О. М. Джохадзе, О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода, *Дифференц. уравнения*, 2006, том 42, номер 3, 385–394

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 3, с. 385–394

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3+517.968.22

О ТРЕХМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ОБЩИЕ ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ПЕРВОГО РОДА

© 2006 г. О. М. Джохадзе

В настоящей работе сформулирована и исследована общая трехмерная характеристическая задача Гурса для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с доминированными младшими членами. Установлены достаточные условия ее корректности, при нарушении которых возникает эффект влияния младших членов, фигурирующих как в самом уравнении, так и в граничных условиях. В процессе выявления различных аспектов этого влияния сталкиваемся с линейными двумерными интегральными уравнениями Вольтерры первого рода, общий вариант которых двумя различными способами исследован во второй части работы.

Для простоты изложения введены некоторые определения и обозначения. Пусть $x := (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbb{R} :=]-\infty, \infty[$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $D := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i > 0, i = 1,2,3\}$, $\Omega := \{(\xi, \eta) : \xi > 0, \eta > 0\}$, $S_i := D \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = 0\}$, $i = 1,2,3$, $\Gamma_i := S_j \cap S_k$, $i \neq j,k$; $i,j,k = 1,2,3$, $D_{x_i} := \partial/\partial x_i$, $i = 1,2,3$, $O := (0,0)$. Через $C^{m,n,l}(\overline{D})$ $(C^{m,n}(\overline{\Omega}))$, $m,n,l = 0,1,\ldots$ $(m,n = 0,1,\ldots)$ обозначено пространство функций, имеющих непрерывные частные производные $D^i_{x_1} D^j_{x_2} D^k_{x_3}$ $(D^i_{x_1} D^j_{x_2})$, $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, $0 \le k \le l$ $(0 \le i \le m$, $0 \le j \le n)$ в замкнутой области $\overline{D}$ $(\overline{\Omega})$, а соответствующее подпространство функций, обращающихся в нуль вместе с указанными производными на ребрах (границе) области D (Ω), обозначено через $C^{m,n,l}_0(\overline{D})$ $(C^{m,n}_0(\overline{\Omega}))$.

§ 1. ОБОБЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ГУРСА

1.1. Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка с доминирующим старшим членом (см., например, [1, с. 103]) общего вида

$$u_{x_1x_2x_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij} u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i u_{x_i} + Au = F, \tag{1.1}$$

где A_{ij}, A_i, $i<j$; $i,j = 1,2,3$, A, F – заданные, а u – искомая действительные функции.

Уравнение (1.1) является гиперболическим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, для которого семейства плоскостей $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = \mathrm{const}$, $x_3 = \mathrm{const}$ являются характеристическими, а направления, определяемые ортами $e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$, $e_3 := (0,0,1)$ координатных осей, – бихарактеристическими.

Для уравнения (1.1) рассмотрим общую характеристическую задачу Гурса в следующей постановке: в области D ищется регулярное решение u уравнения (1.1) класса $C^{1,1,1}_0(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\left(\sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} M^k_{ij} u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} M^k_i u_{x_i} + M^k u \right)\Bigg|_{S_k} = f_k, \tag{1.2}$$

где M^k_{ij}, M^k_i, M^k и f_k, $i<j$; $i,j,k = 1,2,3$, – заданные действительные функции.

Регулярным решением уравнения (1.1) называется функция u класса $C^{1,1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в D.

Следует отметить, что задача (1.1), (1.2) является естественным трехмерным вариантом обобщенной задачи Гурса для линейных гиперболических уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных (см., например, [2, 3]). Пространственным граничным задачам в характеристических и угловых областях для гиперболических уравнений третьего порядка с доминированными младшими членами посвящено большое число работ (см., например, [4–9] и др.).

Замечание 1.1. Отметим, что гиперболическая природа рассматриваемой задачи учтена в наличии в ней лишь производных, доминированных главной частью $\partial^3 u/\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3$ уравнения (1.1).

При рассмотрении задачи (1.1), (1.2) в пространстве $C_0^{1,1,1}(\overline{D})$ потребуем, чтобы $F \in C_0(\overline{D})$, $f_k \in C_0(\overline{S}_k)$, $A_{12} \in C^{1,1,0}$, $A_{13} \in C^{1,0,1}$, $A_{23} \in C^{0,1,1}$, $A_1 \in C^{1,0,0}$, $A_2 \in C^{0,1,0}$, $A_3 \in C^{0,0,1}$, $A \in C$, $M_{ij}^k, M_i^k, M^k \in C(\overline{S}_k)$, $i<j$; $i,j,k=1,2,3$.

Ниже докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия*

$$M_{ij}^k(\xi,\eta) \neq 0, \quad (\xi,\eta) \in \overline{\Omega}, \quad i<j; \quad k \neq i,j; \quad i,j,k=1,2,3, \tag{1.3}$$

то задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима в пространстве $C_0^{1,1,1}(\overline{D})$.

Доказательство сформулированной теоремы проведем нестандартным способом. В силу результатов работ [4–6] в случае однозначного определения независимых следов Гурса $\varphi^1 := u|_{S_1}$, $\psi^1 := u|_{S_2}$, $\chi^1 := u|_{S_3}$ теорема 1.1 будет справедливой. Вводя обозначение $\chi^2 := u_{x_3}|_{S_3}$ относительно неизвестного вектора-столбца $\widetilde{\chi} := \|\chi^1, \chi^2\|^{\mathrm{T}}$, с учетом уравнения (1.1) и граничного условия (1.2) (при $k=3$) будем иметь

$$A\widetilde{\chi}_{x_1x_2} + B\widetilde{\chi}_{x_1} + C\widetilde{\chi}_{x_2} + D\widetilde{\chi} = G, \tag{1.4}$$

где

$$A := \begin{Vmatrix} A_{12}|_{S_3} & 1 \\ M_{12}^3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B := \begin{Vmatrix} A_1|_{S_3} & A_{13}|_{S_3} \\ M_1^3 & M_{13}^3 \end{Vmatrix}, \quad C := \begin{Vmatrix} A_2|_{S_3} & A_{23}|_{S_3} \\ M_2^3 & M_{23}^3 \end{Vmatrix},$$

$$D := \begin{Vmatrix} A|_{S_3} & A_3|_{S_3} \\ M^3 & M_3^3 \end{Vmatrix}, \quad G := \begin{Vmatrix} F|_{S_3} \\ f_3 \end{Vmatrix}.$$

Замечание 1.2. Гиперболическая система (1.4) является расщепленной, и, следовательно, предложенный выше способ еще раз подчеркивает важность исследования граничных задач для таких систем (см., например, [10, с. 228]).

Очевидно, вектор-функция $\widetilde{\chi}$ удовлетворяет однородным граничным условиям Гурса

$$\widetilde{\chi}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0. \tag{1.5}$$

Учитывая вид матрицы A, в силу (1.3) будем иметь $\det A = -M_{12}^3 \neq 0$, и, следовательно, задача (1.4), (1.5) однозначно разрешима (см., например, [10, с. 66]), т.е. функция χ^1 определяется единственным образом. Аналогично при выполнении условий (1.3) однозначно определяются и функции φ^1 и ψ^1.

Покажем теперь, что полученное решение u действительно удовлетворяет требуемым однородным условиям на ребрах угла D. Рассмотрим, в частности, ребро Γ_1. Как видно из самого процесса построения решения, величины u, u_{x_i}, $i=1,2,3$, $u_{x_1x_2}$, $u_{x_1x_3}$ обращаются в нуль на Γ_1. Достаточно будет показать, что на этом ребре и производная $u_{x_2x_3}$ обращается в нуль, ибо отсюда будет следовать, что производная $u_{x_1x_2x_3}$ также будет принимать нулевые значения на Γ_1.

Нетрудно видеть, что из уравнения (1.4) имеем

$$A\widetilde{\chi}_{x_1x_2}|_{\Gamma_1} + C\widetilde{\chi}_{x_2}|_{\Gamma_1} = 0. \tag{1.6}$$

Далее, в силу (1.2) при $k=1$ и $x_2=x_3=0$ имеем $M_{23}^1(O)u_{x_2x_3}(0,0,0)=0$, что с учетом условий (1.3) в свою очередь приводит к равенству $u_{x_2x_3}(0,0,0)=0$ и, следовательно,

$$\widetilde{\chi}_{x_2}|_{x_1=x_2=0}=0. \tag{1.7}$$

Задачу (1.6), (1.7) относительно величины $\widetilde{\chi}_{x_2}|_{\Gamma_1}$ рассмотрим как однородную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с переменной x_1. В силу теоремы единственности имеем $\widetilde{\chi}_{x_2}|_{\Gamma_1}=0$, откуда непосредственно следует равенство $u_{x_2x_3}|_{\Gamma_1}=0$. Аналогично рассматриваются и случаи других ребер. Тем самым теорема 1.1 доказана.

При нарушении хотя бы одного из условий (1.3), как показывает пример уравнения $u_{x_1x_2x_3}=0$, задача (1.1), (1.2) может оказаться некорректно поставленной. Ниже для сравнительно простых случаев будет доказано, что наличие младших членов в уравнении (1.1) или в граничных условиях (1.2) может повлиять на корректность постановки задачи (1.1), (1.2).

1.2. В этом пункте на простом примере уравнения

$$u_{x_1x_2x_3}=F \tag{1.8}$$

покажем, что присутствующие в граничных условиях (1.2) младшие члены могут оказать влияние на корректность постановки задачи (1.8), (1.2).

Действительно, легко можно показать, что для регулярных решений уравнения (1.8) класса $C_0^{1,1,1}(\overline{D})$ справедливо интегральное представление

$$u(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}\psi(\xi_1,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_3+$$

$$+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}\chi(\xi_2,\xi_3)\,d\xi_2\,d\xi_3+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3,\quad x\in\overline{D}, \tag{1.9}$$

где

$$\varphi(\cdot,\cdot):=u_{x_1x_2}(\cdot,\cdot,0),\quad \psi(\cdot,\cdot):=u_{x_1x_3}(\cdot,0,\cdot),\quad \chi(\cdot,\cdot):=u_{x_2x_3}(0,\cdot,\cdot).$$

Подставляя (1.9) в граничные условия (1.2), относительно неизвестных функций φ, ψ, χ класса $C_0(\overline{\Omega})$ получаем следующую расщепленную систему интегральных уравнений Вольтерры третьего рода:

$$M_{23}^1(x_2,x_3)\chi(x_2,x_3)+M_2^1(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_3}\chi(x_2,\xi_3)\,d\xi_3+M_3^1(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_2}\chi(\xi_2,x_3)\,d\xi_2+$$

$$+M^1(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}\chi(\xi_2,\xi_3)\,d\xi_2\,d\xi_3=\widetilde{f}_1(x_2,x_3),\quad (x_2,x_3)\in\overline{\Omega},$$

$$M_{13}^2(x_1,x_3)\psi(x_1,x_3)+M_1^2(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_3}\psi(x_1,\xi_3)\,d\xi_3+M_3^2(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_1}\psi(\xi_1,x_3)\,d\xi_1+$$

$$+M^2(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}\psi(\xi_1,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_3=\widetilde{f}_2(x_1,x_3),\quad (x_1,x_3)\in\overline{\Omega}, \tag{1.10}$$

$$M_{12}^3(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)+M_1^3(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_2}\varphi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+M_2^3(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1}\varphi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1+$$

$$+M^3(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=\widetilde{f}_3(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega},$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_1(x_2,x_3)&:=f_1(x_2,x_3)-M^1_{13}(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_2}F(0,\xi_2,x_3)\,d\xi_2-M^1_{12}(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_3}F(0,x_2,\xi_3)\,d\xi_3-\\
&\quad -M^1_3(x_2,x_3)\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}F(0,\xi_2,\xi_3)\,d\xi_2\,d\xi_3,\quad (x_2,x_3)\in\overline{\Omega},\\
\widetilde{f}_2(x_1,x_3)&:=f_2(x_1,x_3)-M^2_{23}(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_1}F(\xi_1,0,x_3)\,d\xi_1-M^2_{12}(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_3}F(x_1,0,\xi_3)\,d\xi_3-\\
&\quad -M^2_3(x_1,x_3)\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}F(\xi_1,0,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_3,\quad (x_1,x_3)\in\overline{\Omega},\\
\widetilde{f}_3(x_1,x_2)&:=f_3(x_1,x_2)-M^3_{23}(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1}F(\xi_1,x_2,0)\,d\xi_1-M^3_{13}(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_2}F(x_1,\xi_2,0)\,d\xi_2-\\
&\quad -M^3_3(x_1,x_2)\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}F(\xi_1,\xi_2,0)\,d\xi_1\,d\xi_2,\quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega}.
\end{aligned}\tag{1.11}$$

Для простоты изложения положим, что всюду

$$M^3_1, M^3_2=\mathrm{const},\quad M^3_{12}=0,\quad M^1_{23}, M^2_{13}\neq 0.\tag{1.12}$$

Естественно предполагать, что $|M^3_1|+|M^3_2|+|M^3|\neq 0$ во всей рассматриваемой области, ибо в противном случае последнее из равенств (1.10) не имело бы смысла. Без ограничения общности можно считать, что $|M^3_1|+|M^3_2|\neq 0$, поскольку при $M^3_1=M^3_2=0$ дифференцированием упомянутого равенства по x_1 или по x_2 можно добиться, чтобы коэффициенты при одномерных интегралах были отличны от нуля.

Обозначая

$$\Phi(x_1,x_2):=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2,\quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega},\tag{1.13}$$

в силу третьего интегрального соотношения из (1.10) относительно неизвестной функции Φ получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}+M^3\Phi=\widetilde{f}_3\tag{1.14}$$

со следующими граничными условиями

$$\Phi(x_1,0)=0,\quad \Phi(0,x_2)=0,\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}_+;\tag{1.15}$$

здесь $\partial\Phi/\partial l:=M^3_1\Phi_{x_1}+M^3_2\Phi_{x_2}$.

Хорошо известно (см., например, [11, с. 149]), что при $M^3_1M^3_2\geq 0$ задача (1.14), (1.15) является корректной. В противном случае, т.е. при $M^3_1M^3_2<0$, она может быть некорректно поставленной.

Действительно, пусть $\eta_1 := M_1^3 x_2 - M_2^3 x_1$, $\eta_2 := x_2$ – невырожденное преобразование независимых переменных x_1, x_2. Обозначая через Φ^* и $\widetilde{f}_3^*$ функции переменных η_1, η_2, полученные после преобразования, и учитывая (1.14) и первое равенство из (1.15), относительно Φ^* получаем следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\Phi^*_{\eta_2} + \frac{M^3}{M_2^3}\Phi^* = \widetilde{f}_3^*, \quad \Phi^*|_{\eta_2=0} = 0. \tag{1.16}$$

Решая задачу (1.16) и возвращаясь к исходным переменным x_1, x_2, будем иметь

$$\Phi(x_1,x_2) = \frac{1}{M_2^3}\int\limits_0^{x_2} \exp\left\{\frac{M^3}{M_2^3}(\xi_2 - x_2)\right\}\widetilde{f}_3\left(x_1 + \frac{M_1^3}{M_2^3}(\xi_2 - x_2), \xi_2\right) d\xi_2, \quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega}.$$

Окончательно, удовлетворяя второе из равенств (1.15), получаем, что необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1.14), (1.15) в условиях (1.12) и $M_1^3 M_2^3 < 0$ является выполнение равенства

$$\int\limits_0^{x_2} \exp\left\{\frac{M^3}{M_2^3}(\xi_2 - x_2)\right\}\widetilde{f}_3\left(\frac{M_1^3}{M_2^3}(\xi_2 - x_2), \xi_2\right) d\xi_2 = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}_+, \tag{1.17}$$

где функция $\widetilde{f}_3$, выражающаяся через f_3 и F, вычисляется из третьего равенства (1.11).

Следовательно, при условиях (1.12) справедлива

Теорема 1.2. *Если выполнено неравенство $M_1^3 M_2^3 \geq 0$, то задача (1.8), (1.2) однозначно разрешима в классе $C_0^{1,1,1}(\overline{D})$ при любых правых частях $f_i \in C_0(\overline{S}_i)$, $i = 1,2,3$, $F \in C_0(\overline{D})$, а в случае $M_1^3 M_2^3 < 0$ для однозначной разрешимости этой задачи необходимо и достаточно выполнение равенства (1.17).*

Аналогичным образом можно исследовать ряд других вариантов нарушения условий (1.3) и получить соответствующие признаки разрешимости рассмотренной задачи.

Предложенный выше метод исследования двумерного интегрального уравнения Вольтерры первого рода, представленного третьим соотношением (1.10) при соблюдении условий (1.12), реализуемый преобразованием (1.13), можно распространить на случай более общих уравнений. Это можно осуществить подобным (1.13) преобразованием с некоторым весовым множителем под интегралом, о котором более подробно будет сказано ниже (см. формулу (2.3)).

1.3. В замкнутой области $\overline{\Omega}$ рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерры в частных производных первого порядка общего вида

$$a_1(x_1,x_2)u_{x_1} + a_2(x_1,x_2)u_{x_2} + a_3(x_1,x_2)u + \int\limits_0^{x_1} k_1(x_1,x_2;\xi_1)u(\xi_1,x_2)\,d\xi_1 +$$

$$+\int\limits_0^{x_2} k_2(x_1,x_2;\xi_2)u(x_1,\xi_2)\,d\xi_2 + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} k_3(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)u(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 = f_1(x_1,x_2) \tag{1.18}$$

с граничными условиями

$$u(x_1,0) = f_2(x_1), \quad u(0,x_2) = f_3(x_2), \quad x_1,x_2 \in \mathbb{R}_+, \tag{1.19}$$

где a_i ($|a_1| + |a_2| \neq 0$ всюду), k_i, f_i, $i = 1,2,3$, $f_2(0) = f_3(0)$ – известные непрерывные действительные функции своих аргументов.

Обозначим через $L(P)$, $P \in \overline{\Omega}$, характеристическую кривую уравнения (1.18), проходящую через точку $P \in \overline{\Omega}$. Ниже на лучах $\gamma_1 := \{(x_1,x_2) \in \overline{\Omega} : x_2 = 0, x_1 \in \mathbb{R}_+\}$,

$\gamma_2 := \{(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} : \ x_1 = 0, \ x_2 \in \mathbb{R}_+\}$ и характеристике $L(P)$, $P \in \overline{\Omega}$, уравнения (1.18) потребуем выполнение следующих условий:

1) каждый из лучей γ_1, γ_2 – либо характеристика уравнения (1.18), либо ни в одной своей точке не имеет характеристического направления;

2) характеристика $L(P)$, где $P \in \overline{\Omega} \setminus O$, максимально продолженная по обе стороны в $\overline{\Omega}$, обладает одним из следующих свойств: i) целиком совпадает с одним из лучей γ_1 или γ_2; ii) пересекается с γ_1 (γ_2) только в одной точке, когда γ_1 (γ_2) не является характеристикой уравнения (1.18);

3) характеристика $L(P)$ пересекает в единственной точке только один из лучей γ_1 или γ_2 в зависимости от расположения точки P в $\overline{\Omega} \setminus L(O)$;

4) семейство характеристик L описывается в $\overline{\Omega}$ уравнением $L : \omega(x, y) = \text{const}$, где $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$ и $|\operatorname{grad} \omega||_{\overline{\Omega}} \neq 0$. При выполнении этих условий легко можно показать, что справедлива следующая (см., например, [3; 11, с. 149])

Теорема 1.3. *Задача (1.18), (1.19) имеет единственное регулярное решение при любых правых частях* f_i, $i = 1, 2, 3$.

1.4. В этом пункте на примере граничного условия типа Неймана покажем, что присутствующие в уравнении (1.1) коэффициенты при младших членах $(A_{ij}, \ A_i, \ i < j; \ i, j = 1, 2, 3, \ A)$ могут оказать влияние на корректность постановки задачи (1.1), (1.2).

Рассмотрим уравнение (1.1) со следующими граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_i} = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.20}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к S_i; $f_i \in C_0^{1,1}(\overline{S}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Поскольку трехмерная задача Гурса для уравнения (1.1) однозначно разрешима (см., например, [4–6]), то достаточно определить следы решения задачи (1.1), (1.20) на S_i, $i = 1, 2, 3$.

Уравнение (1.1) с учетом граничного условия (1.20) на грани S_1 области D принимает вид

$$A_{23}|_{S_1} U_{x_2 x_3} + A_2|_{S_1} U_{x_2} + A_3|_{S_1} U_{x_3} + A|_{S_1} U = F^*, \tag{1.21}$$

где $U := u|_{S_1}$, а $F^* := F|_{S_1} + f_{1x_2x_3} + A_{12}|_{S_1} f_{1x_2} + A_{13}|_{S_1} f_{1x_3} + A_1|_{S_1} f_1$. Очевидно, что при выполнении условия

$$A_{23}|_{S_1} \neq 0 \tag{1.22}$$

уравнение (1.21) имеет единственное решение в классе $C_0^{1,1}(\overline{S}_1)$, которое представляет собой след $u|_{S_1}$.

Аналогично при выполнении условий

$$A_{13}|_{S_2} \neq 0, \quad A_{12}|_{S_3} \neq 0 \tag{1.23}$$

однозначно определяются следы $u|_{S_2}$ и $u|_{S_3}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1.4. *При выполнении условий (1.22) и (1.23) задача (1.1), (1.20) однозначно разрешима в классе* $C_0^{1,1,1}(\overline{D})$ *для любых правых частей* $F \in C_0(\overline{D})$ *и* $f_i \in C_0^{1,1}(\overline{S}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть теперь одно из условий (1.22), (1.23) нарушено. Для простоты изложения предположим, что $A_{23}|_{S_1} \equiv 0$, а условия (1.23) выполнены. Тогда уравнение (1.21) принимает вид $A_2|_{S_1} U_{x_2} + A_3|_{S_1} U_{x_3} + A|_{S_1} U = F^*$, исследование которого в случае постоянных $A_2|_{S_1}$ и $A_3|_{S_1}$ проведено в п. 1.2, а в общем случае соответствующий результат приведен в п. 1.3.

Аналогично рассматриваются остальные варианты нарушения условий (1.22) и (1.23).

§ 2. ОБЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ПЕРВОГО РОДА

В плоскости независимых переменных x_1, x_2 рассмотрим линейные интегральные уравнения Вольтерры первого рода общего вида

$$\int_0^{x_1} K_1(x_1,x_2;\xi_1)\varphi(\xi_1,x_2)d\xi_1 + \int_0^{x_2} K_2(x_1,x_2;\xi_2)\varphi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2 +$$

$$+\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} K_3(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega}, \tag{2.1}$$

где K_i, $i=1,2,3$, f, $f(O)=0$ – заданные, а φ – искомая действительные непрерывные функции.

Как правило, в ряде случаев краевая задача исследуется сведением ее к интегральным уравнениям того или иного вида, что собственно было сделано нами в п. 1.2. Теперь мы рассматриваем интегральное уравнение (2.1), которое при $M_{12}^3\equiv 0$ содержит третье соотношение из (1.10) в виде частного случая. Ставится естественный, на наш взгляд, обратный вопрос о сведении уравнения (2.1) к задаче типа (1.18), (1.19). Как будет показано ниже, осуществление такой редукции возможно по крайней мере двумя различными путями.

2.1. Пусть функции K_i, $i=1,2$, представимы следующим образом:

$$K_1(x_1,x_2;\xi_1)=\widetilde{K}_1(x_1,x_2)g(\xi_1,x_2), \quad K_2(x_1,x_2;\xi_2)=\widetilde{K}_2(x_1,x_2)g(x_1,\xi_2), \tag{2.2}$$

где $g\neq 0$ всюду. В уравнении (2.1) введем новую неизвестную функцию Φ по формуле

$$\Phi(x_1,x_2) := \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} g(\xi_1,\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \quad (x_1,x_2)\in\overline{\Omega}. \tag{2.3}$$

Очевидно, для Φ имеем граничные условия

$$\Phi(x_1,0)=0, \quad \Phi(0,x_2)=0, \quad x_1,x_2\in\mathbb{R}_+. \tag{2.4}$$

Из равенства (2.3) находим

$$\Phi_{x_1} = \int_0^{x_2} g(x_1,\xi_2)\varphi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2, \quad \Phi_{x_2} = \int_0^{x_1} g(\xi_1,x_2)\varphi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1,$$
$$\Phi_{x_1x_2} = g(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2). \tag{2.5}$$

Далее, с учетом (2.4) и третьего из равенств (2.5) при дополнительных условиях гладкости g, $K_3(x_1,x_2;\cdot,\cdot)\in C^{1,1}$ имеем

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} K_3(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 =$$

$$= a(x_1,x_2;x_1,x_2)\Phi(x_1,x_2) - \int_0^{x_1} a_{\xi_1}(x_1,x_2;\xi_1,x_2)\Phi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1 -$$

$$-\int_0^{x_2} a_{\xi_2}(x_1,x_2;x_1,\xi_2)\Phi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} a_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)\Phi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{2.6}$$

где

$$a(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2):=g^{-1}(\xi_1,\xi_2)K_3(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2). \tag{2.7}$$

Окончательно в силу равенств (2.1), (2.5) и (2.6) получаем эквивалентное (2.1) интегро-дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка вида

$$\widetilde{K}_2(x_1,x_2)\Phi_{x_1}+\widetilde{K}_1(x_1,x_2)\Phi_{x_2}+a(x_1,x_2;x_1,x_2)\Phi(x_1,x_2)-\int_0^{x_1} a_{\xi_1}(x_1,x_2;\xi_1,x_2)\Phi(\xi_1,x_2)d\xi_1-$$

$$-\int_0^{x_2} a_{\xi_2}(x_1,x_2;x_1,\xi_2)\Phi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} a_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)\Phi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=f(x_1,x_2) \tag{2.8}$$

с граничными условиями (2.4), где функции $\widetilde{K}_i$, $i=1,2$, g и a задаются равенствами (2.2) и (2.7). Соответствующий результат разрешимости задачи (2.8), (2.4) приведен в п. 1.3.

2.2. Здесь в отличие от предыдущего пункта применим несколько видоизмененный подход к исследованию уравнения (2.1).

Положим

$$u(x_1,x_2):=\int_0^{x_1} K_1(x_1,x_2;\xi_1)\varphi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1,\quad v(x_1,x_2):=\int_0^{x_2} K_2(x_1,x_2;\xi_2)\varphi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2. \tag{2.9}$$

Очевидно, для функций u и v имеем следующие граничные условия:

$$u(0,x_2)=0,\quad v(x_1,0)=0,\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}_+. \tag{2.10}$$

Дифференцируя равенства (2.9) по x_1 и x_2 соответственно, будем иметь

$$\begin{gathered}K_1(x_1,x_2;x_1)\varphi(x_1,x_2)+\int_0^{x_1} K_{1x_1}(x_1,x_2;\xi_1)\varphi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1=u_{x_1}(x_1,x_2),\\ K_2(x_1,x_2;x_2)\varphi(x_1,x_2)+\int_0^{x_2} K_{2x_2}(x_1,x_2;\xi_2)\varphi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2=v_{x_2}(x_1,x_2).\end{gathered} \tag{2.11}$$

При предположении, что $K_1(x_1,x_2;x_1)\neq 0$, $K_2(x_1,x_2;x_2)\neq 0$ всюду, равенства (2.11) можно обратить, и в результате находим

$$\begin{gathered}\varphi(x_1,x_2)=A_1(x_1,x_2)u_{x_1}(x_1,x_2)+\int_0^{x_1} R_1(x_1,x_2;\xi_1)u_{x_1}(\xi_1,x_2)\,d\xi_1,\\ \varphi(x_1,x_2)=A_2(x_1,x_2)v_{x_2}(x_1,x_2)+\int_0^{x_2} R_2(x_1,x_2;\xi_2)v_{x_2}(x_1,\xi_2)\,d\xi_2.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь

$$A_1(x_1,x_2):=\frac{1}{K_1(x_1,x_2;x_1)},\quad A_2(x_1,x_2):=\frac{1}{K_2(x_1,x_2;x_2)},$$

а R_i, $i=1,2$, – известные функции.

Применяя интегрирование по частям в равенствах (2.12) по x_1 и x_2 соответственно, в силу соотношений (2.10) получаем

$$\begin{gathered}\varphi(x_1,x_2)=A_1(x_1,x_2)u_{x_1}(x_1,x_2)+R_1(x_1,x_2;x_1)u(x_1,x_2)-\int\limits_0^{x_1}R_{1\xi_1}(x_1,x_2;\xi_1)u(\xi_1,x_2)\,d\xi_1,\\ \varphi(x_1,x_2)=A_2(x_1,x_2)v_{x_2}(x_1,x_2)+R_2(x_1,x_2;x_2)v(x_1,x_2)-\int\limits_0^{x_2}R_{2\xi_2}(x_1,x_2;\xi_2)v(x_1,\xi_2)\,d\xi_2.\end{gathered}\tag{2.13}$$

Приравнивая правые части равенств (2.13), получаем первое основное соотношение между функциями u и v, которое имеет вид

$$\begin{gathered}A_1(x_1,x_2)u_{x_1}-A_2(x_1,x_2)v_{x_2}+R_1(x_1,x_2;x_1)u-R_2(x_1,x_2;x_2)v-\\ -\int\limits_0^{x_1}R_{1\xi_1}(x_1,x_2;\xi_1)u(\xi_1,x_2)\,d\xi_1+\int\limits_0^{x_2}R_{2\xi_2}(x_1,x_2;\xi_2)v(x_1,\xi_2)\,d\xi_2=0.\end{gathered}\tag{2.14}$$

Для получения второго основного соотношения между функциями u и v в силу равенств (2.1) и первого из равенств (2.13) находим

$$\begin{gathered}u(x_1,x_2)+v(x_1,x_2)+\int\limits_0^{x_2}R_3(x_1,x_2;\xi_2)u(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+\\ +\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}R_4(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)u(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=f(x_1,x_2),\end{gathered}\tag{2.15}$$

где R_i, $i=3,4$, – известные функции своих аргументов.

Из (2.15) при $x_2=0$ имеем

$$u(x_1,0)=f(x_1,0),\quad x_1\in\mathbb{R}_+.\tag{2.16}$$

Окончательно выражая из (2.15) v через u и подставляя в (2.14), с учетом граничных условий (2.10) и (2.16) получаем эквивалентную (2.1) смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\begin{gathered}A_1(x_1,x_2)u_{x_1}+A_2(x_1,x_2)u_{x_2}+A_3(x_1,x_2)u+\int\limits_0^{x_1}R_5(x_1,x_2;\xi_1)u(\xi_1,x_2)\,d\xi_1+\\ +\int\limits_0^{x_2}R_6(x_1,x_2;\xi_2)u(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}R_7(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)u(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=F(x_1,x_2),\end{gathered}\tag{2.17}$$

$$(x_1,x_2)\in\overline{\Omega},\quad u(x_1,0)=f(x_1,0),\quad u(0,x_2)=0,\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}_+,$$

где R_i, $i=5,6,7$, F – известные функции, выраженные через K_i, $i=1,2,3$, и f. Теорема разрешимости задачи (2.17) приведена в п. 1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
2. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.; Л., 1933.
3. *Kharibegashvili S.* // Mem. on Differ. Equat. and Math. Phys. 1995. V. 4. P. 127.

4. *Di Vincenzo R., Villani A.* // Le Matematiche: Seminario matematico dellÍUniversita di Catania. 1977. V. 32. P. 211–238.
5. *Жегалов В.И.* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, 1990. С. 94–98.
6. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
7. *Jokhadze O.* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1997. V. 98. P. 107–123.
8. *Джохадзе О.М.* // Изв. вузов. Математика. 1999. Т. 442. № 3. С. 22–30.
9. *Джохадзе О.М.* // Изв. вузов. Математика. 2003. Т. 492. № 5. С. 9–20.
10. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
11. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М., 1971.

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
24.07.2004 г.