О. М. Джохадзе, Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 1, 58–68

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 1, с. 58–68

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.225

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2004 г. О. М. Джохадзе

В настоящей работе рассмотрены некоторые классы линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго и высокого порядка. Изучены их некоторые структурные свойства на плоскости и в пространстве. В частности, во всех случаях в явном виде указываются инварианты Лапласа, обсуждаются вопросы их независимости в определенном смысле, а также разбиения гиперболических операторов и представимости эллиптических и параболических операторов в форме, близкой к канонической.

§ 1. ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1°. В плоскости переменных x, y рассмотрим линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка общего вида

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u+G(x,y)=0, \tag{1.1}$$

где A,B,C,D,E,F,G – известные, а u – искомая действительные функции своих аргументов.

В уравнение (1.1) введем новую функцию v по формуле

$$u(x,y)=\lambda(x,y)v(x,y), \tag{1.2}$$

где $\lambda\neq 0$ пока неизвестная функция, которая подлежит определению при помощи коэффициентов уравнения (1.1).

Подставляя представление (1.2) в уравнение (1.1), с помощью простых вычислений приходим к уравнению относительно функции v

$$Av_{xx}+Bv_{xy}+Cv_{yy}+\left(2A\frac{\lambda_x}{\lambda}+B\frac{\lambda_y}{\lambda}+D\right)v_x+\left(B\frac{\lambda_x}{\lambda}+2C\frac{\lambda_y}{\lambda}+E\right)v_y+\left(\frac{1}{\lambda}M[\lambda]+F\right)v+\frac{1}{\lambda}G=0,$$

где $M[\lambda]:=A\lambda_{xx}+B\lambda_{xy}+C\lambda_{yy}+D\lambda_x+E\lambda_y$. Отсюда, в частности, видно, что преобразование (1.2) переводит соответствующее (1.1) однородное уравнение $(G=0)$ в новое уравнение такого же типа

$$A_1(x,y)v_{xx}+B_1(x,y)v_{xy}+C_1(x,y)v_{yy}+D_1(x,y)v_x+E_1(x,y)v_y+F_1(x,y)v=0, \tag{1.3}$$

если

$$\begin{gathered}A=A_1,\quad B=B_1,\quad C=C_1,\quad 2A\frac{\lambda_x}{\lambda}+B\frac{\lambda_y}{\lambda}+D=D_1,\\ B\frac{\lambda_x}{\lambda}+2C\frac{\lambda_y}{\lambda}+E=E_1,\quad \frac{1}{\lambda}M[\lambda]+F=F_1.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Обозначая дискриминант уравнения (1.1) $\Delta:=4AC-B^2$ (соответственно $\Delta_1:=4A_1C_1-B_1^2=\Delta$) и предполагая, что $\Delta\neq 0$, из равенств (1.4) будем иметь

$$\lambda_x/\lambda=b_1-b,\quad \lambda_y/\lambda=a_1-a, \tag{1.5}$$

где введены следующие обозначения:

$$b_1 := \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ E_1 & 2C_1 \end{vmatrix}, \quad b := \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D & B \\ E & 2C \end{vmatrix}, \quad a_1 := \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} 2A_1 & D_1 \\ B_1 & E_1 \end{vmatrix}, \quad a := \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2A & D \\ B & E \end{vmatrix}.$$

Кроме того, формулы (1.4) и (1.5) показывают, что, для того чтобы уравнения (1.1) (при $G = 0$) и (1.3) при условии $\Delta \neq 0$ можно было рассматривать как получаемые одно из другого преобразованием вида (1.2), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция λ такая, что

$$\lambda_x = (b_1 - b)\lambda, \quad \lambda_y = (a_1 - a)\lambda, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\lambda}M[\lambda] + F = F_1. \tag{1.7}$$

Приравнивая смешанные производные из равенств (1.6), будем иметь

$$b_{1y} - a_{1x} = b_y - a_x. \tag{1.8}$$

Далее, вычисляя из равенств (1.6) вторые производные λ_{xx}, λ_{xy}, λ_{yy} и подставляя их в (1.7), получаем

$$A[b_{1x} - b_x + (b_1 - b)^2] + B[b_{1y} - b_y + (a_1 - a)(b_1 - b)] + C[a_{1y} - a_y + (a_1 - a)^2] +$$
$$+ D(b_1 - b) + E(a_1 - a) + F = F_1. \tag{1.9}$$

С учетом выражений для величин a_1, b_1, a, b и легко проверяемых равенств

$$a_1 - a = \frac{1}{\Delta_1}(2A(E_1 - E) - B(D_1 - D)), \quad b_1 - b = \frac{1}{\Delta_1}(2C(D_1 - D) - B(E_1 - E))$$

нетрудно убедиться, что выражение из (1.9) принимает вид

$$A(b_1 - b)^2 + B(a_1 - a)(b_1 - b) + C(a_1 - a)^2 + D(b_1 - b) + E(a_1 - a) =$$
$$= \Delta^{-1}\{C_1 D_1^2 - B_1 E_1 D_1 + A_1 E_1^2 - CD^2 + BED - AE^2\}. \tag{1.10}$$

Другими словами, полагая

$$h := \left(\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D & B \\ E & 2C \end{vmatrix}\right)_y - \left(\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2A & D \\ B & E \end{vmatrix}\right)_x,$$

$$k := A\left(\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D & B \\ E & 2C \end{vmatrix}\right)_x + B\left(\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} D & B \\ E & 2C \end{vmatrix}\right)_y + C\left(\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2A & D \\ B & E \end{vmatrix}\right)_y + \tag{1.11}$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\{AE^2 + CD^2 - BED\} - F,$$

в силу (1.8)–(1.10) можно утверждать, что, для того чтобы при условии $\Delta \neq 0$ два уравнения вида (1.1) (при $G = 0$) и (1.3) были приводимы одно к другому посредством мультипликативного преобразования типа (1.2), необходимо и достаточно, чтобы вместе со старшими коэффициентами A, B, C уравнения (1.1) величины h и k, которые на этом основании получили название инвариантов, имели для обоих уравнений одни и те же значения.

В дальнейшем комбинации коэффициентов дифференциальных уравнений, которые не меняются при мультипликативных преобразованиях, будем называть лапласовыми инвариантами.

Если условия $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$; $h = h_1$, $k = k_1$ выполнены, определение множителя λ не представляет уже никакой трудности, а именно, замечая, что выражение

$(b_1-b)dx+(a_1-a)dy$ является полным дифференциалом, получаем для определения функции λ формулу

$$\lambda = \exp\int (b_1-b)\,dx + (a_1-a)\,dy.$$

Замечание 1.1. Простая проверка показывает, что инварианты Лапласа для линейных гиперболических и эллиптических уравнений второго порядка на плоскости канонического вида (см., например, [1–4]) получаются из формул (1.11) при соответствующем выборе старших коэффициентов A, B и C.

2 ^{0}. В этом пункте рассмотрены линейные дифференциальные уравнения в частных производных канонического вида второго порядка в многомерных областях. Приведены некоторые результаты без доказательств, которые, на наш взгляд, с применением использованных выше способов трудности не представляют.

a) Инварианты Лапласа для многомерных однородных эллиптических уравнений второго порядка канонического вида

$$\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i} + au = 0$$

имеют вид

$$H := \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n (a_i)_{x_i} - 4a, \quad K := (a_i)_{x_j} - (a_j)_{x_i}, \quad i,j=\overline{1,n}, \quad i\neq j;$$

соответствующая функция λ представима в виде

$$\lambda(x) := \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int (b_i-a_i)\,dx_i\right\}.$$

Замечание 1.2. Если $H=0$, то имеет место представление

$$\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i} + au = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}a_i\right)^2 u.$$

b) Инварианты Лапласа для многомерных однородных гиперболических уравнений второго порядка канонического вида

$$-u_{tt} + a_0u_t + \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i} + au = 0$$

имеют вид

$$h := -a_0^2 + 2a_{0t} + \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n (a_i)_{x_i} - 4a, \quad k := (a_i)_{x_j} - (a_j)_{x_i}, \quad i,j=\overline{1,n}, \quad i\neq j;$$

соответствующая функция λ представима в виде

$$\lambda(x,t) := \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int (b_i-a_i)\,dx_i + (b_0-a_0)\,dt\right\}.$$

c) Инвариант Лапласа для многомерных однородных параболических уравнений второго порядка канонического вида

$$-u_t + \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i} + au = 0$$

в условиях $a_i := a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, имеет вид

$$h := \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (a_i)_{x_i} - 4a;$$

соответствующая функция λ представима в виде

$$\lambda(x) := \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int (b_i - a_i)\, dx_i\right\}.$$

§ 2. ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В этом параграфе объектом исследования избраны линейные гиперболические дифференциальные уравнения общего вида с частными производными с доминированными (см., например, [4–6]) младшими членами

$$(Lu)(x) := \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \le m-1 \\ \alpha_i \le k_i,\ i=1,\dots,n}} a^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \tag{2.1}$$

где $x := (x_1, \dots, x_n)$, $m = \sum_{i=1}^n k_i$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$; k_i, α_i, $i = \overline{1,n}$, – целые неотрицательные числа; a^α, f – известные, а u – искомая действительные функции.

В работах [4, 6] определенным образом введено понятие функции Римана для уравнений (операторов) вида (2.1), которая идентична одноименной функции в случае уравнений второго порядка гиперболического типа на плоскости. Кроме этого, доказана эквивалентность этого определения с классическим определением функции Римана для уравнений

$$u_{xxy} + a^{2,0}u_{xx} + a^{1,1}u_{xy} + a^{1,0}u_x + a^{0,1}u_y + a^{0,0}u = f \tag{2.2}$$

и

$$u_{x_1x_2x_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i u_{x_i} + Au = F. \tag{2.3}$$

Предложенный в указанных выше работах подход эффективного построения функции Римана вполне применим для операторов вида (2.1), представимых суперпозицией аналогичных операторов меньшего порядка.

Вопрос разбиения дифференциального оператора высокого порядка изучался во многих работах (см., например, [1–4]). Для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f \tag{2.4}$$

еще Лапласом (см., например, [1–4]) было установлено, что разбиваемость оператора в определенном смысле связана с принципами соответствия (подобия). Как известно, такие уравнения разбиваемы, когда один из инвариантов Лапласа

$$h := a_x + ab - c, \quad k := b_y + ab - c \tag{2.5}$$

равен нулю.

Для уравнений высокого порядка как на плоскости, так и в пространстве этот вопрос неоднократно затрагивался. В данном направлении мы интересовались разбиением уравнений вида (2.2) и (2.3), что позволило нам построить некоторые аналоги инвариантов Лапласа.

В процессе этого построения мы опирались на общепринятый подход: из нескольких эквивалентных формулировок какого-либо установленного факта выбрать тот, который позволяет обобщить рассмотренный факт при более общих предположениях. При допущении разбиваемости уравнений второго порядка на плоскости общего вида мы естественно приходим к лапласовым инвариантам. При допущении разбиваемости уравнений (2.2) и (2.3) следует ожидать что-либо аналогичное.

1 ^{0}. С целью отыскания подобных лапласовых инвариантов для уравнения (2.2) рассмотрим следующую задачу: найти условия на коэффициенты $a^{i,j}$, $i=0,1,2$, $j=0,1$ $(i+j\neq 3)$ уравнения (2.2), при выполнении которых существуют функции α, β, γ и δ такие, что для оператора L, представляющего левую часть этого уравнения, справедливо одно из следующих разложений:

$$Lu\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\right)u,\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+\alpha\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\right)u,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\beta\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\frac{\partial}{\partial y}+\delta\right)u,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\delta\right)u,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\right)u,\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\right)u,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\right)u.$$

Рассмотрим первый случай. Раскрывая скобки в правой части разложения оператора L и приравнивая в обеих частях коэффициенты, стоящие при одинаковых производных, для определения неизвестных функций α, β и γ получаем переопределенную систему функционально-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\alpha=a^{1,1},\quad \beta=a^{0,1},\quad \gamma=a^{2,0},\quad 2\gamma_x+\alpha\gamma=a^{1,0},\quad \gamma_{xx}+\alpha\gamma_x+\beta\gamma=a^{0,0}.$$

Отсюда видно, что необходимые (оказывается и достаточные) условия разрешимости этой системы относительно неизвестных функций α, β и γ имеют вид

$$h_1:=2a^{2,0}_x+a^{2,0}a^{1,1}-a^{1,0}=0,\quad h_2:=a^{2,0}_{xx}+a^{2,0}_xa^{1,1}+a^{2,0}a^{0,1}-a^{0,0}=0.$$

Во втором случае аналогичными рассуждениями получаем $(\alpha=a^{2,0},\ \beta=a^{1,1},\ \gamma=a^{0,1})$

$$h_3:=a^{1,1}_y+a^{2,0}a^{1,1}-a^{1,0}=0,\quad h_4:=a^{0,1}_y+a^{2,0}a^{0,1}-a^{0,0}=0.$$

Следует отметить, что при рассмотрении остальных случаев этим методом не удается в эффективной форме получить аналогичные h_i, $i=\overline{1,4}$, дополнительные выражения.

Простая проверка показывает, что выражения для h_i, $i=\overline{1,4}$, не изменяются при замене неизвестной функции u по формуле (1.2). Исходя из этого, выражения h_i, $i=\overline{1,4}$ (как, например, в [1, 2]), назовем инвариантами Лапласа уравнения (2.2). Только что установленный результат можно сформулировать таким образом: для того чтобы оператор L, определяемый левой частью уравнения (2.2), допускал представление

$$Lu\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a^{1,1}\frac{\partial}{\partial x}+a^{0,1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a^{2,0}\right)u\quad\left(Lu\equiv\left(\frac{\partial}{\partial y}+a^{2,0}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a^{1,1}\frac{\partial}{\partial x}+a^{0,1}\right)u\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы оба инварианта h_1 и h_2 (h_3 и h_4) были тождественно равны нулю.

Для представления выражения $(\partial^2/\partial x^2+a^{1,1}\,\partial/\partial x+a^{0,1})u$ в виде композиции $(\partial/\partial x+$ $+\alpha)(\partial/\partial x+\beta)u$ относительно функций α и β получаем систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\alpha+\beta=a^{1,1},\quad \beta_x+\alpha\beta=a^{0,1}.$$

Исключая отсюда функцию α, относительно функции β имеем уравнение Риккати

$$\beta_x + a^{1,1}\beta - \beta^2 = a^{0,1}, \tag{2.6}$$

которое, как хорошо известно, в общем случае не всегда интегрируется в квадратурах. Однако в одном частном случае, например при выполнении условия $h_0 := 2a^{1,1}_x + (a^{1,1})^2 - 4a^{0,1} = 0$, уравнение (2.6) имеет решение $\beta = (1/2)a^{1,1}$ и справедливо представление

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^{1,1}\frac{\partial}{\partial x} + a^{0,1}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}a^{1,1}\right)^2 u.$$

Легко можно показать, что выражение h_0 является лапласовым инвариантом уравнения (2.2).

Замечание 2.1. Отметим, что на самом деле выражение для h_0 в случае $a^{1,1}(x,y) = a^{1,1}(x)$, $a^{0,1}(x,y) = a^{0,1}(x)$ является инвариантом Лапласа для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $u''+a^{1,1}u'+a^{0,1}u = 0$ (см., например, [7, с. 146; 8, с. 243]).

Замечание 2.2. Естественно возникает вопрос: если для случая уравнений вида (1.1) преобразованиями типа (1.2) в § 1 успешно удается получить инварианты Лапласа, то почему для случая уравнений вида (2.2) целесообразно добиваться подобных результатов с помощью разбиения соответствующих операторов? Как показывают наши исследования, некоторые из инвариантов h_i, $i = \overline{0,4}$, можно получить и первым подходом. На наш взгляд, дело в том, что уравнения типа (2.2) в силу присутствия в старшем члене двукратного дифференцирования по x в большинстве случаев (в том числе при исследовании определенных широких классов граничных задач) имеет помимо гиперболического и параболический характер (поэтому иногда уравнения типа (2.2) некоторые авторы называют псевдопараболическими). Так что в § 1 не зря присутствует условие $\Delta \neq 0$ (см., также случай с) из п. 2^0 § 1). Кроме этого, с помощью подхода, использованного в п. 1^0 настоящего параграфа, заодно получаются условия разбиения соответствующих операторов.

Замечание 2.3. Простые вычисления показывают, что инварианты Лапласа h_i^*, $i = \overline{0,4}$, для сопряженного оператора (уравнения) по Лагранжу

$$-L^*v := v_{xyx} - (a^{2,0}v)_{xx} - (a^{1,1}v)_{xy} + (a^{1,0}v)_x + (a^{0,1}v)_y - a^{0,0}v = f$$

с исходными инвариантами h_i, $i = \overline{0,4}$, уравнения (2.2) связаны равенствами $h_0^* = h_0$, $h_1^* = h_3$, $h_2^* = -h_4 + h_{3x}$, $h_3^* = h_1$, $h_4^* = h_{1x} - h_2$.

Отметим, что уравнение (2.4) и сопряженное по Лагранжу ему уравнение всегда имеют одни и те же инварианты, но взятые в обратном порядке, т.е. $h^* = k$ и $k^* = h$, где h и k определены равенствами (2.5) (см., например, [2]).

Замечание 2.4. Можно также доказать, что инварианты h_i, $i = \overline{0,4}$, сохраняют (относительно) инвариантный характер также при заменах переменных типа

$$x = \varphi(\xi), \quad y = \psi(\eta). \tag{2.7}$$

Действительно, из (2.7) следует, что в обычных обозначениях

$$b^{2,0} = a^{2,0}\psi', \quad b^{1,1} = a^{1,1}\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'}, \quad b^{1,0} = -a^{2,0}\frac{\varphi''\psi'}{\varphi'} + a^{1,0}\varphi'\psi', \quad b^{0,1} = a^{0,1}\varphi'^2, \quad b^{0,0} = a^{0,0}\varphi'^2\psi',$$

$$b^{2,0}_\xi = a^{2,0}_x\varphi'\psi', \quad b^{2,0}_{\xi\xi} = a^{2,0}_{xx}\varphi'^2\psi' + a^{2,0}_x\varphi''\psi', \quad b^{1,1}_\eta = a^{1,1}_y\varphi'\psi',$$

$$b^{0,1}_\eta = a^{0,1}_y\varphi'^2\psi', \quad b^{1,1}_\xi = a^{1,1}_x\varphi'^2 + a^{1,1}\varphi'' - (\varphi''/\varphi')'.$$

Значит,

$$\widetilde{h}_0 = \varphi'^2 h_0 - 2\varphi'''/\varphi' + 3(\varphi''/\varphi')^2, \quad \widetilde{h}_1 = \varphi'\psi' h_1, \quad \widetilde{h}_2 = \varphi'^2\psi' h_2, \quad \widetilde{h}_3 = \varphi'\psi' h_3, \quad \widetilde{h}_4 = \varphi'^2\psi' h_4,$$

откуда, между прочим, видно, что h_1/h_3 и h_2/h_4 являются абсолютными инвариантами, т.е. инвариантами в собственном смысле при преобразованиях типа (2.7).

2 ^{0}. Займемся теперь построением лапласовых инвариантов для уравнения (2.3), аналогичных приведенным в [1, 2] и выше в настоящей работе, двумя различными способами.

а) Первый метод основан на декомпозиции операторов и заключается в нахождении функций α, β, γ и δ, определяемых коэффициентами уравнения (2.3) и таких, чтобы для оператора L, представляющего левую часть этого уравнения, имело место одно из следующих разложений:

$$i) \quad Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+\beta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}+\gamma\right)u,$$

$$ii) \quad Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+\beta\frac{\partial}{\partial x_2}+\gamma\frac{\partial}{\partial x_3}+\delta\right)u,$$

$$iii) \quad Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}+\beta\frac{\partial}{\partial x_2}+\gamma\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}+\delta\right)u.$$

Поступая таким же образом, как и в предыдущем пункте, для определения неизвестных функций α, β и γ в случае i) получаем переопределенную систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\gamma = A_{12}, \quad \beta = A_{13}, \quad \alpha = A_{23}, \quad \gamma_{x_2}+\beta\gamma = A_1, \quad \gamma_{x_1}+\alpha\gamma = A_2,$$

$$\beta_{x_1}+\alpha\beta = A_3, \quad \gamma_{x_1x_2}+\beta\gamma_{x_1}+\alpha\gamma_{x_2}+(\alpha\beta+\beta_{x_1})\gamma = A.$$

Отсюда видно, что необходимыми (оказывается и достаточными) условиями разрешимости этой системы относительно неизвестных функций α, β и γ является выполнение следующих равенств:

$$H_1 := \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}+A_{13}A_{12}-A_1 = 0, \quad H_2 := \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1}+A_{23}A_{12}-A_2 = 0, \quad H_3 := \frac{\partial A_{13}}{\partial x_1}+A_{23}A_{13}-A_3 = 0,$$

$$H_4 := \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial A_{13}}{\partial x_1}A_{12}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1}A_{13}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}A_{23}+A_{12}A_{13}A_{23}-A = 0.$$

Простые вычисления показывают, что выражения H_i, $i=\overline{1,3}$, не изменяются при замене неизвестной функции

$$u(x) = \lambda(x)v(x), \tag{2.8}$$

где $\lambda(x)$ – любая отличная от нуля функция. Вследствие этого выражения H_i, $i=\overline{1,3}$, как и, например, в [1, 2], назовем инвариантами Лапласа уравнения (2.3). Аналогичным свойством обладает и величина H_4 при дополнительном условии, что все инварианты Лапласа H_i, $i=\overline{1,3}$, тождественно равны нулю.

Для нахождения подобных H_i, $i=\overline{1,4}$, выражений в случаях ii) и iii) простыми рассуждениями приходим к заключению, что для представления оператора L, представляющего левую часть уравнения, в виде ii) (iii)) необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_5 := \frac{\partial A_1}{\partial x_1}+A_{23}A_1-A = 0$$

$$\left(H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_6 := \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1}A_{13}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}A_{23}+A_3A_{12} = 0\right).$$

При этом функции α, β, γ и δ однозначно определяются и имеют вид

$$\alpha = A_{23}, \quad \beta = A_{12}, \quad \gamma = A_{13}, \quad \delta = A_1 \quad (\alpha = A_{13}, \quad \beta = A_{23}, \quad \gamma = A_3, \quad \delta = A_{12}).$$

Следует отметить, что других инвариантов этим способом получить не удается. Однако выражение H_5 (H_6) обладает свойством инвариантности при дополнительных условиях $H_2 = 0$

и $H_3 = 0$ или в случае, когда λ является функцией только переменной x_1 ($H_1 = 0$ и $H_2 = 0$ или в случае, когда λ является функцией только переменной x_3). Отметим также, что H_5 совпадает с H_4 при $H_1 = 0$.

Таким образом, мы получили, что, для того чтобы оператор L, определяемый левой частью уравнения (2.3), допускал одно из разложений

$$i')\quad Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{23}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + A_{13}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + A_{12}\right)u,$$

$$ii')\quad Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{23}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + A_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial}{\partial x_3} + A_1\right)u,$$

$$iii')\quad Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} + A_3\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + A_{12}\right)u,$$

необходимо и достаточно выполнения соответственно следующих равенств:

$$\begin{gathered} i')\quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = 0; \quad ii')\quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_5 = 0; \\ iii')\quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_6 = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Меняя поочередно в разложениях $i')$, $ii')$ и $iii')$ порядок следования переменных x_1, x_2, x_3, получим аналогичные (2.9) условия разложения (и, следовательно, инварианты Лапласа) оператора (уравнения) L ((2.3)).

b) Другой подход опирается на мультипликативное преобразование и заключается в следующем: для простоты изложения в однородное уравнение, соответствующее (2.3), введем неизвестную функцию v по формуле (2.8), где λ – некий множитель.

Простые вычисления показывают, что преобразованное уравнение относительно функции v принимает тот же вид

$$v_{x_1x_2x_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} B_{ij}v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} B_i v_{x_i} + Bv = 0, \tag{2.10}$$

коэффициенты которого задаются формулами

$$\begin{gathered} B_{12} = A_{12} + \lambda^{-1}\lambda_{x_3}, \quad B_{13} = A_{13} + \lambda^{-1}\lambda_{x_2}, \quad B_{23} = A_{23} + \lambda^{-1}\lambda_{x_1}; \\ B_1 = A_1 + \lambda^{-1}\lambda_{x_2x_3} + A_{12}\lambda^{-1}\lambda_{x_2} + A_{13}\lambda^{-1}\lambda_{x_3}, \\ B_2 = A_2 + \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_3} + A_{12}\lambda^{-1}\lambda_{x_1} + A_{23}\lambda^{-1}\lambda_{x_3}, \\ B_3 = A_3 + \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2} + A_{13}\lambda^{-1}\lambda_{x_1} + A_{23}\lambda^{-1}\lambda_{x_2}; \quad B = \lambda^{-1}L[\lambda]. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь через L обозначен оператор, определяемый левой частью уравнения (2.3).

С применением легко проверяемых формул

$$\lambda^{-1}\lambda_{x_1} = (\ln\lambda)_{x_1}, \quad \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2} = (\ln\lambda)_{x_1x_2} + (\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2}, \quad \lambda^{-1}\lambda_{x_1x_2x_3} =$$

$$= (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3} + (\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2x_3} + (\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_1x_3} + (\ln\lambda)_{x_3}(\ln\lambda)_{x_1x_2} + (\ln\lambda)_{x_1}(\ln\lambda)_{x_2}(\ln\lambda)_{x_3}$$

равенства (2.11) примут вид

$$B_{12} = A_{12} + (\ln\lambda)_{x_3}, \quad B_{13} = A_{13} + (\ln\lambda)_{x_2}, \quad B_{23} = A_{23} + (\ln\lambda)_{x_1};$$

$$B_1 - B_{12}B_{13} = A_1 - A_{12}A_{13} + (\ln\lambda)_{x_2x_3}, \quad B_2 - B_{12}B_{23} = A_2 - A_{12}A_{23} + (\ln\lambda)_{x_1x_3},$$

$$B_3 - B_{13}B_{23} = A_3 - A_{13}A_{23} + (\ln\lambda)_{x_1x_2},$$

$$B - B_1B_{23} - B_2B_{13} - B_3B_{12} + 2B_{12}B_{13}B_{23} = A - A_1A_{23} - A_2A_{13} - A_3A_{12} + 2A_{12}A_{13}A_{23} + (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}.$$

Эти формулы показывают, что, для того чтобы уравнения (2.3) (при $F = 0$) и (2.10) можно было рассматривать как получаемые одно из другого преобразованием типа (2.8), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\ln\lambda$ такая, что

$$B_{12} - A_{12} = (\ln\lambda)_{x_3}, \quad B_{13} - A_{13} = (\ln\lambda)_{x_2}, \quad B_{23} - A_{23} = (\ln\lambda)_{x_1};$$

$$\begin{gathered} B_1 - A_1 - B_{12}B_{13} + A_{12}A_{13} = (\ln\lambda)_{x_2x_3}, \quad B_2 - A_2 - B_{12}B_{23} + A_{12}A_{23} = (\ln\lambda)_{x_1x_3}, \\ B_3 - A_3 - B_{13}B_{23} + A_{13}A_{23} = (\ln\lambda)_{x_1x_2}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$B - A - B_1B_{23} + A_1A_{23} - B_2B_{13} + A_2A_{13} - B_3B_{12} + A_3A_{12} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - 2A_{12}A_{13}A_{23} = (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}.$$

Приведем один хорошо известный факт из классического математического анализа, который ниже будем использовать. Пусть f_1, f_2, f_3; φ_1, φ_2, φ_3 и φ – заданные достаточно гладкие действительные функции. Для того чтобы существовала функция w из соответствующего класса гладкости, удовлетворяющая условиям $w_{x_1} = f_1$, $w_{x_2} = f_2$, $w_{x_3} = f_3$; $w_{x_1x_2} = \varphi_3$, $w_{x_1x_3} = \varphi_2$, $w_{x_2x_3} = \varphi_1$; $w_{x_1x_2x_3} = \varphi$, необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \varphi_3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \varphi_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \varphi_1; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} = \varphi.$$

Для дальнейшего применения эти формулы перепишем в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \varphi_3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \varphi_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \varphi_1; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \varphi.$$

В этих равенствах с учетом (2.12) в качестве функций w; φ; f_1, f_2, f_3; φ_1, φ_2, φ_3 возьмем следующие: $w := \ln\lambda$; $\varphi := (\ln\lambda)_{x_1x_2x_3}$; $f_1 := B_{23} - A_{23}$, $f_2 := B_{13} - A_{13}$, $f_3 := B_{12} - A_{12}$; $\varphi_1 := B_1 - A_1 - B_{12}B_{13} + A_{12}A_{13}$, $\varphi_2 := B_2 - A_2 - B_{12}B_{23} + A_{12}A_{23}$, $\varphi_3 := B_3 - A_3 - B_{13}B_{23} + A_{13}A_{23}$.

Имеем

$$\begin{gathered} (B_{23} - A_{23})_{x_2} = (B_{13} - A_{13})_{x_1} = B_3 - A_3 - B_{13}B_{23} + A_{13}A_{23}, \\ (B_{23} - A_{23})_{x_3} = (B_{12} - A_{12})_{x_1} = B_2 - A_2 - B_{12}B_{23} + A_{12}A_{23}, \\ (B_{12} - A_{12})_{x_2} = (B_{13} - A_{13})_{x_3} = B_1 - A_1 - B_{12}B_{13} + A_{12}A_{13}, \\ (B_{12} - A_{12})_{x_1x_2} = (B_{23} - A_{23})_{x_2x_3} = (B_{13} - A_{13})_{x_1x_3} = \\ = B - A - B_1B_{23} + A_1A_{23} - B_2B_{13} + A_2A_{13} - B_3B_{12} + A_3A_{12} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - 2A_{12}A_{13}A_{23}. \end{gathered}$$

Приравнивая фигурирующие во всех этих равенствах выражения со скобками к соответствующему выражению без скобок и группируя отдельные слагаемые в каждом равенстве, получим

$$\begin{gathered} (B_{23})_{x_2} + B_{13}B_{23} - B_3 = (A_{23})_{x_2} + A_{13}A_{23} - A_3, \quad (B_{13})_{x_1} + B_{13}B_{23} - B_3 = (A_{13})_{x_1} + A_{13}A_{23} - A_3, \\ (B_{23})_{x_3} + B_{12}B_{23} - B_2 = (A_{23})_{x_3} + A_{12}A_{23} - A_2, \quad (B_{12})_{x_1} + B_{12}B_{23} - B_2 = (A_{12})_{x_1} + A_{12}A_{23} - A_2, \\ (B_{12})_{x_2} + B_{12}B_{13} - B_1 = (A_{12})_{x_2} + A_{12}A_{13} - A_1, \quad (B_{13})_{x_3} + B_{12}B_{13} - B_1 = (A_{13})_{x_3} + A_{12}A_{13} - A_1, \\ (B_{12})_{x_1x_2} + B_1B_{23} + B_2B_{13} + B_3B_{12} - 2B_{12}B_{13}B_{23} - B = \\ = (A_{12})_{x_1x_2} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A, \\ (B_{23})_{x_2x_3} + B_1B_{23} + B_2B_{13} + B_3B_{12} - 2B_{12}B_{13}B_{23} - B = \\ = (A_{23})_{x_2x_3} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A, \\ (B_{13})_{x_1x_3} + B_1B_{23} + B_2B_{13} + B_3B_{12} - 2B_{12}B_{13}B_{23} - B = \\ = (A_{13})_{x_1x_3} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Другими словами, полагая

$$H_1 := (A_{12})_{x_2} + A_{12}A_{13} - A_1, \quad H_2 := (A_{12})_{x_1} + A_{12}A_{23} - A_2, \quad H_3 := (A_{13})_{x_1} + A_{13}A_{23} - A_3,$$

$$H_4 := (A_{23})_{x_3} + A_{12}A_{23} - A_2, \quad H_5 := (A_{23})_{x_2} + A_{13}A_{23} - A_3, \quad H_6 := (A_{13})_{x_3} + A_{12}A_{13} - A_1,$$

$$H_7 := (A_{12})_{x_1x_2} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A, \tag{2.14}$$

$$H_8 := (A_{23})_{x_2x_3} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A,$$

$$H_9 := (A_{13})_{x_1x_3} + A_1A_{23} + A_2A_{13} + A_3A_{12} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A,$$

можно утверждать, что, для того чтобы два уравнения "канонического" вида (2.3) (при $F = 0$) и (2.10) были приводимы одно к другому посредством мультипликативного преобразования типа (2.8), необходимо и достаточно, чтобы величины H_i, $i = \overline{1,9}$, из (2.14), которые на этом основании получили название инвариантов, имели для обоих уравнений одно и то же значение.

Очевидно, что вопрос о независимости (в определенном смысле) инвариантов H_i, $i = \overline{1,9}$, является весьма актуальным. Из приведенных выше рассуждений может показаться, что они являются независимыми. Но, как показывают простые выкладки, на самом деле это не так. Действительно, $H_8 - H_7 = (A_{23})_{x_2x_3} - (A_{12})_{x_1x_2} = \partial H_4/\partial x_2 - \partial H_2/\partial x_2$, откуда в свою очередь имеем

$$H_8 = H_7 + \partial H_4/\partial x_2 - \partial H_2/\partial x_2. \tag{2.15}$$

Аналогично $H_9 - H_7 = (A_{13})_{x_1x_3} - (A_{12})_{x_1x_2} = \partial H_6/\partial x_1 - \partial H_1/\partial x_1$, что дает

$$H_9 = H_7 + \partial H_6/\partial x_1 - \partial H_1/\partial x_1. \tag{2.16}$$

Окончательно из равенств (2.15) и (2.16) видно, что выражения для величин H_8 и H_9 являются очевидными линейными комбинациями (в том числе и дифференциальными) от некоторых инвариантов H_i, $i = \overline{1,7}$, в силу чего мы в праве не считать их независимыми. Что же касается выражения для величины H_7, то ее нельзя получить аналогичными линейными операциями над величинами H_i, $i = \overline{1,6}$, в силу присутствия в нем коэффициента A.

Далее, в силу очевидного равенства $\partial(H_1 - H_6)/\partial x_1 + \partial(H_3 - H_5)/\partial x_3 = \partial(H_2 - H_4)/\partial x_2$ величины H_i, $i = \overline{1,6}$, на наш взгляд, также нельзя считать дифференциально независимыми.

Замечание 2.5. В ответ на вопросы, высказанные в начале замечания 2.2, отметим, что мы далеки от мысли приоритетно выделить какой-либо подход из приведенных выше, так как в некоторых случаях их комбинация может быть более эффективной в исследовании ряда вопросов для уравнений типа (2.1).

Замечание 2.6. Простые вычисления показывают, что инварианты Лапласа H_i^*, $i = \overline{1,7}$, для сопряженного оператора (уравнения) по Лагранжу

$$-L^*v := v_{x_1x_2x_3} - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} (A_{ij}v)_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} (A_iv)_{x_i} - Av = F$$

с исходными инвариантами H_i, $i = \overline{1,7}$, уравнения (2.3) связаны равенствами

$$H_1^* = H_6, \quad H_2^* = H_4, \quad H_3^* = H_5, \quad H_4^* = H_2, \quad H_5^* = H_3, \quad H_6^* = H_1,$$

$$H_7^* = -H_7 + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_4}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3}.$$

Если условия (2.13) выполнены, определение множителя λ не представляет уже никакой трудности. А именно, замечая, что тогда $(B_{23} - A_{23})dx_1 + (B_{13} - A_{13})dx_2 + (B_{12} - A_{12})dx_3$ является полным дифференциалом, мы получаем для определения λ формулу

$$\lambda = \exp \int (B_{23} - A_{23})dx_1 + (B_{13} - A_{13})dx_2 + (B_{12} - A_{12})dx_3.$$

Можно также доказать, что инварианты H_i, $i=\overline{1,7}$, сохраняют (относительно) инвариантный характер также при заменах переменных типа

$$x_1=\varphi(y_1),\quad x_2=\psi(y_2),\quad x_3=\chi(x_3) \tag{2.17}$$

и переходят одно в другое при перестановке x_1, x_2 и x_3.

Действительно, из (2.17) следует, что в обычных обозначениях $B_{12}=A_{12}\chi'$, $B_{13}=A_{13}\psi'$, $B_{23}=A_{23}\varphi'$, $B_1=A_1\psi'\chi'$, $B_2=A_2\varphi'\chi'$, $B_3=A_3\varphi'\psi'$, $B=A\varphi'\psi'\chi'$; $(B_{12})_{y_1}=(A_{12})_{x_1}\varphi'\chi'$, $(B_{12})_{y_2}=(A_{12})_{x_2}\psi'\chi'$, $(B_{13})_{y_1}=(A_{13})_{x_1}\varphi'\psi'$, $(B_{13})_{y_3}=(A_{13})_{x_3}\psi'\chi'$, $(B_{23})_{y_2}=(A_{23})_{x_2}\varphi'\psi'$, $(B_{23})_{y_3}=(A_{23})_{x_3}\varphi'\chi'$; $(B_{12})_{y_1y_2}=(A_{12})_{x_1x_2}\varphi'\psi'\chi'$. Значит, $\widetilde{H}_1=\psi'\chi'H_1$, $\widetilde{H}_2=\varphi'\chi'H_2$, $\widetilde{H}_3=\varphi'\psi'H_3$, $\widetilde{H}_4=\varphi'\chi'H_4$, $\widetilde{H}_5=\varphi'\psi'H_5$, $\widetilde{H}_6=\psi'\chi'H_6$, $\widetilde{H}_7=\varphi'\psi'\chi'H_7$, откуда, между прочим, видно, что отношения H_1/H_6, H_2/H_4, H_3/H_5 являются абсолютными инвариантами, т.е. инвариантами в собственном смысле при преобразованиях типа (2.17).

Отметим, что уравнения вида (2.1) гиперболического (псевдопараболического) типа встречаются при изучении вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, продольного колебания в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задач (см., например, [9–14]).

Замечание 2.7. Следует отметить, что подходы, с помощью которых были получены инварианты Лапласа для уравнений (2.2) и (2.3) и изучены связанные с ними вопросы, позволяют также получить соответствующие результаты для операторов L вида (2.1) без всяких ограничений на m и n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.; Л. 1933.
2. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям с частными производными. М., 1957.
3. *Царев С.П.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. М., 1999. С. 389–399.
4. *Джохадзе О.М.* Граничные задачи для линейных гиперболических уравнений и систем высокого порядка: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Тбилиси, 1999.
5. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
6. *Jokhadze O.* // International Symposium Dedicated to the 90^{th} Birthday Anniversary of Academician I. Vekua. Tbilisi, 1997.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.
8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.
9. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М., 1970.
10. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
11. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М., 1979.
12. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
13. *Буллаф Р., Кодри Ф.* Солитоны. М., 1983.
14. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.

Математический институт им. А.М. Размадзе
АН Грузии, г. Тбилиси

Поступила в редакцию
20.05.2002 г.