С. С. Харибегашвили, Об отсутствии глобальных решений характеристической задачи Коши для одного нелинейного волнового уравнения в конической области, *Дифференц. уравнения*, 2006, том 42, номер 2, 261–271

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 2, с. 261–271

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

ОБ ОТСУТСТВИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2006 г. С. С. Харибегашвили

1. Постановка задачи. Для нелинейного волнового уравнения

$$\square u := u_{tt} - \Delta u = \lambda |u|^\alpha + F, \tag{1}$$

где λ и α – заданные положительные постоянные, F – заданная, а u – искомая действительные функции, рассмотрим характеристическую задачу Коши об определении в световом конусе будущего $D: \ t > |x|, \ x = (x_1, \ldots, x_n), \ n > 1$, решения $u(x,t)$ уравнения (1) по краевому условию

$$u|_{\partial D} = f. \tag{2}$$

Здесь f – заданная действительная функция на характеристической конической поверхности $\partial D: \ t = |x|$.

Следует отметить, что вопросы существования или несуществования глобального решения задачи Коши для полулинейных уравнений вида (1) с начальными условиями $u|_{t=0} = u_0$, $u_t|_{t=0} = u_1$ рассмотрены и изучены в работах [1–17].

Что касается характеристической задачи в линейном случае, т.е. задачи (1), (2) при $\lambda = 0$, то, как известно, эта задача корректно поставлена и имеет место глобальная разрешимость в соответствующих пространствах функций [18–22].

Ниже будет показано, что при определенных условиях на показатель нелинейности α и на функции F и f задача (1), (2) не имеет глобального решения, хотя, как это будет установлено, указанная задача локально разрешима.

Прежде чем введем определение слабого обобщенного решения задачи (1), (2), заметим, что если $u \in C^2(\overline{D})$ – классическое решение этой задачи, то, умножая обе части уравнения (1) на произвольную функцию $\varphi \in C^1(\overline{D})$, финитную по переменной $r = (t^2 + |x|^2)^{1/2}$, т.е. равную нулю при достаточно больших r, после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N}\, \varphi\, ds - \int\limits_D u_t \varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_D \nabla u \nabla \varphi\, dx\, dt = \lambda \int\limits_D |u|^\alpha \varphi\, dx\, dt + \int\limits_D F\varphi\, dx\, dt, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \nu_{n+1} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4}$$

– производная по конормали, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1})$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$.

Учитывая, что на характеристической конической поверхности $\partial D: \ t = |x|$ производная по конормали (4) является внутренним дифференциальным оператором, в силу (2) равенство (3) можно записать в виде

$$-\int\limits_D u_t \varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_D \nabla u \nabla \varphi\, dx\, dt = \lambda \int\limits_D |u|^\alpha \varphi\, dx\, dt + \int\limits_D F\varphi\, dx\, dt - \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial N}\, \varphi\, ds. \tag{5}$$

Равенство (5) можно положить в основу определения слабого обобщенного решения задачи (1), (2).

Определение 1. При $F \in \widetilde{L}_{2,\mathrm{loc}}(D)$, $f \in \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(\partial D)$ функция $u \in \widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D) \cap \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ называется слабым обобщенным решением задачи (1), (2), если для любой функции $\varphi \in C^1(\overline{D})$, финитной по переменной $r = (t^2 + |x|^2)^{1/2}$, выполнено интегральное равенство (5). Такое решение мы будем также называть глобальным решением задачи (1), (2).

Здесь пространство $\widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D)$ $(\widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(\partial D))$ состоит из функций F (f), сужение которых на множество $D \cap \{t < \tau\}$ $(\partial D \cap \{t < \tau\})$ для любого $\tau > 0$ принадлежит пространству $L_\alpha(D \cap \{t < \tau\})$ $(W^1_2(\partial D \cap \{t < \tau\}))$. Аналогично определяются пространства $\widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D)$ и $\widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$. Пространство $W^1_2(\Omega)$ является известным пространством Соболева.

Для уравнения (1) аналогично ставится характеристическая задача в конечной области $D_\tau = D \cap \{t < \tau\}$, $\tau = \mathrm{const} > 0$, т.е. $D_\tau :\ |x| < t < \tau$. Положим $S_\tau = \partial D \cap \partial D_\tau$, т.е. $S_\tau :$ $t = |x|$, $t \le \tau$.

Определение 2. Пусть $F \in L_2(D_\tau)$ и $f \in W^1_2(S_\tau)$. Тогда функция $u \in L_\alpha(D_\tau) \cap W^1_2(D_\tau)$ называется слабым обобщенным решением уравнения (1) в области D_τ, удовлетворяющим краевому условию $u|_{S_\tau} = f$ вместо (2), если для любой функции $\varphi \in C^1(\overline{D}_\tau)$, такой, что $\varphi|_{\partial D_\tau \setminus S_\tau} = 0$, выполнено интегральное равенство

$$-\int\limits_{D_\tau} u_t \varphi_t \, dx\, dt + \int\limits_{D_\tau} \nabla u \nabla \varphi \, dx\, dt = \lambda \int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha \varphi \, dx\, dt + \int\limits_{D_\tau} F\varphi \, dx\, dt - \int\limits_{S_\tau} \frac{\partial f}{\partial N} \varphi \, ds. \tag{6}$$

2. Отсутствие глобального решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть*

$$F \in \widetilde{L}_{2,\mathrm{loc}}(D), \quad F|_D \ge 0 \tag{7}$$

и

$$f \in \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(\partial D), \quad f|_{\partial D} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{\partial D} \ge 0. \tag{8}$$

Тогда если показатель нелинейности α в уравнении (1) удовлетворяет неравенствам

$$1 < \alpha \le \frac{n+1}{n-1}, \tag{9}$$

то не существует глобального (в случае $F = 0$ и $f = 0$ нетривиального) слабого обобщенного решения $u \in \widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D) \cap \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ задачи (1), (2).

Доказательство. Отметим, что последнее неравенство в условии (8) следует понимать в обобщенном смысле, т.е. в силу предположения $f \in \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(\partial D)$ существует обобщенная производная $\partial f/\partial r \in \widetilde{L}_{2,\mathrm{loc}}(\partial D)$, которая неотрицательна и, следовательно, для любой функции $\psi \in C(\partial D)$, $\psi \ge 0$, финитной по переменной r, имеет место неравенство

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial r} \psi \, ds \ge 0. \tag{10}$$

Воспользуемся методом пробных функций [14, с. 10–12]. Предположим, что при выполнении условий теоремы существует нетривиальное глобальное слабое обобщенное решение $u \in \widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D) \cap \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ задачи (1), (2).

Предполагая, что в интегральном равенстве (5) функция $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \varphi < +\infty$, и интегрируя левую часть этого равенства по частям, с учетом краевого условия (2) получаем, что

$$-\int\limits_D u_t \varphi_t \, dx\, dt + \int\limits_D \nabla u \nabla \varphi \, dx\, dt = \int\limits_D u \Box \varphi \, dx\, dt - \int\limits_{\partial D} u \frac{\partial \varphi}{\partial N} ds = \int\limits_D u \Box \varphi \, dx\, dt - \int\limits_{\partial D} f \frac{\partial \varphi}{\partial N} ds. \tag{11}$$

Теперь, принимая во внимание, что производная по конормали $\partial/\partial N$ на ∂D совпадает с производной по сферической переменной $r=(t^2+|x|^2)^{1/2}$, взятой со знаком минус, и, взяв в качестве пробной функции в (5) функцию $\varphi(x,t)=\varphi_0[R^{-2}(t^2+|x|^2)]$, где $\varphi_0\in C^2((-\infty,+\infty))$, $\varphi_0\geq 0$, $\varphi_0'\leq 0$; $\varphi_0(\sigma)=1$ при $0\leq\sigma\leq 1$ и $\varphi_0(\sigma)=0$ при $\sigma\geq 2$, $R=\text{const}>0$ [14, с. 22], в силу (7), (8) и (10) будем иметь

$$\int\limits_D F\varphi\,dx\,dt\geq 0,\qquad \int\limits_{\partial D} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial N}\,ds\geq 0,\qquad \int\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial N}\,\varphi\,ds\leq 0. \tag{12}$$

В силу (11), (12) из равенства (5) следует, что

$$\int\limits_D u\Box\varphi\,dx\,dt\geq\lambda\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt. \tag{13}$$

Используя неравенство Гёльдера

$$\int\limits_D g_1g_2\,dx\,dt\leq\Bigl(\int\limits_D |g_1|^\alpha\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha}\Bigl(\int\limits_D |g_2|^{\alpha'}\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha'},\qquad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1,$$

будем иметь

$$\int\limits_D u\Box\varphi\,dx\,dt\leq\int\limits_D (|u|\varphi^{1/\alpha})(\varphi^{-1/\alpha}|\Box\varphi|)\,dx\,dt\leq$$

$$\leq\Bigl(\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha}\Bigl(\int\limits_D \varphi^{-\alpha'/\alpha}|\Box\varphi|^{\alpha'}\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha'}=$$

$$=\Bigl(\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha}\Bigl(\int\limits_D \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha'}. \tag{14}$$

Из неравенств (13) и (14) следует, что

$$\lambda\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\leq\Bigl(\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha}\Bigl(\int\limits_D \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt\Bigr)^{1/\alpha'},$$

откуда непосредственно получаем неравенство

$$\int\limits_D |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\leq\lambda^{-\alpha'}\int\limits_D \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt. \tag{15}$$

После замены переменных $t=R\xi_0$, $x=R\xi$ имеем $\varphi(x,t)=\varphi_0(\xi_0^2+|\xi|^2)$ и

$$\int\limits_D \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt=\int\limits_D \frac{|2(1-n)\varphi_0'+4R^{-2}(t^2-|x|^2)\varphi_0''|^{\alpha'}}{R^{2\alpha'}\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt=$$

$$=R^{n+1-2\alpha'}\int\limits_{\substack{1\leq|\xi_0|^2+|\xi|^2\leq 2,\\ \xi_0>|\xi|}}\frac{|2(1-n)\varphi_0'+4(\xi_0^2-|\xi|^2)\varphi_0''|^{\alpha'}}{\varphi_0^{\alpha'-1}}\,d\xi\,d\xi_0. \tag{16}$$

Как известно, пробная функция $\varphi(x,t)=\varphi_0[R^{-2}(t^2+|x|^2)]$ с указанными выше свойствами, для которой интегралы в правых частях (15) и (16) конечны, существует [14, с. 22].

Из (15) и (16) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_D |u|^\alpha \varphi\,dx\,dt \le CR^{n+1-2\alpha'} \tag{17}$$

с положительной постоянной C, не зависящей от R. Переходя в неравенстве (17) к пределу при $R \to \infty$, когда $n+1-2\alpha' < 0$, что при $n > 1$ равносильно условию $\alpha < (n+1)/(n-1)$, получаем $\int_D |u|^\alpha\,dx\,dt = 0$, а это противоречит нашему допущению. Предельный случай в условии (9), когда $n+1-2\alpha' = 0$, т.е. при $\alpha = (n+1)/(n-1)$, рассматривается аналогично случаю, который исследован в работе [14, с. 23]. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Хотя при условиях теоремы 1 отсутствует глобальное решение задачи (1), (2), но локальное решение характеристической задачи в области D_τ в смысле определения 2, т.е. задачи

$$\Box u(x,t) = \lambda|u(x,t)|^\alpha + F(x,t), \quad (x,t) \in D_\tau, \tag{18}$$

$$u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in S_\tau, \tag{19}$$

может существовать. Поэтому естественно возникает вопрос об оценке величины $t = T$, когда при $\tau < T$ решение задачи (18), (19) существует в области D_τ, а при $\tau \ge T$ отсутствует решение этой задачи из пространства $L_\alpha(D_\tau) \cap W_2^1(D_\tau)$.

Для этого предположим, что $u \in L_\alpha(D_\tau) \cap W_2^1(D_\tau)$ – решение задачи (18), (19) в области D_τ в смысле интегрального равенства (6). В качестве пробной функции в равенстве (6) возьмем функцию $\varphi(x,t) = \varphi_0[(2/\tau^2)(t^2 + |x|^2)]$, где функция $\varphi_0 \in C^2((-\infty,+\infty))$ введена выше при доказательстве теоремы 1. Очевидно, что эта функция удовлетворяет всем условиям, приведенным в определении 2. Если в левой части равенства (6) провести интегрирование по частям, как это сделано в (11), получим равенство

$$\int\limits_{D_\tau} u\Box\varphi\,dx\,dt = \lambda\int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{D_\tau} F\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{S_\tau} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial N}\,ds - \int\limits_{S_\tau} \frac{\partial f}{\partial N}\,\varphi\,ds. \tag{20}$$

В силу (7) и (8) аналогично (12) справедливы неравенства

$$\int\limits_{D_\tau} F\varphi\,dx\,dt \ge 0, \quad \int\limits_{S_\tau} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial N}\,ds \ge 0, \quad \int\limits_{S_\tau} \frac{\partial f}{\partial N}\,\varphi\,ds \le 0. \tag{21}$$

Считая, что функции F, f и φ зафиксированы, введем в рассмотрение функцию одной переменной τ

$$\gamma(\tau) = \int\limits_{D_\tau} F\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{S_\tau} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial N}\,ds - \int\limits_{S_\tau} \frac{\partial f}{\partial N}\,\varphi\,ds, \quad \tau > 0. \tag{22}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла и неравенств (21) эта функция $\gamma(\tau)$ из (22) является неотрицательной, непрерывной и неубывающей, причем

$$\lim_{\tau\to 0}\gamma(\tau) = 0. \tag{23}$$

С учетом выражения (22) равенство (20) перепишем в виде

$$\lambda\int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{D_\tau} u\Box\varphi\,dx\,dt - \gamma(\tau). \tag{24}$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon > 0$, $ab \le (\varepsilon/\alpha)a^\alpha + (\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1})^{-1}b^{\alpha'}$, $a,b \ge 0$, $\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$, возьмем $a = |u|\varphi^{1/\alpha}$, $b = |\Box\varphi|/\varphi^{1/\alpha}$, то с учетом равенства $\alpha'/\alpha = \alpha' - 1$ будем иметь

$$|u\Box\varphi| = |u|\varphi^{1/\alpha}\,\frac{|\Box\varphi|}{\varphi^{1/\alpha}} \le \frac{\varepsilon}{\alpha}\,|u|^\alpha\varphi + \frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\,\frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}. \tag{25}$$

В силу (25) из (24) вытекает неравенство

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha \varphi \, dx \, dt \leq \frac{1}{\alpha' \varepsilon^{\alpha'-1}} \int\limits_{D_\tau} \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}} \, dx \, dt - \gamma(\tau),$$

откуда при $\varepsilon < \lambda\alpha$ получим

$$\int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha \varphi \, dx \, dt \leq \frac{\alpha}{(\lambda\alpha - \varepsilon)\alpha' \varepsilon^{\alpha'-1}} \int\limits_{D_\tau} \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}} \, dx \, dt - \frac{\alpha}{\lambda\alpha - \varepsilon} \gamma(\tau). \tag{26}$$

С учетом равенств

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' - 1} \quad \text{и} \quad \min_{0<\varepsilon<\lambda\alpha} \frac{\alpha}{(\lambda\alpha - \varepsilon)\alpha' \varepsilon^{\alpha'-1}} = \frac{1}{\lambda^{\alpha'}},$$

который достигается при $\varepsilon = \lambda$, из неравенства (26) следует, что

$$\int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha \varphi \, dx \, dt \leq \frac{1}{\lambda^{\alpha'}} \int\limits_{D_\tau} \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}} \, dx \, dt - \frac{\alpha'}{\lambda} \gamma(\tau). \tag{27}$$

Согласно свойствам функции φ_0, пробная функция $\varphi(x,t) = \varphi_0[2\tau^{-2}(t^2 + |x|^2)] = 0$ при $r = (t^2 + |x|^2)^{1/2} \geq \tau$. Поэтому после замены переменных $t = \sqrt{2}\,\tau\xi_0$, $x = \sqrt{2}\,\tau\xi$ так же, как и при получении (16), легко проверить, что

$$\int\limits_{D_\tau} \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}} \, dx \, dt = \int\limits_{r=(t^2+|x|^2)^{1/2}\leq\tau} \frac{|\Box\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}} \, dx \, dt = (\sqrt{2}\,\tau)^{n+1-2\alpha'} \varkappa_0, \tag{28}$$

где

$$\varkappa_0 = \int\limits_{1\leq|\xi_0|^2+|\xi|^2\leq 2} \frac{|2(1-n)\varphi_0' + 4(\xi_0^2 - |\xi|^2)\varphi_0''|^{\alpha'}}{\varphi_0^{\alpha'-1}} \, d\xi \, d\xi_0 < +\infty.$$

В силу (28) из неравенства (27) с учетом того, что $\varphi_0(\sigma) = 1$ при $0 \leq \sigma \leq 1$, получим неравенство

$$\int\limits_{r\leq\tau/\sqrt{2}} |u|^\alpha \, dx \, dt \leq \int\limits_{D_\tau} |u|^\alpha \varphi \, dx \, dt \leq \frac{(\sqrt{2}\,\tau)^{n+1-2\alpha'}}{\lambda^{\alpha'}} \varkappa_0 - \frac{\alpha'}{\lambda} \gamma(\tau). \tag{29}$$

В случае $\alpha < (n+1)/(n-1)$, т.е. при $n + 1 - 2\alpha' < 0$, уравнение

$$g(\tau) = \frac{(\sqrt{2}\,\tau)^{n+1-2\alpha'}}{\lambda^{\alpha'}} \varkappa_0 - \frac{\alpha'}{\lambda} \gamma(\tau) = 0 \tag{30}$$

имеет единственный положительный корень $\tau = \tau_0 > 0$, поскольку функция $g_1(\tau) = ((\sqrt{2}\,\tau)^{n+1-2\alpha'}/\lambda^{\alpha'})\varkappa_0$ является положительной, непрерывной, строго убывающей функцией на интервале $(0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{\tau\to 0} g_1(\tau) = +\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} g_1(\tau) = 0$, а функция $\gamma(\tau)$, как отмечено выше, является неотрицательной, непрерывной и неубывающей, причем поскольку мы предполагаем, что хотя бы одна из функций F и f не является тривиальной, то $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \gamma(\tau) > 0$. При этом $g(\tau) < 0$ при $\tau > \tau_0$ и $g(\tau) > 0$ при $0 < \tau < \tau_0$. Следовательно, при $\tau > \tau_0$ правая часть неравенства (29) является отрицательной величиной, что невозможно. Поэтому если существует решение задачи (18), (19) в области D_τ, то обязательно $\tau \leq \tau_0$ и тем самым для величины $\tau = T$ из замечания 1 справедлива оценка

$$T \leq \tau_0, \tag{31}$$

где τ_0 – единственный положительный корень уравнения (30).

В предельном случае $\alpha = (n+1)/(n-1)$ при $n+1-2\alpha' = 0$, если

$$\lim_{\tau\to+\infty} \gamma(\tau) > \frac{\varkappa_0}{\alpha'\lambda^{\alpha'-1}}, \tag{32}$$

применяя дословно те же рассуждения, что и в случае $\alpha < (n+1)/(n-1)$, приходим опять к оценке (31), где τ_0 – наименьший положительный корень уравнения (30), который в силу (32) существует.

Замечание 2. Поскольку при условиях (7) и (8) правые части в уравнении (1) и в краевом условии (2), а также производная $\partial f/\partial r$ неотрицательны, то при $n = 2$ и $n = 3$, согласно известным свойствам решения линейной характеристической задачи [19, с. 745; 22, с. 84], решение $u(x,t)$ нелинейной задачи (1), (2) будет также неотрицательным. Но в этом случае при $\alpha = 1$ указанное решение будет удовлетворять следующей линейной задаче:

$$\square u = \lambda u + F, \quad u|_{\partial D} = f,$$

которая глобально разрешима в соответствующих функциональных пространствах.

Замечание 3. В случае, когда $0 < \alpha < 1$, задача (1), (2) может иметь более одного глобального решения. Например, при $F = 0$ и $f = 0$ условия (7) и (8) выполнены, но задача (1), (2), кроме тривиального решения, имеет бесконечное множество глобальных линейно независимых решений $u_\sigma(x,t)$, зависящих от параметра $\sigma \geq 0$ и заданных формулой

$$u_\sigma(x,t) = \begin{cases} \beta[(t-\sigma)^2 - |x|^2]^{1/(1-\alpha)}, & t > \sigma + |x|, \\ 0, & |x| \leq t \leq \sigma + |x|, \end{cases}$$

где $\beta = \lambda^{1/(1-\alpha)}[4\alpha/(1-\alpha)^2 + 2(n+1)/(1-\alpha)]^{-1/(1-\alpha)}$. Легко видеть, что $u_\sigma(x,t) \in \widetilde{L}_{\alpha,\mathrm{loc}}(D) \cap \cap \widetilde{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ и, более того, $u_\sigma(x,t) \in C^1(\overline{D})$, а при $1/2 \leq \alpha < 1$ функция $u_\sigma(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Замечание 4. Заключение теоремы 1 перестает быть верным, если вместо (9) выполнено неравенство $\alpha > (n+1)/(n-1)$ и одновременно нарушено только второе из условий (8), т.е. $f|_{\partial D} \geq 0$. Действительно, функция $u(x,t) = -\varepsilon(1+t^2-|x|^2)^{1/(1-\alpha)}$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, является глобальным классическим, а тем самым и обобщенным решением задачи (1), (2) при $f = -\varepsilon$ $(\partial f/\partial r|_{\partial D} = 0)$ и

$$F = \left[2\varepsilon\,\frac{n+1}{\alpha-1} - 4\varepsilon\,\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\,\frac{t^2-|x|^2}{1+t^2-|x|^2} - \lambda\varepsilon^\alpha\right](1+t^2-|x|^2)^{\alpha/(1-\alpha)},$$

причем, как легко проверить, $F|_D \geq 0$, если $\alpha > (n+1)/(n-1)$ и

$$0 < \varepsilon \leq \left\{\frac{2}{\lambda}\left[\frac{n+1}{\alpha-1} - \frac{2\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]\right\}^{1/(\alpha-1)}.$$

Отметим, что неравенство $n+1-2\alpha/(\alpha-1) > 0$ равносильно неравенству $\alpha > (n+1)/(n-1)$.

Замечание 5. Заключение теоремы 1 также перестает быть верным, если нарушено только третье из условий (8), т.е. условие $\partial f/\partial r|_{\partial D} \geq 0$. Действительно, функция $u(x,t) = \beta[(t+1)^2 - |x|^2]^{1/(1-\alpha)}$, где $\beta = \lambda^{1/(1-\alpha)}[4\alpha/(1-\alpha)^2 + 2(n+1)/(1-\alpha)]^{1/(\alpha-1)}$, является глобальным классическим решением задачи (1), (2) при $F = 0$ и $f = u|_{\partial D:\ t=|x|} = \beta[(t+1)^2 - t^2]^{1/(1-\alpha)} > 0$.

3. Локальная разрешимость характеристической задачи Коши. Ниже мы ограничимся рассмотрением задачи (18), (19) в области D_τ в случае однородного краевого условия (19), т.е.

$$u|_{S_\tau} = 0. \tag{33}$$

Сначала мы рассмотрим линейный случай, когда в уравнении (18) параметр $\lambda = 0$, т.е. задачу

$$Lu(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in D_\tau, \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_\tau, \tag{34}$$

где для удобства введено обозначение $L = \square (= \partial^2/\partial t^2 - \Delta)$.

Определение 3. Пусть $F \in L_2(D_\tau)$. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) = \{u \in W_2^1(D_\tau) : u|_{S_\tau} = 0\}$ называется сильным обобщенным решением задачи (34), если существует последовательность функций $u_m = W_2^2(D_\tau) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_2^1(D_\tau)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|Lu_m - F\|_{L_2(D_\tau)} = 0.$$

Для получения нужной априорной оценки для решения $u \in W_2^2(D_\tau)$ задачи (34) воспользуемся рассуждениями из работы [23]. Умножая обе части уравнения (34) на $2u_t$ и интегрируя по области D_δ, $0 < \delta \le \tau$, после простых преобразований с использованием интегрирования по частям приходим к равенству

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] dx = 2 \int\limits_{D_\delta} F u_t \, dx \, dt, \tag{35}$$

где $\Omega_\delta = D_\tau \cap \{t = \delta\}$. Обозначив $w(\delta) = \int_{\Omega_\delta} [u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2] \, dx$, с учетом неравенства $2Fu_t \le \le \varepsilon u_t^2 + \varepsilon^{-1} F^2$ для любого $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ из равенства (35) получим

$$w(\delta) \le \varepsilon \int\limits_0^\delta w(\sigma) \, d\sigma + \frac{1}{\varepsilon} \|F\|^2_{L_2(D_\delta)}, \quad 0 < \delta \le \tau. \tag{36}$$

Из неравенства (36), учитывая, что величина $\|F\|^2_{L_2(D_\delta)}$ как функция от δ является неубывающей, в силу леммы Гронуолла [24, с. 13] будем иметь $w(\delta) \le \varepsilon^{-1} \|F\|^2_{L_2(D_\delta)} \exp \delta\varepsilon$, поэтому в силу того, что $\inf\limits_{\varepsilon > 0} (\exp \delta\varepsilon)/\varepsilon = e\delta$ и он достигается при $\varepsilon = 1/\delta$, последнее неравенство принимает вид $w(\delta) \le e\delta \|F\|^2_{L_2(D_\delta)}$. Отсюда в свою очередь вытекает, что

$$\int\limits_{D_\tau} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] dx \, dt = \int\limits_0^\tau w(\sigma) \, d\sigma \le e\tau^2 \|F\|^2_{L_2(D_\tau)}$$

и, следовательно,

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \le \sqrt{e}\, \tau \|F\|_{L_2(D_\tau)}. \tag{37}$$

Здесь использован тот факт, что в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ норма

$$\|u\|_{W_2^1(D_\tau)} = \left\{ \int\limits_{D_\tau} \left[u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] dx \, dt \right\}^{1/2}$$

эквивалентна норме

$$\|u\| = \left\{ \int\limits_{D_\tau} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] dx \, dt \right\}^{1/2}.$$

Поскольку пространство $C_0^\infty(D_\tau)$ плотно в $L_2(D_\tau)$, то для заданного $F \in L_2(D_\tau)$ существует последовательность функций $F_m \in C_0^\infty(D_\tau)$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|F_m - F\|_{L_2(D_\tau)} = 0$. Для фиксированного m, продолжая функцию F_m нулем за пределы области D_τ и оставляя за ней то же обозначение, будем иметь включение $F_m \in C^\infty(R_+^{n+1})$, для этой функции носитель $\operatorname{supp} F_m \subset D$, где $R_+^{n+1} = R^{n+1} \cap \{t \ge 0\}$. Обозначим через u_m решение задачи Коши $Lu_m = F_m$, $u_m|_{t=0} = 0$, $\partial u_m / \partial t|_{t=0} = 0$. Как мы знаем, решение этой задачи существует, единственно и принадлежит пространству $C^\infty(R_+^{n+1})$, причем поскольку $\operatorname{supp} F_m \subset D$,

$u_m|_{t=0} = 0$, $\partial u_m/\partial t|_{t=0} = 0$, то с учетом геометрии области зависимости решения волнового уравнения будем иметь $\operatorname{supp} u_m \subset D: \ t > |x|$ [25, с. 191]. Оставляя за сужением функции u_m на область D_τ то же обозначение, легко видеть, что $u_m \in W_2^2(D_\tau) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ и в силу (37) имеет место неравенство

$$\|u_m - u_{m_1}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau,S_\tau)} \le \sqrt{e}\,\tau \|F_m - F_{m_1}\|_{L_2(D_\tau)}. \tag{38}$$

Поскольку последовательность $\{F_m\}$ фундаментальна в $L_2(D_\tau)$, то в силу (38) и последовательность $\{u_m\}$ является фундаментальной в полном пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$. Поэтому существует такая функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau,S_\tau)} = 0$, и поскольку $Lu_m = F_m \to F$ в пространстве $L_2(D_\tau)$, то эта функция, согласно определению 3, будет сильным обобщенным решением задачи (34). Единственность сильного обобщенного решения задачи (34) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ вытекает из априорной оценки (37). Следовательно, решение u задачи (34) мы можем записать в виде $u = L^{-1}F$, где $L^{-1} : L_2(D_\tau) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ – линейный непрерывный оператор, норма которого в силу неравенства (37) допускает оценку

$$\|L^{-1}\|_{L_2(D_\tau)\to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau,S_\tau)} \le \sqrt{e}\,\tau. \tag{39}$$

Замечание 6. Оператор вложения $I : \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) \to L_q(D_\tau)$ является линейным непрерывным компактным оператором при $1 < q < 2(n+1)/(n-1)$, когда $n > 1$ [26, с. 81]. В то же время оператор Немыцкого $T : L_q(D_\tau) \to L_2(D_\tau)$, действующий по формуле $Tu = \lambda|u|^\alpha$, является непрерывным и ограниченным, если $q \ge 2\alpha$ [27, с. 349; 28, с. 66–67]. Таким образом, если $\alpha < (n+1)/(n-1)$, то найдется такое число q, что $1 < 2\alpha \le q < 2(n+1)/(n-1)$, и тем самым оператор

$$T_0 = TI : \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) \to L_2(D_\tau) \tag{40}$$

является непрерывным и компактным оператором. При этом из включения $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ тем более следует, что $u \in L_\alpha(D_\tau)$. Всюду выше мы предполагали $\alpha > 1$.

Определение 4. Пусть $F \in L_2(D_\tau)$ и $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ называется сильным обобщенным решением нелинейной задачи (18), (33), если существует последовательность функций $u_m \in W_2^2(D_\tau) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ такая, что $u_m \to u$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ и $[Lu_m - \lambda|u_m|^\alpha] \to F$ в пространстве $L_2(D_\tau)$. При этом сходимость последовательности $\{\lambda|u_m|^\alpha\}$ к функции $\lambda|u|^\alpha$ в пространстве $L_2(D_\tau)$, когда $u_m \to u$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$, следует из замечания 6, причем поскольку $|u|^\alpha \in L_2(D_\tau)$, то тем более в силу ограниченности области D_τ функция $u \in L_\alpha(D_\tau)$.

Замечание 7. Легко проверить, что в силу замечания 6 при $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$, сильное обобщенное решение u задачи (18), (33) в смысле определения 4, является слабым обобщенным решением этой задачи при $f = 0$ в смысле определения 2, т.е. в смысле интегрального тождества (6).

Замечание 8. Отметим, что при $F \in L_2(D_\tau)$, $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$ функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ является сильным обобщенным решением задачи (18), (33) в том и только в том случае, когда u является решением функционального уравнения

$$u = L^{-1}(\lambda|u|^\alpha + F) \tag{41}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$.

Уравнение (41) перепишем в виде

$$u = Au + u_0, \tag{42}$$

где оператор $A = L^{-1}T_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ в силу (39), (40) и с учетом замечания 6 является непрерывным компактным оператором, действующим в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$, а $u_0 = L^{-1}F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$.

Замечание 9. Пусть $B(0, z_2) := \{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) : \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \le z_2\}$ – замкнутый (выпуклый) шар в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ радиуса $z_2 > 0$ с центром в нулевом элементе. Поскольку оператор $A : \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$ при $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$ является непрерывным компактным оператором, то, согласно принципу Шаудера, для разрешимости уравнения (42) достаточно доказать, что оператор A_1, действующий по формуле $A_1 u = Au + u_0$, переводит шар $B(0, z_2)$ в себя для некоторого $z_2 > 0$ [29, с. 370]. Для этого ниже мы приведем нужную оценку для величины $\|Au\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)}$.

Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$, то обозначим через $\widetilde{u}$ функцию, которая представляет собой продолжение функции u четным образом через плоскость $t = \tau$ в область $D_\tau^* : \tau < t < 2\tau - |x|$, т.е.

$$\widetilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in D_\tau, \\ u(x, 2\tau - t), & (x, t) \in D_\tau^*, \end{cases}$$

и $\widetilde{u}(x, t) = u(x, t)$ при $t = \tau$, $|x| < \tau$ в смысле теории следа. Очевидно, что $\widetilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\widetilde{D}_\tau)$, где $\widetilde{D}_\tau : |x| < t < 2\tau - |x|$. Ясно, что $\widetilde{D}_\tau = D_\tau \cup \{(x, t) : t = \tau, |x| < \tau\} \cup D_\tau^*$.

Используя неравенство [30, с. 258] $\int_\Omega |v|\, d\Omega \le (\operatorname{mes} \Omega)^{1-1/p} \|v\|_{p,\Omega}$, $p \ge 1$, и учитывая равенства $\|\widetilde{u}\|^p_{L_p(\widetilde{D}_\tau)} = 2\|u\|^p_{L_p(D_\tau)}$, $\|\widetilde{u}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\widetilde{D}_\tau)} = 2\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)}$, из известного мультипликативного неравенства [26, с. 78] $\|v\|_{p,\Omega} \le \beta \|v_x\|^{\widetilde{\alpha}}_{m,\Omega} \|v\|^{1-\widetilde{\alpha}}_{r,\Omega}$ $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\Omega \subset R^{n+1}$, $\widetilde{\alpha} = (1/r - 1/p)(1/r - 1/\widetilde{m})^{-1}$, $\widetilde{m} = (n+1)m/(n+1-m)$, при $\Omega = \widetilde{D}_\tau \subset R^{n+1}$, $v = \widetilde{u}$, $r = 1$, $m = 2$ и $1 < p \le 2(n+1)/(n-1)$, где $\beta = \text{const} > 0$ не зависит от v и τ, вытекает следующее неравенство:

$$\|u\|_{L_p(D_\tau)} \le c_0 (\operatorname{mes} D_\tau)^{1/p + 1/(n+1) - 1/2} \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau), \tag{43}$$

где $c_0 = \text{const} > 0$ не зависит от u.

Принимая во внимание, что $\operatorname{mes} D_\tau = (\omega_n/(n+1))\tau^{n+1}$, где ω_n – объем единичного шара в R^n, при $p = 2\alpha$ из (43) получим неравенство

$$\|u\|_{L_{2\alpha}(D_\tau)} \le c_0 \widetilde{\ell}_{\alpha,n} \tau^{\delta_n} \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau), \tag{44}$$

где $\delta_n = (n+1)(1/(2\alpha) + 1/(n+1) - 1/2)$, $\widetilde{\ell}_{\alpha,n} = (\omega_n/(n+1))^{\delta_n/(n+1)}$.

Для величины $\|T_0 u\|_{L_2(D_\tau)}$, где $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)$, а оператор T_0 действует по формуле (40), в силу (44) имеет место оценка

$$\|T_0 u\|_{L_2(D_\tau)} \le \lambda \Bigg[\int\limits_{D_\tau} |u|^{2\alpha}\, dx\, dt \Bigg]^{1/2} = \lambda \|u\|^\alpha_{L_{2\alpha}(D_\tau)} \le \lambda \ell_{\alpha,n} \tau^{\alpha\delta_n} \|u\|^\alpha_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)}, \tag{45}$$

где $\ell_{\alpha,n} = [c_0 \widetilde{\ell}_{\alpha,n}]^\alpha$.

Теперь из (39) и (45) для величины $\|Au\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)}$, где $Au = L^{-1}T_0 u$, справедлива оценка

$$\|Au\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \le \|L^{-1}\|_{L_2(D_\tau) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_\tau, S_\tau)} \|T_0 u\|_{L_2(D_\tau)} \le$$

$$\leq \sqrt{e}\,\lambda\ell_{\alpha,n}\tau^{1+\alpha\delta_n}\|u\|^{\alpha}_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)} \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau). \tag{46}$$

Отметим, что $\delta_n > 0$ при $\alpha < (n+1)/(n-1)$.

Рассмотрим уравнение

$$az^\alpha + b = z \tag{47}$$

относительно неизвестной z, где

$$a = \sqrt{e}\,\lambda\ell_{\alpha,n}\tau^{1+\alpha\delta_n}, \quad b = \sqrt{e}\,\tau\|F\|_{L_2(D_\tau)}. \tag{48}$$

При $\tau > 0$ очевидно, что $a > 0$ и $b \geq 0$. Простой анализ, подобный тому, который при $\alpha = 3$ проведен в работе [29, с. 373–374], показывает, что: 1) в случае $b = 0$ наряду с нулевым корнем $z_1 = 0$ уравнение (47) имеет единственный положительный корень $z_2 = a^{-1/(\alpha-1)}$; 2) если $b > 0$, то при $0 < b < b_0$, где

$$b_0 = [\alpha^{-1/(\alpha-1)} - \alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}]a^{-1/(\alpha-1)}, \tag{49}$$

уравнение (47) имеет два положительных корня z_1 и z_2, $0 < z_1 < z_2$, причем при $b = b_0$ эти корни сливаются, и мы имеем один положительный корень $z_1 = z_2 = z_0 = (\alpha a)^{-1/(\alpha-1)}$; 3) при $b > b_0$ уравнение (47) не имеет неотрицательных корней.

Отметим, что при $0 < b < b_0$ имеют место неравенства $z_1 < z_0 = (\alpha a)^{-1/(\alpha-1)} < z_2$. В силу (48) и (49) условие $b \leq b_0$ равносильно условию

$$\sqrt{e}\,\tau\|F\|_{L_2(D_\tau)} \leq [\sqrt{e}\,\lambda\ell_{\alpha,n}\tau^{1+\alpha\delta_n}]^{-1/(\alpha-1)}[\alpha^{-1/(\alpha-1)} - \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}]$$

или

$$\|F\|_{L_2(D_\tau)} \leq \gamma_{n,\lambda,\alpha}\tau^{-\alpha_n}, \quad \alpha_n > 0, \tag{50}$$

где

$$\gamma_{n,\lambda,\alpha} = [\alpha^{-1/(\alpha-1)} - \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}](\lambda\ell_{\alpha,n})^{-1/(\alpha-1)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\right], \quad \alpha_n = 1 + \frac{1}{\alpha-1}[1+\alpha\delta_n].$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем $\lim\limits_{\tau\to 0}\|F\|_{L_2(D_\tau)} = 0$. В то же время $\lim\limits_{\tau\to 0}\tau^{-\alpha_n} = +\infty$. Поэтому найдется число $\tau_1 = \tau_1(F)$, $0 < \tau_1 < +\infty$, такое, что неравенство (50) будет иметь место при

$$0 < \tau \leq \tau_1(F). \tag{51}$$

Теперь покажем, что при выполнении условия (51) оператор $A_1 u = Au + u_0 : \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau) \to \to \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)$ переводит шар $B(0,z_2)$, указанный в замечании 9, в себя, где z_2 – максимальный положительный корень уравнения (47). Действительно, если $u \in B(0,z_2)$, то в силу соотношений (46)–(48) имеем $\|A_1 u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)} \leq a\|u\|^\alpha_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)} + b \leq az_2^\alpha + b = z_2$.

Поэтому, согласно замечаниям 7–9, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $F \in \widetilde{L}_{2,\mathrm{loc}}(D)$, $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$ и для величины τ выполнено условие (51). Тогда задача (18), (33) в области D_τ имеет хотя бы одно сильное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)$ в смысле определения 4, которое является и слабым обобщенным решением этой задачи в смысле определения 2.*

Замечание 10. Отметим, что при $1 < \alpha < (n+1)/(n-1)$ единственность решения задачи (18), (33) в области D_τ может быть доказана в более узком пространстве функций

$$\overset{\circ}{E}{}^1_2 = \left\{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau) :\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<\sigma\leq\tau} \int\limits_{\Omega_\sigma = D\cap\{t=\sigma\}} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right]dx < +\infty\right\},$$

чем $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,S_\tau)$.

Замечание 11. Из приведенных выше рассуждений следует, что величина $t = T$, рассмотренная в замечании 1, в силу оценок (31) и (51) заключена в промежутке $[\tau_1, \tau_0]$.

Данная работа поддержана INTAS (проект 03-51-5007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jörgens K.* // Math. Zeitschr. 1961. Bd 77. S. 295–308.
2. *Levin H.A.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 1–21.
3. *John F.* // Manuscr. math. 1979. V. 28. P. 235–268.
4. *John F.* // Commun. Pure and Appl. Math. 1981. V. 34. P. 29–51.
5. *John F., Klainerman S.* // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 443–455.
6. *Kato T.* // Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 501–505.
7. *Ginibre J., Soffer A., Velo G.* // J. Funct. Anal. 1982. V. 110. P. 96–130.
8. *Strauss W.A.* // J. Funct. Anal. 1981. V. 41. P. 110–133.
9. *Georgiev V., Lindblad H., Sogge C.* // Amer. J. Math. 1997. V. 119. P. 1291–1319.
10. *Sideris T.G.* // J. Differ. Equat. 1984. V. 52. P. 378–406.
11. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Berlin, 1997.
12. *Lasiecka I., Ong J.* // Comn. Partial Differ. Equat. 1999. V. 24. P. 2069–2107.
13. *Aassila M.* // Differ. Integr. Equat. 2001. V. 14. P. 1301–1314.
14. *Mitidieri E., Pohozaev S.I.* A Priori Estimates and Blow-up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities. M., 2001.
15. *Belchev E., Kepka M., Zhou Z.* // J. Funct. Anal. 2002. V. 190. P. 233–254.
16. *Guedda M., Kirane M.* // Proc. of the 2002 Fez Conf. on Partial Differ. Equat. San Marcos, 2002.
17. *Keel M., Smith H.F., Sogge C.D.* // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17. P. 109–153.
18. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
19. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
20. *Cagnac F.* // Ann. Mat. Pura. Appl. 1975. V. 104. P. 355–393.
21. *Lundberg L.* // Comm. Math. Phys. 1978. V. 62. № 2. P. 107–118.
22. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
23. *Харибегашвили С.С.* // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 157–164.
24. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
25. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
26. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
27. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
28. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М., 1988.
29. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1993.
30. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
02.07.2004 г.