\psi(y_1,y_2')\,dy_1\,dy_2' =$$

$$= \int\limits_{\Omega_3} B(x_1,t;x_3+tz_1,tz_2)\psi(x_1+tz_1,tz_2)t^2\,dz_1\,dz_2 = t\int\limits_{\Omega_3} G(z_1,z_2)\psi(x_1+tz_1,tz_2)\,dz_1\,dz_2, \tag{49}$$

где $\Omega_3:\ -\sqrt{2}\le z_1\le\sqrt{2}$, $0\le z_2\le -(1/2)z_1^2+1$, $4\pi G(z_1,z_2) := -2(1-z_2-z_1^2/2)^{-1/2} - z_2(2-z_2)[z_1^2+x_2^2/2]^{-1}(1-z_2-z_1^2/2)^{-1/2}$. Из (49) в случае $\psi\in C^1(\Sigma_\delta)$ будем иметь

$$\frac{\partial(K\psi)(x_1,t)}{\partial t} = \int\limits_{\Omega_3} G(z_1,z_2)\psi(x_1+tz_1,tz_2)\,dz_1\,dz_2 + t\int\limits_{\Omega_3} G(z_1,z_2)z_1\frac{\partial\psi(x_1+tz_1,tz_2)}{\partial y_1}\,dz_1\,dz_2 +$$

$$+t\int\limits_{\Omega_3} G(z_1,z_2)z_2\frac{\partial\psi(x_1+tz_1,tz_2)}{\partial y_2'}\,dz_1\,dz_2 = J_1+tJ_2+tJ_3, \tag{50}$$

$$\partial(K\psi)(x_1,t)/\partial x_1 = tJ_2. \tag{51}$$

Сравнивая с (43) и учитывая, что $|z_1|\le\sqrt{2}$, $0\le z_2\le 1$, когда $(z_1,z_2)\in\Omega_3$, легко видеть, что

$$J_1, J_2\le c, \quad J_3\le\sqrt{2}c, \quad c=20\sqrt{2}/\pi+2/\sqrt{6}. \tag{52}$$

Согласно (37), (39) и лемме 4,

$$f(y_1,0)=\psi(y_1,0)=0, \quad -\infty<y_1<\infty, \tag{53}$$

и тем самым для $\psi\in C^1(\Sigma_\delta)$ будем иметь

$$\psi(y_1,y_2') = \int\limits_0^{y_2'}\frac{\partial\psi(y_1,\xi)}{\partial y_2'}\,d\xi,$$

$$|\psi(y_1,y_2')|\le y_2'\|\partial\psi/\partial y_2'\|_{C(\Sigma_{y_2'})}, \quad |\psi(x_1+tz_1,tz_2)|\le t\|\partial\psi/\partial y_2'\|_{C(\Sigma_t)}. \tag{54}$$

Из (50)–(54) находим, что

$$|(K\psi)(x_1,t)| + |\partial(K\psi)(x_1,t)/\partial t| + |\partial(K\psi)(x_1,t)/\partial x_1| \le$$

$$\le [t\|\psi\|_{C(\Sigma_t)} + t\|\partial\psi/\partial y_2'\|_{C(\Sigma_t)} + \sqrt{2}t\|\partial\psi/\partial y_1\|_{C(\Sigma_t)} + t\|\partial\psi/\partial y_2'\|_{C(\Sigma_t)} +$$

$$+t\|\partial\psi/\partial y_1\|_{C(\Sigma_t)}]\int\limits_{\Omega_3}|G(z_1,z_2)|\,dz_1\,dz_2\le$$

$$\le 3ct[\,\|\psi\|_{C(\Sigma_t)}+\|\partial\psi/\partial y_1\|_{C(\Sigma_t)}+\|\partial\psi/\partial y_2'\|_{C(\Sigma_t)}]=3ct\|\psi\|_{C^1(\Sigma_t)},\quad (x_1,t)\in\Sigma_\delta. \tag{55}$$

В силу (55) для нормы оператора $K: C^1(\Sigma_\delta)\to C^1(\Sigma_\delta)$ имеет место оценка

$$\|K\|_{C^1(\Sigma_\delta)\to C^1(\Sigma_\delta)}\le 3c\delta,$$

из которой следует справедливость леммы 5 при $\delta<1/(3c)$. Если $\delta\ge 1/(3c)$, то следует воспользоваться рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве лемм 3 и 4. Случай $k>1$ рассматривается аналогично. Этим доказательство леммы 5 завершено.

Пусть $D_\tau:=\{(x_1,x_2,t)\in D:\ t<\tau\}$, $\tau=\mathrm{const}>0$. Ниже под $C^k(\overline{D})$ будем подразумевать пространство k раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}$ функций, для которых при каждом $\tau>0$ конечна следующая норма:

$$\|u\|_{C^k(\overline{D}_\tau)}:=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{(x,t)\in\overline{D}_\tau}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial t^{\alpha_3}}\right|<\infty,$$

где $x=(x_1,x_2)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. При $k=0$ вместо $C^0(\overline{D})$ будем писать $C(\overline{D})$.

В соответствии с замечанием 4, если y_1, y_2' – прямоугольные координаты на S_1, полагаем $S_{1\tau}:=\{(y_1,y_2')\in S_1:\ y_2'\le\tau\}$, $\tau=\mathrm{const}>0$. Обозначим через $C^k(S_1)$ пространство k раз непрерывно дифференцируемых в S_1 функций, для которых при каждом $\tau>0$ конечна норма

$$\|\psi\|_{C^k(S_{1\tau})}:=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{(y_1,y_2')\in S_{1\tau}}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi(y_1,y_2')}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial {y_2'}^{\alpha_2}}\right|<\infty.$$

При $k=0$ вместо $C^0(S_1)$ будем писать $C(S_1)$. Дословно аналогично вводится пространство $C^k(S_2)$.

Из лемм 2 и 3 непосредственно следует

Лемма 6. *Задача (16)–(18) не может иметь более одного обобщенного решения класса $C(\overline{D})$.*

Для построения обобщенного решения класса $C(\overline{D})$ задачи (16)–(18) от функций φ и μ в краевых условиях (17) и (18) потребуем, чтобы $\varphi\in C^1(S_2)$, $\mu\in C^1(S_1)$, и, как было отмечено выше, без ограничения общности будем считать, что эти функции удовлетворяют равенствам (37). В этом случае $f\in C^1(S_1)$ и, согласно лемме 5, решение ψ уравнения (38) будет принадлежать пространству $C^1(S_1)$ и удовлетворять равенству (53).

Покажем, что функция

$$U_1(x,t):=2\int\limits_{S^1_{x,t}}\psi\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds \tag{56}$$

так же, как и ее производная $\partial U_1/\partial t$, принадлежит пространству $C(\overline{D})$, где поверхности $S^i_{x,t}$, $i=1,2$, $S_{x,t}$ и функция $E(r,t,\tau)$ определены выше (см. равенства (19)–(22)). Действительно, принадлежность $U_1\in C(\overline{D})$ следует из леммы 1. С учетом (53) интегрирование по частям правой части выражения (56) дает

$$U_1(x,t)=-2\int\limits_{S^1_{x,t}}\frac{\partial\psi}{\partial N}\,E(r,t,\tau)\,ds=-2\int\limits_{x_1-\sqrt{t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{t^2-x_2^2}}dy_1\int\limits_0^{\sigma(x,y_1,t)}\frac{\partial\psi}{\partial N}\,E(r,t,\tau)\,dy_2', \tag{57}$$

где $\sigma(x,y_1,t) := [-(y_1-x_1)^2/(t-x_2)+t+x_2]/\sqrt{2}$. Обозначим через $\gamma^1_{x,t}$ часть параболы $y'_2-\sigma(x,y_1,t)=0$, расположенной на $S^1_{x,t}$. В силу того что $\sigma(x,y_1,t)=0$ при $y_1=x_1\pm\sqrt{t^2-x_2^2}$ и $E(r,t,\tau)|_{\gamma^1_{x,t}}=0$, из (57) следует, что $\partial U_1/\partial t = -2\int_{S^1_{x,t}}(\partial\psi/\partial N)(\partial E(r,t,\tau)/\partial t)\,ds = 2(T_0\,\partial\psi/\partial N)(x,t)$, где T_0 – оператор из леммы 1. Поэтому в силу леммы 1 функция $\partial U_1/\partial t\in C(\overline{D})$ и, согласно равенствам (25) и (53), будем иметь

$$\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}=\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{\partial\psi(x_1,y'_2)}{\partial N}\,dy'_2=\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{\partial\psi(x_1,y'_2)}{\partial y'_2}\,dy'_2=\psi(x_1,\sqrt{2}t),\quad (x,t)\in S_1,$$

$$\partial U_1(x,t)/\partial t=0,\quad (x,t)\in S_2. \tag{58}$$

Аналогично с учетом замечания 5 функция

$$U_2(x,t):=2\int\limits_{S^2_{x,t}}\varphi\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds \tag{59}$$

и ее производная $\partial U_2/\partial t$ принадлежит пространству $C(\overline{D})$, причем

$$\partial U_2(x,t)/\partial t=\varphi(x_1,\sqrt{2}t),\quad (x,t)\in S_2;\quad \partial U_2(x,t)/\partial t=0,\quad (x,t)\in S_1. \tag{60}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$u(x,t):=(\partial/\partial t)(U_1(x,t)+U_2(x,t)), \tag{61}$$

которая в силу сказанного выше принадлежит пространству $C(\overline{D})$. В силу (58)–(61) и замечания 4 имеем

$$u|_{S_1}=\psi,\quad u|_{S_2}=\varphi, \tag{62}$$

$$\int\limits_{x_2}^{t}u(x_1,x_2,\tau)\,d\tau=2\int\limits_{S^1_{x,t}}\psi\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds+2\int\limits_{S^2_{x,t}}\varphi\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds=2\int\limits_{S_{x,t}}u\,\frac{\partial E(r,t,\tau)}{\partial N}\,ds. \tag{63}$$

Из (37), (63) и леммы 2 следует, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (61), является обобщенным решением уравнения (16) класса $C(\overline{D})$, а из равенств (38) и (62) вытекает, что эта функция удовлетворяет условиям (17) и (18). Следовательно, построенная по формуле (61) функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (16)–(18) класса $C(D)$. Таким образом, с учетом леммы 6 и замечания 6 имеет место следующая

Теорема 2. *Для любых $\mu\in C^1(S_1)$ и $\varphi\in C^1(S_2)$ задача (16)–(18) имеет единственное обобщенное решение класса $C(\overline{D})$.*

Замечание 9. Опираясь на лемму 5, можно показать, что если $\varphi\in C^{k+1}(S_2)$ и $\mu\in C^{k+1}(S_1)$, $k\geq 1$, то решение задачи (16)–(18), существование которого утверждается в теореме 2, будет принадлежать классу $C^k(\overline{D})$ и тем самым при $k\geq 2$ будет классическим решением.

Работа поддержана INTAS (грант 00136).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 17–19.
3. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 521–524.
4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 139–156.
5. *Skubachevskii A.L.* // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 327–360.
6. *Панеях Б.П.* // Мат. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 425–434.
7. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
8. *Умаров С.Р.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 375–382.
9. *Рао C.V.* // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195. № 3. P. 702–718.
10. *Bouziani A.* // Hiroshima Math. J. 1997. V. 27. № 3. P. 373–390.
11. *Dshuraev J.O., Takhirov Zh.O.* // Georgian Math. J. 1999. V. 6. № 5. P. 421–428.
12. *Gordeziani D., Gordeziani N., Avalishvili G.* // Bull. Georgian Acad. Sci. 1998. V. 157. № 3. P. 365–368.
13. *Gordeziani D., Gordeziani N., Avalishvili G.* // Rep. of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. 1997. V. 12. № 3. P. 18–20.
14. *Avalishvili G., Gordeziani D.* // Georgian Math. J. 2000. V. 7. № 3. P. 417–425.
15. *Мельник З.О., Кирилич В.М.* // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 722–727.
16. *Мельник З.О.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 2. С. 246–253.
17. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
18. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
19. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
20. *Kharibegashvili S.* // Mem. Diff. Equations and Math. Phys. 1995. V. 4. P. 1–127.

Математический институт им. А.М. Размадзе
АН Грузии, г. Тбилиси

Поступила в редакцию
08.01.2002 г.