О. М. Джохадзе, Задача Гурса для гиперболических систем второго порядка с нерасщепленными главными частями, *Дифференц. уравнения*, 2002, том 38, номер 1, 87–92

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 1, с. 87–92

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕРАСЩЕПЛЕННЫМИ ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2002 г. О. М. Джохадзе

Как известно, для линейных гиперболических систем уравнений второго порядка в отличие от скалярных уравнений такого же типа характеристическая задача Гурса на плоскости, вообще говоря, может быть некорректно поставленной (см., например, [1, с. 241; 2–5]).

В плоскости независимых переменных x, y рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, a, b, c – заданные действительные $N \times N$-матрицы, а $u = (u_1, \ldots, u_N)$ – искомый N-мерный действительный вектор. Предполагается, что $\det C \neq 0$ и $N > 1$.

Обозначим через $p(x,y;\xi,\eta)$ характеристический детерминант системы (1), т.е. $p(x,y;\xi,\eta) = \det Q(x,y;\xi,\eta)$, где $Q(x,y;\xi,\eta) = A(x,y)\xi^2 + 2B(x,y)\xi\eta + C(x,y)\eta^2$, а ξ и η – произвольные действительные параметры.

В силу условия $\det C \neq 0$ справедливо представление

$$p(x,y;1,\lambda) = \det C \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i(x,y))^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{l} k_i = 2N, \quad l = l(x,y), \quad k_i = k_i(x,y), \quad i = \overline{1,l}.$$

Система (1) называется гиперболической в точке (x,y), если $l > 1$ и все корни $\lambda_1(x,y), \ldots$ $\ldots, \lambda_l(x,y)$ полинома $p(x,y;1,\lambda)$ действительны (см., например, [1, с. 239; 6]).

Легко можно показать, что [1, с. 240; 6] $k_i(x,y) \geq N - \operatorname{rank} Q(x,y;1,\lambda_i(x,y))$, $i = \overline{1,l}$.

Гиперболическая система (1) называется нормально гиперболической в точке (x,y), если выполнены равенства $k_i(x,y) = N - \operatorname{rank} Q(x,y;1,\lambda_i(x,y))$, $i = \overline{1,l}$. Известно также, что для нормально гиперболических систем задача Гурса поставлена корректно (см., например, [6]).

Пусть в системе (1) $N = 2$, $A = C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $a = b = c = 0$.

Обозначим через D область плоскости независимых переменных x, y, ограниченную отрезками $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ соответственно характеристик $x - y = 0$, $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 0$ системы (1) в рассматриваемом случае. Задача Гурса заключается в нахождении регулярного в области D решения u этой системы, удовлетворяющего условиям

$$u|_{A'B'} = f_1, \quad u|_{A'D'} = f_2, \quad f_1 = (f_1^1, f_1^2), \quad f_2 = (f_2^1, f_2^2), \tag{2}$$

где f_1 и f_2 – заданные непрерывные вектор-функции, подчиненные условиям согласованности $f_1(0) = f_2(0)$. Здесь подразумевается, что вектор-функции f_i, $i = 1, 2$, параметризуются по переменной x, дополнительные условия гладкости относительно которых будут уточнены ниже по ходу наших рассуждений.

Установлено, что в этом случае задача (1), (2) некорректна, более того, соответствующая однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений (см., например, [1, с. 241; 2; 3]).

Всюду ниже $a = (a_{ij})_{i,j=1}^2$, $b = (b_{ij})_{i,j=1}^2$, $c = (c_{ij})_{i,j=1}^2$, где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $i,j = 1,2$, – действительные числа, а матрицы A, B и C имеют прежний вид.

Если в системе (1) матрицы a и b имеют лишь следующие отличные от нуля элементы

$$-a_{11} = a_{22} = b_{21} = -b_{12} = \lambda \in R \setminus \{0\}, \tag{3}$$

а матрица $c = 0$, то рассмотренная выше характеристическая задача Гурса (1), (2) однозначно разрешима в классе $C^3(D)$ (естественно, при требовании соответствующей степени гладкости данных) [1, с. 245; 2; 3].

Этот результат обобщен в работе [5] следующим образом: предположим, что элементы матриц b и c имеют вид

$$b_{ij} = a_{i3-j}, \quad i,j = 1,2, \quad c_{11} = c_{12}, \quad c_{21} = c_{22}. \tag{4}$$

Тогда для корректности задачи (1), (2) в классе $C^3(D)$ необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$a_{11} + a_{21} \neq a_{12} + a_{22}, \quad a_{11} + a_{12} \neq a_{21} + a_{22} \tag{5}$$

при требовании соответствующей гладкости граничных данных.

Очевидно, что матрицы a, b с элементами, определенными формулами (3), и матрица $c \equiv 0$ удовлетворяют условиям (4), (5) $(\lambda \neq 0)$.

1. Ниже будем предполагать, что матрицы a, b, c удовлетворяют условиям

$$b_{1j} + b_{2j} = a_{1\,3-j} + a_{2\,3-j}, \quad j = 1,2, \quad b_{21} - b_{22} = a_{22} - a_{21}, \quad c_{11} = c_{12}, \quad c_{21} = c_{22}. \tag{6}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Если выполнены условия (6), то необходимым и достаточным условием корректности задачи (1), (2) в классе $C^3(D)$ при достаточно гладких граничных вектор-функциях f_1 и f_2 являются неравенства*

$$a_{11} + a_{21} \neq a_{12} + a_{22} \quad (b_1 \neq 0), \quad a_{11} + b_{11} \neq a_{21} + b_{21} \quad (a_2 \neq 0). \tag{7}$$

Следует отметить, что матрицы a, b, c, определенные равенствами (4) и подчиненные условиям (5), удовлетворяют условиям (6), (7) (величины b_1 и a_2 определены ниже).

Доказательство. Достаточность. Перепишем систему (1) в развернутом виде

$$w_{\xi\xi} + a_1 w_\xi + b_1 v_\eta + c_1 w = 0, \quad v_{\eta\eta} + a_2 w_\xi + b_2 v_\eta + c_2 w + d_2 w_\eta = 0, \tag{8}$$

где $w = u_1 + u_2$, $v = u_1 - u_2$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $4a_1 = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$, $4a_2 = a_{11} + b_{11} - a_{21} - b_{21}$, $4b_1 = a_{11} + a_{21} - a_{12} - a_{22}$, $8b_2 = a_{11} - b_{11} - a_{21} + b_{21} - a_{12} + b_{12} + a_{22} - b_{22}$, $4c_1 = c_{11} + c_{22}$, $4c_2 = c_{11} - c_{22}$, $8d_2 = a_{11} - b_{11} - a_{21} + b_{21} + a_{12} - b_{12} - a_{22} + b_{22}$.

При таких обозначениях характеристические условия (2) представляются следующим образом:

$$w(0,\eta) = f_2^1(\eta/2) + f_2^2(\eta/2) \equiv f(\eta), \quad w(\xi,0) = f_1^1(\xi/2) + f_1^2(\xi/2) \equiv h(\xi), \quad 0 \le \xi,\eta \le 1, \tag{9}$$

$$v(0,\eta) = f_2^1(\eta/2) - f_2^2(\eta/2) \equiv e(\eta), \quad v(\xi,0) = f_1^1(\xi/2) - f_1^2(\xi/2) \equiv l(\xi), \quad 0 \le \xi,\eta \le 1. \tag{10}$$

Очевидно, что условие согласованности $f_1(0) = f_2(0)$ равносильно равенствам $f(0) = h(0)$, $e(0) = l(0)$.

Из системы (8) имеем равенства $b_1 v_\eta = -w_{\xi\xi} - a_1 w_\xi - c_1 w$, $b_1 v_{\eta\eta} = -a_2 b_1 w_\xi - b_1 b_2 v_\eta - b_1 c_2 w - b_1 d_2 w_\eta$, комбинированием которых получаем

$$b_1 v_{\eta\eta} = b_2 w_{\xi\xi} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) w_\xi - b_1 d_2 w_\eta + (b_2 c_1 - b_1 c_2) w.$$

Дифференцируя первое уравнение системы (8) по аргументу η и учитывая последнее равенство, окончательно находим

$$w_{\xi\xi\eta} + b_2 w_{\xi\xi} + a_1 w_{\xi\eta} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) w_\xi + (c_1 - b_1 d_2) w_\eta + (b_2 c_1 - b_1 c_2) w = 0, \tag{11}$$

$$v_{\eta\eta} + a_2 w_\xi + b_2 v_\eta + c_2 w + d_2 w_\eta = 0. \tag{12}$$

Будем считать, что первое и второе уравнения системы (8) заданы вплоть до характеристики $\eta = 0$ и $\xi = 0$ соответственно (т.е. считаем, что $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ непрерывны вплоть до прямых $y = x$, $y = -x$). Тогда из второго уравнения системы (8) имеем

$$\begin{gathered} w_\xi(0,\eta) = -(1/a_2)(e''(\eta) + b_2 e'(\eta) + c_2 f(\eta) + d_2 f'(\eta)) \equiv g(\eta), \\ w(0,\eta) = f(\eta), \quad w(\xi,0) = h(\xi), \quad 0 \le \xi, \eta \le 1, \end{gathered} \tag{13}$$

где будем дополнительно считать, что $g, f \in C^1[0,1]$, $h \in C^2[0,1]$ и $h'(0) = g(0)$.

Аналогично из первого уравнения системы (8) находим

$$v_\eta(\xi,0) = -(1/b_1)(h''(\xi) + a_1 h'(\xi) + c_1 h(\xi)) \equiv r(\xi), \quad v(\xi,0) = l(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{14}$$

Очевидно, в силу наших предположений относительно граничных данных f_1 и f_2 функции $r, l \in C[0,1]$.

На основании результатов работ [5, 7, 8] для решения характеристической задачи Гурса (11), (13) имеем интегральное представление

$$\begin{aligned} w(\xi,\eta) = \int_0^\xi [R_\xi(\xi_1,0;\xi,\eta)h'(\xi_1) + a_1 R_\xi(\xi_1,0;\xi,\eta)h(\xi_1) + (b_1 d_2 - c_1)R(\xi_1,0;\xi,\eta)h(\xi_1)]\,d\xi_1 - \\ - \int_0^\eta [R(0,\eta_1;\xi,\eta)g'(\eta_1) + b_2 R(0,\eta_1;\xi,\eta)g(\eta_1)]\,d\eta_1 - \\ - \int_0^\eta [R_{\xi\eta}(0,\eta_1;\xi,\eta) - b_2 R_\xi(0,\eta_1;\xi,\eta) - a_1 R_\eta(0,\eta_1;\xi,\eta) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)R(0,\eta_1;\xi,\eta)]f(\eta_1)d\eta_1 - \\ - a_1 R(0,\eta;\xi,\eta)f(\eta) + R_\xi(0,\eta;\xi,\eta)f(\eta) + a_1 R(0,0;\xi,\eta)h(0), \end{aligned}$$

где функция Римана $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ уравнения (11) однозначно определяется как решение задачи Гурса

$$-R_{\xi\eta\xi} + b_2 R_{\xi\xi} + a_1 R_{\xi\eta} + (a_2 b_1 - a_1 b_2)R_\xi + (b_1 d_2 - c_1)R_\eta + (b_2 c_1 - b_1 c_2)R = 0,$$

$$R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \quad R_\xi(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1) = \exp\{b_2(\eta - \eta_1)\}, \quad R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = \omega_0(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1);$$

здесь (ξ_1,η_1) – произвольная фиксированная точка из замкнутой области $\{(\xi,\eta) : 0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1\}$ задания уравнения (11), а $\omega_0(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)$ – решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $R_{\xi\xi}(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1) - a_1 R_\xi(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1) + (c_1 - b_1 d_2)R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 0$ относительно переменной ξ, удовлетворяющее следующим начальным условиям Коши: $R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)|_{\xi=\xi_1} = 0$, $R_\xi(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)|_{\xi=\xi_1} = 1$.

Для нахождения функции v следует воспользоваться уравнением (12) и условиями (14). Этим установлена достаточность условий (7).

При доказательстве необходимости указанных условий будем следовать схеме, предложенной в [5]. Пусть задача (1), (2) поставлена корректно. В переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ задача (1), (2) преобразуется в задачу (8)–(10).

Предположим противное: $b_1 = 0$, $a_2 \ne 0$. Тогда условия (13) однозначно определяют решение w первого уравнения системы (8).

Для функции v как решения второго уравнения системы (8) с условиями (10) имеем

$$v_{\eta\eta} + b_2 v_\eta = -a_2 w_\xi - c_2 w - d_2 w_\eta, \quad v(0,\eta) = e(\eta), \quad v(\xi,0) = l(\xi). \tag{15}$$

Так как функция $v(\xi,\eta)=\xi[1-\exp(-b_2\eta)]$ удовлетворяет всем требованиям соответствующей (15) однородной задачи, то для самой задачи (15) (и, следовательно, задачи (8)–(10)) единственность решения не имеет места. Полученное противоречие доказывает недопустимость обращения в нуль коэффициента b_1. Аналогично убеждаемся, что исключены и случаи $b_1\neq 0,\ a_2=0;\ b_1=0,\ a_2=0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 следует убедиться, что задачи (8)–(10) и (11)–(14) эквивалентны. Справедливо утверждение: пусть $f,g\in C^1[0,1]$, $h,e\in C^2[0,1]$ и дополнительно выполнено условие $e'(0)=r(0)$. Тогда в классе функций, удовлетворяющих указанным выше требованиям гладкости, задача (8)–(10) эквивалентна задаче (11)–(14).

Действительно, если (w,v) – решение задачи (8)–(10), то оно, очевидно, удовлетворяет условиям задачи (11)–(14). Обратно, пусть (w,v) – решение задачи (11)–(14). Запишем уравнение (11) в виде

$$(w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+c_1w)_\eta-b_1(a_2w_\xi+c_2w+d_2w_\eta)+b_2(w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+c_1w)=0,$$

которое с учетом равенства (12) принимает вид

$$(w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+c_1w)_\eta+b_1(v_{\eta\eta}+b_2v_\eta)+b_2(w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+c_1w)=0.$$

Далее, вводя обозначение $\Phi\equiv w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+b_1v_\eta+c_1w$, последнее равенство перепишем в виде $\Phi_\eta(\xi,\eta)+b_2\Phi(\xi,\eta)=0,\ 0\le\xi\le 1$. Так как $\Phi(\xi,0)=0$, то $\Phi(\xi,\eta)=0$, т.е. (w,v) удовлетворяют системе (8). Остается показать, что $v(0,\eta)=e(\eta),\ 0\le\eta\le 1$.

При $\xi=0,\ \eta\in[0,1]$ в силу равенств (12) и (13) находим $v_{\eta\eta}(0,\eta)+b_2v_\eta(0,\eta)=e''(\eta)+$ $+b_2e'(\eta)$. Далее из (14) имеем $v(0,0)=l(0)$, $v_\eta(0,0)=r(0)$, откуда следует, что $v(0,\eta)=e(\eta)$, $\eta\in[0,1]$.

2. Подобные результаты можно установить и при других предположениях относительно коэффициентов системы (1), в частности, когда старшие матрицы-коэффициенты имеют тот же вид, а младшие подобраны следующим образом:

$$b_{11}=a_{12},\quad b_{12}=a_{11},\quad b_{21}=a_{22},\quad b_{22}=a_{21}. \tag{16}$$

В этом случае имеет место

Теорема 2. *Характеристическая задача Гурса (1), (2) корректна в классе $C^2(D)$, если выполнены условия (16) и*

$$a_{11}+a_{21}\neq a_{12}+a_{22}\quad (b_1\neq 0),\qquad a_{11}+a_{12}\neq a_{21}+a_{22}\quad (c_2'\neq 0) \tag{17}$$

при достаточно гладких граничных вектор-функциях f_1 и f_2.

Отметим, что матрицы a, b, c, определенные равенствами (4) и подчиненные условиям (5), удовлетворяют условиям (16), (17) (величина c_2' определена ниже).

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения для величин w, v, ξ, η, a_1 и b_1, системе (1) можно придать вид

$$w_{\xi\xi}+a_1w_\xi+b_1'w+b_1v_\eta+d_1'v=0, \tag{18}$$

$$v_{\eta\eta}+a_2'v_\eta+b_2'v+c_2'w_\xi+d_2'w=0, \tag{19}$$

где $8b_1'=c_{11}+c_{12}+c_{21}+c_{22}$, $8d_1'=c_{11}+c_{21}-c_{12}-c_{22}$, $4a_2'=a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$, $8b_2'=c_{11}+c_{22}-c_{21}-c_{12}$, $4c_2'=a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}$, $8d_2'=c_{11}+c_{12}-c_{21}-c_{22}$.

Будем считать, что уравнения (18) и (19) определены вплоть до характеристик $\eta=0$ и $\xi=0$ соответственно, что равносильно требованию непрерывности решения u и его производных первого и второго порядка вплоть до прямых $y=x$, $y=-x$. Тогда из уравнения (19) имеем

$$w_\xi(0,\eta)=-(1/c_2')(e''(\eta)+a_2'e'(\eta)+b_2'e(\eta)+d_2'f(\eta))\equiv\widetilde{g}(\eta),\quad w(0,\eta)=f(\eta),\quad 0\le\eta\le 1. \tag{20}$$

Аналогично из уравнения (18) находим

$$v_\eta(\xi,0)=-(1/b_1)(h''(\xi)+a_1h'(\xi)+b_1'h(\xi)+d_1'l(\xi))\equiv\widetilde{r}(\xi),\quad v(\xi,0)=l(\xi),\quad 0\le\xi\le 1. \tag{21}$$

В равенствах (20) и (21) дополнительно предполагается, что $\widetilde{g}, f, \widetilde{r}, l \in C[0,1]$.

Верно утверждение: если выполнены условия $h'(0) = \widetilde{g}(0)$, $e'(0) = \widetilde{r}(0)$, то в классе функций, удовлетворяющих указанным требованиям гладкости, условия (9), (10) и (20), (21) эквивалентны.

Действительно, если выполнены условия (9), (10), то, очевидно, удовлетворяются и условия (20), (21). Обратно, пусть справедливы условия (20), (21). Остается показать, что $w(\xi,0) = h(\xi)$, $0 \le \xi \le 1$, и $v(0,\eta) = e(\eta)$, $0 \le \eta \le 1$.

При $\eta = 0$ из (18) с учетом (21) находим: $w_{\xi\xi}(\xi,0) + a_1 w_\xi(\xi,0) + b_1' w(\xi,0) = h''(\xi) + a_1 h'(\xi) + b_1' h(\xi)$. Далее из (20) имеем $w(0,0) = f(0)$, $w_\xi(0,0) = \widetilde{g}(0)$, откуда следует, что $w(\xi,0) = h(\xi)$, $\xi \in [0,1]$.

Аналогично при $\xi = 0$ из (19) с учетом (20) находим $v_{\eta\eta}(0,\eta) + a_2' v_\eta(0,\eta) + b_2' v(0,\eta) = e''(\eta) + a_2' e(\eta) + b_2' e(\eta)$. Далее из (21) имеем $v(0,0) = l(0)$, $v_\eta(0,0) = \widetilde{r}(0)$, откуда следует, что $v(0,\eta) = e(\eta)$, $\eta \in [0,1]$.

Пусть w_1 и w_2 – фундаментальная система решений обыкновенного дифференциального уравнения $\omega_{\xi\xi} + a_1\omega_\xi + b_1'\omega = 0$, подчиненная условиям $w_1(0) = 1$, $w_{1\xi}(0) = 0$, $w_2(0) = 0$, $w_{2\xi}(0) = 1$, а $W_1(\xi) = \exp(-a_1\xi)$ – соответствующий ей вронскиан. Тогда в силу равенств (18), (20) справедливо тождество

$$w(\xi,\eta) = f(\eta)w_1(\xi) + \widetilde{g}(\eta)w_2(\xi) + \int\limits_0^\xi \frac{w_1(\xi)w_2(\xi_1) - w_1(\xi_1)w_2(\xi)}{W_1(\xi_1)} (b_1 v_\eta(\xi_1,\eta) + d_1' v(\xi_1,\eta))\, d\xi_1. \quad (22)$$

Аналогично пусть v_1 и v_2 – фундаментальная система решений уравнения $\omega_{\eta\eta} + a_2'\omega_\eta + b_2'\omega = 0$, удовлетворяющая условиям $v_1(0) = 1$, $v_{1\eta}(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, $v_{2\eta}(0) = 1$, а $W_2(\eta) = \exp(-a_2'\eta)$ – соответствующий ей вронскиан. Тогда в силу равенств (19), (21) справедливо тождество

$$v(\xi,\eta) = l(\xi)v_1(\eta) + \widetilde{r}(\xi)v_2(\eta) + \int\limits_0^\eta \frac{v_1(\eta)v_2(\eta_1) - v_1(\eta_1)v_2(\eta)}{W_2(\eta_1)} (c_2' w_\xi(\xi,\eta_1) + d_2' w(\xi,\eta_1))\, d\eta_1. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$\varphi \equiv w_\xi, \quad \psi \equiv v_\eta. \quad (24)$$

Очевидно, в силу равенств (9) и (10) отсюда непосредственно будем иметь $w(\xi,\eta) = f(\eta) + \int_0^\xi \varphi(\xi_1,\eta)d\xi_1$, $v(\xi,\eta) = l(\xi) + \int_0^\eta \psi(\xi,\eta_1)d\eta_1$.

Окончательно, дифференцируя равенства (22) и (23) по переменным ξ и η соответственно, согласно обозначениям (24), получаем эквивалентную задаче (18)–(21) систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned}
w(\xi,\eta) &= f(\eta)w_1(\xi) + \widetilde{g}(\eta)w_2(\xi) + \int\limits_0^\xi \frac{w_1(\xi)w_2(\xi_1) - w_1(\xi_1)w_2(\xi)}{W_1(\xi_1)} (b_1\psi(\xi_1,\eta) + d_1' v(\xi_1,\eta))\, d\xi_1,\\
\varphi(\xi,\eta) &= f(\eta)w_1'(\xi) + \widetilde{g}(\eta)w_2'(\xi) + \int\limits_0^\xi \frac{w_1'(\xi)w_2(\xi_1) - w_1(\xi_1)w_2'(\xi)}{W_1(\xi_1)} (b_1\psi(\xi_1,\eta) + d_1' v(\xi_1,\eta))\, d\xi_1,\\
v(\xi,\eta) &= l(\xi)v_1(\eta) + \widetilde{r}(\xi)v_2(\eta) + \int\limits_0^\eta \frac{v_1(\eta)v_2(\eta_1) - v_1(\eta_1)v_2(\eta)}{W_2(\eta_1)} (c_2'\varphi(\xi,\eta_1) + d_2' w(\xi,\eta_1))\, d\eta_1,\\
\psi(\xi,\eta) &= l(\xi)v_1'(\eta) + \widetilde{r}(\xi)v_2'(\eta) + \int\limits_0^\eta \frac{v_1'(\eta)v_2(\eta_1) - v_1(\eta_1)v_2'(\eta)}{W_2(\eta_1)} (c_2'\varphi(\xi,\eta_1) + d_2' w(\xi,\eta_1))\, d\eta_1.
\end{aligned} \quad (25)$$

Эквивалентность понимается в следующем смысле: если пара функций (w, v) является решением задачи (18)–(21), то удовлетворяется система (25) при условии (24) и, наоборот, если имеет место (25), то пара функций (w, v) удовлетворяет условиям задачи (18)–(21) и имеет место (24).

Очевидно, что система интегральных уравнений (25) относительно неизвестных функций w, v, φ, ψ имеет и притом единственное решение (см., например, [9]), обладающее соответствующей гладкостью. Этим завершается доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 1. С. 31–34.
3. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1289–1292.
4. *Бицадзе А.В.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1976. Т. 134. С. 67–77.
5. *Шхануков М.Х.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 169–172.
6. *Харибегашвили С.С.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 149–155.
7. *Шхануков М.Х.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699.
8. *Джохадзе О.М.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 523–535.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1976.

Математический институт им. А.М. Размадзе,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
21.08.2000 г.