О. М. Джохадзе, Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами, *Дифференц. уравнения*, 2003, том 39, номер 10, 1366–1378

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 10, с. 1366–1378

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

ФУНКЦИЯ РИМАНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРОВАННЫМИ МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© 2003 г. О. М. Джохадзе

0. Введение. Из принципиальных затруднений теории дифференциальных уравнений и систем с частными производными при изучении граничных задач, а также выявлении структурных и качественных свойств исследуемых дифференциальных операторов отметим особенно важные, которые возникают при переходе: i) от уравнений и систем низшего порядка к уравнениям и системам порядка более высокого; ii) от одного уравнения к системам; iii) к уравнениям и системам со многими независимыми переменными. Для преодоления этих затруднений созданы мощные аппараты, которые успешно применяются. К сожалению, в целом они не универсальны и возможности представления полной картины исследуемого объекта в ряде случаев они не предоставляют. Главным образом это распространяется на гиперболические уравнения и системы.

В настоящей работе предпринята попытка в определенной степени преодоления упомянутых выше трудностей при рассмотрении некоторых классов гиперболических уравнений и систем высокого порядка на плоскости и в пространстве. Основным объектом исследования избран класс гиперболических уравнений высокого порядка вида

$$(Lu)(x) := \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{\substack{|\alpha|\le m-1\\ \alpha_i\le k_i,\ i=\overline{1,n}}} a^\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad x\in D, \tag{0.1}$$

где $m=\sum_{i=1}^n k_i$, $\alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha|:=\sum_{i=1}^n\alpha_i$, $m\in\mathbb{N}$; k_i,α_i, $i=\overline{1,n}$, – целые неотрицательные числа, а $D\subseteq\mathbb{R}^n$ – область задания уравнения (0.1). Изучены их некоторые структурные и качественные свойства как на плоскости, так и в пространстве. Преодоление перечисленных выше препятствий для уравнений вида (0.1) обычно реализуют различными путями. Среди этих путей ниже значительную роль будет играть определенным образом введенная функция Римана. Одним из основных аппаратов изучения граничных задач для таких уравнений является применение метода функции Римана. Для уравнения второго порядка этот метод на плоскости был разработан еще Риманом [1]. Опираясь на результаты работ (см., например, [1–13]), нам представляется целесообразным определить функцию Римана дифференциальных уравнений с частными производными с доминированными (см., например, [14]) младшими членами общего вида (0.1) следующим образом: будем говорить, что функция $R(x;\xi)$, $(x,\xi)\in\overline{\Pi}\times\overline{\Pi}$, является*) функцией Римана уравнения (0.1), если для любой фиксированной точки $x^0\in\overline{\Pi}\subset D$ и произвольной непрерывной функции f функция u, определенная равенством

$$u(x) = (-1)^m\int\limits_{x^0}^{x} R(\xi;x)f(\xi)\,d\xi, \quad x\in\overline{\Pi}, \tag{0.2}$$

является регулярным решением в $\overline{\Pi}$ уравнения (0.1). Эта идея построения функции Римана естественно приведет к определенным требованиям относительно нее, которые и ряд характерных свойств выясняются по ходу нашего исследования. Указываются также некоторые

*) Здесь и всюду ниже в работе $\Pi := \{x : -\infty\le a_i < x_i < b_i\le\infty,\ i=\overline{1,n}\}$, $x:=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}:=]-\infty,\infty[$, $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$.

преимущества определения функции Римана равенством (0.2) с точки зрения выявления ее свойств, которые существенно используются при изучении различных вопросов теории дифференциальных уравнений вида (0.1). В частности, приведенное выше определение функции Римана позволяет: i) сравнительно легко получить дифференциальные соотношения относительно переменной $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ как на характеристических многообразиях уравнения (0.1) размерности k, $0 \le k \le n-1$, так и в замкнутой области $\overline{\Pi}$, целиком содержащейся в области D задания уравнения (0.1); ii) получить формулу интегрального представления функции Римана для оператора $L_3 := L_1 \circ L_2$ при помощи функций Римана операторов L_1 и L_2 вида (0.1); iii) доказать единым подходом известное классическое свойство "взаимности" (см., например, [9]) функции Римана и т.д. Наряду с указанными фактами для функции $R(x;\xi)$, определенной формулой (0.2), сохраняются и другие свойства известных функций Римана. Она идентична с функцией Римана для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными (доказательство этого факта в работе не приводится).

Доказывается эквивалентность данного и известного классического определения функции Римана в случае, когда в уравнении (0.1) порядок $m = 3$ и число независимых переменных $n = 2$ или $n = 3$, т.е. для уравнений вида

$$u_{xxy} + a^{2,0}u_{xx} + a^{1,1}u_{xy} + a^{1,0}u_x + a^{0,1}u_y + a^{0,0}u = f, \tag{0.3}$$

$$u_{x_1x_2x_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i u_{x_i} + Au = F. \tag{0.4}$$

Приведенное выше определение имеет существенные преимущества по сравнению с известными определениями, поскольку оно пригодно для произвольной размерности n пространства и произвольного порядка m уравнений, а также расширяет класс дифференциальных операторов вида (0.1) с точки зрения гладкости его коэффициентов. Поэтому естественно функцию $R(x;\xi)$, определенную равенством (0.2), называть функцией Римана уравнений вида (0.1).

Для построения функции Римана существуют разные пути. Один из них заключается в получении для нее интегрального уравнения Вольтерра второго рода (см., например, [15]), достаточно сложного по своей структуре. При увеличении размерности пространства и порядка уравнения его конструкция существенно усложняется и становится необозримой. Для наглядности и простоты изложения здесь же получены интегральные уравнения Вольтерра второго рода, которым удовлетворяют функции Римана уравнений (0.3) и (0.4). Следует отметить, что использованный при этом подход позволяет также получить соответствующие уравнения для операторов L из (0.1) без всяких ограничений на m и n. Но эффективное построение функции Римана и для одного уравнения, и для систем весьма сложно, поэтому для упрощения проблемы построения функции Римана используют различные способы. Наряду с другими методами мы применяем упомянутый выше подход к построению функции Римана для операторов вида (0.1), полученных суперпозицией аналогичных операторов меньшего порядка. Для этого нам потребуется выделить класс уравнений вида (0.1), допускающих представление в виде суперпозиции дифференциальных операторов меньших порядков. Рассмотрены некоторые случаи представления функции Римана в квадратурах.

Разумеется, построение функции Римана для общего уравнения (0.1) не является самоцелью, а лишь средством исследования поставленных для этого уравнения различных граничных задач. В некоторых случаях можно обойтись без функции Римана, но взамен ее должны располагать каким-либо другим методом или принципом. Показано, что в $\mathbb{R}^3$ для регулярного решения гиперболического уравнения

$$u_{x_1x_2x_3} = 0 \tag{0.5}$$

также справедлив некоторый аналог принципа Асгейрссона (см., например, [4, 5, 16, 17]) и нет необходимости применения приведенных выше способов. Однако формулировка принципа Асгейрссона для уравнения общего вида сопряжена с принципиальными трудностями, и ее не всегда удается получить. В некоторых случаях это сложнее, чем построение функции Римана.

Мы не ставим своей целью приоритетно выделить какой-либо подход из приведенных выше, так как в некоторых случаях их комбинация может быть более эффективной в исследовании ряда граничных задач.

Уравнения вида (0.1) гиперболического типа, которые иногда называют псевдопараболическими, встречаются при изучении вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделирования различных биологических процессов и явлений, продольного колебания в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задач (см., например, [18–23]).

Отметим, что приведенное выше определение и изложенные в этой работе результаты без особых затруднений можно распространить на случай матричной функции $R(x;\xi)$ для систем уравнений вида (0.1) с матричными коэффициентами a^{α}.

1. Функция Римана уравнения (0.3). Через $C^{m,n}$, $m,n=0,1,\ldots$, обозначим класс функций φ, непрерывных вместе со своими частными производными $D_x^{i_1}\varphi$, $D_y^{j_1}\varphi$, $0\le i_1\le m$, $0\le j_1\le n$, $C^{0,0}:=C$. Будем предполагать, что коэффициенты $a^{i,j}$ уравнения (0.3) принадлежат классу $C^{i,j}$, $i=0,1,2$, $j=0,1$ $(i+j\ne 3)$. Следуя работам [6, 7, 11, 12], функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, $(x,y;\xi,\eta)\in\overline{D}_0\times\overline{D}_0$, уравнения (0.3) однозначно определяется как решение задачи Гурса

$$L^*_{(x,y)}v:=-v_{xyx}+(a^{2,0}v)_{xx}+(a^{1,1}v)_{xy}-(a^{1,0}v)_x-(a^{0,1}v)_y+a^{0,0}v=0, \tag{1.1}$$

$$v|_{x=\xi}=0,\quad v_x|_{x=\xi}=\exp\left\{\int\limits_{\eta}^{y}a^{2,0}(\xi,y_1)\,dy_1\right\},\quad v|_{y=\eta}=\omega_0, \tag{1.2}$$

где (ξ,η) – произвольная фиксированная точка из замкнутой области $\overline{D}_0$, а $D_0:=\{(x,y):0<x<x_0,\ 0<y<y_0\}$ – область задания уравнения (0.3). Здесь $\omega_0(x,\eta;\xi,\eta)$ – решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v_{xx}(x,\eta;\xi,\eta)-(a^{1,1}v)_x(x,\eta;\xi,\eta)+(a^{0,1}v)(x,\eta;\xi,\eta)=0 \tag{1.3}$$

относительно переменной x, удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$v|_{x=\xi}=0,\quad v_x|_{x=\xi}=1. \tag{1.4}$$

В уравнении (1.1) вместо переменных x, y возьмем соответственно переменные x_1, y_1 и проинтегрируем дважды по x_1 от ξ до x и один раз по y_1 от η до y. С учетом (1.2) получим

$$-v(x,y;\xi,\eta)+v(x,\eta;\xi,\eta)+(x-\xi)[v_x(\xi,y;\xi,\eta)-1]+\int\limits_{\eta}^{y}(a^{2,0}v)(x,y_1;\xi,\eta)\,dy_1-$$

$$-(x-\xi)\int\limits_{\eta}^{y}(a^{2,0}v)_x(\xi,y_1;\xi,\eta)\,dy_1+\int\limits_{\xi}^{x}[(a^{1,1}v)(x_1,y;\xi,\eta)-(a^{1,1}v)(x_1,\eta;\xi,\eta)]\,dx_1-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{x}dx_1\int\limits_{\eta}^{y}(a^{1,0}v)(x_1,y_1;\xi,\eta)\,dy_1-\int\limits_{\xi}^{x}dx_1\int\limits_{\xi}^{x_1}[(a^{0,1}v)(x_2,y;\xi,\eta)-(a^{0,1}v)(x_2,\eta;\xi,\eta)]\,dx_2+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}dx_1\int\limits_{\xi}^{x_1}dx_2\int\limits_{\eta}^{y}(a^{0,0}v)(x_2,y_1;\xi,\eta)\,dy_1=0.$$

Для фиксированных ξ, η рассмотрим функцию

$$p(x) := v(x,\eta;\xi,\eta) - \int\limits_{\xi}^{x} (a^{1,1}v)(x_1,\eta;\xi,\eta)\,dx_1 + \int\limits_{\xi}^{x} dx_1 \int\limits_{\xi}^{x_1} (a^{0,1}v)(x_2,\eta;\xi,\eta)\,dx_2.$$

В силу (1.2) и (1.3) имеем $p'' \equiv 0$, $p'(\xi) = 1$, $p(\xi) = 0$, откуда следует, что $p(x) = x - \xi$. Аналогично для фиксированных x, ξ, η, рассматривая функцию $q(y) := (x-\xi)[v_x(\xi,y;\xi,\eta) - 1] - (x-\xi)\int_\eta^y (a^{2,0}v)_x(\xi,y_1;\xi,\eta)dy_1$ и учитывая, что в силу второго условия из (1.2) имеют место $q'(y) \equiv 0$, $q(\eta) = 0$, заключаем, что $q \equiv 0$. Наконец, с учетом выражений для функций p и q относительно v получаем эквивалентное задаче (1.1)–(1.4) интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое, как известно, безусловно и однозначно разрешимо.

После того как доказана корректность определения функции Римана R для соответствующих дифференциальных операторов и изучен ряд ее качественных и структурных свойств относительно исходной переменной $x := (x_1,\ldots,x_n)$, не менее важным является изучение аналогичных вопросов для переменной $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Ниже приведем один простой способ получения дифференциальных соотношений относительно переменной ξ для функций Римана как вдоль характеристических многообразий, так и в $\overline{\Pi}$, который имеет существенное приложение в теории локальных и нелокальных граничных задач для гиперболических уравнений с доминированными младшими членами. На наш взгляд, этот способ дает единый подход как при определении, так и при установлении качественных и структурных свойств функции Римана для указанных выше дифференциальных операторов.

Пусть v – функция Римана уравнения (0.3), а (x^0,y^0) – произвольная фиксированная точка из $\overline{D}_0$. Если u – регулярное решение уравнения (0.3) в $\overline{D}_0$, удовлетворяющее однородным граничным условиям Гурса $u(x^0,y) = 0$, $u_x(x^0,y) = 0$, $u(x,y^0) = 0$, то, согласно работам [6, 7, 11, 12], имеет место интегральное представление

$$u(x,y) = -\int\limits_{x^0}^{x}\int\limits_{y^0}^{y} v(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)\,dx_1\,dy_1, \quad (x,y) \in \overline{D}_0,$$

для произвольной непрерывной функции f. В связи с этим представлением приведем эквивалентное определение функции Римана уравнения (0.3).

Функцию $R(x,y;\xi,\eta)$, $(x,y;\xi,\eta) \in \overline{D}_0 \times \overline{D}_0$, будем называть функцией Римана уравнения (0.3), если для любой фиксированной точки (x^0,y^0) из замкнутой области $\overline{D}_0$ задания уравнения (0.3) и для произвольной непрерывной функции f, функция u, определенная равенством

$$u(x,y) = -\int\limits_{x^0}^{x}\int\limits_{y^0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)\,dx_1\,dy_1, \quad (x,y) \in \overline{D}_0, \tag{1.5}$$

является регулярным решением в $\overline{D}_0$ уравнения (0.3).

Подставляя в уравнение (0.3) функцию $u(x,y)$ из (1.5) и ее производные $D_x^iD_y^ju$, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$, при $(x,y) \in \overline{D}_0$ будем иметь

$$-[R_x(x,y;x,y) + 2R_\xi(x,y;x,y) + a^{1,1}(x,y)R(x,y;x,y)]f(x,y) - R(x,y;x,y)f_x(x,y) -$$

$$-\int\limits_{x^0}^{x}[R_{\xi\xi}(x_1,y;x,y) + a^{1,1}(x,y)R_\xi(x_1,y;x,y) + a^{0,1}(x,y)R(x_1,y;x,y)]f(x_1,y)\,dx_1 -$$

$$-\int\limits_{y^0}^{y}\{R_{x\eta}(x,y_1;x,y) + 2R_{\xi\eta}(x,y_1;x,y) + a^{2,0}(x,y)[R_x(x,y_1;x,y) + 2R_\xi(x,y_1;x,y)] +$$

$$+ a^{1,1}(x,y)R_\eta(x,y_1;x,y) + a^{1,0}(x,y)R(x,y_1;x,y)\}f(x,y_1)\,dy_1 -$$

$$- \int\limits_{y^0}^{y} [R_\eta(x,y_1;x,y) + a^{2,0}(x,y)R(x,y_1;x,y)]f_x(x,y_1)\,dy_1 -$$

$$- \int\limits_{x^0}^{x}\int\limits_{y^0}^{y} L_{(\xi,\eta)}R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)dx_1dy_1 \equiv f(x,y). \qquad (1.6)$$

Полагая $x = x^0$, $y = y^0$ в равенстве (1.6), получаем $-[R_x(x^0,y^0;x^0,y^0)+2R_\xi(x^0,y^0;x^0,y^0)+ +a^{1,1}(x^0,y^0)R(x^0,y^0;x^0,y^0)]f(x^0,y^0) - R(x^0,y^0;x^0,y^0)f_x(x^0,y^0) = f(x^0,y^0)$. Отсюда в силу произвольного выбора точки $(x^0,y^0) \in \overline{D}_0$ и функции f заключаем, что

$$R_x(x,y;x,y) + 2R_\xi(x,y;x,y) = -1, \quad R(x,y;x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_0. \qquad (1.7)$$

Теперь, полагая $x = x^0$ в равенстве (1.6) и учитывая (1.7), приходим к равенству

$$\int\limits_{y^0}^{y} \{R_{x\eta}(x^0,y_1;x^0,y) + 2R_{\xi\eta}(x^0,y_1;x^0,y) + a^{2,0}(x^0,y)[R_x(x^0,y_1;x^0,y) + 2R_\xi(x^0,y_1;x^0,y)] +$$

$$+ a^{1,1}(x^0,y)R_\eta(x^0,y_1;x^0,y) + a^{1,0}(x^0,y)R(x^0,y_1;x^0,y)\}f(x^0,y_1)\,dy_1 -$$

$$- \int\limits_{y^0}^{y} [R_\eta(x^0,y_1;x^0,y) + a^{2,0}(x^0,y)R(x^0,y_1;x^0,y)]f_x(x^0,y_1)\,dy_1 = 0,$$

из которого в силу произвольности точки x^0 и функции f получаем

$$R_{x\eta}(x,y_1;x,y) + 2R_{\xi\eta}(x,y_1;x,y) + a^{2,0}(x,y)[R_x(x,y_1;x,y) + 2R_\xi(x,y_1;x,y)] +$$

$$+ a^{1,1}(x,y)R_\eta(x,y_1;x,y) + a^{1,0}(x,y)R(x,y_1;x,y) = 0, \qquad (1.8)$$

$$R_\eta(x,y_1;x,y) + a^{2,0}(x,y)R(x,y_1;x,y) = 0. \qquad (1.9)$$

Из (1.9) с учетом второго из равенств (1.7) вытекает равенство

$$R(x,y_1;x,y) = 0, \qquad (1.10)$$

которое, возвращаясь к исходным переменным, запишем в виде

$$R(x,y;x,\eta) = 0. \qquad (1.11)$$

Равенство (1.11) представляет собой первое основное соотношение для функции Римана R на характеристике $\xi = x$. Для получения второго основного соотношения на характеристике $\xi = x$ продифференцируем равенство (1.10) по x :

$$R_x(x,y_1;x,y) + R_\xi(x,y_1;x,y) = 0. \qquad (1.12)$$

Отсюда в свою очередь дифференцированием по y находим, что

$$R_{x\eta}(x,y_1;x,y) + R_{\xi\eta}(x,y_1;x,y) = 0. \qquad (1.13)$$

Теперь с учетом (1.11)–(1.13) равенство (1.8) принимает вид

$$R_{\xi\eta}(x,y_1;x,y) + a^{2,0}(x,y)R_\xi(x,y_1;x,y) = 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, последнему равенству можно придать вид

$$R_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)+a^{2,0}(x,\eta)R_\xi(x,y;x,\eta)=0. \tag{1.14}$$

Учитывая полученное в силу (1.12) из первого из равенств (1.7) равенство $R_\xi(x,y;x,y)=-1$, интегрированием уравнения (1.14) находим

$$R_\xi(x,y;x,\eta)=-\exp\biggl\{\int\limits_\eta^y a^{2,0}(x,\eta_1)\,d\eta_1\biggr\}. \tag{1.15}$$

Равенство (1.15) представляет собой второе основное соотношение для функции Римана $R(x,y;\xi,\eta)$ на характеристике $\xi=x$. Для получения соотношения на характеристике $\eta=y$ уравнения (0.3) в равенстве (1.6) положим $y=y^0$. Тогда с учетом (1.7) будем иметь $\int_{x^0}^x[R_{\xi\xi}(x_1,y^0;x,y^0)+a^{1,1}(x,y^0)R_\xi(x_1,y^0;x,y^0)+a^{0,1}(x,y^0)R(x_1,y^0;x,y^0)]f(x_1,y^0)\,dx_1=0$, откуда в силу произвольности y^0 и функции f в исходных переменных получаем

$$R_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+a^{1,1}(\xi,y)R_\xi(x,y;\xi,y)+a^{0,1}(\xi,y)R(x,y;\xi,y)=0. \tag{1.16}$$

В силу равенств (1.11), (1.15) функция Римана $R(x,y;\xi,\eta)$ наряду с уравнением (1.16) удовлетворяет также начальным условиям Коши при $\xi=x$

$$R(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0,\quad R_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=-1. \tag{1.17}$$

Теперь заметим, что задача Коши (1.16), (1.17) имеет единственное решение. Наконец, с учетом равенств (1.7)–(1.9), (1.16) из (1.6) имеем $\int_{x^0}^x\int_{y^0}^y L_{(\xi,\eta)}R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)\,dx_1\,dy_1=0$, что в силу произвольности функции f в исходных переменных дает

$$L_{(\xi,\eta)}R(x,y;\xi,\eta)=0. \tag{1.18}$$

Поскольку задача (1.11), (1.15)–(1.18) однозначно разрешима, то функция Римана $R(x,y;\xi,\eta)$, определенная равенством (1.5), существует и единственна.

Замечание 1.1. Так как функции v и R одновременно удовлетворяют условиям определения функции Римана равенством (1.5), то справедливо тождество $v\equiv R$, которое означает эквивалентность приведенных выше двух определений и является аналогом свойства “взаимности” (см., например, [9]) функции Римана для гиперболических уравнений высших порядков с доминированными младшими членами на плоскости. Другими словами, функция Римана уравнения (0.3) переходит в функцию Римана сопряженного с ним уравнения (1.1), если поменять местами переменные ξ, η и x, y.

Замечание 1.2. Равенства (1.11) и (1.15) можно было бы получить непосредственно из равенств (1.2), но мы привели изложенный выше метод с целью единого подхода получения граничных и дифференциальных соотношений по переменным ξ, η, который применим и в случае уравнений более высокого порядка.

Замечание 1.3. Из свойств функции Римана R следует, что функция u, определенная равенством (1.5), удовлетворяет однородным граничным условиям Гурса для уравнения (0.3) $u(x^0,y)=0$, $u_x(x^0,y)=0$, $u(x,y^0)=0$.

2. Функция Римана уравнения (0.4) и пространственный аналог принципа Асгейрссона.

1°. Обозначим через $C^{m,n,l}$, $m,n,l=0,1,\ldots$, класс функций φ, непрерывных в $\overline{D}$ вместе со своими частными производными $D^i_{x_1}\varphi$, $D^j_{x_2}\varphi$, $D^k_{x_3}\varphi$, $0\le i\le m$, $0\le j\le n$, $0\le k\le l$, $C^{0,0,0}:=C$. Предположим, что коэффициенты уравнения (0.4) удовлетворяют следующим условиям гладкости: $A_{12}\in C^{1,1,0}$, $A_{13}\in C^{1,0,1}$, $A_{23}\in C^{0,1,1}$, $A_1\in C^{1,0,0}$, $A_2\in C^{0,1,0}$, $A_3\in C^{0,0,1}$, $A\in C^{0,0,0}$. В соответствии с результатами работ [7, 8, 10, 13] функция Римана $V(x;\xi)$, $(x,\xi)\in\overline{\Pi}\times\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}\subset D\subseteq\mathbb{R}^3$, уравнения (0.4) однозначно определяется как решение задачи Гурса для уравнения

$$(L^*_xV)(x)=0,\quad x:=(x_1,x_2,x_3)\in\overline{\Pi}, \tag{2.1}$$

со следующими граничными условиями:

$$
\begin{gathered}
(L_3V)(x_1,x_2,\xi_3)=0, \quad (L_2V)(x_1,\xi_2,x_3)=0, \quad (L_1V)(\xi_1,x_2,x_3)=0,\\
(L_{23}V)(x_1,\xi_2,\xi_3)=0, \quad (L_{13}V)(\xi_1,x_2,\xi_3)=0,\\
(L_{12}V)(\xi_1,\xi_2,x_3)=0, \quad V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=-1.
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

Здесь $L_x^*V := -V_{x_1x_2x_3}+\sum_{i,j=1,\ i<j}^3 (A_{ij}V)_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^3 (A_iV)_{x_i}+AV;$ $L_3V := V_{x_1x_2}-(A_{13}V)_{x_1}-$ $-(A_{23}V)_{x_2}+A_3V;$ $L_2V := V_{x_1x_3}-(A_{12}V)_{x_1}-(A_{23}V)_{x_3}+A_2V;$ $L_1V := V_{x_2x_3}-(A_{12}V)_{x_2}-$ $-(A_{13}V)_{x_3}+A_1V;$ $L_{23}V := V_{x_1}-A_{23}V,$ $L_{13}V := V_{x_2}-A_{13}V,$ $L_{12}V := V_{x_3}-A_{12}V.$

В уравнении (2.1) вместо переменной x_1 возьмем переменную y_1 и проинтегрируем по y_1 от ξ_1 до x_1. С учетом третьего из равенств (2.2), взяв в полученном равенстве вместо x_2 переменную y_2 и проинтегрировав по y_2 от ξ_2 до x_2, будем иметь

$$
\begin{gathered}
-V_{x_3}(x;\xi)+V_{x_3}(x_1,\xi_2,x_3;\xi)+(A_{12}V)(x;\xi)-(A_{12}V)(x_1,\xi_2,x_3;\xi)+\int_{\xi_2}^{x_2}(A_{13}V)_{x_3}(x_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_2+\\
+\int_{\xi_1}^{x_1}[(A_{23}V)_{x_3}(y_1,x_2,x_3;\xi)-(A_{23}V)_{x_3}(y_1,\xi_2,x_3;\xi)]\,dy_1-\int_{\xi_2}^{x_2}(A_1V)(x_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_2-\\
-\int_{\xi_1}^{x_1}[(A_2V)(y_1,x_2,x_3;\xi)-(A_2V)(y_1,\xi_2,x_3;\xi)]\,dy_1-\int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}(A_3V)_{x_3}(y_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_1\,dy_2+\\
+\int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}(AV)(y_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_1\,dy_2=0.
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Обозначим $P(x_1) := V_{x_3}(x_1,\xi_2,x_3;\xi)-(A_{12}V)(x_1,\xi_2,x_3;\xi)-\int_{\xi_1}^{x_1}(A_{23}V)_{x_3}(y_1,\xi_2,x_3;\xi)\,dy_1+$ $+\int_{\xi_1}^{x_1}(A_2V)(y_1,\xi_2,x_3;\xi)\,dy_1$ для фиксированных x_3, ξ. В силу второго и шестого равенств из (2.2) имеем $P'(x_1)\equiv 0$ и $P(\xi_1)=0$, откуда следует, что $P\equiv 0$. С учетом этого, в (2.3) взяв вместо переменной x_3 переменную y_3 и проинтегрировав полученное равенство по y_3 от ξ_3 до x_3, найдем

$$
\begin{gathered}
-V(x;\xi)+V(x_1,x_2,\xi_3;\xi)+\int_{\xi_3}^{x_3}(A_{12}V)(x_1,x_2,y_3;\xi)\,dy_3+\int_{\xi_2}^{x_2}(A_{13}V)(x_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_2-\\
-\int_{\xi_2}^{x_2}(A_{13}V)(x_1,y_2,\xi_3;\xi)\,dy_2+\int_{\xi_1}^{x_1}(A_{23}V)(y_1,x_2,x_3;\xi)\,dy_1-\int_{\xi_1}^{x_1}(A_{23}V)(y_1,x_2,\xi_3;\xi)\,dy_1-\\
-\int_{\xi_2}^{x_2}\int_{\xi_3}^{x_3}(A_1V)(x_1,y_2,y_3;\xi)\,dy_2\,dy_3-\int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_3}^{x_3}(A_2V)(y_1,x_2,y_3;\xi)\,dy_1\,dy_3-\\
-\int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}(A_3V)(y_1,y_2,x_3;\xi)\,dy_1\,dy_2+\int_{\xi_1}^{x_1}\int_{\xi_2}^{x_2}(A_3V)(y_1,y_2,\xi_3;\xi)\,dy_1\,dy_2+\int_{\xi}^{x}(AV)(y;\xi)\,dy=0.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Для фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3 обозначим

$$Q(x_1,x_2) := V(x_1,x_2,\xi_3;\xi) - \int\limits_{\xi_2}^{x_2}(A_{13}V)(x_1,y_2,\xi_3;\xi)\,dy_2 - \int\limits_{\xi_1}^{x_1}(A_{23}V)(y_1,x_2,\xi_3;\xi)\,dy_1 +$$
$$+ \int\limits_{\xi_1}^{x_1}\int\limits_{\xi_2}^{x_2}(A_3V)(y_1,y_2,\xi_3;\xi)\,dy_1\,dy_2.$$

В силу первого, четвертого и пятого из равенств (2.2) имеем $Q_{x_1x_2} \equiv 0$, $Q_{x_1}(x_1,\xi_2) = 0$, $Q_{x_2}(\xi_1,x_2) = 0$. Далее с учетом седьмого из равенств (2.2) находим $Q(\xi_1,\xi_2) \equiv -1$, откуда получаем, что $Q(x_1,x_2) \equiv -1$. В силу этого из равенства (2.3) относительно функции V получаем эквивалентное задаче (2.1), (2.2) интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо.

Пусть $V(x;\xi)$, $(x,\xi) \in \overline{\Pi}\times\overline{\Pi}$, – функция Римана уравнения (0.4), а x^0 – произвольная фиксированная точка из $\overline{\Pi}$. Если u – регулярное решение уравнения (0.4) в $\overline{\Pi}$, удовлетворяющее однородным граничным условиям Гурса $u(x_1^0,x_2,x_3) = 0$, $u(x_1,x_2^0,x_3) = 0$, $u(x_1,x_2,x_3^0) = 0$, то, согласно результатам из работ [7, 10, 13], имеет место представление $u(x) = -\int_{x^0}^{x} V(y;x)F(y)\,dy$, $x \in \overline{\Pi}$, для произвольной непрерывной функции F. В связи с этим представлением приведем эквивалентное определение функции Римана уравнения (0.4).

Функцию $R(x;\xi)$, $(x,\xi)\in\overline{\Pi}\times\overline{\Pi}$, будем называть функцией Римана уравнения (0.4), если для любой фиксированной точки x^0 из замкнутой области $\overline{\Pi}$ задания уравнения (0.4) и для произвольной непрерывной функции F функция u, определенная равенством

$$u(x) = -\int\limits_{x^0}^{x} R(y;x)F(y)\,dy, \quad x\in\overline{\Pi}, \tag{2.5}$$

является регулярным решением в $\overline{\Pi}$ уравнения (0.4).

Вычисляя производные $D_{x_1}^iD_{x_2}^jD_{x_3}^k u$, $i,j,k=0,1$, функции $u(x)$ и подставляя их в уравнение (0.4), при $x\in\overline{\Pi}$ будем иметь

$$-R(x;x)f(x) - \int\limits_{x_1^0}^{x_1}[R_{\xi_1}(y_1,x_2,x_3;x) + A_{23}(x)R(y_1,x_2,x_3;x)]f(y_1,x_2,x_3)\,dy_1 -$$
$$- \int\limits_{x_2^0}^{x_2}[R_{\xi_2}(x_1,y_2,x_3;x) + A_{13}(x)R(x_1,y_2,x_3;x)]f(x_1,y_2,x_3)\,dy_2 -$$
$$- \int\limits_{x_3^0}^{x_3}[R_{\xi_3}(x_1,x_2,y_3;x) + A_{12}(x)R(x_1,x_2,y_3;x)]f(x_1,x_2,y_3)\,dy_3 -$$
$$- \int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_2^0}^{x_2}[R_{\xi_1\xi_2}(y_1,y_2,x_3;x) + A_{13}(x)R_{\xi_1}(y_1,y_2,x_3;x) + A_{23}(x)R_{\xi_2}(y_1,y_2,x_3;x) +$$
$$+ A_3(x)R(y_1,y_2,x_3;x)]f(y_1,y_2,x_3)\,dy_1\,dy_2 -$$
$$- \int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_3^0}^{x_3}[R_{\xi_1\xi_3}(y_1,x_2,y_3;x) + A_{12}(x)R_{\xi_1}(y_1,x_2,y_3;x) + A_{23}(x)R_{\xi_3}(y_1,x_2,y_3;x) +$$

$$+A_2(x)R(y_1,x_2,y_3;x)]f(y_1,x_2,y_3)\,dy_1\,dy_3-$$

$$-\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\int\limits_{x_3^0}^{x_3}[R_{\xi_2\xi_3}(x_1,y_2,y_3;x)+A_{12}(x)R_{\xi_2}(x_1,y_2,y_3;x)+A_{13}(x)R_{\xi_3}(x_1,y_2,y_3;x)+$$

$$+A_1(x)R(x_1,y_2,y_3;x)]f(x_1,y_2,y_3)\,dy_2\,dy_3-\int\limits_{x^0}^{x}L_\xi R(y;x)f(y)\,dy\equiv F(x). \qquad (2.6)$$

Полагая $x=x^0$ в равенстве (2.6), будем иметь $-R(x^0;x^0)F(x^0)=F(x^0)$. Отсюда в силу произвольности $x^0\in\overline{\Pi}$ и функции F заключаем, что

$$R(x;x)=-1. \qquad (2.7)$$

Теперь, полагая $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$ в равенстве (2.6) и учитывая (2.7), получаем

$$-\int\limits_{x_3^0}^{x_3}[R_{\xi_3}(x_1^0,x_2^0,y_3;x_1^0,x_2^0,x_3)+A_{12}(x_1^0,x_2^0,y_3;x_1^0,x_2^0,x_3)R(x_1^0,x_2^0,x_3)]f(x_1^0,x_2^0,y_3)\,dy_3\equiv 0.$$

Отсюда в силу произвольного выбора величин x_1^0, x_2^0 и функции F на бихарактеристике $\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$ будем иметь

$$R_{\xi_3}(x;x_1,x_2,\xi_3)+A_{12}(x_1,x_2,\xi_3)R(x;x_1,x_2,\xi_3)=0. \qquad (2.8)$$

Аналогичным образом получаются дифференциальные соотношения

$$\begin{gathered}R_{\xi_2}(x;x_1,\xi_2,x_3)+A_{13}(x_1,\xi_2,x_3)R(x;x_1,\xi_2,x_3)=0,\\ R_{\xi_1}(x;\xi_1,x_2,x_3)+A_{23}(\xi_1,x_2,x_3)R(x;\xi_1,x_2,x_3)=0\end{gathered} \qquad (2.9)$$

для функции Римана соответственно на бихарактеристиках $\xi_1=x_1$, $\xi_3=x_3$ и $\xi_2=x_2$, $\xi_3=x_3$.

Далее, для получения дифференциального соотношения на характеристической плоскости $\xi_1=x_1$ в равенстве (2.6) возьмем $x_1=x_1^0$. Тогда с учетом равенств (2.7)–(2.9) находим:

$$\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\int\limits_{x_3^0}^{x_3}[R_{\xi_2\xi_3}(x_1^0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)+A_{12}(x_1^0,x_2,x_3)R_{\xi_2}(x_1^0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)+$$

$$+A_{13}(x_1^0,x_2,x_3)R_{\xi_3}(x_1^0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)+$$
$$+A_1(x_1^0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)R(x_1^0,y_2,y_3;x_1^0,x_2,x_3)]f(x_1^0,y_2,y_3)\,dy_2\,dy_3\equiv 0.$$

Отсюда в силу произвольности величины x_1^0 и функции F будем иметь

$$\begin{gathered}R_{\xi_2\xi_3}(x;x_1,\xi_2,\xi_3)+A_{12}(x_1,\xi_2,\xi_3)R_{\xi_2}(x;x_1,\xi_2,\xi_3)+\\ +A_{13}(x_1,\xi_2,\xi_3)R_{\xi_3}(x;x_1,\xi_2,\xi_3)+A_1(x_1,\xi_2,\xi_3)R(x;x_1,\xi_2,\xi_3)=0.\end{gathered} \qquad (2.10)$$

Аналогично получаются дифференциальные соотношения

$$\begin{gathered}R_{\xi_1\xi_3}(x;\xi_1,x_2,\xi_3)+A_{12}(\xi_1,x_2,\xi_3)R_{\xi_1}(x;\xi_1,x_2,\xi_3)+A_{23}(\xi_1,x_2,\xi_3)R_{\xi_3}(x;\xi_1,x_2,\xi_3)+\\ +A_2(\xi_1,x_2,\xi_3)R(x;\xi_1,x_2,\xi_3)=0,\\ R_{\xi_1\xi_2}(x;\xi_1,\xi_2,x_3)+A_{13}(\xi_1,\xi_2,x_3)R_{\xi_1}(x;\xi_1,\xi_2,x_3)+\\ +A_{23}(\xi_1,\xi_2,x_3)R_{\xi_2}(x;\xi_1,\xi_2,x_3)+A_3(\xi_1,\xi_2,x_3)R(x;\xi_1,\xi_2,x_3)=0\end{gathered} \qquad (2.11)$$

соответственно на характеристических плоскостях $\xi_2 = x_2$ и $\xi_3 = x_3$.

Наконец, с учетом равенств (2.7)–(2.11) равенство (2.6) принимает вид

$$-\int_{x^0}^{x} L_\xi R(y;x)F(y)\,dy \equiv 0,$$

что в силу произвольности функции F дает

$$L_\xi R(x;\xi) = 0. \tag{2.12}$$

Поскольку задача (2.7)–(2.12) однозначно разрешима, то функция Римана R уравнения (0.4), определенная равенством (2.5), существует и единственна.

Здесь также справедливы замечания, аналогичные замечаниям 1.1–1.3.

2°. Хорошо известно, что в $\mathbb{R}^2$ справедлив следующий принцип Асгейрссона (см., например, [4, 5, 16, 17]): суммы значений регулярного решения уравнения $u_{xy} = 0$ в противоположных точках характеристического прямоугольника равны между собой. Оказывается, что в $\mathbb{R}^3$ для регулярного решения уравнения (0.5) также справедлив некоторый аналог этого принципа. В частности, если u – регулярное решение (0.5), то имеет место тождество $u(x_1,x_2,x_3) + u(x_1,x_2^0,x_3^0)+u(x_1^0,x_2,x_3^0)+u(x_1^0,x_2^0,x_3)=u(x_1,x_2,x_3^0)+u(x_1,x_2^0,x_3)+u(x_1^0,x_2,x_3)+u(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$, где (x_1^0,x_2^0,x_3^0) – произвольная фиксированная точка пространства $\mathbb{R}^3$, которое легко получается последовательным интегрированием уравнения (0.5) по переменным x_1, x_2 и x_3. Сформулированный принцип непосредственно дает явное представление регулярного решения задачи Гурса для уравнения (0.4) при $A_{ij} = A_i = A = 0$, $i,j = 1,2,3$, $i < j$; оно имеет следующий вид: $u = \varphi_{12}(x_1,x_2) + \varphi_{13}(x_1,x_3) + \varphi_{23}(x_2,x_3) - \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) - \varphi_3(x_3) + \varphi_0 + \int_{x^0}^{x} F(y)\,dy$.

3. Некоторые случаи представления функции Римана в квадратурах.

1°. Пусть L_1 и L_2 – операторы вида

$$L_1 u := \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{j_1=0}^{n_1} a^{i_1,j_1} D_x^{i_1} D_y^{j_1} u, \quad L_2 u := \sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{j_2=0}^{n_2} b^{i_2,j_2} D_x^{i_2} D_y^{j_2} u,$$

где $a^{i_1,j_1} \in C^{i_1+m_2,j_1+n_2}$, $i_1 = \overline{0,m_1}$, $j_1 = \overline{0,n_1}$; $b^{i_2,j_2} \in C^{i_2+m_1,j_2+n_1}$, $i_2 = \overline{0,m_2}$, $j_2 = \overline{0,n_2}$, – заданные действительные функции, $a^{m_1,n_1} = b^{m_2,n_2} = 1$, $m_k, n_k \ge 1$, $k = 1,2$, – заданные натуральные числа. Тогда очевидно, что композиция этих операторов $L := L_1 \circ L_2$ определена и имеет тот же вид. Имеет место следующая

Теорема. *Если $R_i(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана оператора L_i, $i = 1,2$, а $R(x,y;\xi,\eta)$ – оператора L, то справедливо представление*

$$R(x,y;\xi,\eta) = \int_x^\xi \int_y^\eta R_1(x,y;x_1,y_1)R_2(x_1,y_1;\xi,\eta)\,dx_1\,dy_1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим для оператора L задачу Гурса в следующей постановке: ищется регулярное решение уравнения

$$Lu = f \tag{3.2}$$

класса $C^{m_1+m_2,n_1+n_2}$, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$D_x^i u|_{x=x^0} = 0, \quad i = \overline{0, m_1+m_2-1}, \quad D_y^j u|_{y=y^0} = 0, \quad j = \overline{0, n_1+n_2-1}. \tag{3.3}$$

Здесь f – произвольная заданная непрерывная функция. Хорошо известно [11], что единственное регулярное решение задачи (3.2), (3.3) представимо в виде

$$u(x,y) = (-1)^{m_1+m_2+n_1+n_2} \int_{x^0}^{x}\int_{y^0}^{y} R(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{3.4}$$

Далее с учетом граничных условий (3.3) для функции $v = L_2u$ имеем условия

$$D_x^k v|_{x=x^0} = 0, \quad k = \overline{0, m_1 - 1}, \quad D_y^l v|_{y=y^0} = 0, \quad l = \overline{0, n_1 - 1}, \tag{3.5}$$

с учетом которых в силу определения оператора L и уравнения (3.2) получаем $(L_2u)(x, y) = = (-1)^{m_1+n_1} \int_{x^0}^{x} \int_{y^0}^{y} R_1(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$. Отсюда, имея в виду (3.3) и применяя формулы типа Дирихле перестановки пределов интегрирования, находим

$$u(x,y) = (-1)^{m_1+m_2+n_1+n_2} \int\limits_{x^0}^{x} \int\limits_{y^0}^{y} \left[\int\limits_{\sigma}^{x} \int\limits_{\tau}^{y} R_1(\sigma, \tau; \xi, \eta) R_2(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta \right] f(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau.$$

Окончательно, сравнивая полученное представление с (3.4), убеждаемся в справедливости равенства (3.1).

Замечание 3.1. Как известно, решение задачи Коши $(\mathcal{L}u)(x, y) := u_x + a^{0,0}(x, y)u = = f(x, y)$, $u|_{x=x^0} = 0$, представимо в виде $u(x, y) = -\int_{x^0}^{x} R_1(\xi, y; x) f(\xi, y)\, d\xi$, где

$$R_1(x, y; \xi) := -\exp\left\{ \int\limits_{\xi}^{x} a^{0,0}(\xi_1, y)\, d\xi_1 \right\}. \tag{3.6}$$

В этом случае функция Римана оператора $\mathcal{L}$ совпадает с ядром обратного $\mathcal{L}$ интегрального оператора с последующей перестановкой соответствующих переменных, взятого со знаком минус, т.е. с функцией R_1, представленной формулой (3.6). Аналогично получается функция Римана одномерного оператора $\mathcal{L}$ по переменной y.

Ниже рассмотрим сравнительно простые примеры операторов L_1 и L_2, которые не попадают в рассмотренные выше классы, но представляют интерес в смысле приложения доказанной выше теоремы.

i). Пусть один из операторов L_1 или L_2 является одномерным, например, по переменной x. Без ограничения общности можно предполагать, что $m_1 = 1$, $n_1 = 0$, $m_2, n_2 \geq 1$. В этом случае в силу замечания 3.1 функция Римана оператора L_1 легко строится по формуле (3.6), а для решения $v = L_2u$ задачи Коши $v_x + a^{0,0}(x, y)v = f(x, y)$, $v|_{x=x^0} = 0$ справедливо интегральное представление $v(x, y) = -\int_{x^0}^{x} R_1(\xi, y; x) f(\xi, y)\, d\xi$. Далее, в этом случае функцию Римана оператора $L := L_1 \circ L_2$ строим аналогично изложенному выше:

$$R(x, y; \xi, \eta) = \int\limits_{x}^{\xi} R_1(x, y; x_1) R_2(x_1, y; \xi, \eta)\, dx_1. \tag{3.7}$$

ii). Пусть теперь оба оператора L_1 и L_2 являются одномерными, например, по переменным x и y соответственно $(m_1 = n_2 = 1,\ n_1 = m_2 = 0)$, т.е. $(L_1u)(x, y) := u_x + a^{0,0}(x, y)u$, $(L_2u)(x, y) := u_y + b^{0,0}(x, y)u$. Аналогичными рассуждениями мы приходим к следующему представлению функции Римана оператора L :

$$R(x, y; \xi, \eta) = R_1(x, y; \xi) R_2(\xi, y; \eta). \tag{3.8}$$

iii). Пусть, наконец, оба оператора L_1 и L_2 являются одномерными по одной и той же переменной, например, по переменной x $(m_1 = m_2 = 1,\ n_1 = n_2 = 0)$, т.е. $(L_1u)(x, y) := := u_x + a^{0,0}(x, y)u$, $(L_2u)(x, y) := u_x + b^{0,0}(x, y)u$. В этом случае будем иметь

$$R(x, y; \xi) = \int\limits_{x}^{\xi} R_1(x, y; x_1) R_2(x_1, y; \xi)\, dx_1. \tag{3.9}$$

Замечание 3.2. Нетрудно показать, что приведенные выше результаты справедливы в случае, когда оператор L представим в виде композиции конечного числа операторов меньших порядков.

Замечание 3.3. Аналогично можно получить подобные (3.1), (3.7)–(3.9) формулы представления функции Римана линейных гиперболических дифференциальных операторов высокого порядка с доминированными младшими членами в виде композиции конечного числа операторов подобного типа меньших порядков в многомерных областях.

2°. Приведем простые примеры, иллюстрирующие изложенные выше в подп. 1° результаты. Хорошо известна роль (см., например, [5, 7]), которую играют выражения $h := a_x + ab - c$ и $k := b_y + ab - c$ в теории гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{3.10}$$

и которые в определенном смысле являются его инвариантами. В работе [7] показано, что аналогичными свойствами обладают следующие величины для уравнений вида (0.4): $H_1 := \partial A_{12}/\partial x_2 + A_{13}A_{12} - A_1$, $H_2 := \partial A_{12}/\partial x_1 + A_{23}A_{12} - A_2$, $H_3 := \partial A_{13}/\partial x_1 + A_{23}A_{13} - A_3$, $H_4 := \partial^2 A_{12}/\partial x_1 \partial x_2 + (\partial A_{13}/\partial x_1)A_{12} + (\partial A_{12}/\partial x_1)A_{13} + (\partial A_{12}/\partial x_2)A_{23} + A_{12}A_{13}A_{23} - A$. Опираясь на эти факты, докажем справедливость следующих утверждений.

Предложение 3.1. *Пусть один из инвариантов h или k (для определенности h) уравнения (3.10) тождественно равен нулю. Тогда функция Римана уравнения (3.10) имеет вид*

$$R(x, y; \xi, \eta) = \exp\left\{ \int\limits_{\eta}^{y} a(\xi, \eta_1)\, d\eta_1 + \int\limits_{\xi}^{x} b(\xi_1, y)\, d\xi_1 \right\}. \tag{3.11}$$

Действительно, в этом случае оператор $Lu := u_{xy} + au_x + bu_y + cu$ представим в виде суперпозиции: $L = L_1 \circ L_2$, где $(L_1u)(x, y) := u_x + b(x, y)u$ и $(L_2u)(x, y) := u_y + a(x, y)u$. В силу формулы (3.8) заключаем, что справедливо равенство (3.11). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция R, представленная формулой (3.11), действительно является функцией Римана уравнения (3.10).

Предложение 3.2. *Пусть величины H_i, $i = \overline{1,4}$, уравнения (0.4) тождественно равны нулю. Тогда функция Римана уравнения (0.4) имеет вид*

$$R(x;\xi) = -\exp\left\{ \int\limits_{\xi_1}^{x_1} A_{23}(y_1, x_2, x_3)\, dy_1 + \int\limits_{\xi_2}^{x_2} A_{13}(\xi_1, y_2, x_3)\, dy_2 + \int\limits_{\xi_3}^{x_3} A_{12}(\xi_1, \xi_2, y_3)\, dy_3 \right\}. \tag{3.12}$$

Действительно, при выполнении условий предложения 3.2 оператор L, определяемый левой частью уравнения (0.4), представляется в виде суперпозиции операторов меньших порядков. Далее в силу определения функции Римана $R_1(x;\xi_1)$ оператора $(L_1u)(x) := u_{x_1} + A_{23}(x)u$ в пространстве переменных $x \in \mathbb{R}^3$ аналогично формуле (3.6) будем иметь $R_1(x;\xi_1) = -\exp\{\int_{\xi_1}^{x_1} A_{23}(y_1, x_2, x_3) dy_1\}$. Меняя местами переменные x_1 и x_2, а затем x_1 и x_3, получаем $R_2(x;\xi_2) = -\exp\{\int_{\xi_2}^{x_2} A_{13}(x_1, y_2, x_3)\, dy_2\}$ и $R_3(x;\xi_3) = -\exp\{\int_{\xi_3}^{x_3} A_{12}(x_1, x_2, y_3)\, dy_3\}$. Здесь R_2 и R_3 – функции Римана соответственно операторов $(L_2u)(x) := u_{x_2} + A_{13}(x)u$ и $(L_3u)(x) := u_{x_3} + A_{12}(x)u$. Теперь на основании результатов из подп. 1° в случае, когда оператор L представим в виде композиции $L := L_1 \circ L_2 \circ L_3$, заключаем, что для функции Римана оператора L справедливо представление $R(x;\xi) = R_1(x;\xi_1)R_2(\xi_1, x_2, x_3;\xi_2)R_3(\xi_1, \xi_2, x_3;\xi_3)$. Отсюда элементарными преобразованиями приходим к равенству (3.12).

Заметим, что рассмотренными выше операторами не исчерпывается класс операторов вида (0.1), для которых эффективно строится функция Римана. Например, оператор

$$Lu := u_{x_1x_2x_3} + cu = 0, \quad c = \mathrm{const}, \tag{3.13}$$

непредставим в виде композиции операторов меньших порядков, но тем не менее его функция Римана представляется в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда (см. также [24]).

Действительно, пусть $R(x;\xi)$ – функция Римана уравнения (3.13). Тогда она удовлетворяет уравнению $L_x^* R := -R_{x_1x_2x_3} + cR = 0$, решение которого ищем в виде $R = R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $t = (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)$. Очевидно, относительно функции R получаем уравнение $t^2R'''(t) + 3tR''(t) + R'(t) - cR(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, представляя решение которого в виде $R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$, для определения коэффициентов α_n, $n = 0, 1, \ldots$, получим формулы: $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{n+1} = c\alpha_n(n+1)^{-3}$, $n = 0, 1, \ldots$ Отсюда находим $\alpha_n = -c^n/(n!)^3$, $n = 0, 1, \ldots$, и, следовательно, $R(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} c^n (n!)^{-3} t^n$, $t \in \mathbb{R}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $R(x;\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} c^n (n!)^{-3} (x_1 - \xi_1)^n (x_2 - \xi_2)^n (x_3 - \xi_3)^n$ действительно является функцией Римана уравнения (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Риман Б.* Соч.: Пер. с нем. М.; Л., 1948.
2. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
3. *Ахиев С.С.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 4. С. 783–787.
4. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.; Л., 1933.
6. *Джохадзе О.М.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 523–535.
7. *Джохадзе О.М.* Граничные задачи для линейных гиперболических уравнений и систем высокого порядка: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тбилиси, 1999.
8. *Жегалов В.И.* // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1074–1079.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
10. *Севастьянов В.А.* // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 420. № 5. С. 69–73.
11. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552.
12. *Colton D.* // J. of Differ. Equat. 1972. V. 12. № 3. P. 559–565.
13. *Di Vincenzo R., Villani A.* // Le Matematiche: Seminario matematico dellÚniversita di Catania. 1977. V. 32. P. 211–238.
14. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
15. *Жегалов В.И., Котухов М.П.* // Изв. вузов. Математика. 1998. № 1. С. 26–30.
16. *Asgeirsson L.* // Math. Ann. 1936. V. 113. P. 321–346.
17. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние (в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными). М., 1958.
18. *Бейман Н.* Математика в биологии и медицине. М., 1970.
19. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
20. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М., 1979.
21. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
22. *Руллаф Р., Кодри Ф.* Солитоны. М., 1983.
23. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.
24. *Миронов А.Н.* // Изв. вузов. Математика. 1999. № 7. С. 78–80.

Математический институт им. А.М. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
19.03.2001 г.