О. М. Джохадзе, Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 517–528

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm282

Математические заметки

том 74 выпуск 4 октябрь 2003

УДК 517.956.32

ВЛИЯНИЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ НА КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. М. Джохадзе

В работе для гиперболического уравнения третьего порядка общего вида с доминированными младшими членами рассмотрена общая задача типа Гурса. Выявлены эффекты влияния младших членов, присутствующих как в уравнении, так и в граничных условиях, на корректность поставленной задачи.

Библиография: 16 названий.

В плоскости независимых переменных x, y рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка общего вида с доминированными (см., например, [1]) младшими членами

$$Lu := u_{xxy} + a^{2,0}u_{xx} + a^{1,1}u_{xy} + a^{1,0}u_x + a^{0,1}u_y + a^{0,0}u = f, \tag{1}$$

где $a^{i,j}$, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$, $i + j \neq 3$, f – заданные, а u – искомая действительные функции.

Прямые $y = \mathrm{const}$ образуют двукратное семейство характеристик уравнения (1), а прямые $x = \mathrm{const}$ – однократное.

Пусть

$$\gamma_1\colon\ y = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty, \qquad \gamma_2\colon\ x = 0, \quad 0 \leqslant y < \infty,$$

– характеристические лучи уравнения (1). Обозначим через D область, ограниченную лучами γ_1, γ_2 и расположенную в угле $x > 0$, $y > 0$.

Пусть P_1^0 и P_2^0 – точки пересечения γ_1 и γ_2 соответственно с характеристиками $L_1(P^0)$: $x = x_0$ и $L_2(P^0)$: $y = y_0$, выходящими из произвольно взятой точки $P^0(x_0, y_0) \in D$. Уравнение (1) будем рассматривать в прямоугольной области

$$D_0 := \{(x, y) : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$$

ограниченной характеристиками $x = 0$, $x = x_0$ и $y = 0$, $y = y_0$.

Для уравнения (1) рассмотрим общую характеристическую задачу типа Гурса в следующей постановке: требуется найти в D_0 регулярное решение u уравнения (1), удовлетворяющее на отрезках OP_1^0 и OP_2^0 лучей γ_1 и γ_2 следующим граничным условиям:

$$(M_1u_{xx} + N_1u_{xy} + P_1u_x + Q_1u_y + S_1u)\big|_{OP_1^0} = f_1, \tag{2}$$

$$(M_2u_{xx} + N_2u_{xy} + P_2u_x + Q_2u_y + S_2u)\big|_{OP_2^0} = f_2, \tag{3}$$

$$(M_3u_{xx} + N_3u_{xy} + P_3u_x + Q_3u_y + S_3u)\big|_{OP_2^0} = f_3, \tag{4}$$

где $M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i, f_i,\ i = 1, 2, 3,$ – заданные действительные функции.

Регулярным решением уравнения (1) называется функция u, непрерывная в D_0 вместе со своими частными производными $D_x^i D_y^j u$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$, $i + j > 0$, $D_x := \partial/\partial x$, $D_y := \partial/\partial y$, и удовлетворяющая уравнению (1) в D_0.

Замечание 1. Отметим, что гиперболическая природа рассматриваемой задачи учтена наличием в ней лишь производных, доминированных главной частью $D_x^2 D_y u$ уравнения (1).

Замечание 2. Ввиду того, что семейство характеристик $y = \text{const}$ является двукратным для гиперболического уравнения (1), на отрезке OP_2^0 луча γ_2 заданы два условия (3), (4).

Отметим, что гиперболические уравнения третьего и более высокого порядка с доминированными младшими членами, которые иногда называют псевдопараболическими, встречаются при изучении вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, продольного колебания в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задач и т. д. (см., например, [2]–[7]).

Одно из семейств характеристик уравнения (1) является кратным, и этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на характер их разрешимости.

Введем в рассмотрение следующие функциональные пространства:

$$
\begin{aligned}
C_0(\overline{D}_0) &:= \{u : u \in C(\overline{D}_0),\ u(O) = 0\}, \qquad O := (0,0),\\
C_0[0,d] &:= \{\varphi : \varphi \in C[0,d],\ \varphi(0) = 0\},\\
C^{m,n}(\overline{D}_0) &:= \{u : D_x^i u,\ D_y^j u \in C(\overline{D}_0),\ 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n\},\\
C^{0,0}(\overline{D}_0) &:= C(\overline{D}_0), \qquad C^{m,0}(\overline{D}_0) := C^m(\overline{D}_0), \qquad C^{0,n}(\overline{D}_0) := C^n(\overline{D}_0),\\
C_0^{m,n}(\overline{D}_0) &:= \{u : D_x^i u,\ D_y^j u \in C_0(\overline{D}_0),\ i = 0,1,\dots,m,\ j = 0,1,\dots,n\},\\
C_0^m[0,d] &:= \{\varphi : D_t^i \varphi \in C_0[0,d],\ i = 0,1,\dots,m\}, \qquad m = 0,1,\dots, \quad n = 0,1,\dots, d > 0.
\end{aligned}
$$

Граничную задачу (1)–(4) будем исследовать в пространстве $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$ и в этом случае будем требовать, чтобы

$$
\begin{gathered}
a^{i,j} \in C^{i,j}(\overline{D}_0), \qquad i = 0,1,2, \quad j = 0,1, \quad i + j \neq 3,\\
f \in C_0(\overline{D}_0), \qquad M_1, N_1, P_1, Q_1, S_1 \in C[0, x_0],\\
M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i \in C[0, y_0], \quad i = 2,3, \qquad f_1 \in C_0[0, x_0], \qquad f_i \in C_0[0, y_0], \quad i = 2,3.
\end{gathered}
$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$
M_1(x) \neq 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \tag{5}
$$

и

$$
\Delta(y) := \det \begin{Vmatrix} Q_2(y) & N_2(y) \\ Q_3(y) & N_3(y) \end{Vmatrix} \neq 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant y_0. \tag{6}
$$

В работах автора (см., например, [8]–[11]) доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5), (6). *Тогда задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в классе* $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$.

Естественно возникает вопрос: что происходит, когда достаточные условия (5) и (6) разрешимости задачи (1)–(4) отдельно или одновременно нарушаются на отрезках OP_1^0 и OP_2^0 соответственно. При нарушении условий (5) или (6), как показывает простой пример уравнения $u_{xxy}=0$, задача (1)–(4) может оказаться некорректно поставленной. Ниже будет показано, что наличие младших членов в уравнении (1) и в граничных условиях (2)–(4) может оказать влияние на корректность постановки задачи (1)–(4) (см., например, [12]–[14]).

1. Согласно предшествующим работам (см., например, [9], [10], [15], [16]), функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, $(x,y;\xi,\eta)\in\overline{D}_0\times\overline{D}_0$, уравнения (1) однозначно определяется как решение задачи Гурса

$$L^*_{(x,y)}v := -v_{xyx}+(a^{2,0}v)_{xx}+(a^{1,1}v)_{xy}-(a^{1,0}v)_x-(a^{0,1}v)_y+a^{0,0}v=0,$$
$$v(\xi,y;\xi,\eta)=0,\quad v_x(\xi,y;\xi,\eta)=\exp\biggl\{\int_\eta^y a^{2,0}(\xi,y_1)\,dy_1\biggr\},$$
$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_0(x,\eta;\xi,\eta),$$

где (ξ,η) – произвольная фиксированная точка из замкнутой области $\overline{D}_0$. Здесь $\omega_0(x,\eta;\xi,\eta)$ – решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v_{xx}(x,\eta;\xi,\eta)-(a^{1,1}v)_x(x,\eta;\xi,\eta)+(a^{0,1}v)(x,\eta;\xi,\eta)=0$$

относительно переменной x, удовлетворяющее следующим начальным условиям Коши:

$$v(x,\eta;\xi,\eta)\big|_{x=\xi}=0,\qquad v_x(x,\eta;\xi,\eta)\big|_{x=\xi}=1.$$

В то же время известно, что (см., например, [15])

$$D_x^iD_y^jv,\,D_\xi^iD_\eta^jv\in C(\overline{D}_0\times\overline{D}_0),\qquad i=0,1,2,\quad j=0,1,$$

и для регулярного решения u уравнения (1) имеет место следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\int_0^x[v_x(\xi,0;x,y)\varphi_1'(\xi)+(a^{1,1}v)_x(\xi,0;x,y)\varphi_1(\xi)-(a^{0,1}v)(\xi,0;x,y)\varphi_1(\xi)]\,d\xi\\&-\int_0^y[v(0,\eta;x,y)\nu_1'(\eta)+(a^{2,0}v)(0,\eta;x,y)\nu_1(\eta)]\,d\eta\\&-\int_0^y[v_{xy}(0,\eta;x,y)-(a^{2,0}v)_x(0,\eta;x,y)-(a^{1,1}v)_y(0,\eta;x,y)\\&+(a^{1,0}v)(0,\eta;x,y)]\psi_1(\eta)\,d\eta-(a^{1,1}v)(0,y;x,y)\psi_1(y)+v_x(0,y;x,y)\psi_1(y)\\&+(a^{1,1}v)(0,0;x,y)\varphi_1(0)-\int_0^x\int_0^y v(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\varphi_1(x):=u(x,0)$, $0\leqslant x\leqslant x_0$, $\psi_1(y):=u(0,y)$, $\nu_1(y):=u_x(0,y)$, $0\leqslant y\leqslant y_0$.

2. Пусть условие (5) нарушено на всем отрезке OP_1^0: $y=0, 0\leqslant x\leqslant x_0$, т.е.

$$M_1(x)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0, \tag{8}$$

а условие (6) выполнено.

В этом случае для простоты изложения, будем считать, что $N_1, P_1, Q_1, S_1 = \mathrm{const}$, $f_1\in C_0^1[0,x_0]$ и $M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i\in C[0,y_0]$, $f_i\in C_0[0,y_0]$, $i=2,3$.

Случай i) $N_1\neq 0$. В этом случае граничное условие (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\varphi_*(x):=u_y(x,0)$, $0\leqslant x\leqslant x_0$, $\varphi_*\in C_0^2[0,x_0]$,

$$\varphi_*'(x)+N_1^{-1}Q_1\varphi_*(x)=N_1^{-1}[f_1(x)-P_1\varphi_1'(x)-S_1\varphi_1(x)],\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0, \tag{9}$$

где $\varphi_1\in C_0^2[0,x_0]$.

Решение уравнения (9) класса $C_0^2[0,x_0]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_*(x)&=-N_1^{-1}P_1\varphi_1(x)-N_1^{-1}(S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\int_0^x\exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi-x)\}\varphi_1(\xi)\,d\xi\\&\quad+N_1^{-1}\int_0^x\exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi-x)\}f_1(\xi)\,d\xi,\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0.\end{aligned} \tag{10}$$

Рассматривая уравнение (1) на отрезке $0\leqslant x\leqslant x_0$ характеристической прямой $y=0$ и учитывая (10), относительно неизвестной функции $\varphi_1\in C_0^2[0,x_0]$ получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned}&\big[P_1-N_1a^{2,0}(x,0)\big]\varphi_1''(x)+\big[P_1a^{1,1}(x,0)-N_1a^{1,0}(x,0)+S_1-N_1^{-1}P_1Q_1\big]\varphi_1'(x)\\&\quad+\big[(S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)a^{1,1}(x,0)+P_1a^{0,1}(x,0)\\&\qquad-N_1a^{0,0}(x,0)-N_1^{-1}Q_1(S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\big]\varphi_1(x)\\&\quad+\big[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2\big](S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\\&\qquad\times\int_0^x\exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi-x)\}\varphi_1(\xi)\,d\xi=\widetilde{f}(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x):=&\,f_1'(x)+\big[a^{1,1}(x,0)-N_1^{-1}Q_1\big]f_1(x)\\&+\big[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2\big]\\&\times\int_0^x\exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi-x)\}f_1(\xi)\,d\xi-N_1^{-1}f(x,0),\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0.\end{aligned}$$

Для получения интегро-дифференциальных соотношений относительно неизвестных функций ψ_1, ν_1 поступим следующим образом. Рассматривая уравнение (1) на отрезке $0\leqslant y\leqslant y_0$ характеристической прямой $x=0$ относительно функции $\psi_*(y):=u_{xx}(0,y)$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, $\psi_*\in C_0^1[0,y_0]$, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\begin{aligned}\psi_*'(y)+a^{2,0}(0,y)\psi_*(y)&=f(0,y)-a^{1,1}(0,y)\nu_1'(y)-a^{1,0}(0,y)\nu_1(y)\\&\quad-a^{0,1}(0,y)\psi_1'(y)-a^{0,0}(0,y)\psi_1(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant y_0,\end{aligned}$$

решение которого представляется по формуле

$$\psi_*(y) = \int_0^y [f(0,\eta) - a^{1,1}(0,\eta)\nu_1'(\eta) - a^{1,0}(0,\eta)\nu_1(\eta) - a^{0,1}(0,\eta)\psi_1'(\eta) \\ - a^{0,0}(0,\eta)\psi_1(\eta)] \exp\left\{\int_y^\eta a^{2,0}(0,t)\,dt\right\} d\eta, \qquad 0 \leqslant y \leqslant y_0. \tag{12}$$

Подставляя ψ_* из (12) в граничные условия (3), (4), получаем следующую систему интегро-дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $\psi_1, \nu_1 \in C_0^1[0, y_0]$:

$$\begin{aligned} &N_i\nu_1'(y) + Q_i\psi_1'(y) + P_i\nu_1(y) + S_i\psi_1(y) \\ &\quad - M_i \int_0^y \left[a^{1,1}(0,\eta)\nu_1'(\eta) + a^{1,0}(0,\eta)\nu_1(\eta) + a^{0,1}(0,\eta)\psi_1'(\eta) + a^{0,0}(0,\eta)\psi_1(\eta)\right] \\ &\quad \times \exp\left\{\int_y^\eta a^{2,0}(0,t)\,dt\right\} d\eta \\ &= f_i(y) - M_i \int_0^y f(0,\eta) \exp\left\{\int_y^\eta a^{2,0}(0,t)\,dt\right\} d\eta, \qquad 0 \leqslant y \leqslant y_0, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \tag{13}$$

Замечание 3. Очевидно, что при выполнении условий (6), (8) задача (1)–(4) в классе $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$ эквивалентна системе уравнений (11), (13) относительно неизвестных $\varphi_1 \in C_0^2[0, x_0]$, $\psi_1, \nu_1 \in C_0^1[0, y_0]$.

Хорошо известно, что система уравнений (13) при выполнении условия (6) однозначно разрешима относительно функций $\psi_1, \nu_1 \in C_0^1[0, y_0]$. Поэтому вопрос разрешимости задачи (1)–(4) в классе $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$ при выполнении условий (6), (8) эквивалентным образом редуцируется к вопросу разрешимости уравнения (11) относительно $\varphi_1 \in C_0^2[0, x_0]$.

Пусть выполнено условие

$$P_1 - N_1 a^{2,0}(x,0) \neq 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \tag{14}$$

тогда уравнение (11) однозначно разрешимо в классе $C_0^2[0, x_0]$.

Пусть теперь условие (14) нарушено всюду, т.е.

$$P_1 - N_1 a^{2,0}(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{15}$$

В этом случае уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[P_1 a^{1,1}(x,0) - N_1 a^{1,0}(x,0) + S_1 - N_1^{-1}P_1Q_1\right]\varphi_1'(x) \\ &\quad + \left[(S_1 - N_1^{-1}P_1Q_1)a^{1,1}(x,0) + P_1 a^{0,1}(x,0) \right. \\ &\qquad \left. - N_1 a^{0,0}(x,0) - N_1^{-1}Q_1(S_1 - N_1^{-1}P_1Q_1)\right]\varphi_1(x) \\ &\quad + \left[-N_1^{-1}Q_1 a^{1,1}(x,0) + a^{0,1}(x,0) + N_1^{-2}Q_1^2\right](S_1 - N_1^{-1}P_1Q_1) \\ &\qquad \times \int_0^x \exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi - x)\}\varphi_1(\xi)\,d\xi = \widetilde{f}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \end{aligned} \tag{16}$$

При выполнении условия

$$P_1 a^{1,1}(x,0) - N_1 a^{1,0}(x,0) + S_1 - N_1^{-1}P_1Q_1 \neq 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \tag{17}$$

для однозначной разрешимости уравнения (16) в классе $C_0^2[0,x_0]$ следует дополнительно потребовать, чтобы

$$a^{0,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,0}(\,\cdot\,,0), f(\,\cdot\,,0), f_1' \in C^1[0,x_0], \qquad f_1''(0) - N_1^{-1} f_x(0,0) = 0. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим случай, когда условие (17) нарушено на всем отрезке $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$, т.е.

$$P_1 a^{1,1}(x,0) - N_1 a^{1,0}(x,0) + S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1 = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{19}$$

Учитывая (19), уравнение (16) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\big[(S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) a^{1,1}(x,0) + P_1 a^{0,1}(x,0) - N_1 a^{0,0}(x,0) \\ &\qquad - N_1^{-1} Q_1 (S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1)\big] \varphi_1(x) \\ &\quad + \big[-N_1^{-1} Q_1 a^{1,1}(x,0) + a^{0,1}(x,0) + N_1^{-2} Q_1^2\big](S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) \\ &\qquad \times \int_0^x \exp\{N_1^{-1} Q_1 (\xi - x)\} \varphi_1(\xi)\, d\xi = \widetilde{f}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть теперь выполнено условие

$$(S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) a^{1,1}(x,0) + P_1 a^{0,1}(x,0) - N_1 a^{0,0}(x,0) - N_1^{-1} Q_1 (S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) \neq 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{21}$$

Тогда для однозначной разрешимости уравнения (20) относительно $\varphi_1 \in C_0^2[0,x_0]$ наряду с условиями (18) следует дополнительно потребовать, чтобы

$$\begin{gathered} a^{1,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,0}(\,\cdot\,,0), f(\,\cdot\,,0), f_1' \in C^2[0,x_0], \\ f_1'''(0) + [a^{1,1}(0,0) - N_1^{-1} Q_1] f_1''(0) - N_1^{-1} f_{xx}(0,0) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

В этом случае для получения явного решения уравнения (20) введем обозначение

$$\varphi_2(x) := \int_0^x \exp\{N_1^{-1} Q_1 \xi\} \varphi_1(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Очевидно, что относительно φ_2 с учетом (20) имеем уравнение

$$\varphi_2'(x) + \widetilde{b}(x) \varphi_2(x) = \exp\{N_1^{-1} Q_1 x\} \widetilde{a}(x) \widetilde{f}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0,$$

где $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ – вполне определенные функции.

Решая последнее уравнение, с учетом условия Коши $\varphi_2(0) = 0$ окончательно находим

$$\varphi_1(x) = \widetilde{a}(x)\widetilde{f}(x) - \widetilde{b}(x) \int_0^x \exp\Big\{N_1^{-1} Q_1 (\xi - x) + \int_x^\xi \widetilde{b}(t)\, dt\Big\} \widetilde{a}(\xi) \widetilde{f}(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда условие (21) нарушено всюду на OP_1^0, т.е.

$$(S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) a^{1,1}(x,0) + P_1 a^{0,1}(x,0) - N_1 a^{0,0}(x,0) - N_1^{-1} Q_1 (S_1 - N_1^{-1} P_1 Q_1) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{23}$$

В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned}[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2](S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\\ \times\int_0^x \exp\{N_1^{-1}Q_1(\xi-x)\}\varphi_1(\xi)\,d\xi=\widetilde{f}(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0.\end{aligned}\tag{24}$$

При выполнении условия

$$[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2](S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\neq 0,\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,\tag{25}$$

для однозначной разрешимости уравнения (24) относительно $\varphi_1\in C_0^2[0,x_0]$ наряду с условиями (18) и (22), приведенными выше, следует дополнительно потребовать, чтобы

$$\begin{gathered}a^{1,1}(\,\cdot\,,0),a^{0,1}(\,\cdot\,,0),f(\,\cdot\,,0),f_1'\in C^3[0,x_0],\\ f_1''''(0)+\big[3a_x^{1,1}(0,0)-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(0,0)+a^{0,1}(0,0)+N_1^{-2}Q_1^2\big]f_1''(0)\\ +\big[a^{1,1}(0,0)-N_1^{-1}Q_1\big]f_1'''(0)-N_1^{-1}f_{xxx}(0,0)=0.\end{gathered}\tag{26}$$

Решение уравнения (24), как и выше, в этом случае представляется в явном виде

$$\varphi_1(x)=N_1^{-1}Q_1M(x)+M'(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,$$

где

$$\begin{gathered}M(x):=\big\{[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2](S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)\big\}^{-1}\widetilde{f}(x),\\ 0\leqslant x\leqslant x_0.\end{gathered}$$

Пусть теперь условие (25) нарушено всюду, т.е.

$$[-N_1^{-1}Q_1a^{1,1}(x,0)+a^{0,1}(x,0)+N_1^{-2}Q_1^2](S_1-N_1^{-1}P_1Q_1)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0.\tag{27}$$

В этом случае левая часть уравнения (24) тождественно равна нулю и равенство

$$\widetilde{f}(x)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,\tag{28}$$

является необходимым и достаточным условием для разрешимости уравнения (24) в классе $C_0^2[0,x_0]$, причем любая функция из этого класса является его решением.

В силу замечания 3 получаем, что справедлива следующая

Теорема 2.[1] *Пусть выполнены условия* (6), (8) *и* $N_1\neq 0$. *Тогда при выполнении условия* (14) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима.*

Если же имеет место (15), *то при выполнении условия* (17) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима при дополнительном выполнении условий* (18).

Далее, если выполнены условия (15) *и* (19), *то при* (21) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима, если дополнительно выполнены условия* (18) *и* (22).

[1] Всюду в сформулированных в этом пункте теоремах вопрос разрешимости задачи (1)–(4) рассматривается в классе $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$.

В случае, когда имеют место равенства (15), (19), (23) *и выполнено условие* (25), *то задача* (1)–(4) *однозначно разрешима, если дополнительно выполнены условия* (18), (22) *и* (26).

Наконец, пусть выполнены условия (15), (19), (23) *и* (27). *Тогда для разрешимости задачи* (1)–(4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество* (28), *причем соответствующая* (1)–(4) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений, которые согласно* (7) *даются формулой*

$$u_0(x,y) = \int_0^x \left[v_x(\xi,0;x,y)\varphi_1'(\xi) + (a^{1,1}v)_x(\xi,0;x,y)\varphi_1(\xi) - (a^{0,1}v)(\xi,0;x,y)\varphi_1(\xi)\right] d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_0, \tag{29}$$

где φ_1 *– произвольная функция класса* $C_0^2[0,x_0]$, *а* $v(x,y;\xi,\eta)$ *– функция Римана уравнения* (1).

Случай ii) $N_1 = 0$. В этом случае граничное условие (2) принимает вид

$$P_1 u_x(x,0) + Q_1 u_y(x,0) + S_1 u(x,0) = f_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{30}$$

Дифференцируя равенство (30) по переменной x, будем иметь

$$P_1 u_{xx}(x,0) + Q_1 u_{xy}(x,0) + S_1 u_x(x,0) = f_1'(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{31}$$

Очевидно, что равенства (30) и (31) являются эквивалентными.

Рассматривая в качестве граничного условия (2) равенство (31), в силу теоремы 1 заключаем, что справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (6), (8), $N_1 = 0$ *и* $P_1 \neq 0$. *Тогда задача* (1)–(4) *однозначно разрешима.*

Случай iii) $N_1 = P_1 = 0$. В этом случае условие (30) принимает вид

$$Q_1\varphi_*(x) + S_1\varphi_1(x) = f_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Отсюда в предположении, что $Q_1 \neq 0$, непосредственно следует

$$\varphi_*(x) = Q_1^{-1}[f_1(x) - S_1\varphi_1(x)], \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{32}$$

Рассматривая уравнение (1) на отрезке OP_1^0 при дополнительном требовании, что $f_1 \in C_0^2[0,x_0]$, и подставляя в нем значение функции φ_*, представленной по формуле (32), относительно функции $\varphi_1 \in C_0^2[0,x_0]$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}&[S_1 - Q_1 a^{2,0}(x,0)]\varphi_1''(x) + [S_1 a^{1,1}(x,0) - Q_1 a^{1,0}(x,0)]\varphi_1'(x)\\ &\qquad + [S_1 a^{0,1}(x,0) - Q_1 a^{0,0}(x,0)]\varphi_1(x)\\ &\quad = f_1''(x) + a^{1,1}(x,0)f_1'(x) + a^{0,1}(x,0)f_1(x) - Q_1 f(x,0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0.\end{aligned} \tag{33}$$

Очевидно, что при выполнении условий (6), (8) и $N_1 = P_1 = 0$ задача (1)–(4) в классе $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$ эквивалентна системе уравнений (33) и (13) относительно $\varphi_1 \in C_0^2[0,x_0]$ и $\psi_1, \nu_1 \in C_0^1[0,y_0]$.

Уравнение (33) исследуется так же, как и (11). Для простоты изложения обозначим через a), b), ... условия, фигурирующие при формулировании окончательного результата в виде теоремы:

a) $S_1 - Q_1 a^{2,0}(x,0) \neq 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
b) $S_1 - Q_1 a^{2,0}(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
c) $S_1 a^{1,1}(x,0) - Q_1 a^{1,0}(x,0) \neq 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
d) $a^{0,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,0}(\,\cdot\,,0), f(\,\cdot\,,0), f_1'' \in C^1[0,x_0],\ f_1'''(0) - Q_1 f_x(0,0) = 0$;
e) $S_1 a^{1,1}(x,0) - Q_1 a^{1,0}(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
f) $S_1 a^{0,1}(x,0) - Q_1 a^{0,0}(x,0) \neq 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
g) $a^{1,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,1}(\,\cdot\,,0), a^{0,0}(\,\cdot\,,0), f(\,\cdot\,,0), f_1'' \in C^2[0,x_0]$,
$f_1''''(0) + a^{1,1}(0,0) f_1'''(0) - Q_1 f_{xx}(0,0) = 0$;
h) $S_1 a^{0,1}(x,0) - Q_1 a^{0,0}(x,0) = 0, 0 \leqslant x \leqslant x_0$;
j) $f_1''(x) + a^{1,1}(x,0) f_1'(x) + a^{0,1}(x,0) f_1(x) - Q_1 f(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнены условия* (6), (8), $N_1 = P_1 = 0$ *и* $Q_1 \neq 0$.

Тогда при выполнении a) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима.*

Если же имеет место b), *то при* c) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима при дополнительном выполнении* d).

Далее, в случае, когда имеют место b) *и* e), *при* f) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима, если дополнительно выполнены* d) *и* g).

Наконец, пусть имеют место b), e) *и* h). *Тогда для разрешимости задачи* (1)–(4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* j), *причем соответствующая* (1)–(4) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений, которые в силу* (7) *даются формулой* (29).

Случай iv) $N_1 = P_1 = Q_1 = 0$. Тогда естественно потребовать, чтобы $S_1 \neq 0$, ибо в противном случае граничное условие (2), которое в данном случае принимает вид

$$S_1 u(x,0) = f_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \tag{34}$$

не имело бы смысла.

Требуя дополнительно, чтобы $f_1 \in C_0^2[0,x_0]$, и дифференцируя дважды равенство (34) по x, получаем

$$S_1 u_{xx}(x,0) = f_1''(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{35}$$

Отметим, что равенства (34) и (35) являются эквивалентными.

Рассматривая в качестве граничного условия (2) равенство (35), в силу теоремы 1 заключаем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *При выполнении условий* (6), (8), $N_1 = P_1 = Q_1 = 0$ *и* $S_1 \neq 0$ *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима.*

3. Пусть теперь условие (6) нарушено всюду на отрезке OP_2^0: $x = 0, 0 \leqslant y \leqslant y_0$, т.е.

$$\Delta(y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant y_0, \tag{36}$$

а условие (5) выполнено.

В этом случае для простоты изложения будем считать, что $M_i, N_i, P_i, Q_i, S_i = \mathrm{const}$, $f_i \in C_0^1[0,y_0]$, $i = 2,3$, и $M_1, N_1, P_1, Q_1, S_1 \in C[0,x_0]$, $f_1 \in C_0[0,x_0]$.

Рассматривая уравнение (1) на характеристическом отрезке $OP_1^0\colon y=0, 0\leqslant x\leqslant x_0$, с учетом граничного условия (2) относительно вектора-столбца

$$\Phi(x) := \left\| \begin{matrix} \varphi_*(x) \\ \varphi_1(x) \end{matrix} \right\|, \qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,$$

класса $C_0^2[0,x_0]$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$A_0(x)\Phi''(x)+A_1(x)\Phi'(x)+A_2(x)\Phi(x)=F(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant x_0. \tag{37}$$

Здесь

$$A_0(x) := \left\| \begin{matrix} 1 & a^{2,0}(x,0) \\ 0 & M_1(x) \end{matrix} \right\|, \qquad 0\leqslant x\leqslant x_0,$$

а A_1, A_2 – вполне определенные матрицы-функции, F – известная вектор-функция.

Учитывая вид матрицы A_0, в силу условия (5) имеем

$$\det A_0(x)=M_1(x)\neq 0, \qquad 0\leqslant x\leqslant x_0.$$

Отсюда получаем, что система (37) однозначно разрешима в классе $C_0^2[0,x_0]$, следовательно, однозначно определяется и функция $\varphi_1\in C_0^2[0,x_0]$.

Далее, в силу (36) без ограничения общности будем считать, что справедливы следующие равенства

$$N_3=MN_2, \qquad Q_3=MQ_2,$$

где M – вполне определенное действительное число.

С учетом этих равенств и граничных условий (3), (4) относительно функций $\psi_1,\nu_1\in C_0^1[0,y_0]$ на отрезке OP_2^0 получаем следующую систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} N_2\nu_1'(y)+Q_2\psi_1'(y)+P_2\nu_1(y)+S_2\psi_1(y)=f_2(y)-\psi_*(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant y_0,\\ (MP_2-P_3)\nu_1(y)+(MS_2-S_3)\psi_1(y)\\ =Mf_2(y)-f_3(y)-(MM_2-M_3)\psi_*(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant y_0. \end{aligned} \tag{38}$$

Пусть выполнено условие

$$MP_2-P_3\neq 0 \qquad (MS_2-S_3\neq 0). \tag{39}$$

Определяя $\nu_1(\psi_1)$ из второго уравнения системы (38) и подставляя ее в первое, при дополнительном условии

$$Q_2(MP_2-P_3)-N_2(MS_2-S_3)\neq 0, \tag{40}$$

находим, что единственное решение системы (38) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(y)=a_1\psi_*(y)+b_1\int_0^y \exp\{c(\eta-y)\}\psi_*(\eta)\,d\eta+F_1(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant y_0,\\ \nu_1(y)=a_2\psi_*(y)+b_2\int_0^y \exp\{c(\eta-y)\}\psi_*(\eta)\,d\eta+F_2(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant y_0, \end{aligned} \tag{41}$$

где a_i, b_i, c и F_i, $i=1,2$, – вполне определенные постоянные и функции соответственно, конкретные значения которых для наших исследований принципиального значения не имеют.

Теперь, рассматривая уравнение (1) на характеристическом отрезке OP_2^0: $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$, и подставляя в нем значения функций ψ_1 и ν_1 представленных по формулам (41), после простых преобразований получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\psi_* \in C_0^1[0, y_0]$:

$$\begin{aligned}
&\{1 + a_2 a^{1,1}(0,y) + a_1 a^{0,1}(0,y)\}\psi_*'(y)\\
&\qquad + \{a^{2,0}(0,y) + b_2 a^{1,1}(0,y) + a_2 a^{1,0}(0,y) + b_1 a^{0,1}(0,y) + a_1 a^{0,0}(0,y)\}\psi_*(y)\\
&\qquad + \{-cb_2 a^{1,1}(0,y) + b_2 a^{1,0}(0,y) - cb_1 a^{0,1}(0,y) + b_1 a^{0,0}(0,y)\}\\
&\qquad\qquad \times \int_0^y \exp\{c(\eta - y)\}\psi_*(\eta)\,d\eta\\
&\quad = f(0,y) - a^{1,1}(0,y)F_2'(y) - a^{1,0}(0,y)F_2(y)\\
&\qquad - a^{0,1}(0,y)F_1'(y) - a^{0,0}(0,y)F_1(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant y_0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Замечание 4. Очевидно, что при выполнении условий (5), (36), (39), (40) задача (1)–(4) в классе $C_0^{2,1}(\overline{D}_0)$ эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений (37), (42) относительно функций $\Phi \in C_0^2[0, x_0]$, $\psi_* \in C_0^1[0, y_0]$.

Уравнение (42) исследуется так же, как и уравнения (11) и (33). Для простоты изложения, как и в п. 2, обозначим через a$'$), b$'$), … условия, фигурирующие при формулировании окончательного результата в виде теоремы:

a$'$) $1 + a_2 a^{1,1}(0,y) + a_1 a^{0,1}(0,y) \neq 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
b$'$) $1 + a_2 a^{1,1}(0,y) + a_1 a^{0,1}(0,y) = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
c$'$) $a^{2,0}(0,y) + b_2 a^{1,1}(0,y) + a_2 a^{1,0}(0,y) + b_1 a^{0,1}(0,y) + a_1 a^{0,0}(0,y) \neq 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
d$'$) $a^{1,0}(0,\cdot), a^{0,0}(0,\cdot), f(0,\cdot), F_1', F_2' \in C^1[0, y_0]$;
$f_y(0,0) - a^{1,1}(0,0)F_2''(0) - a^{0,1}(0,0)F_1''(0) = 0$;
e$'$) $a^{2,0}(0,y) + b_2 a^{1,1}(0,y) + a_2 a^{1,0}(0,y) + b_1 a^{0,1}(0,y) + a_1 a^{0,0}(0,y) = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
f$'$) $-cb_2 a^{1,1}(0,y) + b_2 a^{1,0}(0,y) - cb_1 a^{0,1}(0,y) + b_1 a^{0,0}(0,y) \neq 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
g$'$) $a^{1,1}(0,\cdot), a^{1,0}(0,\cdot), a^{0,1}(0,\cdot), a^{0,0}(0,\cdot), f(0,\cdot), F_1', F_2' \in C^2[0, y_0]$;
$f_{yy}(0,0) - [2a_y^{1,1}(0,0) + a^{1,0}(0,0)]F_2''(0) - a^{1,1}(0,0)F_2'''(0)$
$-[2a_y^{0,1}(0,0) + a^{0,0}(0,0)]F_1''(0) - a^{0,1}(0,0)F_1'''(0) = 0$;
h$'$) $-cb_2 a^{1,1}(0,y) + b_2 a^{1,0}(0,y) - cb_1 a^{0,1}(0,y) + b_1 a^{0,0}(0,y) = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0$;
j$'$) $f(0,y) - a^{1,1}(0,y)F_2'(y) - a^{1,0}(0,y)F_2(y) - a^{0,1}(0,y)F_1'(y) - a^{0,0}(0,y)F_1(y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (5), (36), (39) *и* (40). *Тогда при выполнении* a$'$) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима.*

Если же имеет место b$'$), *то при* c$'$) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима при дополнительном выполнении* d$'$).

Далее, в случае, когда имеют место b$'$) *и* e$'$), *при* f$'$) *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима, если дополнительно выполнены* d$'$) *и* g$'$).

Наконец, пусть имеют место b$'$), e$'$) *и* h$'$). *Тогда для разрешимости задачи* (1)–(4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* j$'$), *причем соответствующая* (1)–(4) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений, которые согласно* (7) *даются формулой*

$$\begin{aligned}
u_0(x,y) = &-\int_0^y [v(0,\eta;x,y)\nu_1'(\eta) + (a^{2,0}v)(0,\eta;x,y)\nu_1(\eta)]\,d\eta - \int_0^y [v_{xy}(0,\eta;x,y)\\
&- (a^{2,0}v)_x(0,\eta;x,y) - (a^{1,1}v)_y(0,\eta;x,y) + (a^{1,0}v)(0,\eta;x,y)]\psi_1(\eta)\,d\eta\\
&- (a^{1,1}v)(0,y;x,y)\psi_1(y) + v_x(0,y;x,y)\psi_1(y), \qquad (x,y) \in \overline{D}_0,
\end{aligned} \tag{43}$$

где ψ_1 *и* ν_1 *представимы по формулам* (41), *в которых* ψ_* *– произвольная функция класса* $C_0^1[0, y_0]$; $v(x, y; \xi, \eta)$ *– функция Римана уравнения* (1).

Замечание 5. При выполнении условий b), c), d) (соответственно b′), c′), d′)) или b), e), f), d), g) (соответственно b′), e′), f′), d′), g′)) решение уравнения (33) (соответственно (42)) можно получить в явном виде.

Замечание 6. Аналогичным образом можно исследовать случаи, когда хотя бы одно из условий (39) или (40) нарушено.

Замечание 7. Коэффициенты и правые части граничных условий (3), (4) не присутствуют в явном виде в формулировании условий a′)–j′), что было сделано с целью их компактной записи.

Замечание 8. С помощью выше приведенных способов аналогичным образом проводится исследование случая, когда условия (5) и (6) одновременно нарушаются всюду на отрезках OP_1^0 и OP_2^0 соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
[2] Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970.
[3] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
[4] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
[5] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
[6] Буллаф Р., Кодри Ф. Солитоны. М.: Мир, 1983.
[7] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
[8] Jokhadze O. On a Darboux problem for a third order hyperbolic equation with multiple characteristics // Georgian Math. J. 1995. V. 2. №5. P. 469–490.
[9] Jokhadze O. General Darboux type problem for a third order equation with dominated lower terms // Bull. Acad. Sci. Georgia. 1996. V. 154. №3. P. 344–347.
[10] Джохадзе О.М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. №4. С. 523–535.
[11] Jokhadze O. Boundary value problems in the plane for higher-order hyperbolic (pseudoparabolic) equations in angular and characteristic domains // Workshop in Partial Differential Equations. Germany: University of Potsdam, 1999. P. 17–18.
[12] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
[13] Kharibegashvili S. Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems // Memoirs Diff. Equations Math. Phys. Tbilisi. 1995. V. 4.
[14] Бицадзе А.В. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. №1. С. 31–34.
[15] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. №3. С. 547–552.
[16] Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689–699.

Математический институт им. А.М. Размадзе АН Грузии
E-mail: jokha@rmi.acnet.ge

Поступило
31.01.2001