Т. В. Кадеишвили, Структура $A(\infty)$-алгебры в когомологии и когомологии свободного пространства петель, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 177, 87–96

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-177-87-96

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 87–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-87-96

УДК 512.665.43, 515.145.5

СТРУКТУРА $A(\infty)$-АЛГЕБРЫ В КОГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ СВОБОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

© 2020 г. **Т. КАДЕИШВИЛИ**

Аннотация. Алгебра когомологий пространства $H^*(X)$ не определяет ни модули когомологий пространства петель $H^*(\Omega X)$, ни когомологии свободного пространства петель $H^*(\Lambda X)$. Однако согласно теореме минимальности, доказанной автором, существует структура $A(\infty)$-алгебры $(H^*(X),\{m_i\})$ на $H^*(X)$, определяющая $H^*(\Omega X)$. Показано, что та же самая $A(\infty)$-алгебра $(H^*(X),\{m_i\})$ определяет также модули когомологий $H^*(\Lambda X)$.

Ключевые слова: гомология Хохшильда, морфизм, $A(\infty)$-алгебра, алгебра когомологий, модуль когомологий, пространство петель.

$A(\infty)$-ALGEBRA STRUCTURE IN THE COHOMOLOGY AND COHOMOLOGIES OF A FREE LOOP SPACE

© 2020 **T. KADEISHVILI**

Abstract. The cohomology algebra of the space $H^*(X)$ defines neither cohomology modules of the loop space $H^*(\Omega X)$ nor cohomologies of the free loop space $H^*(\Lambda X)$. But by the author's minimality theorem, there exists a structure of $A(\infty)$-algebra $(H^*(X),\{m_i\})$ on $H^*(X)$, which determines $H^*(\Omega X)$. We also show that the same $A(\infty)$-algebra $(H^*(X),\{m_i\})$ determines also cohomology modules $H^*(\Lambda X)$.

Keywords and phrases: Hochschild homology, morphism, $A(\infty)$-algebra, cohomology algebra, cohomology module, loop space.

AMS Subject Classification: 19D55, 55P35

Коцепная алгебра $C^*(X)$ определяет когомологию $H^*(\Omega X)$ пространства петель — это хорошо известная bar-конструкция Адамса $B(C^*(X))$:

$$H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X).$$

Что касается когомологий $H^*(\Lambda X)$ свободного пространства петель $\Lambda X = X^{S^1}$, то их можно вычислить с помощью комплекса Хохшильда $C^*(X) \otimes B(C^*(X))$ (см. [4]):

$$H(C^*(X) \otimes B(C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X).$$

Если вместо $B(C^*(X))$, рассматривать bar-конструкцию $B(H^*(X))$, то в общем случае мы не получим $H^*(\Omega X)$. Аналогично, комплекс Хохшильда алгебры когомологий $H^*(X) \otimes B(H^*(X))$ не порождает $H^*(\Lambda X)$. Следовательно, переходя от $C^*(X)$ к $H^*(X)$, мы теряем часть информации, и одна структура *градуированной алгебры* на $H^*(X)$ слишком бедна, чтобы определить $H^*(\Omega X)$ и $H^*(\Lambda X)$.

ISSN 0233–6723

В [1,5] была построена дополнительная структура на $H^*(X)$, последовательность мультиопераций

$$\Big\{m_i : \underbrace{H^*(X) \otimes \cdots \otimes H^*(X)}_{i \text{ раз}} \to H^*(X),\ i = 1, 2, 3, 4, \dots \Big\},$$

превращающая $(H^*(X), \{m_i\})$ в $A(\infty)$-алгебру в смысле Сташеффа (см. [11]). Эта структура является расширением обычной структуры алгебры когомологий: $m_1 = 0$ и m_2 совпадает с умножением когомологий.

Этот объект полностью определяет когомологии пространства петель $H^*(\Omega X)$: операции $\{m_i\}$ определяют возмущенный дифференциал d_m на bar-конструкции $B(H^*(X))$ так, что

$$H(B(H^*(X)), d_m) \approx H(B(C^*(X)) \approx H^*(\Omega X).$$

В этой заметке будет показано, что та же самая структура $A(\infty)$-алгебры когомологий $(H^*(X), \{m_i\})$ достаточна для определения когомологий свободного пространства петель $H^*(\Lambda X)$.

В разделе 1 приведено классическое определение гомологий Хохшильда для строго ассоциативных DG-алгебр и модулей. В разделе 2 описано хорошо известное понятие гомологий Хохшильда для $A(\infty)$-алгебр и бимодулей. Раздел 3 посвящен теореме минимальности, описывающей структуру $A(\infty)$-алгебры в алгебре когомологий пространства, а в разделе 4 показано, что эта структура определяет не только когомологии пространства петель, но и когомологии свободного пространства петель.

1. Комплекс Хохшильда, ассоциативная постановка

Опишем классический комплекс Хохшильда и его применение в топологии — конструкцию, которая порождает когомологии свободного пространства петель.

Пусть $(A, \mu : A \otimes A \to A, d : A^* \to A^{*+1})$ — ассоциативная дифференциальная градуированная алгебра (DG-алгебра для краткости) и M — дифференциальный градуированный A-бимодуль, т.е. цепные отображения $A \otimes M \to M$, $M \otimes A \to M$ заданы так, что выполняются стандартные условия *ассоциативности*: для $a, b \in A$, $x \in M$ имеем

$$(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \quad (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (a \cdot b), \quad (a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b).$$

Предположим, что A является 1-приведенной, т.е. $A^0 = R$ (основное кольцо), $A^1 = 0$ и $A^{<0} = 0$. В этой ситуации мы можем определить

(i) обычную bar-конструкцию

$$BA = T^c(s^{-1}A^{>0}) = \sum_{i=0}^{\infty} \otimes^i s^{-1}A^{>0},$$

тензорную коалгебру обратной надстройки A (на самом деле это *косвободная коалгебра*, копорождаемая $s^{-1}A$) (см., например, [6]) с дифференциалом

$$d_B([a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]) = \sum_k \big[a_1 \otimes \cdots \otimes da_k \otimes \cdots \otimes a_n\big] + \sum_k \big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \cdot a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_n\big]$$

(для простоты опускаем знаки);

(ii) *односторонняя bar-конструкция* $M \otimes BA$ с дифференциалом

$$d(x \otimes [a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]) = dx \otimes \big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big] + x \otimes d_B\big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big] + x \cdot a_1 \otimes \big[a_2, \dots, a_n\big];$$

(iii) *комплекс Хохшильда* $C_*(A, M)) = M \otimes BA$ с дифференциалом

$$d\Big(x \otimes \big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big]\Big) = dx \otimes \big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big] + x \otimes d_B\big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big] + \\ + x \cdot a_1 \otimes \big[a_2 \otimes \cdots \otimes a_n\big] + a_n \cdot x \otimes \big[a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}\big].$$

Гомология этого комплекса называется *гомологией Хохшильда* алгебры A с коэффициентами из M и обозначается $HH_*(A, M)$.

Пусть $A = C^*(X)$. Конечно, $C^*(X)$ является бимодулем над собой; следовательно, можно рассматривать комплекс Хохшильда $C^*(X) \otimes B(C^*(X))$. Классический результат Джонса (см. [4]) утверждает, что гомология этого комплекса $HH_*(C^*(X), C^*(X))$ совпадает с $H^*(\Lambda X)$.

2. Комплекс Хохшильда, $A(\infty)$-постановка

Опишем комплекс Хохшильда и гомологию в $A(\infty)$-постановке, введя предварительно понятия $A(\infty)$-алгебр, $A(\infty)$-модулей и $A(\infty)$-бимодулей.

2.1. Категория $A(\infty)$-алгебр.

2.1.1. $A(\infty)$-алгебра. Кратко напомним определение $A(\infty)$-алгебры Сташеффа (см. [11]).

Определение 2.1. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ — это градуированный модуль A, наделенный последовательностью операций $\{m_i : A^{\otimes i} \to A,\ i = 1, 2, 3, 4, \dots\}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\deg m_i = 2 - i$ и

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=0}^{n-j} m_{n-j+1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \dots \otimes a_n) = 0.$$

Определение Сташеффа этого условия при $n = 1$ дает $m_1 m_1 = 0$, т.е. m_1 — это дифференциал; при $n = 2$ из него следует, что m_1 — дифференцирование относительно умножения m_2; при $n = 3$ оно влечет тот факт, что m_2 ассоциативно по гомотопии, и соответствующая гомотопия — это m_3. Таким образом, $(A, \{m_i\})$ — *сильно ассоциативная по гомотопии* (sah) алгебра.

bar-Интерпретация. Условие Сташеффа гарантирует, что кодифференцирование $d_m : B(A) \to B(A)$, заданное соотношением

$$d_m(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \dots \otimes a_n,$$

удовлетворяет условию $d_m d_m = 0$: условие Сташеффа является проекцией этого равенства на копорождающий модуль A. Следовательно, bar-конструкция $(B(A, \{m_i\}), d_m)$ с этим возмущенным дифференциалом является DG-коалгеброй.

Частный случай 1. Понятие $A(\infty)$-алгебры является обобщением понятия DG-алгебры: $A(\infty)$-алгебра типа $(A, \{m_1, m_2, m_3 = 0, m_4 = 0, \dots\})$ является DG-алгеброй с дифференциалом m_1 и ассоциативным умножением m_2.

Частный случай 2. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ называется *минимальной*, если $m_1 = 0$. В этом случае $(A, m_1 = 0, m_2)$ — строго ассоциативная DG-алгебра.

2.1.2. Морфизмы $A(\infty)$-алгебр.

Определение 2.2. Морфизм $A(\infty)$-алгебр $(A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ определяется в [1] как последовательность гомоморфизмов $\{f_i : A^{\otimes i} \to A',\ i = 1, 2, \dots,\}$, удовлетворяющая следующим условиям: $\deg f_i = 1 - i$ и

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=0}^{n-j} f_i(a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+j}) \otimes \dots \otimes a_n) \cdot$$
$$\cdot \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1+\dots+k_t=n} m'_t(f_{k_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{k_1}) \otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \dots \otimes a_{k_1+k_2}) \otimes$$
$$\otimes \dots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\dots+k_{t-1}+1} \otimes \dots \otimes a_n)).$$

bar-Интерпретация. Морфизм $\{f_i\}$ определяет отображение градуированной коалгебры bar-конструкций $B(\{f_i\}) : B(A, \{m_i\}) \to B(A', \{m'_i\})$, заданное соотношением

$$f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_t=n} f_{k_1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1}) \otimes \cdots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\cdots+k_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n),$$

и это определяющее условие гарантирует, что $B(\{f_i\})$ — цепное отображение: это условие является проекцией равенства $B(\{f_i\})d_m = d_{m'}B(\{f_i\})$ на A' и, следовательно, оно является морфизмом DG-коалгебр. Таким образом, B — функтор, действующий из категории $A(\infty)$-алгебр в категорию DG-коалгебр.

Частный случай. Морфизм $A(\infty)$-алгебр

$$\{f_1, f_2 = 0, f_3 = 0, \dots\} : (A, \{m_1, m_2, m_3 = 0, m_4 = 0, \dots\}) \to (A', \{m'_1, m'_2, m'_3 = 0, m'_4 = 0, \dots\})$$

— это обычное отображение DG-алгебр.

2.2. Категория $A(\infty)$-модулей.

2.2.1. $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй. Определение из [1] является обобщением понятия DG-модуля над DG-алгеброй.

Определение 2.3. $A(\infty)$-Модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_i\})$ — это градуированный модуль P, наделенный последовательностью «действий»

$$\{p_i : P \otimes A^{\otimes i} \to A,\ i = 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

удовлетворяющих условиям $\deg p_i = 1 - i$ и, для $a_k \in A$ и $x \in P$,

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i}(p_i(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} p_{n-i+1}(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = 0.$$

bar-Интерпретация. Эти операции индуцируют отображение $d_p : P \otimes B(A) \to P \otimes B(A)$, заданное соотношениями

$$d_p(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \cdots \otimes a_n,$$

удовлетворяющее условию $d_p d_p = 0$ и, следовательно, $(P \otimes B(A), d_p)$ с этим возмущенным дифференциалом является DG-комодулем над DG-коалгеброй $(B(A, \{m_i\}), d_m)$.

Частный случай 1. $A(\infty)$-Модуль $(P, \{p_1, p_2, 0, 0, \dots\})$ над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_1, m_2, 0, 0, \dots\})$ является DG-модулем над DG-алгеброй (A, m_1, m_2) с дифференциалом $p_0 : P \to P$ и строго ассоциативным действием $p_1 : P \otimes A \to A$.

Частный случай 2. $A(\infty)$-Алгебра $(A, \{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой со структурными отображениями

$$p_n(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = m_{n+1}(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

2.2.2. Морфизмы $A(\infty)$-модулей. Пусть $(P, \{p_i\})$ — $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_i\})$ и пусть $(P', \{p'_i\})$ — $A(\infty)$-модуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A', \{m'_i\})$.

Определение 2.4 (см. [1])**.** Морфизм пар

$$((P, \{p_i\}), (A, \{m_i\})) \to ((P', \{p'_i\}), (A', \{m'_i\}))$$

определяется как морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\} : (A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ и такая последовательность гомоморфизмов $\{g_i : P \otimes A^{\otimes i} \to P',\ i = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, что $\deg g_i = -i$ и

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n-k} g_{n-j+1}(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \cdots \otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}(p_k(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) \otimes a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_n) =$$
$$=\sum_{t=1}^{n+1}\sum_{k_1+\cdots+k_t=n+1} p_t(g_{k_1}(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1}) \otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2})\otimes$$
$$\otimes f_{k_3}(a_{k_1+k_2+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2+k_3}) \otimes \cdots \otimes f_{k_t}(a_{k+k_1+\cdots+k_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n))$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение

$$G : (P \otimes BA, d_p) \to (P' \otimes BA', d_{p'})$$

по формуле

$$G(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{t=1}^{n+1}\sum_{k_1+\cdots+k_t=n+1} g_{k_1}(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1})\otimes$$
$$\otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}) \otimes \cdots \otimes f_{k_t}(a_{k+k_1+\cdots+k_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes a_n);$$

определяющее условие морфизма гарантирует, что это — цепное отображение.

2.3. Категория $A(\infty)$-бимодулей.

2.3.1. $A(\infty)$-бимодуль над $A(\infty)$-алгеброй. Следующее определение $A(\infty)$-бимодуля над $A(\infty)$-алгеброй из [3, 7–9, 12] является обобщением понятия DG-бимодуля над DG-алгеброй.

Определение 2.5. $A(\infty)$-Бимодуль над $A(\infty)$-алгеброй $(A, \{m_i\})$ — это такой градуированный модуль M с заданной последовательностью гомоморфизмов

$$\{p_{i,k} : A^{\otimes i} \otimes M \otimes A^{\otimes k} \to M,\ i, k = 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

что $\deg p_{i,k} = 1 - i - k$ и

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r-k} p_{r-i+1,n-r}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1}\otimes$$
$$\otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=r}^{n} p_{k,n-r-s}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes p_{r-k,s}(a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1}\otimes$$
$$\otimes \cdots \otimes a_{r+s}) \otimes a_{r+s+1} \otimes \cdots \otimes a_n)+$$
$$+\sum_{k=r}^{n}\sum_{i=1}^{n-k} p_{r,n-r-i+1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1}\otimes$$
$$\otimes \cdots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = 0.$$

bar-Интерпретация. Операции $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ определяют дифференциал $d_p : M\otimes BA \to M\otimes BA$ на $M \otimes BA$ по формуле

$$d_p(x\otimes[a_1\otimes\cdots\otimes a_i\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n]) = x\otimes d_B[a_1\otimes\cdots\otimes a_n]+ \\ +\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} p_{n-j,i}(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n\otimes x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes[a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j]; \tag{2.1}$$

из определяющих соотношений для $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ следует, что $d_pd_p = 0$ (см. [9]).

Частный случай 1. $A(\infty)$-аАгебра $(A,\{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой, операция $p_{i,k} : A^{\otimes i}\otimes A\otimes A^{\otimes k}\to A$ — это в точности m_{i+k+1}.

Частный случай 2. Другим частным случаем являются DG-алгебра A и DG-A-бимодуль M: операции $m_1 = d_A$, $m_2(a\otimes b) = a\cdot b$, $m_{>2} = 0$, $p_{0,0} = d_M$, $p_{1,0}(a\otimes x) = a\cdot x$, $p_{0,1}(x\otimes a) = x\cdot a$, $p_{1,1} = 0$, $p_{>1,k} = 0$, $p_{k,>1} = 0$ обладают требуемыми свойствами.

2.3.2. Морфизмы $A(\infty)$-бимодулей над данной $A(\infty)$-алгеброй. Пусть $(M,\{p_{i,k}\})$ b $(M',\{p'_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодули над *одной и той же* $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$.

Определение 2.6 (см. [9])**.** Морфизм $(M,\{p_{i,k}\})\to(M',\{p'_{i,k}\})$ $A(\infty)$-бимодулей над данной $A(\infty)$-алгеброй $(A,\{m_i\})$ определяется как последовательность гомоморфизмов

$$\{g_{i,k} : A^{\otimes k}\otimes M\otimes A^{\otimes i}\to M',\ i,k = 0,1,2,\dots\},$$

для которой $\deg g_{i,k} = -i-k$ и

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=1}^{r-k} g_{r-i+1,n-r}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes \\
&\qquad\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+ \\
&+\sum_{k=0}^{r}\sum_{s=r}^{n} g_{k,n-r-s}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes p_{r-k,s}(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes \\
&\qquad\otimes\cdots\otimes a_{r+s})\otimes a_{r+s+1}\otimes\cdots\otimes a_n)+ \\
&+\sum_{k=r}^{n}\sum_{i=1}^{n-k} g_{r,n-r-i+1}(a_1\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes\cdots\otimes a_k\otimes m_i(a_{k+1}\otimes \\
&\qquad\otimes\cdots\otimes a_{k+i})\otimes a_{k+i+1}\otimes\cdots\otimes a_n) = \\
&=\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{n-r} p_{k,n-r-j}(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes g_{r-k,j}(a_{k+1}\otimes\cdots\otimes a_r\otimes x\otimes a_{r+1}\otimes \\
&\qquad\otimes\cdots\otimes a_{r+j})\otimes a_{r+j+1}\otimes\cdots\otimes a_n).
\end{aligned}$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение $F : M\otimes BA\to M'\otimes BA$ по формуле

$$F(x\otimes[a_1\otimes\cdots\otimes a_i\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n]) = \\ =\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} g_{n-j,i}(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n\otimes x\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes[a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j].$$

Это определяющее условие позволяет показать, что F — цепное отображение.

2.3.3. Морфизмы пар. Далее нам потребуется несколько более общее понятие морфизма.

Пусть $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ — $A(\infty)$-алгебры, и пусть $(M, \{p_{i,k}\})$ и $(M', \{p'_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодули над $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ соответственно.

Определение 2.7. Морфизм пар

$$((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\}))$$

определяется как пара $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$, где $\{f_i\} : (A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ — морфизм $A(\infty)$-алгебр и

$$\{g_{i,k} : A^{\otimes i} \otimes M \otimes A^{\otimes k} \to M',\ i, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

— такой набор гомоморфизмов, что $\deg g_{i,k} = -i - k$ и

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{i=1}^{r-k} g_{r-i+1,n-r}(a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes$$
$$\otimes \dots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \dots \otimes a_n) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{r} \sum_{s=r}^{n} g_{k,n-r-s}(a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes p_{r-k,s}(a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes$$
$$\otimes \dots \otimes a_{r+s}) \otimes a_{r+s+1} \otimes \dots \otimes a_n) +$$
$$+ \sum_{k=r}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} g_{r,n-r-i+1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \dots \otimes a_k \otimes m_i(a_{k+1} \otimes$$
$$\otimes \dots \otimes a_{k+i}) \otimes a_{k+i+1} \otimes \dots \otimes a_n) =$$
$$= \sum_{t=1}^{n+1} \sum_{s=1}^{t} \sum_{k_1 + \dots + k_t = n+1} p_{s-1,t-s}(f_{k_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{k_1}) \otimes$$
$$\otimes f_{k_2}(a_{k_1+1} \otimes \dots \otimes a_{k_1+k_2}) \otimes \dots \otimes f_{k_{s-1}}(a_{k_1+\dots+k_{s-2}+1} \otimes \dots \otimes a_{k_1+\dots+k_{s-1}}) \otimes$$
$$\otimes g_{r-k_1-\dots-k_{s-1}, k_1+\dots+k_s-r}(a_{k_1+\dots+k_{s-1}+1} \otimes \dots \otimes a_r \otimes x \otimes a_{r+1} \otimes \dots \otimes a_{k_1+\dots+k_s}) \otimes$$
$$\otimes f_{k_{s+1}}(a_{k_1+\dots+k_s+1} \otimes \dots \otimes a_{k_1+\dots+k_{s+1}}) \otimes \dots \otimes f_{k_t}(a_{k_1+\dots+k_{t-1}+1} \otimes \dots \otimes a_n)).$$

bar-Интерпретация. Такой морфизм индуцирует отображение $F : M \otimes BA \to M' \otimes BA'$ по формуле

$$F(x \otimes [a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n]) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k_1 + \dots + k_s = j-i} g_{n-j,i}(a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes$$
$$\otimes [f_{k_1}(a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{i+k_1}) \otimes \dots \otimes f_{k_s}(a_{j-k_s} \otimes \dots \otimes a_j)]. \tag{2.2}$$

Указанное выше определяющее условие позволяет показать, что F — цепное отображение.

Слабая эквивалентность. Морфизм пар $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$ называется *слабой эквивалентностью*, если $f_1 : (A, m_1) \to (A', m'_1)$ и $g_{0,0} : (M, p_1) \to (M', p'_1)$ — слабые эквивалентности DGЭ=модулей, т.е. изоморфизмы по гомологии. Стандартное рассуждение позволяет показать, что в этом случае индуцированное отображение

$$F : (M \otimes BA, d_p) \to (M' \otimes BA', d_{p'})$$

также является слабой эквивалентностью.

2.4. Гомология Хохшильда $A(\infty)$-алгебры с коэффициентами из $A(\infty)$-бимодуля. Теперь предположим, что $(A, \{m_i\})$ — 1-приведенная $A(\infty)$-алгебра и $(M, \{p_{i,k}\})$ — $A(\infty)$-бимодуль над ней. Приведем определение гомологии Хохшильда $(A, \{m_i\})$ с коэффициентами из $(M, \{p_{i,k}\})$ (см., например, [9, 10]).

Как было отмечено выше (см. (2.1)), структурные отображения $\{m_i\}$ и $\{p_{i,k}\}$ определяют дифференциал $d_p : M \otimes BA \to M \otimes BA$.

Определение 2.8. Гомология Хохшильда $A(\infty)$-алгебры $(A, \{m_i\})$ с коэффициентами из $A(\infty)$-бимодуля $(M, \{p_{i,k}\})$
$$HH_*((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\}))$$
определяется как гомология цепного комплекса Хохшильда $(M \otimes BA, d_p)$.

Функториальность. Морфизм пар
$$(\{f_i\}, \{p_{i,k}\}) : ((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\}))$$
индуцирует цепное отображение комплексов Хохшильда $F : M \otimes BA \to M' \otimes BA'$ по формуле (2.2) и, следовательно, он также индуцирует гомоморфизм гомологий Хохшильда
$$F^* : HH_*((A, \{m_i\}), (M, \{p_{i,k}\})) \to HH_*((A', \{m'_i\}), (M', \{p'_{i,k}\})).$$
Если первоначальный морфизм $(\{f_i\}, \{p_{i,k}\})$ является слабой эквивалентностью, то F тоже является слабой эквивалентностью, и F^* — изоморфизм.

Частный случай 1. Если A — ассоциативная DG-алгебра и M — DG-A-бимодуль, то это понятие совпадает с обычным понятием гомологии Хохшильда.

Частный случай 2. Как было сказано выше, $A(\infty)$-алгебра $(A, \{m_i\})$ является $A(\infty)$-модулем над собой, операция $p_{i,k} : A^{\otimes i} \otimes A \otimes A^{\otimes k} \to A$ — это в точности m_{i+k+1}. Дифференциал $d_p : A \otimes BA \to A \otimes BA$ из (2.1) здесь имеет вид
$$\begin{aligned} d_p(x \otimes [a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n]) = x \otimes d_B[a_1 \otimes \dots \otimes a_n] + \\ + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} m_{n-j+i+1}(a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes [a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_j]; \end{aligned} \tag{2.3}$$
следовательно, в этом случае имеем $HH_*((A, \{m_i\}), (A, \{m_i\})) = H(A \otimes BA, d_p)$.

Далее, морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\} : (A, \{m_i\}) \to (A', \{m'_i\})$ порождает морфизм пар
$$(\{f_i\}, \{g_{i,k}\}) : ((A, \{m_i\}), (A, \{p_{i,k}\})) \to ((A', \{m'_i\}), (A', \{p'_{i,k}\})),$$
где $g_{i,k} = f_{i+k+1}$, который, в свою очередь, порождает по формуле (2.2) цепное отображение комплексов Хохшильда $F : (A \otimes BA, d_p) \to (A' \otimes BA', d_{p'})$, заданное соотношением
$$\begin{aligned} F(x \otimes [a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n]) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k_1 + \dots + k_s = j-i} f_{n-j+i+1}(a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes \\ \otimes [f_{k_1}(a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{i+k_1}) \otimes \dots \otimes f_{k_s}(a_{j-k_s} \otimes \dots \otimes a_j)]. \end{aligned} \tag{2.4}$$
Это цепное отображение индуцирует гомоморфизм гомологий Хохшильда
$$F^* : HH_*((A, \{m_i\}), (A, \{m_i\})) \to HH_*((A', \{m'_i\}), (A', \{m'_i\})).$$
Отметим также, что если первоначальный морфизм $\{f_i\}$ является слабой эквивалентностью $A(\infty)$-алгебр, то $(\{f_i\}, \{g_{i,k}\})$ тоже является слабой эквивалентностью $A(\infty)$-алгебр и, следовательно, индуцированный морфизм гомологий Хохшильда является изоморфизмом.

3. Теорема минимальности — перенос структур на гомологию

Пусть $(A, d, \mu : A \otimes A \to A)$ — DG-алгебра. Ее гомология $H(A)$ — также DG-алгебра с тривиальным дифференциалом и индуцированным умножением $\mu^* : H(A) \otimes H(A) \to H(A)$.

Только структуры градуированной алгебры $(H(A), d = 0, \mu^*)$ недостаточно для определения гомологии bar-конструкции BA. В общем случае bar-конструкции BA и $BH(A)$ имеют разные гомологии. Недостаток структуры компенсируется следующей теоремой минимальности из [1].

Теорема 3.1. *Для DG-алгебры (A, d, μ) со свободными модулями гомологии $H^k(A)$ существуют такие структура минимальной $A(\infty)$-алгебры $(H(A), \{m_i\})$ на $H(A)$ и морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\} : (H(A), \{m_i\}) \to A$, что $m_1 = 0$, $m_2 = \mu^*$, $f_1^* = \mathrm{id}_{H(A)}$.*

Так как $f_1^* = \mathrm{id}_{H(A)}$, морфизм $A(\infty)$-алгебр $\{f_i\}$ является слабой эквивалентностью и, следовательно, непосредственно из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 3.2. *Морфизм $\{f_i\}$ индуцирует слабую эквивалентность bar-конструкций $B(\{f_i\}) : B(H(A), \{m_i\}) \to BA$, т.е. изоморфизм гомологий $H(B(H(A), \{m_i\}) \approx H(BA)$.*

Более того, согласно частному случаю 2 из п. 2.4, тот же самый морфизм $\{f_i\}$ порождает морфизм пар

$$(\{f_i\}, \{g_{i,k}\}) : ((H(A), \{m_i\}), (H(A), \{p_{i,k}\})) \to (A, A),$$

где $p_{i,k} = m_{i+k+1}$ и $g_{i,k} = f_{i+k+1}$, который, в свою очередь, по формуле (2.4) порождает слабую эквивалентность комплексов Хохшильда $(H(A) \otimes BH(A)) \to (A \otimes BA)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Морфизм $\{f_i\}$ индуцирует слабую эквивалентность комплексов Хохшильда*

$$(H(A), \{m_i\}) \otimes B(H(A), \{m_i\})) \to A \otimes BA$$

и, следовательно, изоморфизм гомологий Хохшильда

$$HH_*((H(A), \{m_i\}), (H(A), \{m_i\})) \approx HH_*(A, A).$$

4. Когомологии пространства петель и свободного пространства петель

Пусть $A = C^*(X)$. Тогда по теореме 3.1 имеем структуру минимальной $A(\infty)$-алгебры на когомологиях $(H^*(X), \{m_i\})$.

Так как $H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X)$, из следствия 3.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Когомологическая $A(\infty)$-алгебра $(H^*(X), \{m_i\})$ определяет когомологии пространства петель $H^*(\Omega X)$:*

$$H(B(H^*(X), \{m_i\}) \approx H(B(C^*(X))) \approx H^*(\Omega X).$$

Так как $HH_*((C^*(X), C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X)$, из следствия 3.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Когомологическая $A(\infty)$-алгебра $(H^*(X), \{m_i\})$ определяет когомологии свободного пространства петель $H^*(\Lambda X)$:*

$$HH_*((H^*(X), \{m_i\}), (H^*(X), \{m_i\})) \approx HH_*((C^*(X), C^*(X))) \approx H^*(\Lambda X).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадеишвили Т. В.* К теории гомологии расслоенных пространств// Усп. мат. наук. — 1980. — *35*, № 3 (213). — С. 183–188.
2. *Кадеишвили Т. В.* Структура $A(\infty)$-алгебры и когомологии Хохшильда и Харрисона// Тр. Мат. ин-та им. А. Размадзе. — 1988. — *91*. — С. 19–27.
3. *Getzler E., Jones J. D. S.* A_∞"=Algebras and the cyclic bar complex// Ill. J. Math. — 1990. — *34*, № 2. — P. 256–283.
4. *Jones J. D. S.* Cyclic homology and equivariant homology// Invent. Math. — 1987. — *87*. — P. 403–423.
5. *Kadeishvili T.* On the differentials of spectral sequence of a fiber bundle/ `arXiv: math/0609747v1 [math.DG]`.
6. *Kadeishvili T.* Twisting elements in homotopy G-algebras// Progr. Math. — 2011. — *287*. — P. 181–200.
7. *J.-L. Loday* Free loop space and homology/ `arXiv: 1110.0405v1 [math.DG]`.
8. *Markl M.* A cohomology theory for $A(m)$-algebras and applications// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *83*, № 2. — P. 141–175.
9. *Mescher S.* A primer on A-infinity-algebras and their Hochschild homology/ `arXiv: 1601.03963v1 [math.RA]`.
10. *Seidel P.* Symplectic homology as Hochschild homology// Proc. Symp. Pure Math. — 2009. — *80*. — P. 415—-434.
11. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H-spaces, I, II// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *108*. — P. 275–312.

12. *Terilla J., Tradler T.* Deformations of associative algebraswith inner products/ arXiv: math/0305052v1 [math.QA].

Кадеишвили Т.
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия;
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: kade@rmi.acnet.ge