О. М. Джохадзе, Общая граничная задача типа Дарбу в угловых криволинейных областях для уравнения третьего порядка с доминированными младшими членами, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 2, 295–313

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.956.32

ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ДАРБУ В УГЛОВЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРОВАННЫМИ МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

О. М. Джохадзе

Аннотация: Для уравнения

$$u_{xxy} + a^{2,0}u_{xx} + a^{1,1}u_{xy} + a^{1,0}u_x + a^{0,1}u_y + a^{0,0}u = f, \tag{1}$$

где $a^{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$, $a^{2,1} \equiv 1$, f — заданные, а u — искомая действительные функции, рассмотрена задача типа Дарбу

$$(M_i u_{xx} + N_i u_{xy} + P_i u_x + Q_i u_y + S_i u)\big|_{OP^0_{\varkappa(i)}} = f_i, \tag{2}$$

где M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i, f_i, $i = 1, 2, 3$, — заданные действительные функции, OP_1^0 и OP_2^0 соответственно отрезки кривых: $\gamma_1 : y = \gamma_1(x)$, $0 \leq x \leq x_0$; $\gamma_2 : x = \gamma_2(y)$, $0 \leq y \leq y_0$; $\varkappa(1) = 1$, $\varkappa(i) = 2$, $i = 2, 3$. Для задачи (1), (2) введено определенное банахово пространство B_α, $\alpha \geq 0$. Указывается такое число α_0, что при $\alpha > \alpha_0$ задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве B_α, а при $\alpha < \alpha_0$ она нормально разрешима по Хаусдорфу в B_α и ее индекс $\varkappa$ равен $+\infty$. В частности, соответствующая (1), (2) однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Библиогр. 18.

1. В плоскости переменных x, y рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка общего вида с доминированными младшими членами

$$Lu := u_{xxy} + a^{2,0}u_{xx} + a^{1,1}u_{xy} + a^{1,0}u_x + a^{0,1}u_y + a^{0,0}u = f, \tag{1}$$

где $a^{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$ $(i + j \neq 3)$, f — заданные, а u — искомая действительные функции.

Прямые $y = \mathrm{const}$ образуют двукратное семейство характеристик уравнения (1), а $x = \mathrm{const}$ — однократное.

Пусть γ_1: $y = \gamma_1(x)$, $0 \leq x < \infty$, и γ_2: $x = \gamma_2(y)$, $0 \leq y < \infty$, — две простые кривые, выходящие из начала координат $O(0, 0)$ и целиком лежащие в угле $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ниже будем считать, что γ_i, $i = 1, 2$, — достаточно гладкие кривые, $\gamma_2(\gamma_1(x)) < x$, $x > 0$, каждая из которых либо характеристика уравнения (1), либо ни в одной своей точке не имеет характеристического направления. Обозначим через D область, ограниченную кривыми γ_1, γ_2 и расположенную в угле $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Пусть P_1^0 и P_2^0 — точки пересечения γ_1 и γ_2 соответственно с характеристиками $L_1(P^0)$: $x = x_0$ и $L_2(P^0)$: $y = y_0$, выходящими из произвольно взятой точки $P^0(x_0,y_0) \in \overline{D}$. Уравнение (1) будем рассматривать в прямоугольной области $D_0 := \{(x,y) : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$, ограниченной характеристиками $x = 0$, $x = x_0$ и $y = 0$, $y = y_0$.

Для уравнения (1) рассмотрим общую граничную задачу типа Дарбу в следующей постановке: требуется найти в D_0 регулярное решение u уравнения (1), удовлетворяющее на отрезках OP_1^0 и OP_2^0 кривых γ_1 и γ_2 граничным условиям

$$(M_1u_{xx} + N_1u_{xy} + P_1u_x + Q_1u_y + S_1u)|_{OP_1^0} = f_1, \tag{2}$$
$$(M_2u_{xx} + N_2u_{xy} + P_2u_x + Q_2u_y + S_2u)|_{OP_2^0} = f_2, \tag{3}$$
$$(M_3u_{xx} + N_3u_{xy} + P_3u_x + Q_3u_y + S_3u)|_{OP_2^0} = f_3, \tag{4}$$

где M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i, f_i, $i = 1,2,3,$ — заданные действительные функции.

Регулярным решением уравнения (1) называется функция u, непрерывная в D_0 вместе со своими частными производными $D_x^iD_y^ju$, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$, $i + j > 0$, $D_x := \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y := \frac{\partial}{\partial y}$, и удовлетворяющая уравнению (1) в D_0.

Замечание 1. Отметим, что гиперболическая природа рассматриваемой задачи учтена наличием в ней лишь производных, доминированных главной частью $D_x^2D_yu$ уравнения (1).

Замечание 2. Ввиду того, что семейство характеристик $y = \mathrm{const}$ является двукратным для гиперболического уравнения (1), на отрезке OP_2^0 кривой γ_2 заданы два условия (3), (4).

Замечание 3. Следует отметить, что эту задачу можно поставить и в криволинейной угловой области, ограниченной кривыми γ_1, γ_2 и характеристиками $L_1(P^0)$, $L_2(P^0)$ уравнения (1), с теми же граничными условиями (2)–(4). Как хорошо известно, решение u таким образом поставленной задачи продолжается в область D_0 как решение исходной задачи (1)–(4). При этом постановка задачи в области D_0 удобна с точки зрения эффективного использования метода функции Римана. С этой целью коэффициенты и правая часть уравнения (1) продолжаются в соответствующую характеристическую область D_0.

Отметим, что уравнения с доминирующим старшим членом гиперболического типа, которые иногда называют псевдопараболическими, встречаются, например, при изучении обратных задач (см. [1]).

Одно из семейств характеристик уравнения (1) является кратным. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на характер их разрешимости. Следует отметить, что задача (1)–(4) представляет собой естественное развитие известных классических постановок задач Гурса и Дарбу (см., например, [2–6]) для линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Начально-граничным и характеристическим задачам для широкого класса гиперболических уравнений более высокого порядка на плоскости с доминирующим (см., например, [7]) старшим членом посвящены работы [8–16] и др.

Введем в рассмотрение функциональные пространства

$$\overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0) := \{u : u \in C(\overline{D}_0),\ u(O) = 0,\ \sup_{z \neq O, z \in \overline{D}_0} |z|^{-\alpha}|u(z)| < \infty\},\ z = x + iy,$$

$$\overset{\circ}{C}_\alpha[0,d] := \{\varphi : \varphi \in C[0,d],\ \varphi(0) = 0,\ \sup_{0<t\le d} t^{-\alpha}|\varphi(t)| < \infty\},\ \alpha \ge 0,\ d > 0.$$

Очевидно, что относительно норм

$$\|u\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0)} := \sup_{z\neq O, z\in\overline{D}_0} |z|^{-\alpha}|u(z)|, \quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,d]} := \sup_{0<t\le d} t^{-\alpha}|\varphi(t)|$$

пространства $\overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0)$ и $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,d]$ банаховы.

Легко видеть, что принадлежность функций $u \in \overset{\circ}{C}(\overline{D}_0) := \{u : u \in C(\overline{D}_0), u(O) = 0\}$ и $\varphi \in \overset{\circ}{C}[0,d] := \{\varphi : \varphi \in C[0,d],\ \varphi(0) = 0\}$ соответственно пространствам $\overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0)$ и $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,d]$ равносильна выполнению следующих неравенств:

$$|u(z)| \le c|z|^\alpha, \quad z \in \overline{D}_0, \quad |\varphi(t)| \le ct^\alpha, \quad t \in [0,d]. \tag{5}$$

(Здесь и всюду ниже через c будем обозначать положительную постоянную, конкретное значение которой для наших исследований принципиального значения не имеет.)

Граничную задачу (1)–(4) будем исследовать в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0) := \big\{u : D^i_x D^j_y u \in \overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0),\ i = 0,1,2,\ j = 0,1\big\}$, которое является банаховым относительно нормы $\|u\|_{\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)} := \sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{j=0}^{1} \big\|D^i_x D^j_y u\big\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0)}$.

Через $C^{m,n}$, $m = 0,1,\dots$, $n = 0,1,\dots$, обозначим класс функций φ, непрерывных вместе со своими частными производными $D^i_x\varphi$, $D^j_y\varphi$, $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, $C := C^{0,0}$. При рассмотрении граничной задачи (1)–(4) в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ будем требовать, чтобы $a^{i,j} \in C^{i,j}(\overline{D}_0)$, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$ $(i + j \ne 3)$, $f \in \overset{\circ}{C}_\alpha(\overline{D}_0)$, M_1, N_1, P_1, Q_1, $S_1 \in C[0,x_0]$, M_i, N_i, P_i, Q_i, $S_i \in C[0,y_0]$, $i = 2,3$, $f_1 \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$, $f_i \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0,y_0]$, $i = 2,3$.

2. Согласно, например, работам [10, 11, 13, 15] функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, $(x,y;\xi,\eta) \in \overline{D}_0 \times \overline{D}_0$ уравнения (1) однозначно определяется как решение задачи Гурса

$$L^*_{(x,y)}v := -v_{xyx} + (a^{2,0}v)_{xx} + (a^{1,1}v)_{xy} - (a^{1,0}v)_x - (a^{0,1}v)_y + a^{0,0}v = 0,$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = 0,\ v_x(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\left\{\int\limits_\eta^y a^{2,0}(\xi,y_1)\,dy_1\right\}, v(x,\eta;\xi,\eta) = \omega_0(x,\eta;\xi,\eta),$$

где (ξ,η) — произвольная фиксированная точка из замкнутой области $\overline{D}_0$. Здесь $\omega_0(x,\eta;\xi,\eta)$ — решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v_{xx}(x,\eta;\xi,\eta) - (a^{1,1}v)_x(x,\eta;\xi,\eta) + (a^{0,1}v)(x,\eta;\xi,\eta) = 0 \tag{6}$$

относительно переменной x, удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$v(x,\eta;\xi,\eta)|_{x=\xi} = 0, \quad v_x(x,\eta;\xi,\eta)|_{x=\xi} = 1. \tag{7}$$

В то же время известно, что (см., например, [11]) $D^i_x D^j_y v, D^i_\xi D^j_\eta v \in C(\overline{D}_0 \times \overline{D}_0)$, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$, и для регулярного решения u уравнения (1) имеет место интегральное представление

$$u(x,y) = \int\limits_{x^0}^{x} [v_x(x_1,y^0;x,y)\varphi_1'(x_1) + (a^{1,1}v)_x(x_1,y^0;x,y)\varphi_1(x_1)$$

$$- (a^{0,1}v)(x_1, y^0; x, y)\varphi_1(x_1)]\, dx_1$$

$$- \int\limits_{y^0}^{y} [v(x^0, y_1; x, y)\nu_1'(y_1) + (a^{2,0}v)(x^0, y_1; x, y)\nu_1(y_1)]\, dy_1$$

$$- \int\limits_{y^0}^{y} [v_{xy}(x^0, y_1; x, y) - (a^{2,0}v)_x(x^0, y_1; x, y) - (a^{1,1}v)_y(x^0, y_1; x, y)$$

$$+ (a^{1,0}v)(x^0, y_1; x, y)]\psi_1(y_1)\, dy_1 - (a^{1,1}v)(x^0, y; x, y)\psi_1(y) + v_x(x^0, y; x, y)\psi_1(y)$$

$$+ (a^{1,1}v)(x^0, y^0; x, y)\varphi_1(x^0) - \int\limits_{x^0}^{x}\int\limits_{y^0}^{y} v(x_1, y_1; x, y) f(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1, \quad (8)$$

где $\varphi_1(x_1) := u(x_1, y^0)$, $\psi_1(y_1) := u(x^0, y_1)$, $\nu_1(y_1) := u_x(x^0, y_1)$, а (x^0, y^0) — произвольная фиксированная точка из $\overline{D}_0$.

Используя интегральное представление (8) при $x^0 = y^0 = 0$, легко установить, что справедлива

Лемма 1. *Формула*

$$u(x, y) = \int\limits_0^x K^1(\xi; x, y)\varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^y K^2(\eta; x, y)\nu(\eta)\, d\eta$$

$$+ \int\limits_0^y K^3(\eta; x, y)\psi(\eta)\, d\eta + F^0(x, y), \quad (9)$$

где

$$K^1(\xi; x, y) := \int\limits_{\xi}^{x} [v_x(x_1, 0; x, y) + (a^{1,1}v)_x(x_1, 0; x, y)(x_1 - \xi)$$

$$- (a^{0,1}v)(x_1, 0; x, y)(x_1 - \xi)]\, dx_1,$$

$$K^2(\eta; x, y) := -v(0, \eta; x, y) - \int\limits_{\eta}^{y} (a^{2,0}v)(0, y_1; x, y)\, dy_1,$$

$$K^3(\eta; x, y) := v_x(0, y; x, y) - (a^{1,1}v)(0, y; x, y) - \int\limits_{\eta}^{y} [v_{xy}(0, y_1; x, y)$$

$$- (a^{2,0}v)_x(0, y_1; x, y) - (a^{1,1}v)_y(0, y_1; x, y) + (a^{1,0}v)(0, y_1; x, y)]\, dy_1,$$

$$F^0(x, y) := -\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(x_1, y_1; x, y) f(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1,$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между регулярными решениями u уравнения (1) *класса $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ и величинами $\varphi \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0, x_0]$, $\psi, \nu \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0, y_0]$, причем $\varphi(x) = u_{xx}(x, 0)$, $0 \le x \le x_0$, $\psi(y) = u_y(0, y)$, $\nu(y) = u_{xy}(0, y)$, $0 \le y \le y_0$.*

Доказательство. Очевидно, что $\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \psi_1(0) = \nu_1(0) = 0$. Пусть $\varphi(x) := \varphi_1''(x)$, $0 \le x \le x_0$, $\psi(y) := \psi_1'(y)$, $\nu(y) := \nu_1'(y)$, $0 \le y \le y_0$. Тогда формула (8) при $x^0 = y^0 = 0$ принимает вид (9). Далее, если $u \in \overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$, то очевидно, что $\varphi \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0, x_0]$, $\psi, \nu \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0, y_0]$. Для доказательства обратного утверждения заметим, что в силу (5) справедливы оценки $|\varphi(x)| \le cx^{\alpha}$, $x \in [0, x_0]$, $|\psi(y)| \le cy^{\alpha}$, $|\nu(y)| \le cy^{\alpha}$, $y \in [0, y_0]$, $|f(x, y)| \le c|z|^{\alpha}$, $z \in \overline{D}_0$.

Вводя обозначения

$$\widetilde{K}^1 := \max_{\xi;x,y} |K^1(\xi; x, y)|,\ \widetilde{K}^i := \max_{\eta;x,y} |K^i(\eta; x, y)|,\ i = 2, 3,\ \widetilde{K}^4 := \max_{\xi,\eta;x,y} |v(\xi, \eta; x, y)|,$$

из формулы (9) получаем

$$|u(x, y)| \le c\widetilde{K}^1 \int\limits_0^x \xi^{\alpha} d\xi + c\widetilde{K}^2 \int\limits_0^y \eta^{\alpha}\, d\eta + c\widetilde{K}^3 \int\limits_0^y \eta^{\alpha} d\eta + c\widetilde{K}^4 \int\limits_0^x \int\limits_0^y |\zeta|^{\alpha}\, d\xi d\eta \le c_1|z|^{\alpha},$$

где $c_1 := c(\widetilde{K}^1 x_0 + \widetilde{K}^2 y_0 + \widetilde{K}^3 y_0 + \widetilde{K}^4 x_0 y_0) > 0$, $\zeta := (\xi, \eta)$, $z \in \overline{D}_0$. Отсюда следует, что $u \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)$. Аналогично доказывается, что $D^i_x D^j_y u \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$, $i + j > 0$, и, следовательно, $u \in \overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$.

Подставляя функцию u, представленную по формуле (9), в граничные условия (2)–(4), будем иметь

$$A_1(x)\varphi(x) + B_1(x)\psi(\gamma_1(x)) + C_1(x)\nu(\gamma_1(x)) = F_1(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{10}$$

$$A_2(y)\varphi(\gamma_2(y)) + B_2(y)\psi(y) + C_2(y)\nu(y) = F_2(y), \quad 0 \le y \le y_0, \tag{11}$$

$$A_3(y)\varphi(\gamma_2(y)) + B_3(y)\psi(y) + C_3(y)\nu(y) = F_3(y), \quad 0 \le y \le y_0, \tag{12}$$

где

$$A_1(x) := M_1(x) \exp\left\{ \int\limits_{\gamma_1(x)}^0 a^{2,0}(x, y_1)\, dy_1 \right\}, \quad 0 \le x \le x_0,$$

$$B_k(y) := N_k(y)[v_{x\xi}(0, y; \gamma_2(y), y) - (a^{1,1}v_{\xi})(0, y; \gamma_2(y), y)] + Q_k(y)[v_x(0, y; \gamma_2(y), y) - (a^{1,1}v)(0, y; \gamma_2(y), y)],$$

$$C_k(y) := -N_k(y)v_{\xi}(0, y; \gamma_2(y), y) - Q_k(y)v(0, y; \gamma_2(y), y), \quad k = 2, 3, \quad 0 \le y \le y_0,$$

а A_2, A_3, B_1, C_1 — известные функции, конкретный вид которых не имеет принципиального значения при дальнейших исследованиях. Правые части F_i, $i = 1, 2, 3$, определяются равенствами

$$F_1(x) := \tilde{f}_1(x) - \int\limits_0^x K^4(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi - \int\limits_0^{\gamma_1(x)} K^7(x, \eta)\psi(\eta)\, d\eta - \int\limits_0^{\gamma_1(x)} K^{10}(x, \eta)\nu(\eta)\, d\eta, \quad 0 \le x \le x_0,$$

$$F_i(y) := \tilde{f}_i(y) - \int\limits_0^{\gamma_2(y)} K^{i+3}(\xi, y)\varphi(\xi)\, d\xi - \int\limits_0^y K^{i+6}(\eta, y)\psi(\eta)\, d\eta - \int\limits_0^y K^{i+9}(\eta, y)\nu(\eta)\, d\eta, \quad 0 \le y \le y_0, \quad i = 2, 3.$$

Здесь $\tilde{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, K^i, $i = 4, \dots, 12$, — известные функции. Уравнения (11) и (12) перепишем следующим образом:

$$B_i(y)\psi(y) + C_i(y)\nu(y) = F_i(y) - A_i(y)\varphi(\gamma_2(y)), \quad i = 2, 3, \ 0 \le y \le y_0. \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\Delta(y) := \det \begin{Vmatrix} B_2(y) & C_2(y) \\ B_3(y) & C_3(y) \end{Vmatrix}, \quad 0 \le y \le y_0.$$

Тогда имеет место представление

$$\Delta(y) = \Delta_0(y) \exp\left\{ \int\limits_{\gamma_2(y)}^{0} a^{1,1}(x_1, y)\, dx_1 \right\}, \quad 0 \le y \le y_0, \tag{14}$$

где

$$\Delta_0(y) := \det \begin{Vmatrix} Q_2(y) & N_2(y) \\ Q_3(y) & N_3(y) \end{Vmatrix}, \quad 0 \le y \le y_0.$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что

$$\Delta(y) = \Delta_0(y) \det \begin{Vmatrix} v(0, y; \gamma_2(y), y) & v_\xi(0, y; \gamma_2(y), y) \\ v_x(0, y; \gamma_2(y), y) & v_{x\xi}(0, y; \gamma_2(y), y) \end{Vmatrix}, \quad 0 \le y \le y_0.$$

Дифференцируя по ξ первое равенство из условий (7), получаем $v_\xi(x, \eta; \xi, \eta)|_{x=\xi} = -1$. Аналогично, дифференцируя по ξ второе равенство из (7) и учитывая равенства (6), (7), находим $v_{x\xi}(x, \eta; \xi, \eta)\big|_{x=\xi} = -a^{1,1}(\xi, \eta)$.

Очевидно, что функция $v_\xi(x, \eta; \xi, \eta)$ наряду с $v(x, \eta; \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (6). Обозначив через

$$W(x, \eta; \xi, \eta) := \det \begin{Vmatrix} v(x, \eta; \xi, \eta) & v_\xi(x, \eta; \xi, \eta) \\ v_x(x, \eta; \xi, \eta) & v_{x\xi}(x, \eta; \xi, \eta) \end{Vmatrix}$$

вронскиан уравнения (6), по формуле Остроградского — Лиувилля имеем (см., например, [17])

$$W(x, \eta; \xi, \eta) = W(\xi, \eta; \xi, \eta) \exp\left\{ \int\limits_{\xi}^{x} a^{1,1}(x_1, \eta)\, dx_1 \right\} = \exp\left\{ \int\limits_{\xi}^{x} a^{1,1}(x_1, \eta)\, dx_1 \right\},$$

поскольку

$$W(\xi, \eta; \xi, \eta) = \det \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a^{1,1}(\xi, \eta) \end{Vmatrix} \equiv 1.$$

Из этих равенств окончательно получаем представление (14).

В предположении, что

$$\Delta_0(y) \ne 0, \quad 0 \le y \le y_0, \tag{15}$$

в силу (14) из системы (13) при $0 \le y \le y_0$ находим

$$\psi(y) = a_1(y) - b_1(y)\varphi(\gamma_2(y)), \quad \nu(y) = a_2(y) - b_2(y)\varphi(\gamma_2(y)), \tag{16}$$

где

$$a_1(y) := \Delta^{-1}(y)[F_2(y)C_3(y) - F_3(y)C_2(y)],$$
$$b_1(y) := \Delta^{-1}(y)[A_2(y)C_3(y) - A_3(y)C_2(y)],$$

$$a_2(y) := \Delta^{-1}(y)[F_3(y)B_2(y) - F_2(y)B_3(y)],$$
$$b_2(y) := \Delta^{-1}(y)[A_3(y)B_2(y) - A_2(y)B_3(y)].$$

Пусть выполнено условие $A_1(x) \neq 0$, $0 \leq x \leq x_0$, которое с учетом вида функции A_1 равносильно условию

$$M_1(x) \neq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{17}$$

Подставляя полученные выражения для функций $\psi(y)$, $\nu(y)$, $0 \leq y \leq y_0$, из (16) в равенство (10), относительно $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, получаем

$$\varphi(x) - a(x)\varphi(\tau(x)) = F(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{18}$$

где $a(x) := A_1^{-1}(x)[B_1(x)b_1(\gamma_1(x)) + C_1(x)b_2(\gamma_1(x))]$, $F(x) := A_1^{-1}(x)[F_1(x) - B_1(x)a_1(\gamma_1(x)) - C_1(x)a_2(\gamma_1(x))]$, $\tau(x) := \gamma_2(\gamma_1(x))$, $\quad 0 \leq x \leq x_0$.

Простые вычисления показывают, что

$$F(x) = \int_0^x R_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^{\tau(x)} R_2(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$+ \int_0^{\gamma_1(x)} R_3(x,\eta)\psi(\eta)\,d\eta + \int_0^{\gamma_1(x)} R_4(x,\eta)\nu(\eta)\,d\eta + F_4(x), \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$a_1(y) = \int_0^{\gamma_2(y)} R_5(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^y R_6(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta$$
$$+ \int_0^y R_7(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta + F_5(y), \quad 0 \leq y \leq y_0, \tag{19}$$

$$a_2(y) = \int_0^{\gamma_2(y)} R_8(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^y R_9(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta$$
$$+ \int_0^y R_{10}(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta + F_6(y), \quad 0 \leq y \leq y_0,$$

где R_i, $i = 1,\ldots,10$, — ядра интегральных операторов, входящих в правые части системы (19), а через F_i, $i = 4,5,6$, обозначены величины

$$\begin{gathered} F_4(x) := \tilde{\alpha}(x)\tilde{f}_1(x) + \tilde{\beta}(x)\tilde{f}_2(\gamma_1(x)) + \tilde{\gamma}(x)\tilde{f}_2(\gamma_1(x)), \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ F_5(y) := \Delta^{-1}(y)[C_3(y)\tilde{f}_2(y) - C_2(y)\tilde{f}_3(y)], \\ F_6(y) := \Delta^{-1}(y)[B_2(y)\tilde{f}_3(y) - B_3(y)\tilde{f}_2(y)], \quad 0 \leq y \leq y_0. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — известные функции.

Вводя обозначение

$$(K\varphi)(x) := \varphi(x) - a(x)\varphi(\tau(x)), \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{21}$$

равенствам (16), (18) в силу (19) можно придать вид

$$
\begin{aligned}
(K\varphi)(x) = \int\limits_0^x R_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_2(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \\
+ \int\limits_0^{\gamma_1(x)} R_3(x,\eta)\psi(\eta)\,d\eta + \int\limits_0^{\gamma_1(x)} R_4(x,\eta)\nu(\eta)\,d\eta + F_4(x), \quad 0 \le x \le x_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(y) = \int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_5(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{y} R_6(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta \\
+ \int\limits_0^{y} R_7(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta - b_1(y)\varphi(\gamma_2(y)) + F_5(y), \quad 0 \le y \le y_0, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu(y) = \int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_8(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{y} R_9(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta \\
+ \int\limits_0^{y} R_{10}(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta - b_2(y)\varphi(\gamma_2(y)) + F_6(y), \quad 0 \le y \le y_0.
\end{aligned}
$$

Легко заметить, что

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(x) < x, \quad x > 0, \tag{23}$$

а если хотя бы одна из кривых γ_1, γ_2 — характеристика уравнения (1), то $\tau(x) \equiv 0$, $0 \le x \le x_0$. Нетрудно проверить, что

$$\tau'(0) = \gamma_2'(0)\gamma_1'(0). \tag{24}$$

Замечание 4. Очевидно, что при выполнении условий (15), (17) в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ задача (1)–(4) относительно неизвестных функций $\varphi \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,x_0]$, $\psi, \nu \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]$ эквивалентна системе интегрофункциональных уравнений (22).

3. В настоящем пункте будем считать, что кривые γ_1 и γ_2 не касаются в точке O и не являются характеристиками уравнения (1). Поскольку γ_1 и γ_2 расположены в угле $x \ge 0$, $y \ge 0$, то очевидно, что в этом случае справедливо неравенство $0 < \tau_0 < 1$, где $\tau_0 := \tau'(0)$. Положим $\sigma := a(0)$ и $\alpha_0 := -\frac{\log|\sigma|}{\log \tau_0}(\sigma \ne 0)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$(K\varphi)(x) = g(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{25}$$

где $\varphi, g \in \overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,x_0]$, $\alpha \ge 0$, а оператор K определен по формуле (21).

Лемма 3. *Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда при $\alpha > \alpha_0$ уравнение* (25) *однозначно разрешимо в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$ и справедлива оценка*

$$|(K^{-1}g)(x)| \leq C_1 x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]}, \tag{26}$$

где положительная константа C_1 не зависит от функции g.

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы

$$(\Gamma\varphi)(x) := a(x)\varphi(\tau(x)), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad K^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma^j, \tag{27}$$

где I — тождественный оператор. Легко видеть, что оператор K^{-1} является формально обратным к оператору K. Поэтому нам достаточно доказать сходимость ряда Неймана $I + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \Gamma^j$.

В силу определения оператора γ из (27) имеем

$$(\Gamma^j\varphi)(x) = a(x)a(\tau(x)) \cdots a(\tau^{j-1}(x))\varphi(\tau^j(x)),$$

где $\tau^0(x) := x$, $\tau^j(x) := \tau(\tau^{j-1}(x))$, $j > 0$, $0 \leq x \leq x_0$. Условие $\alpha > \alpha_0$ равносильно неравенству $\tau_0^\alpha|\sigma| < 1$. Поэтому в силу непрерывности функций $a(x)$, $\tau(x)$, $\tau'(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, и равенств $a(0) = \sigma$, $\tau'(0) = \tau_0$, $0 < \tau_0 < 1$, найдутся такие положительные числа ε $(\varepsilon < x_0)$, δ и q, что при $0 \leq x \leq \varepsilon$ будут справедливы следующие неравенства:

$$\tau(x) \leq (\tau_0 + \delta)x, \tag{28}$$

$$|a(x)| \leq |\sigma| + \delta, \quad (\tau_0 + \delta)^\alpha(|\sigma| + \delta) = q < 1. \tag{29}$$

В силу требований, предъявляемым к кривым γ_1, γ_2, функция $\tau(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, строго монотонно возрастает и удовлетворяет условиям (23).

Из (23) и строгой монотонности функции $\tau(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, легко следует, что последовательность $\{\tau^j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, $0 \leq x \leq x_0$, равномерно стремится к нулю при $j \to \infty$ на отрезке $[0, x_0]$. Следовательно, существует такое натуральное число j_0, что

$$\tau^j(x) \leq \varepsilon \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_0,\ j \geq j_0. \tag{30}$$

Из (23), (28) и (30) при $j > j_0$ имеем

$$\begin{aligned}\tau^j(x) = \tau^{j-j_0}(\tau^{j_0}(x)) \leq (\tau_0 + \delta)\tau^{j-j_0-1}(\tau^{j_0}(x)) \leq \cdots \\ \leq (\tau_0 + \delta)^{j-j_0}\tau^{j_0}(x) \leq (\tau_0 + \delta)^{j-j_0}x, \quad 0 \leq x \leq x_0.\end{aligned} \tag{31}$$

Пусть $\beta := \max\limits_{0 \leq x \leq x_0} |a(x)|$. В силу (28)–(31) при $j > j_0$, $g \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}&|(\Gamma^j g)(x)| = |a(x)a(\tau(x)) \cdots a(\tau^{j_0-1}(x))|\,|a(\tau^{j_0}(x)) \cdots a(\tau^{j-1}(x))|\,|g(\tau^j(x))| \\ &\leq \beta^{j_0}(|\sigma| + \delta)^{j-j_0}(\tau^j(x))^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \leq \beta^{j_0}(|\sigma| + \delta)^{j-j_0}[(\tau_0 + \delta)^{j-j_0}x]^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \\ &\leq \beta^{j_0}(\tau_0 + \delta)^{-j_0\alpha}(|\sigma| + \delta)^{-j_0}[(\tau_0 + \delta)^\alpha(|\sigma| + \delta)]^j x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} = c_2 q^j x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]},\end{aligned} \tag{32}$$

где $c_2 := \beta^{j_0}(\tau_0 + \delta)^{-j_0\alpha}(|\sigma| + \delta)^{-j_0}$.

При $1 \le j \le j_0$ в силу (23) имеем

$$|(\Gamma^j g)(x)| \le \beta^j (\tau^j(x))^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \le \beta^j x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]}. \tag{33}$$

Теперь из (32) и (33) в силу (29) окончательно находим

$$|\varphi(x)| = |(K^{-1}g)(x)| \le |g(x)| + \left|\sum_{j=1}^{j_0} (\Gamma^j g)(x)\right| + \left|\sum_{j=j_0+1}^{\infty} (\Gamma^j g)(x)\right|$$

$$\le \left(1 + \sum_{j=1}^{j_0} \beta^j + c_2 \sum_{j=j_0+1}^{\infty} q^j\right) x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} = \left(1 + \sum_{j=1}^{j_0} \beta^j + c_2 \frac{q^{j_0+1}}{1-q}\right) x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]},$$

откуда следуют непрерывность оператора K^{-1} в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$ и справедливость оценки (26) с постоянной $C_1 := 1 + \sum\limits_{j=1}^{j_0} \beta^j + c_2 \frac{q^{j_0+1}}{1-q}$.

Замечание 5. Если $\sigma = 0$, то неравенство $\tau_0^\alpha|\sigma| < 1$ выполняется при любых $\alpha \ge 0$ и, как видно из доказательства, лемма 3 справедлива в этом случае для всех $\alpha \ge 0$.

Лемма 4. *Пусть $\sigma \ne 0$. Тогда при $\alpha < \alpha_0$ уравнение* (25) *разрешимо в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$, причем соответствующее ему однородное уравнение имеет в указанном пространстве бесконечное множество линейно независимых решений, т. е.* $\dim \operatorname{Ker} K = +\infty$.

Доказательство. Поскольку функция $\tau(x)$, $0 \le x \le x_0$, строго монотонно возрастает, то существует обратная к $\tau(x)$, $0 \le x \le x_0$, функция, которую обозначим через $\tilde\tau(x)$, $0 \le x \le \tau(x_0)$. Условие $\alpha < \alpha_0$ равносильно неравенству $\tau_0^\alpha|\sigma| > 1$. Поэтому так же, как и при доказательстве леммы 3, найдутся такие положительные числа ε_1 ($\varepsilon_1 < x_0$), δ_1 и q_1, что при $0 \le x \le \varepsilon_1$ будут справедливы следующие неравенства:

$$\tau(x) \ge (\tau_0 - \delta_1)x, \tag{34}$$

$$\tilde\tau(x) \le (\tau_0 - \delta_1)^{-1}x, \tag{35}$$

$$|a^{-1}(x)| \le (|\sigma| - \delta_1)^{-1}, \quad |\sigma| - \delta_1 > 0, \tag{36}$$

$$(\tau_0 - \delta_1)^\alpha(|\sigma| - \delta_1) = q_1^{-1} > 1. \tag{37}$$

Легко видеть, что оператор Γ из (27) обратим, причем

$$(\Gamma^{-1}\varphi)(x) = a^{-1}(\tilde\tau(x))\varphi(\tilde\tau(x)), \quad 0 \le x \le \tau(\varepsilon_1).$$

Уравнение (25) перепишем эквивалентным образом в виде

$$\varphi(x) - (\Gamma^{-1}\varphi)(x) = -(\Gamma^{-1}g)(x), \quad 0 \le x \le \tau(\varepsilon_1). \tag{38}$$

В силу (23) и строгой монотонности функции $\tau(x)$, $0 \le x \le x_0$, для любого x из интервала $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ существует единственное натуральное число $n_1 = n_1(x)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\tau(\varepsilon_1) < \tilde\tau^{n_1}(x) \le \varepsilon_1. \tag{39}$$

Аналогично при $\varepsilon_1 < x \le x_0$ существует единственное натуральное число $n_2 = n_2(x)$, удовлетворяющее неравенствам $\tau(\varepsilon_1) \le \tau^{n_2}(x) < \varepsilon_1$.

Легко проверить, что всякое непрерывное на полуинтервале $0 < x \leq x_0$ решение уравнения (25) или (38) дается формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^0(x), & \tau(\varepsilon_1) \leq x \leq \varepsilon_1, \\ (\Gamma^{-n_1(x)}\varphi^0)(x) - \sum\limits_{j=1}^{n_1(x)} (\Gamma^{-j}g)(x), & 0 < x < \tau(\varepsilon_1), \\ (\Gamma^{n_2(x)}\varphi^0)(x) + \sum\limits_{j=0}^{n_2(x)-1} (\Gamma^{j}g)(x), & \varepsilon_1 < x \leq x_0, \end{cases} \tag{40}$$

где φ^0 — произвольная функция класса $C[\tau(\varepsilon_1), \varepsilon_1]$, удовлетворяющая условию $\varphi^0(\varepsilon_1) - a(\varepsilon_1)\varphi^0(\tau(\varepsilon_1)) = g(\varepsilon_1)$.

Покажем, что функция φ, заданная формулой (40), принадлежит классу $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ при любой φ^0 с указанными выше свойствами, если $g \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$. Отсюда в силу произвольности функции φ^0 следует утверждение леммы 4 для уравнения (25).

При $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ обозначим через $n_0 = n_0(x)$ натуральное число, определяемое единственным образом из неравенств

$$(\tau_0 - \delta_1)\varepsilon_1 < (\tau_0 - \delta_1)^{-n_0} x \leq \varepsilon_1. \tag{41}$$

Легко проверить, что

$$n_0(x) = \left[\frac{\log \varepsilon_1^{-1} x}{\log(\tau_0 - \delta_1)}\right] \geq \frac{\log \varepsilon_1^{-1} x}{\log(\tau_0 - \delta_1)} - 1, \tag{42}$$

где $[p]$ — целая часть числа p.

Неравенства (39) и (41) эквивалентны неравенствам

$$\tau^{n_1+1}(\varepsilon_1) < x \leq \tau^{n_1}(\varepsilon_1), \tag{43}$$

$$(\tau_0 - \delta_1)^{n_0+1}\varepsilon_1 < x \leq (\tau_0 - \delta_1)^{n_0}\varepsilon_1. \tag{44}$$

Из (34) и (44) имеем $x \leq (\tau_0 - \delta_1)^{n_0}\varepsilon_1 \leq \tau^{n_0}(\varepsilon_1)$, откуда в силу (43) и (42) получаем

$$n_1(x) \geq n_0(x) \geq \frac{\log \varepsilon_1^{-1} x}{\log(\tau_0 - \delta_1)} - 1. \tag{45}$$

Из (35) при $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ следует, что

$$\tilde{\tau}^j(x) \leq (\tau_0 - \delta_1)^{-j} x, \quad j = 1, \dots, n_1(x). \tag{46}$$

Действительно, при $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ и $1 \leq j \leq n_1(x)$ находим

$$\tilde{\tau}^j(x) = \tilde{\tau}(\tilde{\tau}^{j-1}(x)) \leq (\tau_0 - \delta_1)^{-1}\tilde{\tau}^{j-1}(x) \leq \dots \leq (\tau_0 - \delta_1)^{-j} x.$$

В силу (36), (37) и (45) при $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |(\Gamma^{-n_1(x)}\varphi^0)(x)| &= |a^{-1}(\tilde{\tau}(x))a^{-1}(\tilde{\tau}^2(x)) \cdots a^{-1}(\tilde{\tau}^{n_1(x)}(x))\varphi^0(\tilde{\tau}^{n_1(x)}(x))| \\ &\leq (|\sigma| - \delta_1)^{-n_1(x)}\|\varphi^0\|_{C[\tau(\varepsilon_1),\varepsilon_1]} \leq (\tau_0 - \delta_1)^{\alpha n_1(x)}\|\varphi^0\|_{C[\tau(\varepsilon_1),\varepsilon_1]} \\ &\leq (\tau_0 - \delta_1)^{\left(\frac{\log \varepsilon_1^{-1} x}{\log(\tau_0 - \delta_1)} - 1\right)\alpha}\|\varphi^0\|_{C[\tau(\varepsilon_1),\varepsilon_1]} = (\tau_0 - \delta_1)^{-\alpha}\varepsilon_1^{-\alpha}x^\alpha\|\varphi^0\|_{C[\tau(\varepsilon_1),\varepsilon_1]}. \end{aligned} \tag{47}$$

Аналогичным образом с учетом неравенств (36), (37), (46) при $0 < x < \tau(\varepsilon_1)$ и $1 \le j \le n_1(x)$ имеем

$$|(\Gamma^{-j}g)(x)| \le (|\sigma|-\delta_1)^{-j}(\tilde{\tau}^j(x))^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]} \le (|\sigma|-\delta_1)^{-j}(\tau_0-\delta_1)^{-j\alpha}x^\alpha\|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]}$$
$$= [(\tau_0-\delta_1)^\alpha(|\sigma|-\delta_1)]^{-j}x^\alpha\|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]} = q_1^j x^\alpha \|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]}.$$

Отсюда ввиду (37)

$$\left|\sum_{j=1}^{n_1(x)}(\Gamma^{-j}g)(x)\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n_1(x)} q_1^j\right)x^\alpha\|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]} \le \frac{q_1}{1-q_1}x^\alpha\|g\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]}. \tag{48}$$

В силу (47) и (48) заключаем, что функция φ, заданная формулой (40) и являющаяся решением уравнения (25), принадлежит классу $\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]$.

Из лемм 3 и 4 вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (15), (17). *Если имеет место равенство $\sigma = 0$, то задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ при всех $\alpha \ge 0$. Если же $\sigma \ne 0$, то при $\alpha > \alpha_0$ она однозначно разрешима в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$, а при $\alpha < \alpha_0$ нормально разрешима по Хаусдорфу в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ и ее индекс $\varkappa$ равен $+\infty$. В частности, соответствующая* (1)–(4) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений.*

Доказательство. Предполагая, что φ — известная функция, из равенств (22) получаем

$$\begin{aligned}
&\psi(y) - \int_0^y R_6(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta - \int_0^y R_7(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta \\
&\qquad = F_5(y) - b_1(y)\varphi(\gamma_2(y)) + \int_0^{\gamma_2(y)} R_5(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \le y \le y_0, \\
&\nu(y) - \int_0^y R_9(\eta,y)\psi(\eta)\,d\eta - \int_0^y R_{10}(\eta,y)\nu(\eta)\,d\eta \\
&\qquad = F_6(y) - b_2(y)\varphi(\gamma_2(y)) + \int_0^{\gamma_2(y)} R_8(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \le y \le y_0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Вводя обозначения

$$\Phi(y) := \left\|\begin{matrix}\psi(y)\\ \nu(y)\end{matrix}\right\|, \quad R_0(\eta,y) := \left\|\begin{matrix} R_6(\eta,y) & R_7(\eta,y) \\ R_9(\eta,y) & R_{10}(\eta,y)\end{matrix}\right\|,$$

$$F_0(y) := \left\|\begin{matrix} F_5(y) - b_1(y)\varphi(\gamma_2(y)) + \int_0^{\gamma_2(y)} R_5(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi \\ F_6(y) - b_2(y)\varphi(\gamma_2(y)) + \int_0^{\gamma_2(y)} R_8(\xi,y)\varphi(\xi)\,d\xi \end{matrix}\right\|,$$

$0 \le \eta \le y$, $0 \le y \le y_0$, систему (49) можно записать в матричной форме

$$\Phi(y) - \int_0^y R_0(\eta,y)\Phi(\eta)\,d\eta = F_0(y), \quad 0 \le y \le y_0. \tag{50}$$

Равенство (50) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которой при любых R_0 и F_0 (из соответствующих классов) существует и единственно (см., например, [4]).

Пусть матричная функция $R^*(\eta, y)$, $0 \le \eta \le y$, $0 \le y \le y_0$, порядка 2×2 — резольвента уравнения (50). Тогда имеем равенство

$$\Phi(y) = F_0(y) + \int\limits_0^y R^*(\eta, y) F_0(\eta)\, d\eta, \quad 0 \le y \le y_0,$$

компонентная запись которого при $0 \le y \le y_0$ дает

$$\begin{aligned} \psi(y) &= F_7(y) - b_1(y)\varphi(\gamma_2(y)) - \int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_{11}(\xi, y)\varphi(\xi)\, d\xi, \\ \nu(y) &= F_8(y) - b_2(y)\varphi(\gamma_2(y)) - \int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_{12}(\xi, y)\varphi(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{51}$$

где F_7, F_8, R_{11}, R_{12} — известные функции. Подставляя найденные значения для функций ψ и ν в первое из равенств (22), будем иметь

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_0^x R_1(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_{13}(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + F_9(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{52}$$

где F_9 и R_{13} — известные функции.

Замечание 6. Согласно равенству (51) уравнение (52) эквивалентно системе уравнений (22) и, следовательно, в силу замечания 4 задаче (1)–(4).

Замечание 7. Линейный интегральный оператор T, определяемый по формуле

$$(T\varphi)(x) := \int\limits_0^x R_1(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_{13}(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{53}$$

ввиду условия (23) является оператором типа Вольтерра.

Для доказательства теоремы 1 уравнение (52) относительно неизвестной функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ будем решать методом последовательных приближений. Положим $\varphi_0(x) \equiv 0$, $0 \le x \le x_0$, а при $n = 1, 2, \dots$

$$(K\varphi_n)(x) = \int\limits_0^x R_1(x, \xi)\varphi_{n-1}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_{13}(x, \xi)\varphi_{n-1}(\xi)\, d\xi + F_9(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{54}$$

где оператор K определен по формуле (21).

В условиях леммы 3, используя оценку (26) и принимая во внимание замечание 7, докажем, что имеет место оценка

$$|(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(x)| \le M \frac{N^n}{n!} x^{n+\alpha}, \tag{55}$$

где $M = M(M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i, f_i,\ i = 1,2,3,\ f, C_1, \gamma_1, \gamma_2) > 0$, $N = N(M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i,\ i = 1,2,3,\ C_1, \gamma_1, \gamma_2) > 0$ — достаточно большие положительные числа, не зависящие от $n = 0, 1, \ldots,$ — подлежат определению, а C_1 — постоянная из (26).

Доказательство оценки (55). В силу требований на f, f_i, $i = 1,2,3$, принимая во внимание выражения для функции F_9, с учетом равенств (20) легко установить, что $F_9 \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$. Поэтому в силу (5) $|F_9(x)| \le \theta x^\alpha$, или $x^{-\alpha}|F_9(x)| \le \theta$, $\alpha \ge 0$, $\theta := \mathrm{const} > 0$, $x \in [0, x_0]$. Если в этом неравенстве возьмем вместо x переменную $s \in [0, x]$, то согласно определению нормы в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x]$ будем иметь

$$\|F_9\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \le \theta \quad \forall x \in [0, x_0]. \tag{56}$$

Так как $\varphi_0(x) \equiv 0$, $0 \le x \le x_0$, и в условиях леммы 3 справедлива оценка (26), из (54), (56) получаем

$$|(\varphi_1 - \varphi_0)(x)| = |\varphi_1(x)| = |(K^{-1}F_9)(x)| \le C_1 x^\alpha \|F_9\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \le C_1 \theta x^\alpha. \tag{57}$$

В предположении, что оценка (55) справедлива при $n = 1, 2, \ldots,$ докажем ее справедливость при $n+1$ для достаточно больших M и N. Пусть

$$\widetilde{R} := \max\{\max_{x,\xi} |R_1(x,\xi)|, \max_{x,\xi} |R_{13}(x,\xi)|\}.$$

Из (54) имеем

$$\{K(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1})\}(x) = \{T(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\}(x). \tag{58}$$

Далее, для правой части уравнения (58) справедлива оценка

$$|\{T(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\}(x)| \le \widetilde{R} M \frac{N^n}{n!} \int\limits_0^x \xi^{n+\alpha} d\xi + \widetilde{R} M \frac{N^n}{n!} \int\limits_0^{\tau(x)} \xi^{n+\alpha} d\xi \\ \le 2\widetilde{R} M \frac{N^n}{(n+1)!} x^{n+1+\alpha}.$$

Отсюда так же, как и в случае вывода неравенства (56), будем иметь

$$\|T(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \le 2\widetilde{R} M \frac{N^n}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{59}$$

Из (26), (58) и (59) находим

$$|(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1})(x)| = |\{K^{-1}T(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\}(x)| \\ \le C_1 x^\alpha \|T(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x]} \le 2C_1 \widetilde{R} M \frac{N^n}{(n+1)!} x^{n+1+\alpha}.$$

Отсюда в силу (57) непосредственно следует, что если положить

$$M = C_1 \theta, \quad N = 2C_1 \widetilde{R}, \tag{60}$$

то оценка (55) будет справедлива при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ Из (55) вытекает, что ряд

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{61}$$

сходится в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ и в силу (54) предельная функция φ удовлетворяет уравнению (52). Отсюда, возвращаясь к системе (49), с учетом замечания 6 получаем, что функции φ, ψ, ν удовлетворяют системе уравнений (22). Далее, вследствие леммы 1 представленная по формуле (9) функция u принадлежит классу $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$. Тем самым показано, что найденная функция u в плоскости переменных x, y является решением задачи (1)–(4) класса $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$.

Теперь покажем, что у задачи (1)–(4) в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ других решений нет. Действительно, предположим, что функция $u^0 \in \overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ является решением соответствующей (1)–(4) однородной задачи. Тогда функции $\varphi^0(x) := u^0_{xx}(x, 0)$, $0 \le x \le x_0$, $\psi^0(y) := u^0_y(0, y)$, $\nu^0(y) := u^0_{xy}(0, y)$, $0 \le y \le y_0$ удовлетворяют однородной системе уравнений

$$
\begin{aligned}
(K\varphi^0)(x) = &\int\limits_0^x R_1(x,\xi)\varphi^0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_2(x,\xi)\varphi^0(\xi)\,d\xi \\
&+ \int\limits_0^{\gamma_1(x)} R_3(x,\eta)\psi^0(\eta)\,d\eta + \int\limits_0^{\gamma_1(x)} R_4(x,\eta)\nu^0(\eta)\,d\eta, \quad 0 \le x \le x_0, \\
\psi^0(y) = &\int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_5(\xi,y)\varphi^0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y R_6(\eta,y)\psi^0(\eta)\,d\eta \\
&+ \int\limits_0^y R_7(\eta,y)\nu^0(\eta)\,d\eta - b_1(y)\varphi^0(\gamma_2(y)), \quad 0 \le y \le y_0, \\
\nu^0(y) = &\int\limits_0^{\gamma_2(y)} R_8(\xi,y)\varphi^0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y R_9(\eta,y)\psi^0(\eta)\,d\eta \\
&+ \int\limits_0^y R_{10}(\eta,y)\nu^0(\eta)\,d\eta - b_2(y)\varphi^0(\gamma_2(y)), \quad 0 \le y \le y_0.
\end{aligned} \tag{62}
$$

В силу замечания 6 функция φ^0 удовлетворяет эквивалентному (62) интегрофункциональному уравнению

$$
(K\varphi^0)(x) = \int\limits_0^x R_1(x,\xi)\varphi^0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{\tau(x)} R_{13}(x,\xi)\varphi^0(\xi)\,d\xi, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{63}
$$

Применим к уравнению (63) метод последовательных приближений, приняв за нулевое приближение функцию φ^0. Так как эта функция удовлетворяет уравнению (63), каждое следующее приближение будет совпадать с ней, т. е. $\varphi^0_n(x) \equiv \varphi^0(x)$, $0 \le x \le x_0$. Приняв во внимание, что функция φ^0 удовлетворяет оценке вида (5), рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены при выводе неравенства (55), получаем $|\varphi^0(x)| = |\varphi^0_{n+1}(x)| \le M_0 \frac{N_0^n}{n!} x^{n+\alpha}$. Здесь M_0 и N_0 — положительные постоянные, которые определяются так же, как M и N. В пределе, когда $n \to \infty$, находим, что $\varphi^0 \equiv 0$. Далее, в силу равенств (62) и замечания 6 получаем, что $\psi^0(y) \equiv 0$, $\nu^0(y) \equiv 0$, $0 \le y \le y_0$. Окончательно по формуле (9) имеем $u^0(x, y) \equiv 0$ всюду в $\overline{D}_0$.

Тем самым доказана первая часть теоремы 1. Для доказательства второй части уравнение (52) запишем в удобном для исследования виде

$$K\varphi - T\varphi = F_9, \tag{64}$$

где операторы K и T определены соответственно по формулам (21), (53).

Очевидно, что оператор $T : \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0] \to \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$, $\alpha \ge 0$, компактен. В условиях второй части теоремы 1, т. е. при $\sigma \ne 0$, $\alpha < \alpha_0$ в силу леммы 4 имеем $\operatorname{Im} K = \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$, $\dim \operatorname{Ker} K = +\infty$, $\dim \operatorname{Ker} K^* = 0$, где K^* — оператор, сопряженный к K. Значит, уравнение $K\varphi = \psi$, $\psi \in \overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$, нормально разрешимо по Хаусдорфу (см., например, [4]) в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ и его индекс $\varkappa$ равен $+\infty$. Отсюда, в свою очередь, следует, что и уравнение (64) обладает этим же свойством в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$, поскольку оператор T компактен и свойство уравнения быть нормально разрешимым и иметь индекс, равный $+\infty$, устойчиво при компактных возмущениях (см., например, [18]). Последнее доказывает вторую часть теоремы 1, ибо задача (1)–(4) в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ эквивалентным образом редуцирована к уравнению (52) в пространстве $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$.

Замечание 8. Так как

$$a(0) = M_1^{-1}(0)\Delta^{-1}(0)(M_2N_3Q_1 - M_3N_2Q_1 + M_3N_1Q_2 - M_2N_1Q_3)(0),$$

то величина α_0, фигурирующая в условиях разрешимости задачи (1)–(4), зависит только от значений коэффициентов M_i, N_i, Q_i, $i = 1, 2, 3$, в точке O и от величины $\tau_0 = \gamma_2'(0)\gamma_1'(0)$.

4. В случае касания кривых γ_1 и γ_2 в точке O из равенства (24) следует, что

$$\tau_0 = 1. \tag{65}$$

По предположению каждая из кривых γ_1, γ_2 либо характеристика уравнения (1), либо ни в одной своей точке не имеет характеристического направления. Поэтому в силу (65) кривые γ_1 и γ_2 не являются характеристиками уравнения (1). Следуя доказательствам лемм 3, 4 из п. 3, полагая в неравенствах (28), (29) и (34), (35), (37) $\tau_0 = 1$, легко показать, что справедливы следующие леммы.

Лемма 5. *Пусть* $|\sigma| < 1$. *Тогда уравнение* (25) *однозначно разрешимо в пространстве* $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ *при всех* $\alpha \ge 0$ *и справедлива оценка* (26).

Лемма 6. *Пусть* $|\sigma| > 1$. *Тогда уравнение* (25) *разрешимо в пространстве* $\overset{\circ}{C}_\alpha[0, x_0]$ *при всех* $\alpha \ge 0$, *причем соответствующее ему однородное уравнение имеет в указанном пространстве бесконечное множество линейно независимых решений, т. е.* $\dim \operatorname{Ker} K = +\infty$.

На основании лемм 5, 6 и теоремы 1 доказывается, что имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (15) *и* (17) *и кривые* γ_1, γ_2 *касаются в точке* O. *Если* $|\sigma| < 1$, *то задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в пространстве* $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$ *при всех* $\alpha \ge 0$, *а при* $|\sigma| > 1$ *она нормально разрешима по Хаусдорфу* *в классе* $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ *при всех* $\alpha \geq 0$ *и ее индекс* $\varkappa$ *равен* $+\infty$*. В частности, соответствующая* (1)–(4) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений.*

5. Ниже мы докажем, что при выполнении условий теорем 1 и 2, обеспечивающих однозначную разрешимость задачи (1)–(4), для решения u этой задачи класса $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)} \leq C_2 C_3(f_1, f_2, f_3, f), \tag{66}$$

где

$$C_3(f_1, f_2, f_3, f) := \|f_1\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,x_0]} + \|f_2\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} + \|f_3\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} + \|f\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)},$$

а C_2 — положительная постоянная, не зависящая от f, f_i, $i = 1, 2, 3$.

Сначала покажем, что для решения u класса $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ задачи (1)–(4) имеет место оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{\alpha}(\overline{D}_0)} \leq C_4 C_3(\varphi, \psi, \nu, f), \tag{67}$$

где C_4 — положительная постоянная, не зависящая от f, f_i, $i = 1, 2, 3$, $\varphi(x) := u_{xx}(x, 0)$, $0 \leq x \leq x_0$, $\psi(y) := u_y(0, y)$, $\nu(y) := u_{xy}(0, y)$, $0 \leq y \leq y_0$.

Действительно, следуя доказательству леммы 1, в силу определения норм в пространствах $\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0, d], \overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)$ из формулы (9) будем иметь

$$\begin{aligned}
|u(x, y)| &\leq \widetilde{K}^1 \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,x_0]} \int\limits_0^x \xi^{\alpha}\, d\xi + \widetilde{K}^2 \|\nu\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} \int\limits_0^y \eta^{\alpha}\, d\eta \\
&\quad + \widetilde{K}^3 \|\psi\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} \int\limits_0^y \eta^{\alpha}\, d\eta + \widetilde{K}^4 \|f\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y |\zeta|^{\alpha} d\xi d\eta \\
&\leq x_0 \widetilde{K}^1 \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,x_0]} |z|^{\alpha} + y_0 \widetilde{K}^2 \|\nu\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} |z|^{\alpha} \\
&\qquad + y_0 \widetilde{K}^3 \|\psi\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}[0,y_0]} |z|^{\alpha} + x_0 y_0 \widetilde{K}^4 \|f\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)} |z|^{\alpha},
\end{aligned}$$

откуда

$$\|u\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)} \leq C_{0,0} C_3(\varphi, \psi, \nu, f), \tag{68}$$

где $C_{0,0} := \max\{x_0\widetilde{K}^1, y_0\widetilde{K}^2, y_0\widetilde{K}^3, x_0 y_0\widetilde{K}^4\}$. Аналогичным образом доказываются следующие оценки:

$$\left\|D_x^i D_y^j u\right\|_{\overset{\circ}{C}_{\alpha}(\overline{D}_0)} \leq C_{i,j} C_3(\varphi, \psi, \nu, f), \tag{69}$$

где $C_{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$, $i+j > 0$, — положительные постоянные, не зависящие от функций f, f_i, $i = 1, 2, 3$, φ, ψ, ν.

Из оценок (67), (68) непосредственно вытекает (66), где $C_4 := \sum\limits_{i=0}^{2} \sum\limits_{j=0}^{1} C_{ij}$.

Далее, из (55) и (61) непосредственно имеем

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(x)| \leq M x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} x^n = M x^{\alpha} \exp\{Nx\}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Отсюда легко следует, что

$$\|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,x_0]} \leq M\gamma, \tag{70}$$

где $\gamma := \exp\{Nx_0\}$. Теперь с учетом равенств (51) и легко доказываемого неравенства $|\gamma_2(y)| \leq \{\max\limits_{0\leq y\leq y_0} |\gamma_2'(y)|\}y$, $0 \leq y \leq y_0$, можно доказать справедливость аналогичных (69) оценок и для функций ψ, ν:

$$\|\psi\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,y_0]} \leq M_4C_3(f_1,f_2,f_3,f), \quad \|\nu\|_{\overset{\circ}{C}_\alpha[0,y_0]} \leq M_5C_3(f_1,f_2,f_3,f), \tag{71}$$

где M_4, M_5 — положительные постоянные, не зависящие от f, f_i, $i=1,2,3$. Из (60) и доказательства неравенства (56) легко вытекает, что в качестве M можно взять величину

$$M = C_5C_3(f_1,f_2,f_3,f), \tag{72}$$

где C_5 — достаточно большая положительная постоянная, не зависящая от f, f_i, $i=1,2,3$.

Наконец, из неравенств (67), (70), (71) с учетом (72) следует оценка (66), где положительная постоянная C_2 выражается через C_4, C_5, M_4, M_5, γ.

Замечание 9. Из оценки (66) непосредственно следует устойчивость решения задачи (1)–(4) в классе $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_\alpha(\overline{D}_0)$.

6. В случае разрешимости задачи (1)–(4) рассмотрим вопрос об определении области зависимости для точки $(x,y)\in\overline{D}_0$. Кривыми γ_1 и γ_2 область D_0 разбивается на три подобласти: $D_1 := \{(\xi,\eta) : 0<\xi<x_0,\ 0<\eta<\gamma_1(\xi)\}$, $D_2 := \{(\xi,\eta) : \gamma_2(\eta)<\xi<x_0,\ \gamma_1(\xi)<\eta<y_0\}$ и $D_3 := \{(\xi,\eta) : 0<\eta<y_0,\ 0<\xi<\gamma_2(\eta)\}$. Пусть $P(x,y)\in\overline{D}_1$. Обозначим через $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$ точки пересечения γ_1 и γ_2 соответственно с характеристиками $\xi=x$ и $\eta=\gamma_1(x)$. Как видно из структуры интегрофункционального уравнения (52), для определения значения функции φ в точке x достаточно знания значений граничных функций f_1, f_2 и f_3 соответственно на множествах $[0,x]$, $[0,x]$ и $[0,\gamma_1(x)]$, что, в свою очередь, позволяет определить значения функции φ на всем множестве $[0,x]$. Далее, из структуры системы интегрофункциональных уравнений (16) следует, что для определения значений функций ψ и ν в точке y (а следовательно, на всем множестве $[0,y]$) достаточно знания значений функций φ, f_1 и f_2, f_3 соответственно на множествах $[0,\gamma_2(y)]$ и $[0,y]$. Но в силу того, что $(x,y)\in\overline{D}_1$, имеем $[0,x]\supset[0,\gamma_2(y)]$ и $[0,\gamma_1(x)]\supset[0,y]$.

Следовательно, для точки $P(x,y)\in\overline{D}_1$ областью зависимости является множество $D_P^1 := \{(\xi,\eta) : 0\leq\xi\leq x,\ 0\leq\eta\leq\gamma_1(x)\}$, т. е. значение решения u задачи (1)–(4) в точке $P(x,y)$ вполне определяется значениями коэффициентов и правой части уравнения (1) в замкнутой области D_P^1, а граничных функций — на отрезках кривых γ_1, γ_2, содержащихся в D_P^1.

Аналогичными рассуждениями получаем, что в случае, когда точка $P(x,y)$ принадлежит $\overline{D}_2$ или $\overline{D}_3$, областями зависимости этой точки являются множества $D_P^2 := \{(\xi,\eta) : 0\leq\xi\leq x,\ 0\leq\eta\leq y\}$ и $D_P^3 := \{(\xi,\eta) : 0\leq\xi\leq\gamma_2(y),\ 0\leq\eta\leq y\}$ соответственно.

Замечание 10. Естественно возникает вопрос: что происходит, когда достаточные условия (15) и (17) разрешимости задачи (1)–(4) нарушаются отдельно или одновременно? В этом случае на корректность постановки задачи (1)–(4) могут оказать влияние младшие члены задачи. Эти результаты будут опубликованы отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.

2. *Darboux G.* Lecons sur la théorie générale des surfaces, troisiéme partie. Paris: Gauthiér-Villars, 1894.

3. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.: ГТТИ, 1933. Ч. 1.

4. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

5. *Врагов В. Н.* О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 7–16.

6. *Харибегашвили С. С.* Об одной граничной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 6. С. 1313–1316.

7. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

8. *Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J.* Instability, uniqueness, and nonexistince theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. V. 19. P. 100–116.

9. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Differential equations. 1972. V. 12, N 3. P. 559–565.

10. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

11. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.

12. *Jokhadze O.* On a Darboux problem for a third order hyperbolic equation with multiple characteristics // Georgian Math. J. 1995. V. 2, N 5. P. 469–490.

13. *Jokhadze O.* The first mixed problem for pseudoparabolic equations on a plane // Bull. Acad. Sci. Georgia. 1996. V. 154, N 2. P. 177–180.

14. *Jokhadze O.* General Darboux type problem for a third order equation with dominated lower terms // Bull. Acad. Sci. Georgia. 1996. V. 154, N 3. P. 344–347.

15. *Джохадзе О. М.* Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 523–535.

16. *Jokhadze O.* Boundary value problems in the plane for higher-order hyperbolic (pseudoparabolic) equations in angular and characteristic domains // Workshop in Partial Differential Equations. Univ. Potsdam, Germany. 1999. P. 17–18.

17. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.

18. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 20 ноября 2000 г.

Джохадзе Отар Михайлович
Математический институт им. А. М. Размадзе АН Грузии,
ул. М. Алексидзе, 1, Тбилиси 380093, Грузия
jokha@rmi.acnet.ge