С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе, О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 121–148

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8249

УДК 517.956.35

**С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе**

# О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения

Рассмотрена смешанная задача для одномерного полулинейного волнового уравнения с нелинейным граничным условием. Такое условие возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины при упругом закреплении одного из ее концов, не подчиняющемся линейному закону Гука. Исследованы вопросы единственности, существования глобальных и взрывных решений этой задачи в зависимости от характера нелинейностей, присутствующих как в уравнении, так и в краевом условии.

Библиография: 14 названий.

**Ключевые слова:** полулинейное волновое уравнение, нелинейное граничное условие, априорная оценка, теоремы сравнения, глобальные и взрывные решения.

## § 1. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных $x$ и $t$ в области $D_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим смешанную задачу определения решения $u(x,t)$ полулинейного волнового уравнения вида

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x,t), \qquad (x,t) \in D_T, \tag{1.1}$$

удовлетворяющего следующим начальным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.2}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t) = F[u(0,t)] + \beta(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

где $f$, $\varphi$, $\psi$, $\beta$, $\nu$, $g$ и $F$ – заданные функции своих аргументов, а $u$ – искомая действительная функция.

Отметим, что при $f \in C(\overline{D}_T)$, $g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\beta \in C^1([0,T])$, $\nu \in C^2([0,T])$ необходимыми условиями разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в классе $C^2(\overline{D}_T)$ являются следующие условия согласования второго порядка:

$$\begin{gathered} \varphi'(0) = F[\varphi(0)] + \beta(0), \qquad \psi'(0) = F'[\varphi(0)]\psi(0) + \beta'(0), \\ \varphi(l) = \nu(0), \qquad \psi(l) = \nu'(0), \qquad \nu''(0) - \varphi''(l) + g[\varphi(l)] = f(l,0). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Положим $\Gamma := \Gamma_1 \cup \omega_0 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \{(x,t) : x = 0,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $\omega_0 = \{(x,t) : t = 0,\, 0 \leqslant x \leqslant l\}$, $\Gamma_2 = \{(x,t) : x = l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Определение 1.1. Пусть функции

$$
\begin{aligned}
&f \in C(\overline{D}_T), \qquad g, F \in C(\mathbb{R}), \qquad \varphi \in C^1([0,l]),\\
&\psi \in C([0,l]), \qquad \beta \in C([0,T]), \qquad \nu \in C^1([0,T])
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

удовлетворяют следующим условиям согласования первого порядка:

$$
\varphi'(0) = F[\varphi(0)] + \beta(0), \qquad \varphi(l) = \nu(0), \qquad \psi(l) = \nu'(0). \tag{1.6}
$$

Функцию $u$ будем называть сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$, если $u \in C(\overline{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{D}_T)$, что

$$
\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|Lu_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{1.7}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \|u_n(\,\cdot\,,0) - \varphi\|_{C^1(\omega_0)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_{nt}(\,\cdot\,,0) - \psi\|_{C(\omega_0)} = 0, \tag{1.8}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \big\|u_{nx}(0,\,\cdot\,) - F[u_n(0,\,\cdot\,)] - \beta\big\|_{C(\Gamma_1)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \big\|u_n(l,\,\cdot\,) - \nu\big\|_{C^1(\Gamma_2)} = 0. \tag{1.9}
$$

Замечание 1.1. В случае $\nu = 0$ в определении (1.1) от последовательности $u_n$ потребуем, чтобы $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_2) := \big\{v \in C^2(\overline{D}_T) : v|_{\Gamma_2} = 0\big\}$.

Замечание 1.2. Очевидно, что классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.3) является сильным обобщенным решением этой задачи класса $C$ в области $D_T$.

Отметим, что нелинейное граничное условие вида (1.3) возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины в случае упругого закрепления одного из ее концов, когда натяжение на этом конце является нелинейной функцией смещения [1; гл. II, § 1, п. 7, равенство (56)], а также при описании процессов в распределенных автоколебательных системах [2; дополнение при корректуре, п. 3, равенство (Д.7)], [3]. Задача (1.1)–(1.3) для конкретных нелинейных функций, присутствующих в уравнении (1.1) и в краевом условии (1.3), как в одномерном, так и в многомерном случае рассмотрена во многих работах (см., например, [4]–[8] и цитированную там литературу). В основном в этих работах решения $u = u(x,t)$ рассматриваются в энергетических пространствах, когда решения и их частные производные при фиксированном $t$ принадлежат пространствам Соболева по пространственным переменным. В настоящей работе задача (1.1)–(1.3) исследуется в пространстве непрерывных функций для достаточно широких классов нелинейных функций, присутствующих как в уравнении (1.1), так и в краевых условиях (1.3).

Работа организована следующим образом. В § 2 при некоторых ограничениях на функции $g$, $F$, $\beta$ и $\nu$ получена априорная оценка для сильного обобщенного решения $u$ задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения 1.1. В § 3 приведена эквивалентная редукция поставленной задачи к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра в классе непрерывных функций. В § 4 доказаны теоремы сравнения решений некоторых смешанных задач, а также теорема единственности решения нелинейной смешанной задачи (1.1)–(1.3). В § 5 рассмотрен вопрос о разрешимости в целом в области $D_T$,

$T \leqslant l$, задачи (1.1)–(1.3) в классе непрерывных функций, а также вопрос о существовании глобального классического решения этой задачи в области $D_\infty$. В § 6 изучен вопрос о локальной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) без всяких ограничений структурного характера, налагаемых на непрерывные функции $g$, $F$, $\beta$ и $\nu$. В этом же параграфе рассмотрен вопрос о существовании взрывных решений задачи (1.1)–(1.3).

## § 2. Априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.3)

Рассмотрим условия

$$G(g;s) := \int_0^s g(s_1)\,ds_1 \geqslant -M_1 s^2 - M_2, \qquad \int_0^s F(s_1)\,ds_1 \geqslant -M_3 \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $M_i := \mathrm{const} \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* $\beta = \nu = 0$. *Тогда для сильного обобщенного решения* $u$ *задачи* (1.1)–(1.3) *класса* $C$ *в области* $D_T$ *в смысле определения* 1.1 *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2\|\varphi\|_{C^1(\omega_0)} + c_3\|\psi\|_{C(\omega_0)} + c_4\|G(|g|;|\varphi|)\|^{1/2}_{C(\omega_0)} + c_5\|F\|_{C([-|\varphi(0)|,|\varphi(0)|])} + c_6 \tag{2.2}$$

*с положительными постоянными* $c_i = c_i(M_1, M_2, M_3, l, T)$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, *не зависящими от функций* $u$, $g$, $f$, $\varphi$, $\psi$, $F$.

Доказательство. Пусть $u$ – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$. Тогда в силу определения 1.1 существует такая последовательность функций $u_n \in \mathring{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_2)$, что справедливы предельные равенства (1.7)–(1.9).

Рассмотрим функцию $u_n \in \mathring{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_2)$ как решение следующей задачи:

$$Lu_n = f_n, \tag{2.3}$$

$$u_n|_{\omega_0} = \varphi_n, \qquad u_{nt}|_{\omega_0} = \psi_n, \tag{2.4}$$

$$u_{nx}|_{\Gamma_1} = F(u_n)|_{\Gamma_1} + \chi_n. \tag{2.5}$$

Здесь

$$f_n := Lu_n, \tag{2.6}$$

$$\varphi_n := u_n|_{\omega_0}, \qquad \psi_n := u_{nt}|_{\omega_0}, \tag{2.7}$$

$$\chi_n := u_{nx}|_{\Gamma_1} - F(u_n)|_{\Gamma_1}. \tag{2.8}$$

Умножая обе части равенства (2.3) на $u_{nt}$ и интегрируя по области $D_\tau$, $0 < \tau \leqslant T$, получим

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} (u_{nt}^2)_t\,dx\,dt - \int_{D_\tau} u_{nxx}u_{nt}\,dx\,dt + \int_{D_\tau} [G(g;u_n)]_t\,dx\,dt = \int_{D_\tau} f_n u_{nt}\,dx\,dt. \tag{2.9}$$

Положим $\omega_\tau = \{(x,t) : t = \tau,\, 0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$. Пусть $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial D_\tau$. Легко видеть, что

$$\begin{gathered} \nu_x|_{\omega_\tau} = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \qquad \nu_x|_{\Gamma_1} = -1, \qquad \nu_x|_{\Gamma_2} = 1, \\ \nu_t|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \qquad \nu_t|_{\omega_0} = -1, \qquad \nu_t|_{\omega_\tau} = 1, \quad 0 < \tau \leqslant T. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Применяя интегрирование по частям (формулы Грина), с учетом (2.4), (2.10) и того, что согласно замечанию 1.1 $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_2)$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{D_\tau} (u_{nt}^2)_t\, dx\, dt + \int_{D_\tau} [G(g; u_n)]_t\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{\partial D_\tau} u_{nt}^2 \nu_t\, ds + \int_{\partial D_\tau} G(g; u_n)\nu_t\, ds \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{\omega_\tau} u_{nt}^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\omega_0} \psi_n^2\, dx + \int_{\omega_\tau} G(g; u_n)\, dx - \int_{\omega_0} G(g; \varphi_n)\, dx, \\ &\qquad - \int_{D_\tau} u_{nxx} u_{nt}\, dx\, dt = \int_{D_\tau} [u_{nx} u_{ntx} - (u_{nx} u_{nt})_x]\, dx\, dt \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{D_\tau} (u_{nx}^2)_t\, dx\, dt - \int_{\partial D_\tau} u_{nx} u_{nt} \nu_x\, ds = \frac{1}{2}\int_{\partial D_\tau} u_{nx}^2 \nu_t\, ds + \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nx} u_{nt}\, dt \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{\omega_\tau} u_{nx}^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\omega_0} \varphi_{nx}^2\, dx + \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nx} u_{nt}\, dt, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\Gamma_{1,\tau} := \Gamma_1 \cap \{t \leqslant \tau\}$.

В силу (2.11) равенство (2.9) перепишем в виде

$$\begin{aligned} 2\int_{D_\tau} f_n u_{nt}\, dx\, dt &= 2\int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nx} u_{nt}\, dt + \int_{\omega_\tau} (u_{nx}^2 + u_{nt}^2)\, dx \\ &\quad + 2\int_{\omega_\tau} G(g; u_n)\, dx - \int_{\omega_0} (\varphi_{nx}^2 + \psi_n^2)\, dx - 2\int_{\omega_0} G(g; \varphi_n)\, dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

С учетом (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nx} u_{nt}\, dt &= \int_0^\tau F[u_n(0,t)]du_n(0,t) + \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0,t)\, dt \\ &= \int_{\varphi_n(0)}^{u_n(0,\tau)} F(s_1)\, ds_1 + \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0,t)\, dt \\ &= \int_{\varphi_n(0)}^{0} F(s_1)\, ds_1 + \int_0^{u_n(0,\tau)} F(s_1)\, ds_1 + \alpha_n(\tau), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\alpha_n(\tau) := \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0,t)\, dt,$$

причем в силу условий (1.9), (2.8) и того, что $\beta = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n\|_{C([0,T])} = 0. \tag{2.14}$$

Согласно (2.1) и (2.13) из (2.12) получаем

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &:= \int_{\omega_\tau} (u_{nx}^2 + u_{nt}^2)\,dx \\ &\leqslant 2\int_{D_\tau} f_n u_{nt}\,dx\,dt + \int_{\omega_0} (\varphi_{nx}^2 + \psi_n^2)\,dx + 2\int_{\omega_0} G(g;\varphi_n)\,dx + 2M_1 \int_{\omega_\tau} u_n^2\,dx \\ &\quad + 2\int_0^{\varphi_n(0)} F(s_1)\,ds_1 + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0,T])}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Далее, поскольку в силу (2.7)

$$u_n(x,\tau) = \varphi_n(x) + \int_0^\tau u_{nt}(x,t)\,dt,$$

имеем

$$|u_n(x,\tau)|^2 \leqslant 2\varphi_n^2(x) + 2\biggl(\int_0^\tau u_{nt}(x,t)\,dt\biggr)^2 \leqslant 2\varphi_n^2(x) + 2\tau\int_0^\tau u_{nt}^2(x,t)\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\omega_\tau} u_n^2\,dx \leqslant 2\|\varphi_n\|_{L_2(\omega_0)}^2 + 2T\int_0^\tau w_n(s)\,ds, \tag{2.16}$$

где $w_n$ определена в левой части (2.15).

Примем во внимание (2.16) и неравенства

$$\begin{gathered} 2f_n u_{nt} \leqslant u_{nt}^2 + f_n^2, \qquad \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 \leqslant lT\|f_n\|_{C(D_T)}^2, \\ \int_{D_\tau} u_{nt}^2\,dx\,dt = \int_0^\tau \biggl[\int_{\omega_s} u_{nt}^2\,dx\biggr] ds \leqslant \int_0^\tau w_n(s)\,ds, \\ \int_{\omega_0} (\varphi_{nx}^2 + \psi_n^2)\,dx + 2\int_{\omega_0} G(g;\varphi_n)\,dx \\ \leqslant l\|\varphi_n'\|_{C(\omega_0)}^2 + l\|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + 2l\|G(|g|;|\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)}, \\ 2\int_0^{\varphi_n(0)} F(s_1)\,ds_1 \leqslant 2|\varphi_n(0)|\,\|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])} \\ \leqslant \varphi_n^2(0) + \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])}^2, \\ 4M_1\|\varphi_n\|_{L_2(\omega_0)}^2 + \varphi_n^2(0) + l\|\varphi_n'\|_{C(\omega_0)}^2 \leqslant (4M_1 l + 1)\|\varphi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + l\|\varphi_n'\|_{C(\omega_0)}^2 \\ \leqslant l_0(\|\varphi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + \|\varphi_n'\|_{C(\omega_0)}^2) \leqslant l_0\|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2, \qquad l_0 := \max(4M_1 l + 1, l). \end{gathered}$$

Тогда из (2.15) будем иметь

$$\begin{aligned} w_n(\tau) \leqslant (4M_1T + 1)\int_0^\tau w_n(s)\,ds + lT\|f_n\|_{C(D_T)}^2 + l_0\|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2 + l\|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 \\ + 2l\|G(|g|;|\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} + \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])}^2 \\ + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0,T])}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла следует, что

$$\begin{aligned}w_n(\tau) \leqslant \Big[ & lT\|f_n\|^2_{C(D_T)} + l_0\|\varphi_n\|^2_{C^1(\omega_0)} + l\|\psi_n\|^2_{C(\omega_0)} \\ & + 2l\|G(|g|;|\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} + \|F\|^2_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])} \\ & + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0,T])}\Big] \exp[T(4M_1T+1)]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Если $(x,t) \in \overline{D}_T$, то в силу определения пространства $\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_2)$ имеет место равенство

$$u_n(x,t) = u_n(x,t) - u_n(l,t) = \int_l^x u_{nx}(s,t)\,ds,$$

откуда в силу (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned}|u_n(x,t)|^2 &\leqslant \int_x^l ds \int_x^l u_{nx}^2(s,t)\,ds \leqslant (l-x)\int_{\omega_t} u_{nx}^2(s,t)\,ds \leqslant (l-x)w_n(t) \leqslant l w_n(t) \\ &\leqslant \Big[l^2T\|f_n\|^2_{C(D_T)} + ll_0\|\varphi_n\|^2_{C^1(\omega_0)} + l^2\|\psi_n\|^2_{C(\omega_0)} + 2l^2\|G(|g|;|\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} \\ &\quad + l\|F\|^2_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])} + 2l(M_2l+M_3) + 2l\|\alpha_n\|_{C([0,T])}\Big] \\ &\quad \times \exp[T(4M_1T+1)].\end{aligned}$$

Отсюда, используя очевидное неравенство $\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^m |a_i|$, получаем

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant \Big[ & l\sqrt{T}\|f_n\|_{C(\overline{D}_T)} + \sqrt{ll_0}\|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)} + l\|\psi_n\|_{C(\omega_0)} \\ & + l\sqrt{2}\|G(|g|;|\varphi_n|)\|^{1/2}_{C(\omega_0)} + \sqrt{l}\|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|,|\varphi_n(0)|])} + \sqrt{2l(M_2l+M_3)} \\ & + \sqrt{2l\|\alpha_n\|_{C([0,T])}}\ \Big] \exp[2^{-1}T(4M_1T+1)].\end{aligned}$$

В силу (1.7), (1.8), (2.7) и (2.14), переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant \Big[ & l\sqrt{T}\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + \sqrt{ll_0}\|\varphi\|_{C^1(\omega_0)} + l\|\psi\|_{C(\omega_0)} + l\sqrt{2}\|G(|g|;|\varphi|)\|^{1/2}_{C(\omega_0)} \\ & + \sqrt{l}\|F\|_{C([-|\varphi(0)|,|\varphi(0)|])} + \sqrt{2l(M_2l+M_3)}\Big] \exp[2^{-1}T(4M_1T+1)].\end{aligned} \tag{2.18}$$

Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Из (2.18) следует, что в оценке (2.2) для постоянных $c_i$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, справедливы выражения

$$\begin{gathered} c_1 = l\sqrt{T}c_0, \qquad c_2 = \sqrt{ll_0}c_0, \qquad c_3 = lc_0, \qquad c_4 = l\sqrt{2}c_0, \qquad c_5 = \sqrt{l}c_0, \\ c_6 = \sqrt{2l(M_2l+M_3)}c_0, \quad \text{где } \ c_0 := \exp[2^{-1}T(4M_1T+1)]. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Замечание 2.2. Приведем некоторые классы функций, которые часто встречаются в приложениях и для которых выполнены условия (2.1):

1) $g(s) = g_0(s)\operatorname{sign}(s) + as + b$, где $g_0 \in C(\mathbb{R})$, $g_0 \geqslant 0$, $a, b, s \in \mathbb{R}$;

2) $F(s) = F_0(s)\operatorname{sign}(s) + as + b$, где $F_0 \in C(\mathbb{R})$, $F_0 \geqslant 0$, $a, b, s \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

3) $g \in C(\mathbb{R})$, $g\big|_{(-\infty,0)} \in L_1(-\infty, 0)$, $g\big|_{(0,+\infty)} \geqslant 0$ (например, $g(s) = \exp(s)$, $s \in \mathbb{R}$).

Замечание 2.3. Ниже будет показано (см. п. 5), что, вообще говоря, и в случае нарушения условия (2.1) тем не менее справедлива априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.3), но для более узких классов функций $f$, $\varphi$, $\psi$, $\beta$ и $\nu$ по сравнению с теми, которые приведены в лемме 2.1.

## § 3. Редукция задачи (1.1)–(1.3) к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

В области $D_l$ рассмотрим следующую линейную смешанную задачу:

$$\square w := w_{tt} - w_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \qquad (x,t) \in D_l, \tag{3.1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad w_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.2}$$

$$w_x(0,t) = \widetilde{\beta}(t), \quad w(l,t) = \nu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant l, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{f} \in C^1(\overline{D}_l), \qquad \varphi \in C^2([0,l]), \qquad \psi \in C^1([0,l]), \\ \widetilde{\beta} \in C^1([0,l]), \qquad \nu \in C^2([0,l]) \end{gathered} \tag{3.4}$$

– заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования второго порядка:

$$\begin{gathered} \varphi'(0) = \widetilde{\beta}(0), \qquad \psi'(0) = \widetilde{\beta}'(0), \qquad \varphi(l) = \nu(0), \\ \psi(l) = \nu'(0), \qquad \nu''(0) - \varphi''(l) = \widetilde{f}(l,0), \end{gathered} \tag{3.5}$$

а $w \in C^2(\overline{D}_l)$ – искомая функция.

Решение задачи (3.1)–(3.3) будем искать в квадратурах в удобной форме

$$w(x,t) = A_1(\widetilde{f}, \widetilde{\beta})(x,t) + B_1(\varphi, \psi, \nu)(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_l, \tag{3.6}$$

где операторы $A_1$ и $B_1$ будут построены ниже в явном виде.

С этой целью разобьем область $D_l$, являющуюся квадратом с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,l)$, $B(l,l)$ и $C(l,0)$, на четыре прямоугольных треугольника $\Delta_1 := \Delta OO_1C$, $\Delta_2 := \Delta OO_1A$, $\Delta_3 := \Delta CO_1B$ и $\Delta_4 := \Delta O_1AB$, где точка $O_1(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ – центр квадрата $D_l$. В треугольнике $\Delta_1$ решение задачи (3.1)–(3.3), как известно, дается формулой [9; гл. V, § 1, п. 2, формула (18)]

$$\begin{aligned} w(x,t) = \frac{1}{2}\bigl[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)\bigr] \\ + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega^1_{x,t}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t) \in \Delta_1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\Omega^1_{x,t}$ – треугольник с вершинами в точках $(x,t)$, $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Для получения решения задачи (3.1)–(3.3) в остальных треугольниках $\Delta_2$, $\Delta_3$ и $\Delta_4$ следует воспользоваться равенством [10; гл. III, § 15, п. 1, равенства (6)]

$$w(P) = w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2}\int_{PP_1P_2P_3} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{3.8}$$

которое справедливо для любого характеристического для уравнения (3.1) прямоугольника $PP_1P_2P_3 \subset \overline{D}_l$, где $P$ и $P_3$, а также $P_1$ и $P_2$ – противоположные вершины этого прямоугольника, причем ордината точки $P$ больше ординат остальных точек.

Пусть теперь точка $(x,t) \in \Delta_2$. Тогда, полагая

$$\widetilde{\mu} := w|_{\Gamma_1} \tag{3.9}$$

и применяя равенство (3.8) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0,t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x,0)$, а формулу (3.7) для точки $P_2(t,x) \in \Delta_1$, получим

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2}\int_{PP_1P_2P_3} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\
&= \widetilde{\mu}(t-x) - \varphi(t-x) + \frac{1}{2}\big[\varphi(t-x) + \varphi(t+x)\big] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega^1_{t,x}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{PP_1P_2P_3} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\
&= \widetilde{\mu}(t-x) + \frac{1}{2}\big[\varphi(t+x) - \varphi(t-x)\big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega^2_{x,t}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t) \in \Delta_2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь $\Omega^2_{x,t}$ – четырехугольник $P\widetilde{P}_2P_3P_1$, где $\widetilde{P}_2 = \widetilde{P}_2(t+x,0)$.

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \nu(x+t-l) + \frac{1}{2}\big[\varphi(x-t) - \varphi(2l-x-t)\big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{2l-x-t} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega^3_{x,t}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t) \in \Delta_3,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \widetilde{\mu}(t-x) + \nu(x+t-l) - \frac{1}{2}\big[\varphi(t-x) + \varphi(2l-t-x)\big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{2l-t-x} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega^4_{x,t}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t) \in \Delta_4.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь $\Omega^3_{x,t}$ – четырехугольник с вершинами $P^3(x,t)$, $P^3_1(l,x+t-l)$, $P^3_2(x-t,0)$ и $P^3_3(2l-x-t,0)$, а $\Omega^4_{x,t}$ – пятиугольник с вершинами $P^4(x,t)$, $P^4_1(0,t-x)$, $P^4_2(t-x,0)$, $P^4_3(2l-x-t,0)$ и $P^4_4(l,x+t-l)$.

Принимая во внимание, что при $(x,t) \in \Delta_2$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^2_{x,t}} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{t-x} d\tau \int_{-x+t-\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t} d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi,$$

в силу (3.10) будем иметь

$$\begin{aligned} w_x(x,t) = -\widetilde{\mu}'(t-x) &+ \frac{1}{2}\bigl[\varphi'(t+x)+\varphi'(t-x)+\psi(t+x)+\psi(t-x)\bigr] \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t-x}\bigl[\widetilde{f}(x+t-\tau,\tau)+\widetilde{f}(-x+t-\tau,\tau)\bigr]\,d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t}\bigl[\widetilde{f}(x+t-\tau,\tau)-\widetilde{f}(x-t+\tau,\tau)\bigr]\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Аналогично находим, что при $(x,t)\in\Delta_2$

$$\begin{aligned} w_t(x,t) = \widetilde{\mu}'(t-x) &+ \frac{1}{2}\bigl[\varphi'(t+x)-\varphi'(t-x)+\psi(t+x)-\psi(t-x)\bigr] \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t-x}\bigl[\widetilde{f}(x+t-\tau,\tau)-\widetilde{f}(-x+t-\tau,\tau)\bigr]\,d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t}\bigl[\widetilde{f}(x+t-\tau,\tau)+\widetilde{f}(x-t+\tau,\tau)\bigr]\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Полагая $x=0$ в равенстве (3.13) и учитывая краевое условие (3.3), для неизвестной функции $\widetilde{\mu}$ получим равенство

$$-\widetilde{\mu}'(t)+\varphi'(t)+\psi(t)+\int_0^t \widetilde{f}(t-\tau,\tau)\,d\tau = \widetilde{\beta}(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant l,$$

интегрирование которого с учетом начального условия $\widetilde{\mu}(0)=\varphi(0)$ дает

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(t) = A_2(\widetilde{f},\widetilde{\beta})(t)+B_2(\varphi,\psi,\nu)(t) &:= -\int_0^t \widetilde{\beta}(\tau)\,d\tau+\varphi(t)+\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau \\ &+ \int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1}\widetilde{f}(\tau_1-\tau,\tau)\,d\tau, \qquad 0\leqslant t\leqslant l. \end{aligned} \tag{3.15}$$

На основе формул (3.10), (3.12) решение задачи (3.1)–(3.3) в областях $\Delta_2$ и $\Delta_4$ с учетом (3.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w(x,t) = -\int_0^{t-x}\widetilde{\beta}(\tau)\,d\tau &+ \int_0^{t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\int_0^{t-x}d\tau_1\int_0^{\tau_1}\widetilde{f}(\tau_1-\tau,\tau)\,d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\bigl[\varphi(t+x)+\varphi(t-x)\bigr]+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega^2_{x,t}}\widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t)\in\Delta_2, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} w(x,t) = -\int_0^{t-x}\widetilde{\beta}(\tau)\,d\tau &+ \int_0^{t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\nu(x+t-l) \\ &+ \int_0^{t-x}d\tau_1\int_0^{\tau_1}\widetilde{f}(\tau_1-\tau,\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\bigl[\varphi(t-x)-\varphi(2l-t-x)\bigr] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t-x}^{2l-t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{\Omega^4_{x,t}}\widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t)\in\Delta_4. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Замечание 3.1. Если $w$ – решение задачи (3.1)–(3.3), то для пары функций $(w, \widetilde{\mu} := w|_{\Gamma_1})$ в силу равенств (3.6) и (3.15) справедливо интегральное представление

$$(w, \widetilde{\mu}) = A(\widetilde{f}, \widetilde{\beta}) + B(\varphi, \psi, \nu), \tag{3.18}$$

где $A := (A_1, A_2)$, $B := (B_1, B_2)$, причем операторы $A_1$, $A_2$ действуют на парах функций $(\widetilde{f}, \widetilde{\beta})$, а операторы $B_1$, $B_2$ – на тройках функций $(\varphi, \psi, \nu)$ согласно формулам (3.7), (3.11), (3.15)–(3.17).

Замечание 3.2. Легко проверить, что в случае $\widetilde{f} \in C(\overline{D}_l)$, $\varphi \in C^1([0,l])$, $\psi \in C([0,l])$, $\widetilde{\beta} \in C([0,l])$, $\nu \in C^1([0,l])$, если выполнены условия согласования первого порядка: $\varphi'(0) = \widetilde{\beta}(0)$, $\varphi(l) = \nu(0)$, $\psi(l) = \nu'(0)$, то с учетом формул (3.13), (3.14) для производных $w_x$, $w_t$ в области $\Delta_2$ и аналогичных им в остальных областях $\Delta_1$, $\Delta_3$ и $\Delta_4$ пара функций $(w, \widetilde{\mu})$, определенная равенством (3.18), принадлежит классу $C^1(\overline{D}_l) \times C^1([0,l])$ и, более того, линейный оператор

$$A \colon C(\overline{D}_l) \times C([0,l]) \to C^1(\overline{D}_l) \times C^1([0,l]) \tag{3.19}$$

из (3.18) является непрерывным. Аналогичное замечание справедливо для оператора $B$ в соответствующих пространствах функций.

Замечание 3.3. Аналогично предыдущему замечанию можно проверить, что если выполнены условия гладкости (3.4) и согласования второго порядка (3.5), то согласно (3.6) построенная нами функция $w$ с учетом равенств (3.7), (3.11), (3.16) и (3.17) принадлежит классу $C^2(\overline{D}_l)$ и является классическим решением задачи (3.1)–(3.3).

Замечание 3.4. Отметим, что в случае, когда задача (3.1)–(3.3) рассматривается в области $D_T$ при $T \leqslant l$, для пары функций $(w, \widetilde{\mu} := w|_{\Gamma_1})$ приведенное выше интегральное представление (3.18) остается в силе.

Теперь рассмотрим редукцию задачи (1.1)–(1.3) к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Пусть $u$ является сильным обобщенным решением этой задачи класса $C$ в области $D_T$, $T \leqslant l$, т.е. $u \in C(\overline{D}_T)$, и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{D}_T)$, что справедливы предельные равенства (1.7)–(1.9). Рассмотрим функцию $u_n$ как классическое решение задачи (3.1)–(3.3) при

$$\widetilde{f} = -g(u_n) + f_n, \qquad \varphi = \varphi_n, \qquad \psi = \psi_n, \qquad \widetilde{\beta} = F(\mu_n) + \beta_n, \qquad \nu = \nu_n,$$

где

$$f_n := Lu_n, \qquad \varphi_n := u_n|_{\omega_0}, \qquad \psi_n := u_{nt}|_{\omega_0},$$
$$\mu_n := u_n|_{\Gamma_1}, \qquad \beta_n := u_{nx}|_{\Gamma_1} - F(\mu_n), \qquad \nu_n := u_n|_{\Gamma_2}.$$

В силу равенства (3.18) для функции $u_n$ и ее следа $\mu_n := u_n|_{\Gamma_1}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} u_n &= A_1\big(-g(u_n) + f_n, F(\mu_n) + \beta_n\big) + B_1(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \\ \mu_n &= A_2\big(-g(u_n) + f_n, F(\mu_n) + \beta_n\big) + B_2(\varphi_n, \psi_n, \nu_n). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Принимая во внимание замечание 3.2, равенства (1.7)–(1.9) и переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенствах (3.20), получим, что пара функций $(u, \mu := u|_{\Gamma_1})$ в силу (3.18) удовлетворяет нелинейному операторному уравнению

$$(u, \mu) = A_0(u, \mu), \tag{3.21}$$

где

$$A_0(u, \mu) := A\big(-g(u), F(\mu)\big) + A(f, \beta) + B(\varphi, \psi, \nu). \tag{3.22}$$

Замечание 3.5. Легко видеть, что если $(\xi, \tau) \in \Omega^i_{x,t}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, то $\tau \leqslant t$, это в силу формул (3.7), (3.11), (3.15)–(3.17) позволяет нам рассматривать (3.21) как систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно переменной $t$. Отметим, что в линейном случае для этой системы применим сходящийся метод последовательных приближений Пикара в соответствующих пространствах функций.

Замечание 3.6. Аналогично замечанию 3.3 в силу уравнения (3.21) можно заключить, что если $u$ – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$, $T \leqslant l$, причем выполнены дополнительные условия гладкости

$$\begin{gathered} f \in C^1(\overline{D}_T), \qquad g, F \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \varphi \in C^2([0,l]), \\ \psi \in C^1([0,l]), \qquad \beta \in C^1([0,l]), \qquad \nu \in C^2([0,l]) \end{gathered} \tag{3.23}$$

и условия согласования второго порядка (1.4), то $u$ будет классическим решением этой же задачи из пространства $C^2(\overline{D}_T)$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия гладкости (1.5) и согласования первого порядка (1.6). Функция $u$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения 1.1 тогда и только тогда, когда пара функций $(u, \mu := u|_{\Gamma_1})$ является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (3.21).*

Доказательство. Действительно, пусть пара функций $(u, \mu)$ является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (3.21). Так как выполнены условия (1.6), то в силу замечания 3.2 и равенства (3.21) функция $u$ будет принадлежать классу $C^1$. Легко проверить, что

$$u|_{\Gamma_1} = \mu, \qquad u|_{\omega_0} = \varphi, \qquad u_t|_{\omega_0} = \psi, \qquad u_x|_{\Gamma_1} = F(u)|_{\Gamma_1} + \beta, \qquad u|_{\Gamma_2} = \nu. \tag{3.24}$$

Поскольку пространство $C^k(\overline{D}_T)\big(C^k([0,d])\big)$ плотно в $C^{k_1}(\overline{D}_T)\big(C^{k_1}([0,d])\big)$, где $k_1 < k$ [11; гл. I, § 6, теорема 1.6.2], найдутся такие последовательности функций

$$f_n \in C^1(\overline{D}_T), \qquad w_n \in C^2(\overline{D}_T), \tag{3.25}$$

что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|w_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} = 0. \tag{3.26}$$

Аналогично, поскольку $g, F \in C(\mathbb{R})$, найдутся такие последовательности функций

$$g_n, F_n \in C^1(\mathbb{R}), \tag{3.27}$$

что для любого $M := \mathrm{const} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{C([-M,M])} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_{C([-M,M])} = 0. \tag{3.28}$$

Положим

$$\begin{gathered} w_n|_{\omega_0} =: \varphi_n \in C^2([0,l]), \qquad w_{nt}|_{\omega_0} =: \psi_n \in C^1([0,l]), \\ w_n|_{\Gamma_1} =: \mu_n \in C^2([0,T]), \qquad w_{nx}|_{\Gamma_1} - F_n(w_n)|_{\Gamma_1} =: \beta_n \in C^1([0,T]), \\ w_n|_{\Gamma_2} =: \nu_n \in C^2([0,T]). \end{gathered} \tag{3.29}$$

В силу (3.24), (3.26), (3.28) и (3.29) будем иметь

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{C^1(\omega_0)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|_{C(\omega_0)} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\|_{C^1(\Gamma_1)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\beta_n - \beta\|_{C(\Gamma_1)} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \|\nu_n - \nu\|_{C^1(\Gamma_2)} = 0. \end{gathered} \tag{3.30}$$

Отметим, что последовательности функций $f_n$, $w_n$, $g_n$, $F_n$ можно подобрать таким образом, чтобы были выполнены следующие равенства в точках $(0,0)$ и $(l,0)$:

$$\begin{gathered} \varphi_n'(0) = F_n[\varphi_n(0)] + \beta_n(0), \qquad \psi_n'(0) = F_n'[\varphi_n(0)]\psi_n(0) + \beta_n'(0), \\ \varphi_n(l) = \nu_n(0), \qquad \psi_n(l) = \nu_n'(0), \qquad \nu_n''(0) - \varphi_n''(l) + g_n[\varphi_n(l)] = f_n(l,0). \end{gathered} \tag{3.31}$$

Действительно, первые четыре равенства из (3.31) являются следствиями обозначений (3.29). Что же касается последнего равенства из (3.31), то оно может быть достигнуто, если от последовательности $w_n \in C^2(\overline{D}_T)$, кроме второго предельного равенства из (3.26), дополнительно потребовать в точке $(l,0)$, чтобы

$$w_{ntt}(l,0) - w_{nxx}(l,0) + g_n[w_n(l,0)] = f_n(l,0). \tag{3.32}$$

Для этого заметим, поскольку $C^4(\overline{D}_T)$ плотно в $C^1(\overline{D}_T)$, для $u \in C^1(\overline{D}_T)$ найдется такая последовательность функций $\widetilde{w}_n \in C^4(\overline{D}_T)$, что

$$\|\widetilde{w}_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} < \frac{1}{n}.$$

При $\delta \in (0,l)$ рассмотрим на $[0,l]$ непрерывную кусочно линейную функцию

$$h_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \ \ 0 \leqslant x \leqslant l-\delta, \\ -\dfrac{x}{\delta} + \dfrac{l}{\delta} & \text{при} \ \ l-\delta \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

В соответствии с очевидным равенством

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_n(x,t) &= \widetilde{w}_n(x,0) + t\widetilde{w}_{nt}(x,0) + \int_0^t (t-\tau)\widetilde{w}_{ntt}(x,\tau)\,d\tau \\ &= \widetilde{w}_n(l,0) + (x-l)\widetilde{w}_{nx}(l,0) + \int_l^x (x-\xi)\widetilde{w}_{nxx}(\xi,0)\,d\xi \\ &\quad + t\widetilde{w}_{nt}(x,0) + \int_0^t (t-\tau)\widetilde{w}_{ntt}(x,\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

положим

$$\begin{aligned}w_n(x,t) = \widetilde{w}_n(l,0) + (x-l)\widetilde{w}_{nx}(l,0) + \int_l^x (x-\xi)\big[\widetilde{w}_{nxx}(\xi,0)h_\delta(\xi) \\ + k(1-h_\delta(\xi))\big]\,d\xi + t\widetilde{w}_{nt}(x,0) + \int_0^t (t-\tau)\widetilde{w}_{ntt}(x,\tau)\,d\tau, \\ k := \widetilde{w}_{ntt}(l,0) + g_n[\widetilde{w}_n(l,0)] - f_n(l,0).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Очевидно, что функция $w_n$ из (3.33) принадлежит классу $C^2(\overline{D}_T)$ и для нее выполнено условие (3.32). Далее,

$$\begin{aligned}|\widetilde{w}_n(x,t) - w_n(x,t)| &\leqslant \left|\int_l^{\max(x,l-\delta)} (x-\xi)[1-h_\delta(\xi)]\big[\widetilde{w}_{nxx}(\xi,0) - k\big]\,d\xi\right| \\ &\leqslant \delta\Big[\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{w}_{nxx}(x,0)| + |k|\Big], \\ |\widetilde{w}_{nx}(x,t) - w_{nx}(x,t)| & \\ &\leqslant \left|\int_l^{\max(x,l-\delta)} [1-h_\delta(\xi)]\big[\widetilde{w}_{nxx}(\xi,0) - k\big]\,d\xi\right| \leqslant \delta\Big[\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\widetilde{w}_{nxx}(x,0)| + |k|\Big].\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что $\widetilde{w}_{nt} = w_{nt}$ при достаточно малом $\delta$, следует, что $\|\widetilde{w}_n - w_n\|_{C^1(\overline{D}_T)} < \frac{1}{n}$ и, тем самым,

$$\|w_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leqslant \|\widetilde{w}_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} + \|\widetilde{w}_n - w_n\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leqslant \frac{2}{n}.$$

Поэтому построенная таким образом последовательность $w_n$ будет искомой.

Теперь построим последовательность пар функций $(u_n, \mu_n)$ в соответствии с (3.21), (3.22), т.е.

$$u_n = A_1\big(-g_n(w_n) + f_n, F_n(\mu_n) + \beta_n\big) + B_1(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \tag{3.34}$$

$$\mu_n = A_2\big(-g_n(w_n) + f_n, F_n(\mu_n) + \beta_n\big) + B_2(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \tag{3.35}$$

где операторы $A_i$, $B_i$, $i = 1, 2$, определены в замечании 3.1.

В силу (3.25), (3.27), (3.29), (3.31) и замечания 3.3 пара функций $(u_n, \mu_n)$, определенная равенствами (3.34), (3.35), принадлежит классу $C^2(\overline{D}_T)\times C^2([0,T])$ и удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{gathered}\Box u_n = -g_n(w_n) + f_n, \qquad u_n|_{\omega_0} = \varphi_n, \qquad u_{nt}|_{\omega_0} = \psi_n, \\ u_{nx}|_{\Gamma_1} = F_n(\mu_n) + \beta_n, \qquad u_n|_{\Gamma_2} = \nu_n.\end{gathered} \tag{3.36}$$

Приняв во внимание (3.21), (3.22), (3.26), (3.28), (3.30), а также замечания 3.2 и переходя к пределу при $n\to\infty$ в правых частях равенств (3.34), (3.35), получим

$$\begin{aligned}u_n &\to A_1\big(-g(u) + f, F(\mu) + \beta\big) + B_1(\varphi, \psi, \nu) = u, \\ \mu_n &\to A_2\big(-g(u) + f, F(\mu) + \beta\big) + B_2(\varphi, \psi, \nu) = \mu.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\|\mu_n - \mu\|_{C(\Gamma_1)} = 0. \tag{3.37}$$

С другой стороны, в силу (1.1), (3.1), (3.36), а также (3.26), (3.28) имеем: $Lu_n = \Box u_n + g(u_n) = [g(u_n) - g_n(w_n)] + f_n \to f$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \to \infty$. Отсюда, а также из (3.24), (3.26), (3.29), (3.37) и замечания 3.2 вытекают предельные равенства (1.7)–(1.9). Таким образом, функция $u \in C(\overline{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения 1.1. Обратное утверждение нами уже было доказано выше.

Замечание 3.7. Ниже нам понадобятся следующие легко проверяемые неравенства. Поскольку при $(x,t) \in \overline{D}_l$ имеют место неравенства $x-t \leqslant 2l-x-t$, $t-x \leqslant 2l-t-x$, в случае, когда $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ и $\varphi_1' \geqslant \varphi_2'$, где $\varphi_1$, $\varphi_2 \in C^1$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\big[\varphi_1(x-t)+\varphi_1(x+t)\big] \leqslant \frac{1}{2}\big[\varphi_2(x-t)+\varphi_2(x+t)\big], \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$
$$\frac{1}{2}\big[\varphi_1(t+x)+\varphi_1(t-x)\big] \leqslant \frac{1}{2}\big[\varphi_2(t+x)+\varphi_2(t-x)\big], \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_2,$$

и поскольку $(\varphi_2-\varphi_1)' \leqslant 0$, $(\varphi_2-\varphi_1)(x_1) \geqslant (\varphi_2-\varphi_1)(x_2)$ при $x_1 < x_2$, т.е. $\varphi_1(x_1)-\varphi_1(x_2) \leqslant \varphi_2(x_2)-\varphi_2(x_2)$, следовательно,

$$\frac{1}{2}\big[\varphi_1(x-t)-\varphi_1(2l-x-t)\big] \leqslant \frac{1}{2}\big[\varphi_2(x-t)-\varphi_2(2l-x-t)\big], \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_3,$$
$$\frac{1}{2}\big[\varphi_1(t-x)-\varphi_1(2l-t-x)\big] \leqslant \frac{1}{2}\big[\varphi_2(t-x)-\varphi_2(2l-t-x)\big], \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_4.$$

## § 4. Теоремы сравнения решений некоторых вспомогательных смешанных задач. Единственность решения задачи (1.1)–(1.3)

Рассмотрим в области $D_T$, $T \leqslant l$, линейные смешанные задачи в следующей постановке

$$\begin{gathered}\Box v = a_i(x,t)v + \Phi_i(x,t), \qquad (x,t)\in D_T,\\ v(x,0)=\widetilde{\varphi}_i(x), \quad v_t(x,0)=\widetilde{\psi}_i(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,\\ v_x(0,t)=\gamma_i(t)v(0,t)+\widetilde{\beta}_i(t), \quad v(l,t)=\widetilde{\nu}_i(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\end{gathered} \tag{4.1}$$

где $a_i$, $\Phi_i \in C(\overline{D}_T)$, $\widetilde{\varphi}_i \in C^2([0,l])$, $\widetilde{\psi}_i \in C^1([0,l])$, $\gamma_i$, $\widetilde{\beta}_i \in C^1([0,T])$, $\widetilde{\nu}_i \in C^2([0,T])$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования второго порядка: $\widetilde{\varphi}_i'(0) = \gamma_i(0)\widetilde{\varphi}_i(0) + \widetilde{\beta}_i(0)$, $\widetilde{\psi}_i'(0) = \gamma_i'(0)\widetilde{\varphi}_i(0) + \gamma_i(0)\widetilde{\psi}_i(0)+\widetilde{\beta}_i'(0)$, $\widetilde{\varphi}_i(l)=\widetilde{\nu}_i(0)$, $\widetilde{\psi}_i(l)=\widetilde{\nu}_i'(0)$, $\widetilde{\nu}_i''(0)-\widetilde{\varphi}_i''(l) = a_i(l,0)\widetilde{\nu}_i(0)+\Phi_i(l,0)$, $i=1,2$, а $v\in C^2(\overline{D}_T)$ – искомая функция.

Теорема 4.1. *Пусть $v_1$ и $v_2$ – решения задачи (4.1) класса $C^2(\overline{D}_T)$ соответственно при $i=1$ и $i=2$. Тогда если*

$$\begin{gathered}a_1(x,t)\leqslant a_2(x,t), \quad \Phi_1(x,t)\leqslant\Phi_2(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{D}_T,\\ \widetilde{\varphi}_1(x)\leqslant\widetilde{\varphi}_2(x), \quad \widetilde{\varphi}_1'(x)\geqslant\widetilde{\varphi}_2'(x), \quad \widetilde{\psi}_1(x)\leqslant\widetilde{\psi}_2(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,\\ \gamma_1(t)\geqslant\gamma_2(t), \quad \widetilde{\beta}_1(t)\geqslant\widetilde{\beta}_2(t), \quad \widetilde{\nu}_1(t)\leqslant\widetilde{\nu}_2(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\end{gathered} \tag{4.2}$$

*то*

$$v_1(x,t)\leqslant v_2(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{D}_T. \tag{4.3}$$

Доказательство. В силу замечания 3.5 пара функций $(v_i,\, \mu_i := v_i|_{\Gamma_1})$ удовлетворяет следующей системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\begin{aligned} v_i &= A_1(a_i v_i + \Phi_i, \gamma_i \mu_i + \widetilde{\beta}_i) + B_1(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\psi}_i, \widetilde{\nu}_i), \\ \mu_i &= A_2(a_i v_i + \Phi_i, \gamma_i \mu_i + \widetilde{\beta}_i) + B_2(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\psi}_i, \widetilde{\nu}_i), \end{aligned}$$

к которой в метрике пространства $C(\overline{D}_T) \times C([0,T])$ стремятся соответствующие последовательные приближения Пикара

$$\begin{gathered} v_{i,0} = 0, \qquad \mu_{i,0} = 0, \\ v_{i,m} = A_1\bigl(a_i v_{i,m-1} + \Phi_i, \gamma_i \mu_{i,m-1} + \widetilde{\beta}_i\bigr) + B_1(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\psi}_i, \widetilde{\nu}_i), \\ \mu_{i,m} = A_2\bigl(a_i v_{i,m-1} + \Phi_i, \gamma_i \mu_{i,m-1} + \widetilde{\beta}_i\bigr) + B_2(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\psi}_i, \widetilde{\nu}_i), \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$ .

В силу (4.2), представлений (3.7), (3.10)–(3.12) для решения $w$ линейной задачи (3.1)–(3.3) и замечания 3.7 легко видеть, что последовательные приближения $v_{i,m}$, $\mu_{i,m}$, $i = 1, 2$, из (4.4) удовлетворяют следующим неравенствам

$$v_{1,m} \leqslant v_{2,m}, \quad \mu_{1,m} \leqslant \mu_{2,m}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.5}$$

Поскольку $(v_{i,m}, \mu_{i,m}) \to (v_i, \mu_i)$ в пространстве $C(\overline{D}_T) \times C([0,T])$ при $m \to \infty$, переходя к пределу в первом неравенстве из (4.5), получим (4.3). Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим в области $D_T$, $T \leqslant l$, нелинейные смешанные задачи в следующей постановке:

$$\begin{gathered} L_i u := \Box u + g_i(u) = f_i(x,t), \qquad (x,t) \in D_T, \\ u(x,0) = \varphi_i(x), \quad u_t(x,0) = \psi_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(0,t) = F_i[u(0,t)] + \beta_i(t), \quad u(l,t) = \nu_i(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{4.6}$$

где "данные" этой задачи (т.е. функции $f$, $\varphi$, $\psi$, $\beta$, $\nu$, $g$) удовлетворяют условиям гладкости и согласования, указанным в замечании 3.6.

Теорема 4.2. *Пусть $u_1$ и $u_2$ – решения задачи (4.6) класса $C^2(\overline{D}_T)$ соответственно при $i = 1$ и $i = 2$. Тогда если*

$$\begin{gathered} g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad g_2'(s) \leqslant 0; \qquad g_1(s) \geqslant g_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ f_1(x,t) \leqslant f_2(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \\ \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x) \geqslant \varphi_2'(x), \quad \psi_1(x) \leqslant \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad F_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad F_2'(s) \leqslant 0; \qquad F_1(s) \geqslant F_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ \beta_1(t) \geqslant \beta_2(t), \quad \nu_1(t) \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{4.7}$$

*то*

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.8}$$

Доказательство. В силу равенств (4.6) разность $v_2 := u_2 - u_1$ можно рассматривать как решение следующей линейной смешанной задачи:

$$\begin{gathered}\square v_2 = a_2(x,t)v_2 + \Phi_2(x,t), \qquad (x,t) \in D_T,\\ v_2(x,0) = \widetilde{\varphi}_2(x), \quad v_{2t}(x,0) = \widetilde{\psi}_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,\\ v_{2x}(0,t) = \gamma_2(t)v(0,t) + \widetilde{\beta}_2(t), \quad v(l,t) = \widetilde{\nu}_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь

$$a_2 := -\int_0^1 g_2'[u_1 + (u_2 - u_1)s]\,ds, \qquad \Phi_2 := g_1(u_1) - g_2(u_1) + f_2 - f_1,$$

или

$$a_2 := -\int_0^1 g_1'[u_2 + (u_1 - u_2)s]\,ds, \qquad \Phi_2 := g_1(u_2) - g_2(u_2) + f_2 - f_1,$$

$$\widetilde{\varphi}_2 := \varphi_2 - \varphi_1, \qquad \widetilde{\psi}_2 := \psi_2 - \psi_1,$$

$$\gamma_2 := \int_0^1 F_2'[u_1 + (u_2 - u_1)s]\,ds, \qquad \widetilde{\beta}_2 := F_2(u_1) - F_1(u_1) + \beta_2 - \beta_1,$$

или

$$\gamma_2 := \int_0^1 F_1'[u_2 + (u_1 - u_2)s]\,ds, \qquad \widetilde{\beta}_2 := F_2(u_2) - F_1(u_2) + \beta_2 - \beta_1,$$

$$\widetilde{\nu}_2 := \nu_2 - \nu_1.$$

При этом в силу (4.7) будем иметь

$$\begin{gathered}a_2 \geqslant 0, \qquad \Phi_2 \geqslant 0, \qquad \widetilde{\varphi}_2 \geqslant 0, \qquad \widetilde{\varphi}_2' \leqslant 0, \qquad \widetilde{\psi}_2 \geqslant 0,\\ \gamma_2 \leqslant 0, \qquad \widetilde{\beta}_2 \leqslant 0, \qquad \widetilde{\nu}_2 \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.10}$$

Если теперь сравнить решение $v_2$ линейной смешанной задачи (4.9) с решением $v_1 = 0$ соответствующей (4.9) однородной задачи, а также принять во внимание неравенства (4.10), то в силу теоремы сравнения 4.1 получим, что $v_2 \geqslant v_1 = 0$, т.е. имеет место (4.8). Этим теорема 4.2 доказана.

Из замечания 3.6 и теоремы 4.2 непосредственно вытекает следующее

Следствие 4.1. *Если $u_1$ и $u_2$ – сильные обобщенные решения задачи (4.6) класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения 1.1 соответственно при $i = 1$ и $i = 2$ и справедливы условия (4.7), причем для $f = f_i$, $g = g_i$, $F = F_i$, $\varphi = \varphi_i$, $\psi = \psi_i$, $\beta = \beta_i$, $\nu = \nu_i$, $i = 1, 2$, выполнены условия гладкости (3.23) и согласования (1.4), то имеет место (4.8).*

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть $u^i$ – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения 1.1 при $f = f_i$, $\varphi = \varphi_i$, $\psi = \psi_i$,*

$\beta = \beta_i$, $\nu = \nu_i$, $g = g_i$, $F = F_i$, $i = 1, 2$. *Тогда если*

$$g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \textit{или} \quad g_2'(s) \leqslant 0; \qquad g_1(s) \geqslant g_2(s), \quad s \in \mathbb{R},$$
$$f_1(x,t) < f_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{4.11}$$
$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x) > \varphi_2'(x), \quad \psi_1(x) < \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4.12}$$
$$F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad F_1'(s) \leqslant 0 \quad \textit{или} \quad F_2'(s) \leqslant 0; \qquad F_1(s) \geqslant F_2(s), \quad s \in \mathbb{R},$$
$$\beta_1(t) > \beta_2(t), \quad \nu_1(t) < \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.13}$$

*то*

$$u^1(x,t) \leqslant u^2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.14}$$

Доказательство. В условиях теоремы 4.3 существует такая последовательность функций $u_n^i \in C^2(\overline{D}_T)$, $i = 1, 2$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^i - u^i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|L_i u_n^i - f_i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{4.15}$$
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^i(\,\cdot\,,0) - \varphi_i\|_{C^1(\omega_0)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \big\|u_{nt}^i(\,\cdot\,,0) - \psi_i\big\|_{C(\omega_0)} = 0, \tag{4.16}$$
$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \big\|u_{nx}^i(0,\,\cdot\,) - F_i[u_n^i(0,\,\cdot\,)] - \beta_i\big\|_{C(\Gamma_1)} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \big\|u_n^i(l,\,\cdot\,) - \nu_i\big\|_{C^1(\Gamma_2)} = 0. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Рассмотрим функцию $u_n^i \in C^2(\overline{D}_T)$, $i = 1, 2$, как решение следующей задачи:

$$L_i u_n^i = f_{in},$$
$$u_n^i|_{\omega_0} = \varphi_{in}, \qquad u_{nt}^i|_{\omega_0} = \psi_{in}, \qquad u_{nx}^i|_{\Gamma_1} = F_i(u_n^i)|_{\Gamma_1} + \beta_{in}, \qquad u_n^i|_{\Gamma_2} = \nu_{in}. \tag{4.18}$$

Здесь при $i = 1, 2$

$$f_{in} := L_i u_n^i, \qquad \varphi_{in} := u_n^i|_{\omega_0}, \qquad \psi_{in} := u_{nt}^i|_{\omega_0},$$
$$\beta_{in} := u_{nx}^i|_{\Gamma_1} - F_i(u_n^i)|_{\Gamma_1}, \qquad \nu_{in} := u_n^i|_{\Gamma_2}.$$

В силу условия (4.11) и $f_i \in C(\overline{D}_T)$, $i = 1, 2$, имеем $\inf_{(x,t)\in\overline{D}_T}\big(f_2(x,t) - f_1(x,t)\big) = 2\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ и, тем самым,

$$f_1(x,t) + \varepsilon \leqslant f_2(x,t) - \varepsilon, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{4.19}$$

а в силу (4.15) и (4.18) найдется такое натуральное число $n_1$, что при $n > n_1$ справедливы неравенства

$$f_{1n}(x,t) \leqslant f_1(x,t) + \varepsilon, \quad f_2(x,t) - \varepsilon \leqslant f_{2n}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.20}$$

Теперь из (4.19) и (4.20) следует, что

$$f_{2n}(x,t) \geqslant f_2(x,t) - \varepsilon \geqslant f_1(x,t) + \varepsilon \geqslant f_{1n}(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.21}$$

В силу (4.12), (4.13), (4.16)–(4.18) аналогичным образом найдется такое натуральное число $n_2$, что при $n > n_2$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \varphi_{1n}(x) \leqslant \varphi_{2n}(x), \quad \varphi_{1n}'(x) \geqslant \varphi_{2n}'(x), \quad \psi_{1n}(x) \leqslant \psi_{2n}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \beta_{1n}(t) \geqslant \beta_{2n}(t), \quad \nu_{1n}(t) \leqslant \nu_{2n}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Поскольку $u_n^1$ и $u_n^2$ являются решениями задачи (4.18) соответственно при $i=1$ и $i=2$, причем справедливы неравенства (4.21), (4.22) при $n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2)$, в силу теоремы 4.2 будем иметь

$$u_n^1(x,t) \leqslant u_n^2(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \qquad n \geqslant n_0,$$

откуда при $n \to \infty$ следует (4.14). Что и требовалось доказать.

Следствие 4.2. *При выполнении условий* (3.23), (1.4) *и*

$$g'(s) \leqslant 0, \quad F'(s) \leqslant 0, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{4.23}$$

*из доказанных выше теорем непосредственно вытекает единственность сильного обобщенного решения задачи* (1.1)–(1.3) *класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения* 1.1.

Действительно, предположим, что задача (1.1)–(1.3) имеет два различных сильных обобщенных решения $u_1$ и $u_2$ класса $C$ в области $D_T$. Полагая $f_1 = f_2 = f$, $g_1 = g_2 = g$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, $F_1 = F_2 = F$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, с учетом (4.23) и в силу следствия 4.1 будем иметь $u_1 \leqslant u_2$. Теперь, поменяв местами $u_1$ и $u_2$ и снова воспользовавшись следствием 4.1, получим $u_2 \leqslant u_1$. Отсюда следует $u_1 = u_2$, что противоречит нашему допущению.

Единственность сильного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) на самом деле справедлива при менее ограничительных условиях на “данные” этой задачи. Действительно, справедлива следующая

Теорема 4.4. *Задача* (1.1)–(1.3) *не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса $C$ в области $D_T$ в смысле определения* 1.1, *если в* (1.5) *дополнительно потребовать, чтобы $g, F \in C^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Допустим, что задача (1.1)–(1.3) имеет два возможных различных сильных обобщенных решения $u_1$ и $u_2$ класса $C$ в области $D_T$. Тогда в силу леммы 3.1 пары функций $(u_1, \mu_1 := u_1|_{\Gamma_1})$ и $(u_2, \mu_2 := u_2|_{\Gamma_1})$ являются непрерывными решениями нелинейной системы интегральных уравнений (3.21). Положим $u_0 := u_2 - u_1$, $\mu_0 := \mu_2 - \mu_1$. С учетом (3.15) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned} u_0(x,t) = &-\int_0^{t-x} [F(\mu_2) - F(\mu_1)](\tau)\,d\tau \\ &- \int_0^{t-x} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [g(u_2) - g(u_1)](\tau_1 - \tau, \tau)\,d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int_{\Omega_{x,t}^2} [g(u_2) - g(u_1)](\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (x,t) \in \Delta_2, \\ \mu_0(t) = &-\int_0^{t} [F(\mu_2) - F(\mu_1)](\tau)\,d\tau \\ &- \int_0^{t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [g(u_2) - g(u_1)](\tau_1 - \tau, \tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} F(\mu_2)-F(\mu_1) &= \left[\int_0^1 F'[\mu_1+(\mu_2-\mu_1)s]\,ds\right]\mu_0,\\ g(u_2)-g(u_1) &= \left[\int_0^1 g'[u_1+(u_2-u_1)s]\,ds\right]u_0, \end{aligned} \tag{4.25}$$

считая $u_i$, $\mu_i$ фиксированными функциями и полагая

$$\overline{u}_0(t) := \max_{0\leqslant x\leqslant l}|u_0(x,t)|, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

в силу (4.24) и (4.25) получим

$$\begin{aligned} |u_0(x,t)| &\leqslant M_0\int_0^t \big[|\mu_0(\tau)|+\overline{u}_0(\tau)\big]\,d\tau, \qquad (x,t)\in\Delta_2\cap\{t<T\},\\ |\mu_0(t)| &\leqslant M_0\int_0^t \big[|\mu_0(\tau)|+\overline{u}_0(\tau)\big]\,d\tau, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned} \tag{4.26}$$

где $M_0$ – положительная постоянная, зависящая от $g$, $F$ и фиксированных функций $u_i$, $\mu_i$, $i=1,2$. Аналогичные рассуждения, проведенные в остальных областях $\Delta_j\cap\{t<T\}$ при, быть может, увеличении $M_0$, позволяют получить неравенства

$$|u_0(x,t)| \leqslant M_0\int_0^t \big[|\mu_0(\tau)|+\overline{u}_0(\tau)\big]\,d\tau, \qquad (x,t)\in\Delta_j\cap\{t<T\}, \qquad j\neq 2. \tag{4.27}$$

Из (4.26) и (4.27) следует, что

$$|\mu_0(t)|+\overline{u}_0(t) \leqslant 2M_0\int_0^t \big[|\mu_0(\tau)|+\overline{u}_0(\tau)\big]\,d\tau, \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла получим, что $\overline{u}_0(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, т.е. $u_1=u_2$. Полученное противоречие доказывает теорему 4.4.

Следствие 4.3. *Теорема 4.1 и рассуждения, приведенных при доказательстве следствия 4.2 позволяют заключить, что линейная смешанная задача (4.1) не может иметь более одного классического решения.*

## § 5. Случаи разрешимости в целом в области $D_T$ для любого $T\leqslant l$ задачи (1.1)–(1.3) в классе непрерывных функций

При $\tau\in[0,1]$ и $T\leqslant l$ предположим, что $u=u_\tau$ является сильным обобщенным решением класса $C$ в области $D_T$, $T\leqslant l$, следующей задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt}-u_{xx} &= \tau[-g(u)+f(x,t)], \qquad (x,t)\in D_T,\\ u(x,0) = \tau\varphi(x), &\quad u_t(x,0)=\tau\psi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_x(0,t) = \tau\{F[u(0,t)]+\beta(t)\}, &\quad u(l,t)=\tau\nu(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где "данные" этой задачи удовлетворяют условиям гладкости (1.5) и согласования, аналогичным (1.6): $\varphi'(0) = F[\tau\varphi(0)] + \beta(0)$, $\varphi(l) = \nu(0)$, $\psi(l) = \nu'(0)$. Легко видеть, что эти условия будут выполнены, если

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = F(0) + \beta(0), \qquad \varphi(l) = \nu(0), \qquad \psi(l) = \nu'(0). \tag{5.2}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если $u = u_\tau$ является классическим решением задачи (5.1) для любого $\tau \in [0, 1]$, то в соответствии с замечанием 3.6 естественно потребовать, чтобы были выполнены условия гладкости (3.23), а вместо (1.4) имели место равенства

$$\begin{gathered}\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(l) = 0, \qquad \psi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = F(0) + \beta(0),\\ \psi'(0) = \beta'(0), \qquad \varphi(l) = \nu(0), \qquad \psi(l) = \nu'(0), \qquad \nu''(0) - \varphi''(l) + g(0) = f(l, 0).\end{gathered} \tag{5.3}$$

Замечание 5.1. Отметим, что задача (5.1) совпадает с задачей (1.1)–(1.3) при $\tau = 1$ и аналогично определению 1.1 вводится понятие сильного обобщенного решения этой задачи класса $C$ в области $D_T$.

Замечание 5.2. В силу леммы 3.1 задача (5.1) в классе непрерывных функций эквивалентным образом редуцируется к нелинейному операторному уравнению

$$(u, \mu) = \tau A_0(u, \mu), \tag{5.4}$$

где оператор $A_0$, определенный в (3.22), в силу замечания 3.2 действует непрерывным образом из пространства $C(\overline{D}_T) \times C([0, T])$ в пространство $C^1(\overline{D}_T) \times C^1([0, T])$, $T \leqslant l$. Теперь, принимая во внимание, что вложение пространства $C^1(\overline{D}_T) \times C^1([0, T])$ в пространство $C(\overline{D}_T) \times C([0, T])$ является компактным [12; гл. VI, § 8, лемма 6.36], получим, что оператор

$$A_0\colon C(\overline{D}_T) \times C([0, T]) \to C(\overline{D}_T) \times C([0, T]) \tag{5.5}$$

является компактным.

Следствием замечаний 5.1, 5.2 и теоремы Лере–Шаудера [13; гл. VIII, § 35, п. 6, теорема 2] является следующая

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и* (5.2). *Если для любого сильного обобщенного решения* $u = u_\tau$ *задачи* (5.1) *класса* $C$ *в области* $D_T$ *при любом фиксированном* $\tau \in [0, 1]$ *имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant M_*, \tag{5.6}$$

*где неотрицательная постоянная* $M_* = M_*(g, f, \varphi, \psi, F, \beta, \nu)$ *не зависит от* $\tau$, *то задача* (1.1)–(1.3) *имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение класса* $C$ *в области* $D_T$.

Доказательство. Действительно, в силу замечаний 5.1 и 5.2 функция $u \in C(\overline{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (5.4) при $\tau = 1$. Но согласно условию леммы 5.1 для любого решения $u \in C(\overline{D}_T)$ уравнения (5.4) с компактным оператором $A_0$ из (5.5) при любом фиксированном $\tau \in [0,1]$ имеет место априорная оценка (5.6), и, следовательно, согласно теореме Лере–Шаудера уравнение (5.4) при $\tau = 1$ имеет хотя бы одно решение $u \in C(\overline{D}_T)$, которое является также и сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса $C$ в области $D_T$, что и доказывает лемму 5.1.

Следствием лемм 2.1 и 5.1 и теоремы 4.4 является следующая

Теорема 5.1. *Пусть $T \leqslant l$, выполнены условия* (1.5), (5.2), *а также условия леммы* 2.1. *Тогда задача* (1.1)–(1.3) *имеет хотя бы одно сильное обобщенное решение класса $C$ в области $D_T$, которое будет единственным, если к тому же $g, F \in C^1(\mathbb{R})$. Если дополнительно потребовать выполнение условий гладкости* (3.23) *и равенств* (1.4), *то это решение будет и классическим.*

Доказательство. Если “данные” $g$, $f$, $\varphi$, $\psi$, $F$ задачи (1.1)–(1.3) заменить на $\tau g$, $\tau f$, $\tau\varphi$, $\tau\psi$, $\tau F$, то для любого сильного обобщенного решения $u = u_\tau$ класса $C$ в области $D_T$ в силу (2.1), (2.2) и (2.19) имеет место следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned}\|u\|_{C(\overline{D}_T)} &\leqslant c_1\tau\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2\tau\|\varphi\|_{C(\omega_0)} + c_3\tau\|\psi\|_{C(\omega_0)} + c_4\tau^{1/2}\|G(|g|;|\varphi|)\|^{1/2}_{C(\omega_0)}\\ &\qquad + c_5\tau\|F\|_{C([-|\varphi(0)|,|\varphi(0)|])} + \tau^{1/2}c_6\\ &\leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2\|\varphi\|_{C(\omega_0)} + c_3\|\psi\|_{C(\omega_0)} + c_4\|G(|g|;|\varphi|)\|^{1/2}_{C(\omega_0)}\\ &\qquad + c_5\|F\|_{C([-|\varphi(0)|,|\varphi(0)|])} + c_6.\end{aligned}$$

Теперь остается только сослаться на лемму 5.1 и теорему 4.4. То, что при выполнении условий (3.23) и (5.3) это решение будет классическим, следует из замечания 3.6.

Замечание 5.3. Отметим, что существование единственного классического решения в области $D_{l,k} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l,\ (k-1)l < t < kl\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, смешанной задачи

$$\begin{gathered}Lu = f(x,t), \qquad (x,t) \in D_{l,k},\\ u|_{t=(k-1)l} = \varphi, \qquad u_t|_{t=(k-1)l} = \psi,\\ u_x(0,t) = F[u(0,t)] + \beta(t), \qquad u(l,t) = \nu(t), \qquad (k-1)l \leqslant t \leqslant kl,\end{gathered}$$

доказывается дословно аналогично, как в случае, когда $k = 1$, т.е. в области $D_l$. Отсюда в свою очередь следует, что все те построения структурного характера, которые были проведены в предыдущих параграфах в области $D_T$ при $T \leqslant l$ (например, представление решений (3.10)–(3.12) линейной задачи (3.1)–(3.3) в виде системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (3.21) относительно переменной $t$), аналогичным образом переносятся на случай области $D_T$ при любом $T \geqslant l$. Поэтому если выполнены условия леммы 2.1, гладкости (3.23) при $T = \infty$ и согласования (1.4), то в области $D_T$ при любом $T > 0$ (в частности, при $T = \infty$) существует единственное классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.3).

Замечание 5.4. Ниже мы рассмотрим случаи, когда хотя бы одно из условий (2.1), обеспечивающих наличие априорной оценки (2.2), на нелинейные функции $g$ и $F$ в задаче (1.1)–(1.3) нарушается. Тем не менее мы будем считать, что остается в силе априорная оценка решения этой задачи, из которой следует существование классического решения задачи (1.1)–(1.3) в целом в области $D_T$, $T \leqslant l$, но для более узких классов заданных функций $f$, $\varphi$, $\psi$, $\beta$ и $\nu$, по сравнению с теми, которые были приведены в лемме 2.1.

Заметим, что $u_1 \equiv 0$ является решением задачи (4.6) при $i = 1$, если

$$f_1 = g_1(0), \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \psi_1 = 0, \qquad \beta_1 = -F_1(0), \qquad \nu_1 = 0.$$

Тогда в соответствии с условиями теоремы 4.2 если

$$\begin{gathered} g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad g_2'(s) \leqslant 0; \qquad g_1(s) \geqslant g_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ g_1(0) \leqslant f_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \\ 0 \leqslant \varphi_2(x), \quad 0 \geqslant \varphi_2'(x), \quad 0 \leqslant \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}); \qquad F_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad F_2'(s) \leqslant 0; \qquad F_1(s) \geqslant F_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ -F_1(0) \geqslant \beta_2(t), \quad 0 \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered}$$

то

$$0 \leqslant u_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{5.7}$$

Пусть теперь $u_2$ является классическим решением задачи (4.6) при $i = 2$,

$$\begin{gathered} g_2 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \varphi_2 \in C^2([0,l]), \qquad \psi_2 \in C^1([0,l]), \\ F_2(s) = -\delta|s|^\alpha, \qquad \delta := \text{const} > 0, \qquad \alpha := \text{const} > 1, \\ s \in \mathbb{R}, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \nu_2 \in C^2([0,T]), \end{gathered}$$

причем выполнены соответствующие условия согласования. Легко проверить, что при $\psi_2 = -\varphi_2'$ решение $u_2$ этой задачи дается формулой

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \varphi_2(x-t), & (x,t) \in \Delta_1, \\ \mu(t-x), & (x,t) \in \Delta_2, \\ \nu_2(x+t-l) + \varphi_2(x-t) - \varphi_2(2l-x-t), & (x,t) \in \Delta_3, \\ \mu(t-x) + \nu_2(x+t-l) - \varphi_2(2l-t-x), & (x,t) \in \Delta_4, \end{cases} \tag{5.8}$$

где

$$\mu(t) = \frac{\varphi_2(0)}{[1-\delta(\alpha-1)\varphi_2^{\alpha-1}(0)t]^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \qquad 0 \leqslant t < T^* := \frac{1}{\delta(\alpha-1)\varphi_2^{\alpha-1}(0)} > l \tag{5.9}$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\mu'(t) = \delta|\mu(t)|^\alpha, \qquad 0 \leqslant t < T^*, \qquad \mu(0) = \varphi_2(0) > 0.$$

Тогда в соответствии с условиями теоремы 4.2, если

$$\begin{gathered} g_1 \in C^1(\mathbb{R}), \qquad g_1(s) \geqslant 0, \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x,t) \leqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \\ \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad \varphi_1'(x) \geqslant \varphi_2'(x), \quad \psi_1(x) \leqslant -\varphi_2'(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ F_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad F_1'(s) \leqslant 0, \quad F_1(s) \geqslant -\delta|s|^\alpha, \qquad s \in \mathbb{R}, \\ \beta_1(t) \geqslant 0, \quad \nu_1(t) \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered}$$

то

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \qquad T \leqslant l, \tag{5.10}$$

где $u_2$ дается формулой (5.8).

Пусть выполнены условия (3.23), (5.3), и для решения $u = u_\tau$ задачи (5.1) выполнены все условия, налагаемые на “данные” этой задачи, которые обеспечивают выполнение как неравенства (5.7) при $u_2 = u_\tau$, так и неравенства (5.10) при $u_1 = u_\tau$, т.е.

$$0 \leqslant u_\tau(x,t) \leqslant u_2(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{5.11}$$

где $u_2$ из (5.11) дается формулой (5.8). Легко видеть, что этими условиями являются

$$\begin{gathered}
g_1, \tau g \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \tau g'(s) \leqslant 0; \qquad g_1(s) \geqslant \tau g(s), \quad s \in \mathbb{R},\\
g_1(0) \leqslant \tau f(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T,\\
0 \leqslant \tau\varphi(x), \quad 0 \geqslant \tau\varphi'(x), \quad 0 \leqslant \tau\psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,\\
F_1, \tau F \in C^1(\mathbb{R}); \quad F_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \tau F'(s) \leqslant 0; \quad F_1(s) \geqslant \tau F(s), \qquad s \in \mathbb{R},\\
-F_1(0) \geqslant \tau\beta(t), \quad 0 \leqslant \tau\nu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
\tau g \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \tau g(s) \geqslant 0, \qquad s \in \mathbb{R}; \qquad \tau f(x,t) \leqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T,\\
\tau\varphi(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad \tau\varphi'(x) \geqslant \varphi_2'(x), \quad \tau\psi(x) \leqslant -\varphi_2'(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,\\
\tau F \in C^1(\mathbb{R}), \quad \tau F'(s) \leqslant 0, \quad \tau F(s) \geqslant -\delta|s|^\alpha, \qquad s \in \mathbb{R},\\
\tau\beta(t) \geqslant 0, \quad \tau\nu(t) \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.
\end{gathered}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}
g_1, \tau g \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \tau g'(s) \leqslant 0; \qquad 0 \leqslant \tau g(s) \leqslant g_1(s), \quad s \in \mathbb{R},\\
g_1(0) \leqslant \tau f(x,t) \leqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T,\\
0 \leqslant \tau\varphi(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad \varphi_2'(x) \leqslant \tau\varphi'(x) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \tau\psi(x) \leqslant -\varphi_2'(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,\\
F_1, \tau F \in C^1(\mathbb{R}); \quad \tau F'(s) \leqslant 0, \quad -\delta|s|^\alpha \leqslant \tau F(s) \leqslant F_1(s), \qquad s \in \mathbb{R},\\
0 \leqslant \tau\beta(t) \leqslant -F_1(0), \quad 0 \leqslant \tau\nu(t) \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.
\end{gathered}$$

Легко проверить, что полученные выше условия будут выполнены при любом $\tau \in [0,1]$, если

$$g_1, g \in C^1(\mathbb{R}); \qquad g_1'(s) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad g'(s) \leqslant 0; \qquad 0 \leqslant g(s) \leqslant g_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

$$g_1(0) \leqslant f(x,t) \leqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{5.13}$$

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_2(x), \qquad \varphi_2'(x) \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0, \tag{5.14}$$

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant -\varphi_2'(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.15}$$

$$F_1, F \in C^1(\mathbb{R}); \qquad F'(s) \leqslant 0, \quad -\delta|s|^\alpha \leqslant F(s) \leqslant F_1(s), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{5.16}$$

$$0 \leqslant \beta(t) \leqslant -F_1(0), \quad 0 \leqslant \nu(t) \leqslant \nu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.17}$$

Из (5.12) и (5.13) следует, что $g_1(0) = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Предполагая, что в (5.12) выполнено условие $g_1'(s) \leqslant 0$, $s \in \mathbb{R}$, то из того, что $g_1(0) = 0$, получаем $g_1(s) = 0$, $s \geqslant 0$, а потому и $g(s) = 0$, $s \geqslant 0$. Аналогично, из (5.16) и (5.17) следует, что $F_1(0) = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$.

Легко проверить, что если функции $g$, $f$, $\varphi$, $\psi$, $F$, $\beta$ и $\nu$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} g \in C^1(\mathbb{R}), \qquad g \geqslant 0, \qquad g(s) = 0, \qquad s \geqslant 0, \qquad f = 0, \\ \varphi \in C^2([0,l]), \qquad \varphi \geqslant 0, \qquad \varphi' \leqslant 0, \qquad \psi \in C^1([0,l]), \qquad \psi \geqslant 0, \\ F \in C^1(\mathbb{R}), \qquad F' \leqslant 0, \qquad F(0) = 0, \qquad F(s) \geqslant -\delta s^\alpha, \qquad s \geqslant 0, \\ \beta = 0, \qquad \nu \in C^2([0,T]), \qquad \nu \geqslant 0, \end{gathered} \tag{5.18}$$

то найдутся такие функции $g_1$, $F_1$, $\varphi_2$ и $\nu_2$, что будут выполнены приведенные выше условия (5.12)–(5.17). В частности, такими функциями являются

$$\begin{gathered} g_1(s) = \int_0^s [g']_-(s_1)\,ds_1, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad F_1 = F, \\ \varphi_2(x) = \varphi(x) + k(l - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad \nu_2 = \nu, \end{gathered}$$

где $\chi_- := \min(\chi, 0)$, $k := \|\psi\|_{C([0,l])}$. Действительно, поскольку $g(s) = 0$, $s \geqslant 0$, $g_1(s) = 0$ при $s \geqslant 0$. Далее, принимая во внимание, что $[g']_- \leqslant g'$, при $s \leqslant 0$ будем иметь

$$g_1(s) \geqslant \int_0^s g'(s_1)\,ds_1 = g(s).$$

Аналогично проверяются остальные условия.

Из приведенных выше рассуждений, теоремы 4.4, неравенства (5.11) и леммы 5.1 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Пусть* $\delta := \mathrm{const} > 0$, $\alpha := \mathrm{const} > 1$, *выполнены условия* (5.18) *и* (5.3). *Тогда задача* (1.1)–(1.3) *имеет единственное классическое решение в области* $D_T$, $T \leqslant l$.

Замечание 5.5. Следует отметить, что если выполнены условия, налагаемые на функцию $g(F)$ из теоремы 5.2, то условия, налагаемые на эту же функцию $g(F)$ из теоремы 5.1, будут нарушены, за исключением тривиального случая $g = 0$ $(F = 0)$.

## § 6. Локальная разрешимость по $t$ и существование взрывного решения задачи (1.1)–(1.3)

Теорема 6.1. *Пусть* $T \leqslant l$ *и функции* $f \in C(\overline{D}_T)$, $g, F \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0,l])$, $\psi \in C([0,l])$, $\beta \in C([0,T])$, $\nu \in C^1([0,T])$ *удовлетворяют условиям согласования* (1.6). *Тогда найдется такое положительное число* $T_0 := T_0(f, g, F, \varphi, \psi, \beta, \nu)$, *что при* $T \leqslant T_0$ *задача* (1.1)–(1.3) *в области* $D_T$ *будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение и класса* $C$. *В случае, когда* $g, F \in C^1(\mathbb{R})$, *это решение будет единственным.*

Доказательство. В третьем параграфе задача (1.1)–(1.3) в пространстве $C(\overline{D}_T) \times C([0,T])$ эквивалентным образом была редуцирована к уравнению (3.21), где в силу замечания 5.2 оператор $A_0$ является непрерывным и компактным. Поэтому для разрешимости уравнения (3.21) согласно теореме Шаудера достаточно показать, что оператор $A_0$ переводит некоторый шар $B_{R_0}(u_0,\mu_0)$ с центром в точке $(u_0,\mu_0)$ и радиусом $R_0>0$ банахова пространства $C(\overline{D}_T)\times C([0,T])$ в себя. Покажем, что это имеет место при достаточно малых $T$. Действительно, в силу замечания 3.1 и равенства (3.22) операторное уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$(u,\mu)=A_0(u,\mu)=(u_0,\mu_0)+A\bigl(-g(u),F(\mu)\bigr), \tag{6.1}$$

где

$$u_0=A_1(f,\beta)+B_1(\varphi,\psi,\nu), \qquad \mu_0=A_2(f,\beta)+B_2(\varphi,\psi,\nu).$$

Легко видеть, что если пара $(\widetilde{u},\widetilde{\mu})$ принадлежит шару $B_{R_0}(u_0,\mu_0)$, а линейный оператор $A$ из (3.19) согласно замечанию 3.5 является интегральным оператором типа Вольтерра по переменной $t$, $t\leqslant T$, то

$$\|A\bigl(-g(\widetilde{u}),F(\widetilde{\mu})\bigr)\|_{C(\overline{D}_T)\times C([0,T])}\leqslant TM, \tag{6.2}$$

где $0<M:=M(\|g\|_{C([-R,R])},\|F\|_{C([-R,R])})<\infty$, $R:=\|(u_0,\mu_0)\|_{C(\overline{D}_l)\times C([0,l])}+R_0$, а $R_0$ – произвольное фиксированное положительное число, причем функция $M=M(s_1,s_2)$ является непрерывной и неубывающей по каждому ее аргументу $s_i\geqslant 0$, $i=1,2$.

Взяв теперь $T\leqslant\min\{T_0,l\}$, где $T_0:=R_0/M$, из (6.1) и (6.2) получим, что при $(\widetilde{u},\widetilde{\mu})\in B_{R_0}(u_0,\mu_0)$ имеем $\|A_0(\widetilde{u},\widetilde{\mu})-(u_0,\mu_0)\|_{C(\overline{D}_T)\times C([0,T])}\leqslant R_0$, т.е. $A_0\colon B_{R_0}(u_0,\mu_0)\to B_{R_0}(u_0,\mu_0)$. В случае $g,F\in C^1(\mathbb{R})$ в силу теоремы 4.4 это решение будет единственным. Этим теорема 6.1 доказана полностью.

Замечание 6.1. Из рассуждений, приведенных выше при доказательстве теоремы 6.1, следует, что если

$$\|f\|_{C(\overline{D}_l)}+\|\varphi\|_{C(\omega_0)}+\|\psi\|_{C(\omega_0)}+\|\beta\|_{C([0,l])}+\|\nu\|_{C([0,l])}\leqslant d,$$

где $d$ – некоторое положительное число, то найдется такая функция $\gamma=\gamma(d)>0$, являющаяся непрерывной и неубывающей относительно переменной $d$, что задача (1.1)–(1.3) в области $D_{T_1}$, $T_1=\gamma_0(d):=\min(\gamma(d),l)$, будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение $u$ класса $C$. Далее, если $T<l$ и выполнены условия гладкости (3.23) и согласования (1.4), то в силу замечания 3.6 и теоремы 4.4 в случае существования сильного обобщенного решения $u$ задачи (1.1)–(1.3) в области $D_T$ оно будет классическим и единственным, причем это решение может быть продолжено в замкнутую область $\overline{D}_{T_2}$, где $T_2:=\min(T+\Delta T,l)$, $\Delta T=\gamma_0(d_1)$, а

$$d_1:=\|f\|_{C(\overline{D}_l)}+\|u\|_{C(\omega_T)}+\|u_t\|_{C(\omega_T)}+\|\beta\|_{C([0,l])}+\|\nu\|_{C([0,l])}$$

как классическое решение этой задачи.

Пусть $u_1$ – решение задачи (4.6) в области $D_T$, $T \leqslant l$, при $i = 1$ и $g_1 = 0$, $f_1 = 0$, $\varphi_1 \in C^2([0,l])$, $\psi_1 \in C^1([0,l])$, $F_1(s) = -\delta|s|^\alpha s$, $\delta := \mathrm{const} > 0$, $\alpha := \mathrm{const} > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $\beta_1 = 0$, $\nu_1 \in C^2([0,l])$, и выполнены соответствующие условия согласования, аналогичные (1.4). Легко проверить, что при $\psi_1 = -\varphi_1'$ решение $u_1$ этой задачи определяется теми же формулами (5.8), (5.9), в которых вместо $\varphi_2$, $\nu_2$ и $\alpha$ следует взять $\varphi_1$, $\nu_1$ и $\alpha + 1$ соответственно. При этом потребуем, чтобы величина $T^*$, определяемая равенством (5.9), удовлетворяла условию

$$T^* < l. \tag{6.3}$$

Решение $u_1$ является взрывным, поскольку

$$\lim_{T \to T^* - 0} \|u_1\|_{C(\overline{D}_T)} = \infty. \tag{6.4}$$

Поэтому при постановке этой задачи следует потребовать, чтобы $T < T^*$.

В качестве классического решения $u_2$ задачи (4.6) при $i = 2$ в области $D_T$, $T < T^*$, возьмем решение $u$ задачи (1.1)–(1.3) при $g_2 = g$, $f_2 = f$, $\varphi_2 = \varphi$, $\psi_2 = \psi$, $F_2 = F$, $\beta_2 = \beta$ и $\nu_2 = \nu$. Тогда согласно теореме 4.2 при выполнении следующих условий:

$$\begin{gathered} g \in C^1(\mathbb{R}), \qquad g(s) \leqslant 0, \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad f(x,t) \geqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{D}_l, \\ \varphi_1(x) \leqslant \varphi(x), \qquad \varphi_1'(x) \geqslant \varphi'(x), \qquad -\varphi_1'(x) \leqslant \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ F \in C^1(\mathbb{R}), \quad F(s) \leqslant -\delta|s|^\alpha s, \quad \delta := \mathrm{const} > 0, \quad \alpha := \mathrm{const} > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \beta(t) \leqslant 0, \qquad \nu_1(t) \leqslant \nu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant l, \end{gathered} \tag{6.5}$$

справедливо неравенство

$$u_1(x,t) \leqslant u(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{6.6}$$

Согласно теореме 6.1, если выполнены условия (3.23) и (1.4) для задачи (4.6) при $i = 2$, то найдется такое число $T_0$, что при $T \leqslant T_0$ эта задача имеет единственное классическое решение в замкнутой области $\overline{D}_T$. Поэтому в силу (6.3), (6.4) и (6.6) из теоремы 4.2 следует, что $T_0 < T^*$. Обозначим через $T_*$ верхнюю грань тех значений $T$, для которых задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение $u$ в замкнутой области $\overline{D}_T$. Очевидно, что $T_* \leqslant T^*$, и, более того, докажем, что

$$\lim_{T \to T_* - 0} \Big( \|u\|_{C(\overline{D}_T)} + \|u_t\|_{C(\overline{D}_T)} \Big) = \infty. \tag{6.7}$$

Действительно, предположим, что условие (6.7) нарушено. Тогда

$$d_0 := \sup_{0 < T < T_*} \big[ \|f\|_{C(\overline{D}_l)} + \|u\|_{C(\omega_T)} + \|u_t\|_{C(\omega_T)} + \|\beta\|_{C([0,l])} + \|\nu\|_{C([0,l])} \big] < \infty. \tag{6.8}$$

Согласно определению $T_*$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение $u$ в замкнутой области $\overline{D}_T$ при $T_* - \frac{\Delta_0}{2} < T < T_*$, где $\Delta_0 = \gamma_0(d_0)$. В силу (6.8) из замечания 6.1 следует, что это решение продолжается как классическое решение в $\overline{D}_{T_3}$, где $T_3 := T + \Delta_0 > T_* + \frac{\Delta_0}{2}$, что противоречит определению числа $T_*$.

Легко проверить, что условия (6.5) будут выполнены, если для фиксированных функций $\varphi$, $\psi$ и $\nu$ в качестве функций $\varphi_1$ и $\nu_1$ взять

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - k(l - x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \text{где} \ \ k := \max_{0\leqslant x\leqslant l} |\varphi'(x) + \psi(x)|, \quad \nu_1 = \nu.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (6.3), (6.5) *и* (3.23) *при* $T = \infty$. *Тогда в области* $D_{T_*}$, *где* $T_* \leqslant T^*$, *существует единственное решение задачи* (1.1)–(1.3) *класса* $C^2(\overline{D}_{T_*} \setminus \omega_{T_*})$, *являющееся взрывным, т.е. удовлетворяющим условию* (6.7).

Замечание 6.2. Отметим, что вопрос несуществования глобального решения задачи (1.1)–(1.3) в области $D_\infty$ в случае отсутствия априорной оценки можно исследовать методом пробных функций, который изложен в работе [14].

## Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 5-е изд., Наука, М., 1977, 735 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, The Macmillan Co., New York, 1963, xvi+765 pp.

[2] В. Б. Колмановский, В. Р. Носов, *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием*, Теоретические основы кибернетики, Наука, М., 1981, 448 с.

[3] S. A. Rodrìguez, J.-M. Dion, L. Dugard, "Stability of neutral time delay systems: a survey of some results", *Advances in automatic control*, Kluwer Internat. Ser. Engrg. Comput. Sci., **754**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004, 315–335.

[4] A. S. Ackleh, Keng Deng, "Existence and nonexistence of global solutions of the wave equation with a nonlinear boundary condition", *Quart. Appl. Math.*, **59**:1 (2001), 153–158.

[5] E. Vitillaro, "Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term", *J. Differential Equations*, **186**:1 (2002), 259–298.

[6] J. Serrin, G. Todorova, E. Vitillaro, "Existence for a nonlinear wave equation with damping and source terms", *Differential Integral Equations*, **16**:1 (2003), 13–50.

[7] Hongwei Zhang, Qingying Hu, "Asymptotic behaviour and nonexistence of wave equation with nonlinear boundary condition", *Commun. Pure Appl. Anal.*, **4**:4 (2005), 861–896.

[8] A. Nowakowski, "Solvability and stability of a semilinear wave equation with nonlinear boundary conditions", *Nonlinear Anal.*, **73**:6 (2010), 1495–1514.

[9] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976, 391 с.; англ. пер.: V. P. Mikhaĭlov, *Partial differential equations*, Mir, Chicago, Ill.; distributed by Imported Publications, Inc., 1978, 397 pp.

[10] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 2-е изд., Наука, М., 1971, 512 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Pure and Applied Mathematics, **3**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971, vi+418 pp.

[11] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971, 232 с.; пер. с англ.: R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, Adv. Stud. Pure Math., **1**, Masson & Cie, Éditeurs, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968, x+246 pp.

[12] Д. Гильбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, xiii+513 pp.

[13] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1993, 440 с.

[14] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

Поступила в редакцию
30.05.2013

**Сергей Сергеевич Харибегашвили**
**(Sergei S. Kharibegashvili)**
Математический институт им. А. Размадзе
АН Грузии, г. Тбилиси;
Грузинский технический университет, г. Тбилиси
*E-mail*: kharibegashvili@yahoo.com

**Отар Михайлович Джохадзе**
**(Otar M. Jokhadze)**
Математический институт им. А. Размадзе
АН Грузии, г. Тбилиси;
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили
*E-mail*: ojokhadze@yahoo.com