С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе, Задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 889–907

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm5617

Математические заметки

Том 94 выпуск 6 декабрь 2013

УДК 517.956.35

Задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе

Исследуется задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом. Рассматриваются вопросы существования, единственности и отсутствия глобального решения этой задачи. Обсуждается также вопрос о локальной разрешимости поставленной задачи.

Библиография: 26 названий.

DOI: 10.4213/mzm5617

1. Постановка задачи. В плоскости независимых переменных x и t рассмотрим волновое уравнение с нелинейным диссипативным членом [1; с. 57], [2]

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + g(x,t,u)u_t = f(x,t), \tag{1.1}$$

где f, g – заданные, а u – искомая действительные функции.

Обозначим через $D_T := \{(x,t) : 0 < x < t,\ 0 < t < T\}$ треугольную область, ограниченную характеристическим отрезком $\gamma_{1,T}$: $x = t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а также отрезками $\gamma_{2,T}$: $x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\gamma_{3,T}$: $t = T$, $0 \leqslant x \leqslant T$.

Для уравнения (1.1) в области D_T рассмотрим задачу Коши–Гурса об определении решения $u(x,t)$ по условиям [3; с. 284]

$$u_x|_{\gamma_{2,T}} = 0, \qquad u|_{\gamma_{1,T}} = 0. \tag{1.2}$$

Отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования, единственности и отсутствия глобальных решений начальных, смешанных, нелокальных и других задач посвящено много работ (см., например, [4]–[18]). В линейном случае, т.е. при $g(x,t,u) = g(x,t)$ задача (1.1), (1.2), как известно, корректно поставлена и имеет место глобальная разрешимость в соответствующих пространствах функций (см., например, [1], [19]–[23]).

Ниже будет показано, что при определенных требованиях на нелинейную функцию $g(x,t,u)$ задача (1.1), (1.2) локально разрешима; получены условия глобальной разрешимости, нарушение которых, вообще говоря, может стать причиной разрушения решения за конечный момент времени.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 05-1000008-7921), а также Грузинского нацианального фонда (грант № GNSF/ST06/3-005).

Определение 1.1. Пусть $f \in C(\overline{D}_T)$, $g \in C(\overline{D}_T \times \mathbb{R})$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T, если $u \in C^1(\overline{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что $u_n \to u$ и $Lu_n \to f$ при $n \to \infty$ соответственно в пространствах $C^1(\overline{D}_T)$ и $C(\overline{D}_T)$, где

$$\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T) := \{v \in C^2(\overline{D}_T) : v_x|_{\gamma_{2,T}} = 0,\, v|_{\gamma_{1,T}} = 0\}, \qquad \Gamma_T := \gamma_{1,T} \cup \gamma_{2,T}.$$

Замечание 1.1. Очевидно, что классическое решение задачи (1.1), (1.2) из пространства $u \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ является сильным обобщенным решением этой задачи класса C^1 в области D_T. В свою очередь, если сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T принадлежит пространству $C^2(\overline{D}_T)$, то оно будет также и классическим решением этой задачи.

Определение 1.2. Пусть $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $g \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbb{R})$. Мы будем говорить, что задача (1.1), (1.2) *глобально разрешима в классе* C^1, если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C^1 в области D_T.

2. Априорные оценки решения задачи (1.1), (1.2) в классах $C(\overline{D}_T), C^1(\overline{D}_T)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $f \in C(\overline{D}_T)$, $g \in C(\overline{D}_T \times \mathbb{R})$ *и*

$$g(x,t,s) \geqslant -M_T, \qquad (x,t,s) \in \overline{D}_T \times \mathbb{R}, \quad M_T := \mathrm{const} > 0. \tag{2.1}$$

Тогда для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) *класса* C^1 *в области* D_T *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant c_0 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} \tag{2.2}$$

с положительной постоянной $c_0 = c_0(T, M_T)$, *не зависящей от* u *и* f.

Доказательство. Пусть u – сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T. Тогда в силу определения 1.1 существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|Lu_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{2.3}$$

а, следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty} \|g(x,t,u_n)u_{nt} - g(x,t,u)u_t\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим функцию $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ как решение следующей задачи:

$$Lu_n = f_n, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_{\gamma_{2,T}} = 0, \qquad u_n|_{\gamma_{1,T}} = 0. \tag{2.6}$$

Здесь

$$f_n := Lu_n. \tag{2.7}$$

Умножая обе части равенства (2.5) на $\partial u_n/\partial t$ и интегрируя полученное равенство по области $D_\tau := \{(x,t) \in D_T : 0 < t < \tau\}$, $0 < \tau \leqslant T$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx\,dt - \int_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\frac{\partial u_n}{\partial t}\,dx\,dt + \int_{D_\tau} g(x,t,u_n)\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx\,dt = \int_{D_\tau} f_n\frac{\partial u_n}{\partial t}\,dx\,dt.$$

Положим $\Omega_\tau := \overline{D}_\infty \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau \leqslant T$. Тогда с учетом (2.6), применяя формулу Грина к левой части последнего равенства, получим

$$\int_{D_\tau} f_n\frac{\partial u_n}{\partial t}\,dx\,dt = \int_{\gamma_{1,\tau}} \frac{1}{2\nu_t}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\,\nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}\,\nu_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2(\nu_t^2 - \nu_x^2)\right] ds + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx + \int_{D_\tau} g(x,t,u_n)\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx\,dt, \tag{2.8}$$

где $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ и $\gamma_{1,\tau} := \gamma_{1,T} \cap \{t \leqslant \tau\}$.

Принимая во внимание, что оператор $\nu_t\,(\partial/\partial x) - \nu_x\,(\partial/\partial t)$ является внутренним дифференциальным оператором на $\gamma_{1,T}$, в силу второго условия (2.6) будем иметь

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\,\nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}\,\nu_x\right)\bigg|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \tag{2.9}$$

Далее, легко видеть, что

$$(\nu_t^2 - \nu_x^2)|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \tag{2.10}$$

Следовательно, из (2.8)–(2.10) имеем

$$w_n(\tau) := \int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx \leqslant 2\int_{D_\tau} f_n\frac{\partial u_n}{\partial t}\,dx\,dt + 2M_T\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx\,dt. \tag{2.11}$$

Принимая во внимание неравенство

$$2f_n\,\frac{\partial u_n}{\partial t} \leqslant \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + f_n^2,$$

в силу (2.11) получим

$$w_n(\tau) \leqslant (1 + 2M_T)\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx\,dt + \int_{D_\tau} f_n^2\,dx\,dt.$$

Учитывая выражение для функции $w_n(\tau)$, отсюда получим, что

$$w_n(\tau) \leqslant m_T\int_0^\tau w_n(\sigma)\,d\sigma + \|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)},$$

где $m_T := \max(1 + 2M_T, 1)$. Отсюда, поскольку величина $\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}$ как функция от τ является неубывающей, в силу леммы Гронуолла [24; с. 13] будем иметь

$$w_n(\tau) \leqslant \exp(m_T\tau)\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}. \tag{2.12}$$

Если $(x,t) \in \overline{D}_T$, то в силу второго условия (2.6) имеет место равенство

$$u_n(x,t) = u_n(x,t) - u_n(t,t) = \int_t^x \frac{\partial u_n(\sigma,t)}{\partial x}\, d\sigma,$$

откуда в силу (2.12) следует

$$\begin{aligned} |u_n(x,t)|^2 &\leqslant \int_x^t d\sigma \int_x^t \left[\frac{\partial u_n(\sigma,t)}{\partial x}\right]^2 d\sigma \leqslant (t-x)\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial u_n(\sigma,t)}{\partial x}\right]^2 d\sigma \\ &\leqslant (t-x)w_n(t) \leqslant t w_n(t) \leqslant T\exp(m_T T)\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)} \operatorname{mes} D_T \\ &= 2^{-1}T^3\exp(m_T T)\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из (2.13) получаем

$$\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant T\sqrt{\frac{T}{2}}\exp\left(\frac{m_T T}{2}\right)\|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, в силу (2.3), (2.7) будем иметь

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant T\sqrt{\frac{T}{2}}\exp\left(\frac{m_T T}{2}\right)\|f\|_{C(\overline{D}_T)}. \tag{2.14}$$

Этим оценка (2.2) доказана.

Замечание 2.1. Из (2.14) следует, что постоянную c_0 в оценке (2.2) можно взять равной

$$c_0 := T\sqrt{\frac{T}{2}}\exp\left(\frac{m_T T}{2}\right). \tag{2.15}$$

Ниже, используя классический метод характеристик и принимая во внимание (2.2), мы получим априорную оценку в пространстве $C^1(\overline{D}_T)$ для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T.

Имеет место следующая

Лемма 2.2. *При условиях леммы 2.1 для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leqslant c_1 \tag{2.16}$$

с положительной постоянной $c_1 = c_1(T, c_0, \|f\|_{C(\overline{D}_T)})$, где

$$\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)} := \max\{\|u\|_{C(\overline{D}_T)}, \|u_x\|_{C(\overline{D}_T)}, \|u_t\|_{C(\overline{D}_T)}\}.$$

Доказательство. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T. Тогда справедливы предельные равенства (2.3), (2.4), где u_n можно рассматривать как решение задачи (2.5), (2.6) с правой частью f_n из (2.7). Для фиксированного натурального n введем следующие функции:

$$u_{n1} := u_{nt} - u_{nx}, \qquad u_{n2} := u_{nt} + u_{nx}, \qquad u_{n3} := u_n, \tag{2.17}$$

которые с учетом (2.2) при $0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют граничным условиям

$$u_{n1}(0,t) = u_{n2}(0,t), \qquad u_{n2}(t,t) = 0, \qquad u_{n3}(t,t) = 0. \tag{2.18}$$

В силу (1.1) и (2.17) неизвестные функции u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{n1}}{\partial t} + \dfrac{\partial u_{n1}}{\partial x} = f_n(x,t) - \dfrac{1}{2}\, g(x,t,u_{n3})(u_{n1} + u_{n2}), \\ \dfrac{\partial u_{n2}}{\partial t} - \dfrac{\partial u_{n2}}{\partial x} = f_n(x,t) - \dfrac{1}{2}\, g(x,t,u_{n3})(u_{n1} + u_{n2}), \\ \dfrac{\partial u_{n3}}{\partial t} - \dfrac{\partial u_{n3}}{\partial x} = u_{n1}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Интегрируя уравнения системы (2.19) вдоль соответствующих характеристических кривых и учитывая граничные условия (2.18), получим

$$\begin{cases} u_{n1}(x,t) - u_{n1}(0,t) = \displaystyle\int_{t-x}^{t} \Big[f_n(P_\tau) - \frac{1}{2}\, g(P_\tau, u_{n3}(P_\tau))(u_{n1}(P_\tau) + u_{n2}(P_\tau)) \Big]\, d\tau, \\ u_{n2}(x,t) = \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} \Big[f_n(Q_\tau) - \frac{1}{2}\, g(Q_\tau, u_{n3}(Q_\tau))(u_{n1}(Q_\tau) + u_{n2}(Q_\tau)) \Big]\, d\tau, \\ u_{n3}(x,t) = \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} u_{n1}(Q_\tau)\, d\tau, \end{cases}$$

где $P_\tau := (x - t + \tau, \tau)$, $Q_\tau := (x + t - \tau, \tau)$.

Из второго уравнения полученной системы и первого равенства (2.18) с учетом обозначения $P_{\tau_0} := (t-\tau, \tau)$ вытекает, что эта система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} u_{n1}(x,t) = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{t-x}^{t} [g(P_\tau, u_{n3}(P_\tau))(u_{n1}(P_\tau) + u_{n2}(P_\tau))]\, d\tau \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{t/2}^{t} [g(P_{\tau_0}, u_{n3}(P_{\tau_0}))(u_{n1}(P_{\tau_0}) + u_{n2}(P_{\tau_0}))]\, d\tau + F_{n1}(x,t), \\ u_{n2}(x,t) = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} g(Q_\tau, u_{n3}(Q_\tau))(u_{n1}(Q_\tau) + u_{n2}(Q_\tau))\, d\tau + F_{n2}(x,t), \\ u_{n3}(x,t) = \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} u_{n1}(Q_\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{2.20}$$

Здесь

$$F_{n1}(x,t) := \int_{t-x}^{t} f_n(P_\tau)\, d\tau + \int_{t/2}^{t} f_n(P_{\tau_0})\, d\tau, \qquad F_{n2}(x,t) := \int_{(x+t)/2}^{t} f_n(Q_\tau)\, d\tau. \tag{2.21}$$

Переходя в равенствах (2.20), (2.21) к пределу при $n \to \infty$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ и принимая во внимание (2.3), (2.4), (2.7) и (2.17), будем иметь

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{t} [g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau)+u_2(P_\tau))]\,d\tau \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t/2}^{t} [g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0})+u_2(P_{\tau_0}))]\,d\tau + F_1(x,t), \\ u_2(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau)+u_2(Q_\tau))\,d\tau + F_2(x,t), \\ u_3(x,t) = \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} u_1(Q_\tau)\,d\tau, \end{cases} \tag{2.22}$$

где $u_i := \lim_{n\to\infty} u_{ni}$ (по норме пространства $C(\overline{D}_T)$), $i = 1,2,3$, и

$$F_1(x,t) := \int_{t-x}^{t} f(P_\tau)\,d\tau + \int_{t/2}^{t} f(P_{\tau_0})\,d\tau, \qquad F_2(x,t) := \int_{(x+t)/2}^{t} f(Q_\tau)\,d\tau. \tag{2.23}$$

Очевидно, что $u_3 = u$ и она является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T. При этом

$$u_1 := u_t - u_x, \qquad u_2 := u_t + u_x. \tag{2.24}$$

Пусть $G_T := \{(x,t,s) \in \mathbb{R}^3 : (x,t) \in \overline{D}_T,\ |s| \leqslant c_0 \|f\|_{C(\overline{D}_T)}\}$ и

$$K := \sup_{(x,t,s)\in G_T} |g(x,t,s)| < +\infty, \tag{2.25}$$

где $K = K(T, c_0, \|f\|_{C(\overline{D}_T)})$.

Тогда в силу априорной оценки (2.2) для сильного обобщенного решения $u_3 = u$ задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T получим

$$|g(x,t,u_3(x,t))| \leqslant K, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{2.26}$$

Пусть

$$v_i(t) := \sup_{(\xi,\tau)\in\overline{D}_t} |u_i(\xi,\tau)|, \quad i = 1,2,3, \qquad F(t) := \sup_{(\xi,\tau)\in\overline{D}_t} |f(\xi,\tau)|. \tag{2.27}$$

Из (2.22) в силу (2.23), (2.26) и (2.27) следует, что

$$\begin{aligned} |u_1(x,t)| &\leqslant K \int_0^t (v_1(\tau)+v_2(\tau))\,d\tau + 2tF(t), \\ |u_2(x,t)| &\leqslant \frac{K}{2} \int_0^t (v_1(\tau)+v_2(\tau))\,d\tau + tF(t), \\ |u_3(x,t)| &\leqslant \int_0^t v_1(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда при $(\xi,\tau)\in\overline{D}_t$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
|u_1(\xi,\tau)| &\leqslant K\int_0^\tau (v_1(\tau_1)+v_2(\tau_1))\,d\tau_1 + 2\tau F(\tau),\\
|u_2(\xi,\tau)| &\leqslant \frac{K}{2}\int_0^\tau (v_1(\tau_1)+v_2(\tau_1))\,d\tau_1 + \tau F(\tau),\\
|u_3(\xi,\tau)| &\leqslant \int_0^\tau v_1(\tau_1)\,d\tau_1
\end{aligned}
$$

и, следовательно, в силу (2.27) и того факта, что $tF(t)$ является неубывающей функцией, получим

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &\leqslant K\int_0^t (v_1(\tau)+v_2(\tau))\,d\tau + 2tF(t),\\
v_2(t) &\leqslant \frac{K}{2}\int_0^t (v_1(\tau)+v_2(\tau))\,d\tau + tF(t),\\
v_3(t) &\leqslant \int_0^t v_1(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Полагая $v(t):=\max_{1\leqslant i\leqslant 3} v_i(t)$, из полученных неравенств будем иметь

$$
v(t)\leqslant 2K\int_0^t v(\tau)\,d\tau + 2tF(t),
$$

откуда, применяя лемму Гронуолла, получим

$$
v(t)\leqslant 2tF(t)\exp(2tK)\leqslant 2T\exp(2TK)\|f\|_{C(\overline{D}_T)},\qquad 0\leqslant t\leqslant T.
$$

Теперь из (2.24) легко следует, что

$$
\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)}\leqslant \|v\|_{C[0,T]}\leqslant 2T\exp(2TK)\|f\|_{C(\overline{D}_T)}.
$$

Лемма 2.2 доказана, причем

$$
c_1 := 2T\exp(2TK)\|f\|_{C(\overline{D}_T)}, \tag{2.28}
$$

где K определяется из (2.25).

3. Эквивалентность задачи (1.1), (1.2) системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и ее локальная разрешимость. Прежде всего покажем, что задача (2.5), (2.6) эквивалентна задаче (2.19), (2.18) в классическом смысле. Действительно, если $u_n\in C^2$ – решение задачи (2.5), (2.6), то система функций u_{n1}, u_{n2} и u_{n3} будет, очевидно, решением задачи (2.19), (2.18). Обратно, пусть $u_{n1},u_{n2},u_{n3}\in C^1$ – решения задачи (2.19), (2.18). Покажем, что $u_n:=u_{n3}\in C^2$ – решение задачи (2.5), (2.6) и удовлетворяет равенствам (2.17). Если мы покажем, что $u_{n2}=u_{nt}+u_{nx}$, то, очевидно, будут иметь место равенства $u_{nt}=(u_{n2}+u_{n1})/2$ и $u_{nx}=(u_{n2}-u_{n1})/2$, откуда непосредственно будет следовать, что $u_n\in C^2$ является решением задачи (2.5), (2.6) в классическом смысле.

Действительно, из первого и второго уравнений системы (2.19) следует, что

$$
\frac{\partial u_{n1}}{\partial t}+\frac{\partial u_{n1}}{\partial x}=\frac{\partial u_{n2}}{\partial t}-\frac{\partial u_{n2}}{\partial x}\,. \tag{3.1}
$$

Далее, поскольку $u_{n1} \in C^1$, из третьего уравнения системы (2.19) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{n3} \in C \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{n3} \in C.$$

Отсюда, принимая во внимание, что операторы дифференцирования первого порядка с постоянными коэффициентами перестановочны, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{n3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}u_{n3} \in C,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{n3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}u_{n3} \in C.$$

С учетом этих равенств, (3.1) и третьего равенства системы (2.19) имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)&(u_{n2} - u_{nt} - u_{nx}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{n2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_n - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u_n \\ &= \frac{\partial u_{n2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n2}}{\partial x} - \frac{\partial u_{n1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу второго и третьего равенств из (2.18) заключаем, что $u_{n2} = u_{nt} + u_{nx}$. Этим доказана эквивалентность задач (2.5), (2.6) и (2.19), (2.18) в классическом смысле.

Выше мы привели редукцию задачи (1.1), (1.2) к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22). Прежде чем рассмотреть вопрос о локальной разрешимости задачи (1.1), (1.2), сделаем следующее замечание, которое непосредственно вытекает из рассуждений, приведенных в п. 2.

Замечание 3.1. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T, тогда $u_1 := u_t - u_x$, $u_2 := u_t + u_x$, $u_3 := u$ является непрерывным решением системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22). И наоборот, если u_1, u_2, u_3 – непрерывное решение системы (2.22), то $u := u_3$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T, причем справедливы равенства $u_1 := u_t - u_x$, $u_2 := u_t + u_x$.

Теперь приступим к доказательству локальной разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22).

Пусть

$$f \in C(\overline{D}_\infty), \qquad f_\infty := \sup_{(x,t)\in\overline{D}_\infty} |f(x,t)| < +\infty, \qquad g \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

и для $(x,t) \in \overline{D}_\infty$ и s, s_1, s_2 таких, что $|s|, |s_1|, |s_2| \leqslant R$, выполнено

$$|g(x,t,s)| \leqslant M(R), \qquad |g(x,t,s_2) - g(x,t,s_1)| \leqslant c(R)|s_2 - s_1|, \tag{3.3}$$

где $M(R)$ и $c(R)$ – некоторые неотрицательные непрерывные функции аргумента $R \geqslant 0$.

Теорема 3.1. *Пусть функции f и g удовлетворяют условиям* (3.2), (3.3). *Тогда найдется положительное число $T_* := T_*(f,g)$ такое, что при $T \leqslant T_*$ задача* (1.1), (1.2) *будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение и класса C^1 в области D_T.*

Доказательство. Согласно замечанию 3.1 задача (1.1), (1.2) в пространстве $C^1(\overline{D}_T)$ эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22) в классе $C(\overline{D}_T)$. Однозначную разрешимость системы (2.22) ниже мы докажем принципом сжатых отображений [26; с. 390].

Положим $U := (u_1, u_2, u_3)$. Введем векторный оператор $\Phi := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, действующий по формуле

$$\begin{cases} (\Phi_1 U)(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{t} g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau) + u_2(P_\tau))\,d\tau \\ \qquad\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t/2}^{t} g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}) + u_2(P_{\tau_0}))\,d\tau + F_1(x,t), \\ (\Phi_2 U)(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau) + u_2(Q_\tau))\,d\tau + F_2(x,t), \\ (\Phi_3 U)(x,t) = \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{t} u_1(Q_\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{3.4}$$

Тогда систему (2.22) можно переписать в векторном виде

$$U = \Phi U. \tag{3.5}$$

Пусть

$$\|U\|_{X_T} := \max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\|u_i\|_{C(\overline{D}_T)}\}, \qquad U \in X_T := C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3),$$

где $C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3)$ – множество непрерывных вектор-функций $U\colon \overline{D}_T \to \mathbb{R}^3$.

Обозначим через $B_R := \{U \in X_T : \|U\|_{X_T} \leqslant R\}$ замкнутый шар радиуса $R > 0$ в банаховом пространстве X_T с центром в нулевом элементе.

Ниже докажем, что

(1) Φ отображает шар B_R в себя;

(2) Φ является сжимающим отображением на B_R.

Действительно, в силу первого неравенства (3.3) из (3.4) для U такого, что $\|U\|_{X_T} \leqslant R$, имеем

$$|(\Phi_1 U)(x,t)| \leqslant 2T(RM(R) + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}),$$
$$|(\Phi_2 U)(x,t)| \leqslant T(RM(R) + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}), \qquad |(\Phi_3 U)(x,t)| \leqslant TR.$$

Из этих оценок следует, что

$$\|\Phi U\|_{X_T} \leqslant 2T(RM(R) + R + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}) \leqslant 2T(RM(R) + R + f_\infty),$$

где f_∞ определено в (3.2).

Потребуем, чтобы при фиксированном $R > 0$ величина T была столь малой, чтобы

$$2T(RM(R) + R + f_\infty) \leqslant R, \tag{3.6}$$

т.е. $\Phi U \in B_R$ и, тем самым, условие (1) выполнено.

Далее, в силу (3.3) из (3.4) для U^i такого, что $\|U^i\|_{X_T} \leqslant R$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned}
&|(\Phi_1 U^2 - \Phi_1 U^1)(x,t)| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t} \big(|g(P_\tau, u_3^2(P_\tau)) - g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))||u_1^2(P_\tau) + u_2^2(P_\tau)| \\
&\qquad\qquad + |g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))||u_1^2(P_\tau) - u_1^1(P_\tau) + u_2^2(P_\tau) - u_2^1(P_\tau)|\big)\, d\tau \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{t/2}^{t} \big(|g(P_{\tau_0}, u_3^2(P_{\tau_0})) - g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))||u_1^2(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0})| \\
&\qquad\qquad + |g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))||u_1^2(P_{\tau_0}) - u_1^1(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0}) - u_2^1(P_{\tau_0})|\big)\, d\tau \\
&\quad \leqslant 2T[Rc(R) + M(R)]\|U^2 - U^1\|_{X_T}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&|(\Phi_2 U^2 - \Phi_2 U^1)(x,t)| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{t} \big(|g(Q_\tau, u_3^2(Q_\tau)) - g(Q_\tau, u_3^1(Q_\tau))||u_1^2(Q_\tau) + u_2^2(Q_\tau)| \\
&\qquad\qquad + |g(Q_\tau, u_3^1(Q_\tau))||u_1^2(Q_\tau) - u_1^1(Q_\tau) + u_2^2(Q_\tau) - u_2^1(Q_\tau)|\big)\, d\tau \\
&\quad \leqslant T[Rc(R) + M(R)]\|U^2 - U^1\|_{X_T},
\end{aligned}$$

$$|(\Phi_3 U^2 - \Phi_3 U^1)(x,t)| \leqslant \int_{(x+t)/2}^{t} |u_1^2(Q_\tau) - u_1^1(Q_\tau)|\, d\tau \leqslant T\|U^2 - U^1\|_{X_T}.$$

Пусть при фиксированном $R > 0$ число T является столь малым, что

$$\max\{T, 2T(Rc(R) + M(R))\} \leqslant \frac{1}{2} < 1, \tag{3.7}$$

и, тем самым, $\|\Phi U^2 - \Phi U^1\|_{X_T} \leqslant (1/2)\|U^2 - U^1\|_{X_T}$. Таким образом, оператор Φ является сжимающим отображением на множестве B_R, т.е. условие (2) выполнено.

Из (3.6) и (3.7) в свою очередь следует, что если $0 < T \leqslant T_*$, где

$$T_* := \min\left\{\frac{R}{2(RM(R) + R + f_\infty)}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4(Rc(R) + M(R))}\right\}, \tag{3.8}$$

тогда $\|\Phi U\|_{X_T} \leqslant R$ и $\|\Phi U^2 - \Phi U^1\|_{X_T} \leqslant (1/2)\|U^2 - U^1\|_{X_T}$ для $U, U^1, U^2 \in B_R$. Поэтому в силу принципа о сжимающем отображении существует решение U уравнения (3.5) в пространстве $C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3)$. Теорема 3.1 доказана.

4. Случай глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2). Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.1), (3.2) *и* (3.3). *Тогда для любого* $T > 0$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет сильное обобщенное решение класса* C^1 *в области* D_T.

Доказательство. Как было отмечено в замечании 3.1, задача (1.1), (1.2) в классе $C^1(\overline{D}_T)$ эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений (2.22) в классе $C(\overline{D}_T)$. В силу (3.2), (3.3) справедливость этой теоремы при достаточно малых T, а именно при $T \leqslant T_*$, где T_* дается равенством (3.8), следует из теоремы 3.1. Пусть теперь $T > T_*$, а $U^{T_*} := (u_1^{T_*}, u_2^{T_*}, u_3^{T_*})$ – решение системы нелинейных интегральных уравнений (2.22) или, что то же самое, векторного уравнения (3.5) в области D_{T_*} класса $C(\overline{D}_{T_*})$ согласно теореме 3.1. Для $t > \Delta t_1 := T_*$ систему (2.22) перепишем в виде

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_1(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau)+u_2(P_\tau))\,d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_2(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0})+u_2(P_{\tau_0}))\,d\tau + F_{1,\Delta t_1}(x,t), \\ u_2(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau)+u_2(Q_\tau))\,d\tau + F_{2,\Delta t_1}(x,t), \\ u_3(x,t) = \displaystyle\int_{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)}^{t} u_1(Q_\tau)\,d\tau + F_{3,\Delta t_1}(x,t), \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\alpha_1(x,t,\Delta t_1) := \max(\Delta t_1, t-x), \qquad \alpha_2(x,t,\Delta t_1) := \max\biggl(\Delta t_1, \frac{t}{2}\biggr),$$
$$\alpha_3(x,t,\Delta t_1) := \max\biggl(\Delta t_1, \frac{x+t}{2}\biggr);$$

$$\begin{cases} F_{1,\Delta t_1}(x,t) := -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{\alpha_1(x,t,\Delta t_1)} g(P_\tau, u_3^{T_*}(P_\tau))(u_1^{T_*}(P_\tau)+u_2^{T_*}(P_\tau))\,d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t/2}^{\alpha_2(x,t,\Delta t_1)} g(P_{\tau_0}, u_3^{T_*}(P_{\tau_0}))(u_1^{T_*}(P_{\tau_0})+u_2^{T_*}(P_{\tau_0}))\,d\tau + F_1(x,t), \\ F_{2,\Delta t_1}(x,t) := -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(x+t)/2}^{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)} g(Q_\tau, u_3^{T_*}(Q_\tau))(u_1^{T_*}(Q_\tau)+u_2^{T_*}(Q_\tau))\,d\tau + F_2(x,t), \\ F_{3,\Delta t_1}(x,t) := \displaystyle\int_{(x+t)/2}^{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)} u_1^{T_*}(Q_\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{4.2}$$

Поскольку выполняются условия леммы 2.2, то при любом положительном $\tau \leqslant T$ для решения векторного уравнения (3.5) в области D_τ класса $C(\overline{D}_\tau)$ справедлива априорная оценка

$$\|U\|_{C(\overline{D}_\tau)} \leqslant R^T(\|f\|_{C(\overline{D}_\tau)}), \tag{4.3}$$

где $R^T = R^T(s)$ – неубывающая непрерывная функция своего аргумента $s \geqslant 0$.

Положим $R_* := R^T(\|f\|_{C(\overline{D}_T)})$.

В качестве Δt_2 второго шага по t возьмем

$$\Delta t_2 := \min\biggl\{\frac{1}{4M(R_1)R_1}, \frac{1}{4c(R_1)R_1}\biggr\}, \tag{4.4}$$

где

$$R_1 := 1 + 2TM(R_*)R_* + \|F\|_{C(\overline{D}_T)}, \qquad F := (F_1, F_2, F_3). \tag{4.5}$$

Систему уравнений (4.1) при $t \in [T_*, T_*+\Delta t_2]$ перепишем в виде одного векторного уравнения

$$U = \Psi U, \tag{4.6}$$

где оператор $\Psi := (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ действует по формуле

$$\begin{cases} (\Psi_1 U)(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_1(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau)+u_2(P_\tau))\,d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_2(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}))+u_2(P_{\tau_0}))\,d\tau + F_{1,\Delta t_1}(x,t), \\ (\Psi_2 U)(x,t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)}^{t} g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau)+u_2(Q_\tau))\,d\tau + F_{2,\Delta t_1}(x,t), \\ (\Psi_3 U)(x,t) = \displaystyle\int_{\alpha_3(x,t,\Delta t_1)}^{t} u_1(Q_\tau)d\tau + F_{3,\Delta t_1}(x,t). \end{cases} \tag{4.7}$$

Сначала покажем, что оператор Ψ переводит шар

$$B([T_1,T_2];R_1) := \{U \in C(\overline{D}_{T_1,T_2}) : \|U\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} \leqslant R_1\}$$

в себя, где

$$T_1 = T_*, \qquad T_2 = T_* + \Delta t_2, \qquad \overline{D}_{T_1,T_2} := \overline{D} \cap \{T_1 \leqslant t \leqslant T_2\}.$$

Действительно, в силу (3.3), (4.2)–(4.5) и (4.7) имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_1 U\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} &\leqslant 2M(R_1)R_1\Delta t_2 + 2M(R_*)R_*\Delta t_1 + \|F_1\|_{C(\overline{D}_T)} \\ &\leqslant 2^{-1} + 2TM(R_*)R_* + \|F\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant R_1. \end{aligned}$$

Аналогично $\|\Psi_i U\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} \leqslant R_1$, $i = 2, 3$, и, тем самым, окончательно получим, что

$$\|\Psi U\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} \leqslant R_1.$$

Теперь покажем, что оператор Ψ является сжимающим отображением в этом шаре. Действительно, при $(x,t) \in \overline{D}_{T_1,T_2}$ в силу (3.3), (4.4) и (4.7) имеем

$$\begin{aligned} &|(\Psi_1 U^2 - \Psi_1 U^1)(x,t)| \\ &\quad\leqslant \frac{1}{2}\int_{\alpha_1(x,t,\Delta t_1)}^{t} \big(|g(P_\tau, u_3^2(P_\tau)) - g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))||u_1^2(P_\tau) + u_2^2(P_\tau)| \\ &\qquad\qquad + |g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))||u_1^2(P_\tau) - u_1^1(P_\tau) + u_2^2(P_\tau) - u_2^1(P_\tau)|\big)\,d\tau \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1(x,t,\Delta t_1)}^{t} \big(|g(P_{\tau_0}, u_3^2(P_{\tau_0})) - g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))||u_1^2(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0})| \\ &\qquad\qquad + |g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))||u_1^2(P_{\tau_0}) - u_1^1(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0}) - u_2^1(P_{\tau_0})|\big)\,d\tau \\ &\quad\leqslant 2c(R_1)R_1\Delta t_2\|u_3^2 - u_3^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} + 2M(R_1)\Delta t_2\|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} \\ &\quad\leqslant \frac{1}{2}\|u_3^2 - u_3^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} + \frac{1}{2R_1}\|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} \end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2R_1}\right)\|U^2-U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})} = q_1\|U^2-U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})},$$

где $q_1 := (1/2)(1+1/R_1) < 1$, так как $R_1 > 1$ в силу (4.5). Аналогично получаем, что

$$|(\Psi_i U^2 - \Psi_i U^1)(x,t)| \leqslant q_i\|U^2-U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1,T_2})}, \quad 0 < q_i := \mathrm{const} < 1, \qquad i = 2,3.$$

Отсюда, в силу теоремы о сжимающем отображении следует разрешимость системы (4.6) в классе $C(\overline{D}_{T_1,T_2})$.

Продолжая этот процесс шаг за шагом и учитывая, что в силу глобальной априорной оценки (4.3) длина каждого шага Δt_i не зависит от его номера i, мы получим глобальную разрешимость системы (3.5), а, тем самым, и самой задачи (1.1), (1.2) в области D_T для любого $T > 0$.

5. Единственность решения задачи (1.1), (1.2).

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* (3.2), (3.3). *Тогда для любого* $T > 0$ *задача* (1.1), (1.2) *не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса* C^1 *в области* D_T.

Доказательство. Действительно, предположим, что задача (1.1), (1.2) имеет два возможных различных сильных обобщенных решения u^1 и u^2 класса C^1 в области D_T. Согласно определению 1.1 существует такая последовательность функций $u_n^i \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n^i - u^i\|_{C^1(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|Lu_n^i - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad i = 1,2, \tag{5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|g(x,t,u_n^i)u_{nt}^i - g(x,t,u^i)u_t^i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad i = 1,2. \tag{5.2}$$

Воспользуемся известным обозначением $\Box := \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ и положим $\omega_{nm} := u_n^2 - u_m^1$. Легко видеть, что функция $\omega_{nm} \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\Box\omega_{nm} + g_{nm} = f_{nm}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x}\bigg|_{\gamma_{2,T}} = 0, \qquad \omega_{nm}|_{\gamma_{1,T}} = 0, \tag{5.4}$$

где

$$g_{nm} := g(x,t,u_n^2)u_{nt}^2 - g(x,t,u_m^1)u_{mt}^1, \qquad f_{nm} := Lu_n^2 - Lu_m^1. \tag{5.5}$$

В силу первого равенства из (5.1) найдется такое число $A := \mathrm{const} > 0$, не зависящее от индексов i и n, что

$$\|u_n^i\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leqslant A. \tag{5.6}$$

Согласно вторым равенствам (5.1) и (5.5) имеем

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{5.7}$$

В силу (3.2), (3.3), (5.6) и первого равенства (5.5) легко видеть, что

$$g_{nm}^2 = \left(g(x,t,u_n^2)\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} + (g(x,t,u_n^2) - g(x,t,u_m^1))u_{mt}^1\right)^2$$
$$\leqslant 2M^2(A)\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2 + 2A^2c^2(A)\omega_{nm}^2. \tag{5.8}$$

Умножая обе части равенства (5.3) на $\partial\omega_{nm}/\partial t$ и, интегрируя полученное равенство по области D_τ, в силу (5.4), так же, как при получении неравенства (2.11) из (2.5), (2.6), будем иметь

$$w_{nm}(\tau) := \int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2\right]dx = 2\int_{D_\tau}(f_{nm} - g_{nm})\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\,dx\,dt. \tag{5.9}$$

В силу оценки (5.8) и неравенства Коши получаем

$$2\int_{D_\tau}(f_{nm} - g_{nm})\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\,dx\,dt$$
$$\leqslant \int_{D_\tau}(f_{nm} - g_{nm})^2\,dx\,dt + \int_{D_\tau}\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2dx\,dt$$
$$\leqslant 2\int_{D_\tau} f_{nm}^2\,dx\,dt + 2\int_{D_\tau} g_{nm}^2\,dx\,dt + \int_{D_\tau}\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2dx\,dt$$
$$\leqslant 2\int_{D_\tau} f_{nm}^2\,dx\,dt + 4A^2c^2(A)\int_{D_\tau}\omega_{nm}^2\,dx\,dt + (1+4M^2(A))\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2dx\,dt. \tag{5.10}$$

Далее, в силу равенства

$$\omega_{nm}(x,t) = \int_x^t \frac{\partial \omega_{nm}(x,\tau)}{\partial t}\,d\tau, \qquad (x,t)\in \overline{D}_T,$$

которое следует из второго равенства (5.4), стандартными рассуждениями вытекает неравенство [25; с. 63]

$$\int_{D_\tau}\omega_{nm}^2\,dx\,dt \leqslant \tau^2\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2dx\,dt. \tag{5.11}$$

Из (5.9)–(5.11) следует, что

$$w_{nm}(\tau) \leqslant (1 + 4M^2(A) + 4\tau^2A^2c^2(A))\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t}\right)^2dx\,dt + 2\int_{D_\tau} f_{nm}^2\,dx\,dt$$
$$\leqslant (1 + 4M^2(A) + 4T^2c^2(A))\int_0^\tau w_{nm}(\sigma)\,d\sigma + 2\int_{D_T} f_{nm}^2\,dx\,dt.$$

Следовательно, в силу леммы Гроноулла [24; с. 13] получаем, что

$$w_{nm}(\tau) \leqslant c_2\|f_{nm}\|_{L_2(D_T)}^2, \qquad 0<\tau\leqslant T, \tag{5.12}$$

где $c_2 := 2\exp(1 + 4M^2(A) + 4T^2A^2c^2(A))T$.

Проводя те же рассуждения, которые привели к оценке (2.13), а также учитывая очевидное неравенство

$$\|f_{nm}\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant \|f_{nm}\|^2_{C(\overline{D}_T)} \operatorname{mes} D_T,$$

в силу (5.12) для $(x,t) \in \overline{D}_T$ будем иметь

$$|\omega_{nm}(x,t)|^2 \leqslant t w_{nm}(t) \leqslant T c_2 \operatorname{mes} D_T \|f_{nm}\|^2_{C(\overline{D}_T)} = \frac{c_2 T^3}{2} \|f_{nm}\|^2_{C(\overline{D}_T)}.$$

Отсюда непосредственно следует

$$\|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant T\sqrt{\frac{c_2 T}{2}} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)}. \tag{5.13}$$

Согласно определению функции ω_{nm} и первого равенства легко видеть, что

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\omega_{nm}\|_{C^1(\overline{D}_T)} = \|u^2 - u^1\|_{C^1(\overline{D}_T)}$$

и, тем более,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} = \|u^2 - u^1\|_{C(\overline{D}_T)}.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (5.13) к пределу при $n, m \to \infty$, с учетом (5.7) получим $\|u^2 - u^1\|_{C(\overline{D}_T)} = 0$, т.е. $u^1 = u^2$. Лемма 5.1 доказана.

6. Случай отсутствия глобального решения задачи (1.1), (1.2). Ниже мы покажем, что нарушение условия (2.1) может стать причиной отсутствия глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в смысле определения 1.2. Действительно, пусть $g(x,t,s) = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, и показатель нелинейности $\alpha > -1$.

Лемма 6.1. *Пусть u является сильным обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) *класса C^1 в области D_T в смысле определения* 1.1. *Тогда справедливо следующее интегральное равенство*:

$$\int_{D_T} u\Box\varphi \, dx\, dt = \int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi \, dx\, dt + \int_{D_T} f\varphi \, dx\, dt \tag{6.1}$$

для любой функции φ такой, что

$$\varphi \in C^2(\overline{D}_T), \qquad \varphi|_{t=T} = 0, \qquad \varphi_t|_{t=T} = 0, \qquad \varphi_x|_{\gamma_{2,T}} = 0. \tag{6.2}$$

Доказательство. Согласно определению сильного обобщенного решения u задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T функция $u \in C^1(\overline{D}_T)$ и найдется такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что справедливы равенства (2.5) и (2.6) для $g = -|s|^\alpha s$.

Положим $f_n := Lu_n$. Умножим обе части равенства $Lu_n = f_n$ на функцию φ и проинтегрируем полученное равенство по области D_T. В результате интегрирования левой части этого равенства по частям с учетом (6.2) и условий (1.2) получим

$$\int_{D_T} u_n\Box\varphi \, dx\, dt = \int_{D_T} |u_n|^\alpha u_n u_{nt} \varphi \, dx\, dt + \int_{D_T} f_n\varphi \, dx\, dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, в силу (2.5) и (2.6) получим (6.1). Этим лемма 6.1 доказана.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi^0 := \varphi^0(x,t)$ такую, что

$$\begin{gathered}\varphi^0 \in C^2(\overline{D}_\infty), \qquad \varphi^0 + \varphi^0_t \leqslant 0, \qquad \varphi^0|_{D_{T=1}} > 0, \\ \varphi^0_x|_{\gamma_{2,\infty}} = 0, \qquad \varphi^0|_{t\geqslant 1} = 0\end{gathered} \tag{6.3}$$

и число

$$\kappa_0 := \int_{D_{T=1}} \frac{|\Box\varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}}\,dx\,dt < +\infty, \qquad p' = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}. \tag{6.4}$$

Легко проверить, что в качестве функции φ^0, удовлетворяющей условиям (6.3) и (6.4) при достаточно больших положительных постоянных n и m, может быть взята функция

$$\varphi^0(x,t) = \begin{cases} x^n(1-t)^m, & (x,t) \in D_{T=1}, \\ 0, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Положим $\varphi_T(x,t) := \varphi^0(x/T, t/T)$, $T > 0$. В силу (6.3) легко видеть, что

$$\begin{gathered}\varphi_T \in C^2(\overline{D}_T), \qquad \varphi_T + T\frac{\partial \varphi_T}{\partial t} \leqslant 0, \qquad \varphi_T|_{D_T} > 0, \\ \frac{\partial \varphi_T}{\partial x}\bigg|_{\gamma_{2,T}} = 0, \qquad \varphi_T|_{t=T} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_T}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0.\end{gathered} \tag{6.5}$$

При заданном f рассмотрим функцию

$$\zeta(T) := \int_{D_T} f\varphi_T\,dx\,dt, \qquad T > 0. \tag{6.6}$$

Имеет место следующая теорема об отсутствии глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 6.1. *Пусть $g(x,t,s) = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$, $f \in C(\overline{D}_\infty)$ и $f \geqslant 0$ в области D_∞. Тогда, если*

$$\liminf_{T\to+\infty} \zeta(T) > 0, \tag{6.7}$$

то найдется такое положительное число $T^* := T^*(f)$, что при $T > T^*$ задача (1.1), (1.2) не может иметь сильного обобщенного решения и класса C^1 в области D_T.

Доказательство. Предположим, что при условиях этой теоремы существует сильное обобщенное решение u задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T. Тогда в силу леммы 6.1 имеет место равенство (6.1), в котором в силу (6.5) в качестве φ может быть взята функция $\varphi = \varphi_T$, т.е.

$$\int_{D_T} u\Box\varphi_T\,dx\,dt = \int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi_T\,dx\,dt + \int_{D_T} f\varphi_T\,dx\,dt. \tag{6.8}$$

С учетом (1.2) и (6.5) имеем

$$\begin{aligned}\int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi_T\,dx\,dt &= \frac{1}{\alpha+2}\int_{D_T} \varphi_T \frac{\partial}{\partial t}|u|^{\alpha+2}\,dx\,dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+2}\int_{D_T} |u|^{\alpha+2}\frac{\partial \varphi_T}{\partial t}\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{(\alpha+2)T}\int_{D_T} |u|^{\alpha+2}\varphi_T\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда в силу (6.6) из (6.8) следует, что

$$\frac{1}{pT}\int_{D_T}|u|^p\varphi_T\,dx\,dt \leqslant \int_{D_T}u\Box\varphi_T\,dx\,dt-\zeta(T), \qquad p:=\alpha+2>1. \tag{6.9}$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon>0$

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}b^{p'}, \qquad a,b\geqslant 0, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad p>1$$

возьмем $a=|u|\varphi_T^{1/p}$, $b=|\Box\varphi_T|/\varphi_T^{1/p}$, то с учетом того, что $p'/p=p'-1$, мы получим

$$|u\Box\varphi_T|=|u|\varphi_T^{1/p}\frac{|\Box\varphi_T|}{\varphi_T^{1/p}}\leqslant\frac{1}{pT}|u|^p\varphi_T+\frac{T^{p'-1}}{p'}\frac{|\Box\varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}.$$

В силу (6.9) и последнего неравенства будем иметь

$$\frac{1-\varepsilon}{p}\int_{D_T}\varphi_T\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\int_{D_T}\frac{|\Box\varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}\,dx\,dt-\zeta(T),$$

откуда при ε следует

$$\int_{D_T}|u|^p\varphi_T\,dx\,dt\leqslant\frac{p}{(1-\varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}}\int_{D_T}\frac{|\Box\varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}\,dx\,dt-\frac{p}{1-\varepsilon}\zeta(T).$$

С учетом того, что $p'=p/(p-1)$, $p=p'/(p-1)$ и

$$\min_{0<\varepsilon<1}\frac{p}{(1-\varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}}=p^{p'},$$

где минимум реализуется при $\varepsilon=1/p$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\int_{D_T}|u|^p\varphi_T\,dx\,dt\leqslant p^{p'}\int_{D_T}\frac{|\Box\varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}\,dx\,dt-\frac{p}{1-\varepsilon}\zeta(T). \tag{6.10}$$

Поскольку $\varphi_T(x,t):=\varphi^0(x/T,t/T)$, то в силу (6.3), (6.4), после замены переменных $x=Tx_1$, $t=Tt_1$, легко проверить, что

$$\int_{D_T}\frac{|\Box\varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}\,dx\,dt=T^{-2(p'-1)}\int_{D_{T=1}}\frac{|\Box\varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}}\,dx_1\,dt_1=T^{-2(p'-1)}\kappa_0.$$

Отсюда с учетом (6.5) из (6.10) получим

$$0\leqslant\frac{\kappa_0}{p'T^{p'-1}}-\zeta(T). \tag{6.11}$$

Поскольку $p'=p/(p-1)>1$, то $-2(p'-1)<0$ и в силу (6.4) будем иметь

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\kappa_0}{p'T^{p'-1}}=0.$$

Поэтому в силу (6.7) найдется такое положительное число $T^*:=T^*(f)$, что при $T>T^*$ правая часть неравенства (6.11) будет отрицательной, в то время как левая часть этого неравенства неотрицательна. Отсюда непосредственно следует, что если u – сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T, то обязательно $T\leqslant T^*$, что и доказывает теорему 6.1.

Замечание 6.1. Легко проверить, что если $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \geqslant 0$ и $f(x,t) \geqslant ct^{-m}$ при $t \geqslant 1$, где $c = \mathrm{const} > 0$, $0 \leqslant m = \mathrm{const} \leqslant 2$, то условие (6.7) будет выполнено и, тем самым, при $g = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ задача (1.1), (1.2) при достаточно больших T не будет иметь сильного обобщенного решения u класса C^1 в области D_T.

Действительно, вводя в (6.6) преобразование независимых переменных x и t по формуле $x = Tx_1$, $t = Tt_1$, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}\zeta(T) &= T^2 \int_{D_{T=1}} f(Tx_1, Tt_1)\varphi^0(x_1,t_1)\,dx_1\,dt_1\\ &\geqslant cT^{2-m} \int_{D_{T=1}\cap\{t_1 \geqslant T^{-1}\}} t_1^{-m}\varphi^0(x_1,t_1)\,dx_1\,dt_1\\ &\quad + T^2 \int_{D_{T=1}\cap\{t_1 < T^{-1}\}} f(Tx_1,Tt_1)\varphi^0(x_1,t_1)\,dx_1\,dt_1\end{aligned}$$

в предположении, что $T > 1$. Далее, пусть $T_1 > 1$ – произвольное фиксированное число. Тогда из последнего неравенство для функций ζ будем иметь

$$\begin{aligned}\zeta(T) &\geqslant cT^{2-m} \int_{D_{T=1}\cap\{t_1 \geqslant T^{-1}\}} t_1^{-m}\varphi^0(x_1,t_1)\,dx_1\,dt_1\\ &\geqslant c\int_{D_{T=1}\cap\{t_1 \geqslant T_1^{-1}\}} t_1^{-m}\varphi^0(x_1,t_1)\,dx_1\,dt_1,\end{aligned}$$

если $T \geqslant T_1 > 1$. Из последнего неравенства сразу следует справедливость (6.7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

[2] J.-L. Lions, W. A. Strauss, “Some non linear evolution equations”, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 43–96.

[3] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981.

[4] F. John, “Blow-up of solutions of nonlinear wave equation in three space dimensions”, *Manuscripta Math.*, **28**:1-3 (1979), 235–268.

[5] T. Kato, “Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:4 (1980), 501–505.

[6] T. C. Sideris, “Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions”, *J. Differential Equations*, **52**:3 (1984), 378–406.

[7] V. Georgiev, H. Lindblad, C. D. Sogge, “Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations”, *Amer. J. Math.*, **119**:6 (1997), 1291–1319.

[8] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Math. Appl. (Berlin), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] S. I. Pohozaev, L. Véron, “Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequaties”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **29**:2 (2001), 393–420.

[10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

[11] G. Todorova, E. Vitillaro, “Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$”, *J. Math. Anal. Appl.*, **303**:1 (2005), 242–257.

[12] L. Liu, M. Wang, “Global existence and blow-up of solutions for some hyperbolic systems with damping and source terms”, *Nonlinear Anal.*, **64**:1 (2006), 69–91.

[13] J. Zhu, “Blow-up of solutions of a semilinear hyperbolic equation and a parabolic equation with general forcing term and boundary condition”, *Nonlinear Anal.*, **67**:1 (2007), 33–38.

[14] S. Kharibegashvili, “On the solvability of one multidimensional version of the first Darboux problem for some nonlinear wave equations”, *Nonlinear Anal.*, **68**:4 (2008), 912–924.

[15] С. С. Харибегашвили, “О разрешимости характеристической задачи Коши для некоторых нелинейных волновых уравнений в световом конусе будущего”, *Дифференц. уравнения*, **44**:1 (2008), 129–139.

[16] O. Jokhadze, “On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **340**:2 (2008), 1033–1045.

[17] Г. К. Берикелашвили, О. М. Джохадзе, Б. Г. Мидодашвили, С. С. Харибегашвили, “О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **44**:3 (2008), 359–372.

[18] О. М. Джохадзе, С. С. Харибегашвили, “О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка”, *Матем. заметки*, **84**:5 (2008), 693–712.

[19] Э. Гурса, *Курс математического анализа.* Т. 3. Ч. 1. *Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными*, Гостехиздат, М.-Л., 1933.

[20] Е. И. Моисеев, “О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями”, *Дифференц. уравнения*, **20**:1 (1984), 73–87.

[21] Е. И. Моисеев, *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.

[22] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.

[23] S. Kharibegashvili, “Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems”, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **4** (1995), 1–127.

[24] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.

[25] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

[26] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

С. С. Харибегашвили
Тбилисский государственный университет
им. И. Джавахишвили
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

Поступило
28.02.2011

О. М. Джохадзе
Тбилисский государственный университет
им. И. Джавахишвили
E-mail: ojokhadze@yahoo.com