С. С. Харибегашвили, Многомерный вариант задачи Дарбу для одного модельного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 4, 565–573

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 4, с. 565–573

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.956.226

МНОГОМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2004 г. С. С. Харибегашвили

1. Введение. В пространстве переменных x_1, x_2, x_3, t рассмотрим вырождающееся гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{x_1x_1} - x_3^m u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = F, \tag{1}$$

где F – заданная, а u – искомая действительная функции, m – натуральное число. Уравнение (1) параболически вырождается при $x_3 = 0$ и является строго гиперболическим, когда $x_3 > 0$. При $x_3 < 0$ в случае нечетного m уравнение (1) является ультрагиперболическим и строго гиперболическим, когда m – четное число.

Ниже для уравнения (1) при $m = 1$ будут построены характеристические коноиды K_O и K_A с вершинами в точках $O(0,0,0,0)$ и $A(0,0,0,t_0)$, $t_0 > 0$, соответственно, и рассмотрена краевая задача, носителями данных в которой являются часть гиперплоскости $x_3 = 0$ и части коноидов K_O и K_A, заключенных в полуслое $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ 0 \le t \le t_0,\ x_3 \ge 0\}$. Отметим, что уже при $m = 2$ характеристический коноид K_O уравнения (1) имеет достаточно сложную геометрическую структуру, что в определенной степени затрудняет саму постановку краевой задачи. Интересно также отметить, что для уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_2} - u_{x_2x_2} - x_3u_{x_3x_3} = F$$

характеристический коноид K_O вырождается в двумерное коническое многообразие $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ t^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0,\ x_3 = 0\}$. В случае уравнения

$$x_3^m u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = F$$

при $m = 1$ характеристический коноид K_O состоит из одной единственной бихарактеристической кривой $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ x_1 = x_2 = 0,\ t^2 = (4/9)x_3^3,\ x_3 > 0\}$, а при $m = 2$ коноид K_O вырождается в одну точку $O(0,0,0,0)$.

Отметим, что для уравнений с волновым оператором в главной части задачи типа Дарбу рассмотрены в работах [1–10]. Другие многомерные варианты этой задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка исследованы в работах [11–13].

2. Постановка задачи. Обозначим через K_O^+ и K_A^- части характеристических коноидов K_O и K_A с вершинами в точках $O(0,0,0,0)$ и $A(0,0,0,t_0)$, заключенных соответственно в двугранных углах $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ x_3 \ge 0,\ t \ge 0\}$ и $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ x_3 \ge 0,\ t \le t_0\}$. Пусть D – область, расположенная в полуслое $\{(x_1,x_2,x_3,t) \in R^4 :\ 0 \le t \le t_0,\ x_3 \ge 0\}$, ограниченная гиперплоскостью $x_3 = 0$ и характеристическими гиперповерхностями K_O^+ и K_A^+ уравнения (1). Положим $S_0 = \partial D \cap \{x_3 = 0\}$, $S_1 = \partial D \cap K_0^+$, $S_2 = \partial D \cap K_A^-$.

Для уравнения (1) рассмотрим многомерный вариант задачи Дарбу в следующей постановке: в области D требуется найти решение u уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{S_0 \cup S_1} = 0. \tag{2}$$

Отметим, что оператор L из (1) является формально самосопряженным, т.е. $L^* = L$. Аналогично ставится задача для уравнения (1) в области D по краевому условию

$$u|_{S_0 \cup S_2} = 0. \tag{3}$$

Обозначим через E и E^* классы функций из пространства $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющие соответственно краевому условию (2) или (3). Пусть W_+ (W_+^*) – гильбертово пространство с весом, полученное замыканием пространства E (E^*) по норме

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_D [u^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 + u_t^2]\, dD.$$

Пусть W_- (W_-^*) – пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(D)$ и W_+ (W_-^*) [14, с. 46].

Определение. Если $F \in L_2(D)$ (W_-^*), то функцию u назовем сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса W_+ (L_2), если $u \in W_+$ $(L_2(D))$ и существует последовательность функций $u_n \in E$ такая, что $u_n \to u$ в пространстве W_+ $(L_2(D))$ и $Lu_n \to F$ в пространстве W_-^* (W_-^*).

3. Построение характеристических коноидов K_O и K_A уравнения (1). Система обыкновенных дифференциальных уравнений бихарактеристической полосы [15, с. 577] $\dot{x}_i = p_{\xi_i}$, $\dot{\xi}_i = -p_{x_i}$, $i = \overline{1,n}$, для уравнения (1), т.е. при $p = \xi_4^2 - \xi_1^2 - x_3\xi_2^2 - \xi_3^2$, $x_4 = t$, $n = 4$, имеет вид

$$\dot{x}_1 = -2\xi_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_3\xi_2, \quad \dot{x}_3 = -2\xi_3, \quad \dot{x}_4 = 2\xi_4, \tag{4}$$

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = 0, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_2^2, \quad \dot{\xi}_4 = 0, \tag{5}$$

где $\dot{x}_i$ $(\dot{\xi}_i)$ означает обыкновенную производную функции $x = x_i(\tau)$ $(\xi_i = \xi_i(\tau))$ по параметру τ. Для построения характеристического коноида K_O начальные условия для $x_i = x_i(\tau)$ и $\xi_i = \xi_i(\tau)$, $1 \le i \le 4$, при $\tau = 0$ должны быть следующими:

$$x_i(0) = 0, \quad 1 \le i \le 4; \quad \xi_1(0) = \alpha, \quad \xi_2(0) = \beta, \quad \xi_3(0) = \gamma, \quad \xi_4(0) = \delta. \tag{6}$$

При этом, поскольку нас интересуют нулевые бихарактеристические полосы, т.е. полосы, вдоль которых первый интеграл $p = p(x, \xi)$ системы (4), (5) обращается в нуль, действительные параметры α, β, γ и δ из (6) с учетом того, что $x_3(0) = 0$, должны быть подчинены равенству

$$\delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

или

$$\delta = \pm\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}. \tag{7}$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (4), (5), с учетом начальных условий (6) получим

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = \beta, \quad \xi_3 = \gamma + \beta^2\tau, \quad \xi_4 = \delta, \quad \tau \ge 0, \tag{8}$$

$$x_1 = -2\alpha\tau, \quad x_2 = 2\gamma\beta\tau^2 + \frac{2}{3}\beta^3\tau^3, \quad x_3 = -2\gamma\tau - \beta^2\tau^2, \quad x_4 = 2\delta\tau, \quad \tau \ge 0. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) дают параметрическое представление бихарактеристической полосы уравнения (1), удовлетворяющей начальным условиям (6).

В силу (7) и (9) имеем

$$4(\gamma\tau)^2 = x_4^2 - x_1^2, \quad (\beta\tau)^2 = -x_3 - 2\gamma\tau. \tag{10}$$

В случае $\gamma \ge 0$, поскольку $\tau \ge 0$, из (10) получаем

$$2\gamma\tau = (x_4^2 - x_1^2)^{1/2}, \quad \beta\tau = (-x_3 - (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2} \operatorname{sgn}\beta. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что при $\gamma \ge 0$ вдоль бихарактеристической полосы должно быть выполнено условие

$$x_3 + \sqrt{x_4^2 - x_1^2} \le 0. \tag{12}$$

В силу (9) и (11) имеем

$$x_2 = \beta\tau\left[2\gamma\tau + \frac{2}{3}(\beta\tau)^2\right] = (-x_3 - (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2}\left[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} + \frac{2}{3}(-x_3 - (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})\right]\operatorname{sgn}\beta =$$

$$= \frac{1}{3}(-x_3 - (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2}[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} - 2x_3]\operatorname{sgn}\beta. \tag{13}$$

Возводя обе части равенства (13) в квадрат, получим

$$x_2^2 = \frac{1}{9}[-x_3 - (x_4^2 - x_1^2)^{1/2}]\,[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} - 2x_3]^2. \tag{14}$$

Таким образом, все бихарактеристики уравнения (1), выходящие из начала координат $O(0,0,0,0)$, при $\gamma \geq 0$ лежат на характеристической гиперповерхности, которая описывается уравнением (14).

В случае $\gamma \leq 0$ аналогичным образом получаем равенства

$$2\gamma\tau = -(x_4^2 - x_1^2)^{1/2}, \quad \beta\tau = (-x_3 + (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2}\operatorname{sgn}\beta \tag{15}$$

и тем самым

$$x_2 = \beta\tau\left[2\gamma\tau + \frac{2}{3}(\beta\tau)^2\right] = (-x_3 + (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2}\left[-(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} + \frac{2}{3}(-x_3 + (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})\right]\operatorname{sgn}\beta =$$

$$= -\frac{1}{3}(-x_3 + (x_4^2 - x_1^2)^{1/2})^{1/2}[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} + 2x_3]\operatorname{sgn}\beta. \tag{16}$$

Из (15) следует, что все бихарактеристики уравнения (1), выходящие из точки O, при $\gamma \leq 0$ лежат на характеристической гиперповерхности, которая описывается уравнением

$$x_2^2 = \frac{1}{9}[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} - x_3]\,[(x_4^2 - x_1^2)^{1/2} + 2x_3]^2. \tag{17}$$

Очевидно, что равенства (16) и (17) имеют смысл при условии, что $x_4^2 \geq x_1^2 + x_3^2$.

Замечание 1. Согласно рассмотренным выше случаям, характеристический коноид K_O с вершиной в точке O состоит из двух частей K_O^1 и K_O^2, где K_O^1 описывается уравнением (14) и в силу (12) целиком расположен в полупространстве $x_3 \leq 0$, т.е. в замыкании области ультрагиперболичности уравнения (1), а K_O^2 описывается уравнением (17) и расположен в замкнутой области $\{(x_1, x_2, , x_3, t) \in R^4 :\ x_4^2 \geq x_1^2 + x_3^2\}$. Аналогично можно показать, что характеристический коноид K_A с вершиной в точке $A(0,0,0,t_0)$ состоит из двух частей K_A^1 и K_A^2, которые описываются соответственно уравнениями

$$x_2^2 = \frac{1}{9}[-x_3 - ((x_4 - t_0)^2 - x_1^2)^{1/2}]\,[((x_4 - t_0)^2 - x_1^2)^{1/2} - 2x_3]^2,$$

$$x_2^2 = \frac{1}{9}[((x_4 - t_0)^2 - x_1^2)^{1/2} - x_3]\,[((x_4 - t_0)^2 - x_1^2)^{1/2} + 2x_3]^2, \tag{18}$$

где, как и выше, $x_4 = t$.

Теперь покажем, что $K_O^+ = K_O \cap \{(x_1, x_2, x_3, t) \in R^4 :\ x_3 \geq 0,\ t \geq 0\}$ можно представить в виде

$$t = g^+(x_1, x_2, x_3) \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \tag{19}$$

где $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 :\ x_3 > 0\}$.

Действительно, очевидно, что $K_O^+ \subset K_O^2$, и поскольку этому случаю соответствует $\gamma \leq 0$, то в обозначении $z = \beta\tau$ из (9) и (15) будем иметь

$$x_2 = -\sqrt{x_4^2 - x_1^2}\,z + \frac{2}{3}z^3, \quad x_3 = \sqrt{x_4^2 - x_1^2} - z^2,$$

откуда

$$\sqrt{x_4^2 - x_1^2} = x_3 + z^2 \tag{20}$$

и $x_2 = -(x_3 + z^2)z + (2/3)z^3$ или

$$z^3 + 3x_3 z + 3x_2 = 0. \tag{21}$$

Поскольку при $p = 3x_3$, $q = 3x_2$ дискриминант

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot 27x_3^3 - 27 \cdot 9x_2^2 = -27(4x_3^3 + 9x_2^2)$$

кубического уравнения (21) отрицателен при $x_3 \geq 0$, $|x_2| + |x_3| \neq 0$, то, как известно, это уравнение имеет только один действительный корень $z = z_0(x_2, x_3)$ при $x_3 \geq 0$, $|x_2|+|x_3| \neq 0$, который задается формулой Кардано [15, с. 237]

$$z_0(x_2, x_3) = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}x_2 + \sqrt{\frac{9}{4}x_2^2 + x_3^3}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2}x_2 - \sqrt{\frac{9}{4}x_2^2 + x_3^3}}. \tag{22}$$

В силу (20) и (22) с учетом того, что координата $t = x_4$ точек многообразия K_O^+ неотрицательна, получим

$$K_O^+ : \quad t = \sqrt{x_1^2 + (x_3 + z_0^2(x_2, x_3))^2}, \quad x_3 \geq 0. \tag{23}$$

Из (23) следует (19), поскольку в силу (22) $z_0(x_2, x_3) \in C^\infty(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega}_1)$, где $\Omega_1 = \{(x_2, x_3) \in R^2 : \ x_3 > 0\}$.

Аналогично (19) и (23), принимая во внимание (18), многообразие $K_A^- \subset K_A^2$ можно представить в виде

$$K_A^- : \quad t = g^-(x_1, x_2, x_3) \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \tag{24}$$

где $g^-(x_1, x_2, x_3) = t_0 - \sqrt{x_1^2 + (x_3 + z_0^2(x_2, x_3))^2}$, а функция $z_0(x_2, x_3)$ задана равенством (22).

В силу определения области D легко видеть, что

$$S_1 \subset K_O^+, \quad S_2 \subset K_A^-, \quad \partial D = S_0 \cup S_1 \cup S_2. \tag{25}$$

4. Взаимная сопряженность задач (1), (2) и (1), (3). Поскольку класс функций E (E^*), обращающихся в нуль в некоторой (своей для каждой функции) окрестности S_0, также плотен в пространстве W_+ (W_+^*) [16, с. 81], то ниже считаем, что класс E (E^*) обладает этим свойством.

Покажем, что для любого $u \in E$ имеет место неравенство

$$\|Lu\|_{W_-^*} \leq c_1 \|u\|_{W_+}, \tag{26}$$

где положительная постоянная c_1 не зависит от u, $\|\cdot\|_{W_+} = \|\cdot\|_{W_*^+} = \|\cdot\|_1$.

Действительно, пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_0)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D, т.е. $\nu_i = \cos(\widehat{n, x_i})$, $i = 1, 2, 3$, $\nu_0 = \cos(\widehat{n, t})$. Поскольку производная по конормали

$$\frac{\partial}{\partial N} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial t} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \nu_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

соответствующая оператору L, является внутренним дифференциальным оператором на характеристических гиперповерхностях уравнения (1), то в силу (2) для функции $u \in E$ имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{S_1} = 0. \tag{27}$$

С учетом определения негативной нормы и в силу равенств (2), (27) для $u \in E$ и равенства (3) для $v \in E^* \subset W_+^*$ имеем

$$\|Lu\|_{W^*} = \sup_{\widetilde{v} \in W_+^*} \|\widetilde{v}\|_{W_+^*}^{-1} (Lu, \widetilde{v})_{L_2(D)} = \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} (Lu, v)_{L_2(D)} =$$

$$= \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \int\limits_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds + \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \int\limits_D [-u_t v_t + u_{x_1} v_{x_1} + x_3 u_{x_2} v_{x_2} + u_{x_3} v_{x_3}] \, dD =$$

$$= \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \int\limits_D [-u_t v_t + u_{x_1} v_{x_1} + x_3 u_{x_2} v_{x_2} + u_{x_3} v_{x_3}] \, dD. \tag{28}$$

Используя неравенства Коши и Шварца, из (28) получим

$$\|Lu\|_{W^*} \le \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \int\limits_D [(u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2)^{1/2} (v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)^{1/2}] \, dD \le$$

$$\le \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \left[\int\limits_D (u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2) \, dD \right]^{1/2} \left[\int\limits_D (v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2) \, dD \right]^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{v \in E^*} \|v\|_{W_+^*}^{-1} \|u\|_{W_+} \|v\|_{W_+^*} = \|u\|_{W_+},$$

что и доказывает неравенство (26).

Аналогично доказывается, что для любого $v \in E^*$ справедливо неравенство

$$\|L^* u\|_{W_-} \le c_2 \|v\|_{W_+^*} \tag{29}$$

с положительной постоянной c_2, не зависящей от v.

Замечание 2. В силу неравенства (26) ((29)) оператор $L : W_+ \to W_-^*$ $(L^* = L : W_+^* \to W_-)$ с плотной областью определения E (E^*) допускает замыкание, которое является непрерывным оператором из пространства W_+ (W_+^*) в пространство W_-^* (W_-). Оставляя для этого замыкания прежнее обозначение L $(L^* = L)$, отметим, что оно определено на всем гильбертовом пространстве W_+ (W_+^*).

Теперь покажем, что задачи (1), (2) и (1), (3) являются взаимно сопряженными, т.е. имеет место равенство

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad \forall u \in W_+, \quad \forall v \in W_+^*. \tag{30}$$

Действительно, в силу замечания 2 достаточно доказать равенство (30) в случае, когда $u \in E$ и $v \in E^*$. Имеем

$$(Lu, v) = (Lu, v)_{L_2(D)} = \int\limits_{\partial D} \left[v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right] ds + (u, Lv)_{L_2(D)}. \tag{31}$$

Так как для $v \in E^*$ справедливо равенство (3), то аналогично (27) имеем

$$\left. \frac{\partial v}{\partial N} \right|_{S_2} = 0. \tag{32}$$

Из (31) в силу (2), (27), а также равенств (3) и (32) для v непосредственно следует равенство (30).

5. Априорные оценки. Теорема существования и единственности.

Лемма 1. *Для любой функции $u \in W_+$ справедлива оценка*

$$c\|u\|_{L_2(D)} \le \|Lu\|_{W_-^*} \tag{33}$$

с положительной постоянной c, не зависящей от u.

Доказательство. В силу замечания 2 достаточно доказать оценку (33) в случае, когда $u \in E$. В этом случае поскольку функция u обращается в нуль в некоторой окрестности $S_0 \subset \partial D$, то, как легко проверить, функция

$$v(x,t) = \int\limits_t^{g^-(x)} e^{-\lambda\tau} u(x,\tau)\,d\tau, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

где $t = g^-(x)$ в силу (24), (25) представляет собой уравнение характеристической гиперповерхности S_2, принадлежит пространству E^* и справедливы равенства

$$v_t(x,t) = -e^{-\lambda t} u(x,t), \quad u(x,t) = -e^{\lambda t} v_t(x,t). \tag{34}$$

В силу (2), (3), (27), (32) и (34) имеем

$$(Lu, v)_{L_2(D)} = \int\limits_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial N}\,ds + \int\limits_D [-u_t v_t + u_{x_1} v_{x_1} + x_3 u_{x_2} v_{x_2} + u_{x_3} v_{x_3}]\,dD =$$

$$= \int\limits_D [-u_t v_t + u_{x_1} v_{x_1} + x_3 u_{x_2} v_{x_2} + u_{x_3} v_{x_3}]\,dD =$$

$$= \int\limits_D e^{-\lambda t} u_t u\,dD + \int\limits_D e^{\lambda t}[-v_{x_1 t} v_{x_1} - x_3 v_{x_2 t} v_{x_2} - v_{x_3 t} v_{x_3}]\,dD, \tag{35}$$

$$\int\limits_{\partial D} e^{-\lambda t} u_t u\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} e^{-\lambda t} u^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_D e^{-\lambda t}\lambda u^2\,dD =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{-\lambda t} u^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_D e^{\lambda t}\lambda v_t^2\,dD = \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t} v_t^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_D e^{\lambda t}\lambda v_t^2\,dD, \tag{36}$$

$$\int\limits_D e^{\lambda t}[-v_{x_1 t} v_{x_1} - x_3 v_{x_2 t} v_{x_2} - v_{x_3 t} v_{x_3}]\,dD =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_D e^{\lambda t}\lambda[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\,dD. \tag{37}$$

Поскольку $v|_{S_2} = 0$, то градиент $\nabla v = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, v_t)$ пропорционален вектору внешней нормали ν на S_2, т.е. для некоторого α имеем $v_{x_1} = \alpha\nu_1$, $v_{x_2} = \alpha\nu_2$, $v_{x_3} = \alpha\nu_3$, $v_t = \alpha\nu_0$ на S_2. Поэтому, принимая во внимание, что S_2 – характеристическая поверхность, получаем

$$(v_t^2 - v_{x_1}^2 - x_3 v_{x_2}^2 - v_{x_3}^2)|_{S_2} = \alpha^2(\nu_0^2 - \nu_1^2 - x_3\nu_2^2 - \nu_3^2)|_{S_2} = 0. \tag{38}$$

Легко видеть, что

$$\nu_0|_{S_0} = 0, \quad \nu_0|_{S_1\setminus O} < 0, \quad \nu_0|_{S_2\setminus O} > 0. \tag{39}$$

В силу (3), (38), (39) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t} v_t^2 \nu_0\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t} v_t^2 \nu_0\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{S_1} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds \ge$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t} v_t^2 \nu_0\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t}[v_t^2 - v_{x_1}^2 - x_3 v_{x_2}^2 - v_{x_3}^2]\nu_0\,ds = 0. \quad (40)$$

Принимая во внимание (34), (36), (37) и (40), из (35) при фиксированном $\lambda > 0$ получаем

$$(Lu, v)_{L_2(D)} = \frac{1}{2}\int\limits_{S_2} e^{\lambda t} v_t^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{D} e^{\lambda t}\lambda v_t^2\,dD - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} e^{\lambda t}[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\nu_0\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{D} e^{\lambda t}\lambda[v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\,dD \geq \frac{\lambda}{2}\int\limits_{D} e^{\lambda t}[v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2]\,dD \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{2}\Bigg[\int\limits_{D} e^{\lambda t} v_t^2\,dD\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_{D} e^{\lambda t}(v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)\,dD\Bigg]^{1/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\Bigg[\int\limits_{D} e^{-\lambda t} u^2\,dD\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_{D} e^{\lambda t}(v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)\,dD\Bigg]^{1/2} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t_0/2}\Bigg[\int\limits_{D} u^2\,dD\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_{D} (v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)\,dD\Bigg]^{1/2}, \quad (41)$$

так как $t|_D \geq 0$ и $e^{-\lambda t_0/2} = (\inf\limits_{D} e^{-\lambda t})^{1/2} > 0$.

Поскольку $v|_{S_2} = 0$ $(u|_{S_1} = 0)$, то, используя стандартные рассуждения, легко доказать справедливость следующего неравенства:

$$\int\limits_{D} v^2\,dD \leq c_0 \int\limits_{D} v_t^2\,dD \qquad \Bigg(\int\limits_{D} u^2\,dD \leq c_0 \int\limits_{D} u_t^2\,dD\Bigg)$$

для некоторого $c_0 = \mathrm{const} > 0$, не зависящего от $v \in E^*$ $(u \in E)$. Отсюда следует, что в пространстве W_+ (W_+^*) норма

$$\|v\|^2_{W_+\ (W_+^*)} = \int\limits_{D} (v^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2 + v_t^2)\,dD$$

эквивалентна следующей норме:

$$\|v\|^2 = \int\limits_{D} (v_t^2 + v_{x_1}^2 + x_3 v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)\,dD. \quad (42)$$

Поэтому, оставляя для нормы (42) прежнее обозначение $\|v\|_{W_+\ (W_+^*)}$, из (41) будем иметь

$$(Lu, v)_{L_2(D)} \geq \mu\|u\|_{L_2(D)}\|v\|_{W_+^*}, \quad (43)$$

где $\mu = (\lambda/2)e^{-\lambda t_0/2}$. Легко проверить, что $\sup\limits_{\lambda>0}\mu(\lambda) = \mu(2/t_0) = (et_0)^{-1}$.

Применяя обобщенное неравенство Шварца $(Lu, v) \leq \|Lu\|_{W_-^*}\|v\|_{W_+^*}$ к левой части неравенства (43), после сокращения на $\|v\|_{W_+^*}$ получим оценку (33), в которой $c = \mu > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой функции* $v \in W_+^*$ *имеет место оценка*

$$c\|v\|_{L_2(D)} \leq \|Lv\|_{W_-} \quad (44)$$

с положительной постоянной c, *не зависящей от* v.

Доказательство. Так же, как и в случае леммы 1, в силу замечания 2 достаточно доказать справедливость неравенства (44) для $v \in E^*$. Пусть $v \in E^*$, введем в рассмотрение функцию $u(x,t) = \int_{g^+(x)}^t e^{\lambda\tau} v(x,\tau)\,d\tau$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$, где $t = g^+(x)$ в силу (19), (25) представляет собой уравнение характеристической гиперповерхности S_1. Функция $u(x,t)$ принадлежит пространству E и имеют место равенства

$$u_t(x,t) = e^{\lambda t} v(x,t), \quad v(x,t) = e^{-\lambda t} u_t(x,t). \tag{45}$$

В силу (2), (3), (27), (32) и (45) аналогично (35)–(40) имеем

$$(Lv,u)_{L_2(D)} = -\int_D e^{\lambda t} v_t v\,dD + \int_D e^{-\lambda t}[u_{x_1t}u_{x_1} + x_3 u_{x_2t}u_{x_2} + u_{x_3t}u_{x_3}]\,dD, \tag{46}$$

$$-\int_D e^{\lambda t} v_t v\,dD = -\frac{1}{2}\int_{\partial D} e^{\lambda t} v^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_D e^{\lambda t}\lambda v^2\,dD =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S_1} e^{\lambda t} v^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_D e^{-\lambda t}\lambda u_t^2\,dD = -\frac{1}{2}\int_{S_1} e^{-\lambda t} u_t^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_D e^{-\lambda t}\lambda u_t^2\,dD, \tag{47}$$

$$\int_D e^{-\lambda t}[u_{x_1t}u_{x_1} + x_3 u_{x_2t}u_{x_2} + u_{x_3t}u_{x_3}]\,dD =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial D} e^{-\lambda t}[u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_D e^{-\lambda t}\lambda[u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\,dD, \tag{48}$$

$$(u_t^2 - u_{x_1}^2 - x_3 u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2)|_{S_1} = 0, \tag{49}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S_1} e^{-\lambda t} u_t^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_{\partial D} e^{-\lambda t}[u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\nu_0\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S_1} e^{-\lambda t} u_t^2 \nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_{S_1} e^{-\lambda t}[u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\nu_0\,ds + \frac{1}{2}\int_{S_2} e^{-\lambda t}[u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\nu_0\,ds \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\int_{S_1} e^{-\lambda t}[u_t^2 - u_{x_1}^2 - x_3 u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2]\nu_0\,ds = 0. \tag{50}$$

В силу (45), (47)–(50) из (46) следует, что

$$(Lv,u)_{L_2(D)} \geq \frac{\lambda}{2}\int_D e^{-\lambda t}[u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2]\,dD \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{2}\Big[\int_D e^{-\lambda t} u_t^2\,dD\Big]^{1/2}\Big[\int_D e^{-\lambda t}(u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2)\,dD\Big]^{1/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\Big[\int_D e^{\lambda t} v^2\,dD\Big]^{1/2}\Big[\int_D e^{-\lambda t}(u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2)\,dD\Big]^{1/2} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t_0/2}\Big[\int_D v^2\,dD\Big]^{1/2}\Big[\int_D (u_t^2 + u_{x_1}^2 + x_3 u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2)\,dD\Big]^{1/2}.$$

Отсюда так же, как и при получении неравенства (33) из (41) в лемме 1, приходим к неравенству (44). Лемма доказана.

Согласно результатам работы [17, с. 184–186], следствием неравенств (26) и (29), равенства (30) и лемм 1, 2 является

Теорема. *Для любой* $F \in L_2(D)$ (W_-^*) *существует единственное сильное обобщенное решение и задачи (1), (2) класса* W_+ (L_2), *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_2(D)} \le c_0 \|F\|_{W_-^*}$$

с положительной постоянной c_0, *не зависящей от* F.

Данная работа поддержана INTAS (проект 00136).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 5. С. 1017–1019.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
3. *Соболев С.Л.* // Мат. сб. 1942. Т. 11 (53). № 3. С. 155–200.
4. *Нахушев А.М.* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 5. С. 31–34.
5. *Базарбеков А.Б.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 12. С. 2075–2085.
6. *Rassias J.M.* // Bull. Acad. Pol. Sci. Math. 1980. V. 28. № 11–12. P. 569–571.
7. *Мишнаевский П.А., Рамм А.Г.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 5. С. 19–22.
8. *Kharibegashvili S.* // Georgian Math. J. 1995. V. 2. № 3. P. 299–331.
9. *Kharibegashvili S.* // Georgian Math. J. 1995. V. 2. № 4. P. 385–394.
10. *Kharibegashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1995. V. 4. P. 1–127.
11. *Kharibegashvili S.* // Georgian Math. J. 1997. V. 4. № 4. P. 341–354.
12. *Kharibegashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 11. P. 89–103.
13. *Gvazava J., Kharibegashvili S.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1997. V. 12. P. 68–75.
14. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
15. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 1968.
16. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge, 2000.
17. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев, 1979.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
26.02.2003 г.