А. В. Джишкариани, Метод Галеркина–Петрова с итерациями, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003, том 43, номер 9, 1313–1322

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 9, с. 1313–1322

УДК 519.642.8

МЕТОД ГАЛЕРКИНА–ПЕТРОВА С ИТЕРАЦИЯМИ

© 2003 г. А. В. Джишкариани

(0193 Тбилиси, ул. Алексидзе, 1, Матем. ин-т Грузинской АН)
e-mail: adam@ rmi.acnet.ge

Поступила в редакцию 12.03.2002 г.
Переработанный вариант 26.07.2002 г.

Для эллиптических краевых задач предлагается вариант метода Галеркина–Петрова: приближенное решение ищется в виде линейной комбинации финитных базисных функций, а невязка скалярно умножается на образы обратного оператора главной самосопряженной положительно-определенной части от этих базисных функций. Потом применяется циклическая проекционно-итерационная схема. Предлагаемая схема имеет следующие свойства: 1) числа обусловленности матриц, соответствующих главной части, ограничены в совокупности, когда шаг $h \longrightarrow 0$; 2) порядок сходимости проекционно-итерационного метода в каждом цикле повышается. Приведена численная реализация схемы. Библ. 9. Табл. 1.

1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Рассматривается уравнение вида (см. [1, с. 426])

$$Au + Ku = f, \quad u \in D(A), \quad f \in H, \tag{1.1}$$

где A – линейный самосопряженный положительно-определенный дифференциальный оператор в вещественном гильбертовом пространстве $H \equiv L_2(\Omega)$, Ω – ограниченная область с регулярной границей $\partial\Omega$, K – линейный дифференциальный оператор такой, что $A^{-1}K$ вполне непрерывен в H, энергетическое пространство $H_A \subset D(K)$, H_A – пополнение плотного линеала $D(A) \subset H$ по норме $\|u\|_{H_A} = [u, u]^{1/2} = (Au, u)^{1/2}$ (см. [1, с. 76]).

Пусть базисные функции метода конечных элементов (МКЭ) $\varphi_k \equiv \varphi_k^{(h)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = n(h)$, принадлежат H_A.

Допустим, что задан явный вид оператора A^{-1} через функции Грина $G(x, t)$, т.е. решение уравнения $Av = g$, $v \in D(A)$, $g \in H$, задается формулой

$$v = A^{-1}g = \int_{\Omega} G(x, t)g(t)dt.$$

Сначала находим функции

$$\psi_i \equiv A^{-1}\varphi_i = \int_{\Omega} G(x, t)\varphi_i(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Приближенное решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$u_h = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \quad n = n(h).$$

Алгебраическую систему составляем по методу Галеркина–Петрова:

$$(Au_h + Ku_h - f, \psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} a_k((\varphi_k, \varphi_i) + (K\varphi_k, A^{-1}\varphi_i)) = (A^{-1}f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

На практике составление алгебраической системы (1.3) по сравнению с обыкновенным методом конечных элементов, где система имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} a_k([\varphi_k, \varphi_i] + (K\varphi_k, \varphi_i)) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

сложно. Но система (1.3) имеет следующее свойство: числа обусловленности $\kappa_n \equiv \lambda_{\max}\lambda_{\min}^{-1}$ симметричных матриц, порожденных оператором A, ограничены в совокупности при $h \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ (см. [2, с. 104]) при условии $h \le C\min\limits_i h_i$, φ_i^h – кусочно-линейные финитные функции, а в общем случае – при равномерной сетке (см. [3, с. 240]). В схеме (1.4) числа обусловленности соответствующих матриц $\kappa_n \backsim h^{-2m}$ (см. [3, с. 243]), $2m$ – порядок дифференциального оператора A.

Заметим, что в процессе итерации нужны функции $A^{-1}\varphi_k$, $A^{-1}K\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В данной работе для предложенной проекционно-итерационной схемы доказана устойчивость и получены оценки погрешности приближенных решений.

В вопросе устойчивости проекционных методов для эллиптических краевых задач с 1960 года развивались два подхода: а) на основе сильной минимальности базисной системы в энергетическом пространстве H_A, б) на основе равномерной линейной независимости базисной системы в H_A. В случае сильной минимальности в определении устойчивости допускается, чтобы нормы матриц возмущения удовлетворяли условию $\|\Gamma_n\| \le r$ ($r > 0$ – фиксированное число $\forall n \in N$). Но основные матрицы, соответствующие оператору A, в обыкновенном МКЭ одновременно снизу и сверху ограниченными в совокупности при $n \longrightarrow \infty$ $(h \longrightarrow 0)$ не могут быть. В предложенной схеме матрицы, соответствующие оператору A, ограничены в совокупности снизу и сверху. Поэтому предложенная проекционно-итерационная схема устойчива на основании работы [4].

В МКЭ известна основная оценка погрешности $\|u - u_h\|_{H_A} = O(h^{k-m})$ при $u \in W_2^k$, $k \ge 2m$. Прием Нитше дает оценку $\|u - u_h\|_{L_2} = O(h^k)$. В работе [5] основная оценка обобщена для проекционно-итерационной схемы $\|u - \tilde{u}_{h,l}\|_{H_A} = O(h^{k+ml})$, $l \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$; число проекционно-итерационных циклов фиксировано. В [5] при $\varphi_k^h \,\overline{\in}\, D(A)$ в оценке нормы $\|A^{-1/2}\Pi^h\|$ ($\Pi^h \equiv I - \Pi_h$, Π_h – ортопроектор в H_A) порядок не выделяется. В предложенной схеме порядок в H выделяется при $\varphi_k^h \in H_A$. Получены оценки погрешности в нормах пространств L_2, W_2^{2m}, C. Оценка в L_2 получается легко: даже при $l = -1$ (т.е. схема без итерации) не нужен прием Нитше. Оценку в W_2^{2m} получить довольно трудно; здесь приведено доказательство оценки. Оценка в C получается как следствие оценок в L_2 и в W_2^{2m}.

2. ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА

Введем ортопроектор

$$P_h v = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, \quad n = n(h),$$

где коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из условия

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_H^2 = \min.$$

Тогда (1.3) запишется в виде

$$u_h + P_hA^{-1}Ku_h = P_hA^{-1}f, \quad u_h \in S_h, \tag{2.1}$$

где S_h – линейная оболочка функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(H_n \equiv S_h)$.

Из (1.1) вытекает уравнение II рода

$$u + A^{-1}Ku = A^{-1}f,$$

и его аппроксимация Галеркина имеет вид (2.1) (см. [6, с. 199]). Если оператор $(I + A^{-1}K)$ обратим в H и $\|P^{(h)}A^{-1}K\|_H \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow 0$ ($P^{(h)} \equiv I - P_h$), то при достаточно малых h уравнение (2.1) имеет единственное решение u_h. Кроме того, если $\|A^{-1}KP^{(h)}\|_H \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow 0$, то применим проекционно-итерационный метод (см. [7]). От решения u_h берется итерация $\tilde{u}_h = -A^{-1}Ku_h + A^{-1}f$, затем производятся следующие операции:

1) вычисляется невязка

$$r_0 \equiv A^{-1}f - \tilde{u}_h - A^{-1}K\tilde{u}_h$$

и скалярные произведения (r_0, φ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$,

2) решается алгебраическая система

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)}[((\varphi_k, \varphi_i) + (K\varphi_k, A^{-1}\varphi_i)] = (r_0, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

(левые части алгебраических систем (1.5) и (2.4) одинаковы);

3) от решения $u_h^{(1)} = \Sigma_{k=1}^n a_k^{(1)}\varphi_k$ берется итерация

$$\tilde{u}_h^{(1)} = -A^{-1}Ku_h^{(1)} + r_0;$$

4) складываются результаты итераций:

$$\tilde{u}_{h,1} \equiv \tilde{u}_h + \tilde{u}_h^{(1)}.$$

Цикл 1) – 4) можно повторить l раз. Получается приближенное решение по проекционно-итерационному методу:

$$\tilde{u}_{h,l} \equiv \tilde{u}_h + \tilde{u}_h^{(1)} + \ldots + \tilde{u}_h^{(l)}.$$

Погрешность приближенного решения при достаточно малых h (аналогично работе [7]) выражается формулой

$$u - \tilde{u}_{h,l} = (I + A^{-1}KP_h)^{-1}(-A^{-1}KP^{(h)})\ldots(I + A^{-1}KP_h)^{-1}(-A^{-1}KP^{(h)}u). \tag{2.3}$$

3. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ

Лемма 1. *Пусть $H_A \subset D(K^*)$ и $\forall v \in H_A$ выполняется неравенство*

$$\|K^*v\| \le C\|v\|_{H_A}; \tag{3.1}$$

тогда оператор $A^{-1/2}K$ ограничен в H.

Действительно, условие $v \in H_A$ означает, что $g \equiv A^{1/2}v \in H$, $v = A^{-1/2}g$. Из (3.1) следует неравенство

$$\|K^*A^{-1/2}g\| \le C\|g\| \;\; \forall g \in H,$$

т.е. оператор $K^*A^{-1/2}$ ограничен в H. Оператор K^* сопряженный в H. Норма $\|A^{-1/2}K\| = \|K^*A^{-1/2}\|$.

Известно (см. [3, с. 172]) следующее: если степень линейной оболочки S_h базисных функций равна $k - 1$, базис однороден порядка q, порядок всех производных, связанных с узловыми параметрами, меньше $k - p/2$, p – размерность области Ω, функция $u \in W_2^k(\Omega)$, то для интерполянта u_I справедлива оценка

$$\|u - u_I\|_s \le C_s h^{k-s}\|u\|_k, \quad s = 0, 1, \ldots, q. \tag{3.2}$$

Степень $k - 1$ линейной оболочки S_h базисных функций – это степень кусочно-полиномиальных финитных базисных функций; например, в случае кусочно-линейных функций $k - 1 = 1$, в случае эрмитовых кусочно-кубических функций $k - 1 = 3$. Число q наибольшее для φ_k^h, когда $\varphi_k^h \in W_2^q(\Omega)$; для линейных $q = 1$, для эрмитовых кубических $q = 2$. Однородность (регулярность) связана с триангуляцией области Ω: в одномерном случае $h = \min_i h_i \longrightarrow 0$; в двумерном случае все углы элементарных областей e_i (многоугольников) $\Theta_i \geq \Theta_0 > 0$, $h = \min_i h_i \longrightarrow 0$, $h_i = \operatorname{diam} e_i$ и т.д.; в многомерном случае $h_i/\rho_i \leq \sigma$, $h_i = \operatorname{diam} e_i$, ρ_i – радиус сферы, вписанной в e_i, $h = \min_i h_i \longrightarrow 0$. Если в определении интерполянта u_I участвуют значения производных порядка j ($j = 0, 1, \ldots$) в узловых точках, то условие вложения $W_2^k(\Omega) \subset C^j(\Omega)$ выполняется при $j < k - p/2$, p – размерность области Ω.

В (3.2) допустим, что $s = 0$, $k = 2m$, где $2m$ – порядок дифференциального оператора A. Тогда имеем

$$\|P^{(h)}u\| = \|u - P_h u\|_0 \leq \|u - u_I\|_0 \leq C_0 h^{2m}\|u\|_{2m}. \tag{3.3}$$

Лемма 2. *В условии* (3.3) *норма оператора*

$$\|A^{-1/2}P^{(h)}\| \leq Ch^m.$$

Действительно,

$$(A^{-1/2}P^{(h)}g, A^{-1/2}P^{(h)}g) = (A^{-1}P^{(h)}g, P^{(h)}g) \leq \|A^{-1}P^{(h)}\|\|g\|^2,$$

$$\|A^{-1/2}P^{(h)}\| \leq \|A^{-1}P^{(h)}\|^{1/2}, \quad (A^{-1}P^{(h)})^* = P^{(h)}A^{-1}.$$

На основании (3.3) получаем

$$\|P^{(h)}A^{-1}g\| \leq C_0 h^{2m}\|A^{-1}g\|_{2m} \leq \bar{C}h^{2m}\|g\|_H, \quad \|A^{-1}g\|_{2m} \leq \tilde{C}\|g\|,$$

т.е. $\|P^{(h)}A^{-1}\| \leq \bar{C}h^{2m}$, $\bar{C} \equiv C_0\tilde{C}$. Отсюда следует, что $\|A^{-1/2}P^{(h)}\| \leq \sqrt{\bar{C}}h^m$.

Лемма 3. *Если выполнены условия лемм* 1, 2 *и оператор* $A^{-1}KA^{1/2}$ *ограничен в* H, *то*

$$\|A^{-1}KP^{(h)}\| \leq \bar{C}_0 h^m.$$

Действительно,

$$\|A^{-1}KP^{(h)}\| \leq \|A^{-1}KA^{1/2}\|\|A^{-1/2}P^{(h)}\| \leq \bar{C}_0 h^m,$$

где $\bar{C}_0 = \|A^{-1}KA^{1/2}\|\sqrt{\bar{C}}$.

Заметим, что $\|P^{(h)}A^{-1}K\| \leq \|P^{(h)}A^{-1/2}\|\|A^{-1/2}K\|$.

Справедлива

Теорема 1. *Если оператор* $I + A^{-1}K$ *обратим в* H, *выполняются неравенства* (3.1), (3.3), *оператор* $A^{-1}KA^{1/2}$ *ограничен в* H, *точное решение* $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$, $k \geq 2m$, *то при достаточно малых* h *для проекционно-итерационного метода справедлива оценка погрешности*

$$\|u - \tilde{u}_{h,l}\| \leq \|(I + A^{-1}KP_h)^{-1}\|^{l+1}\|A^{-1}KA^{1/2}\|^{l+1}\|p^{(h)}A^{-1/2}\|^{l+1}\|P^{(h)}u\|, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

которая, когда l *фиксировано, при* $h \longrightarrow 0$ *имеет порядок*

$$\|u - \tilde{u}_{h,l}\| = O(h^{k+m(l+1)}), \tag{3.4}$$

где $h = \min_i h_i \longrightarrow 0$, $h_i = \operatorname{diam} e_i$.

Эта теорема следует из (2.3),(3.2), лемм и ограниченности оператора $A^{-1}KA^{1/2}$.

Случай $l = -1$ соответствует приближенному решению u_h уравнения (2.1), тогда как в [6, с. 199] имеем $\|u - u_h\| = O(h^k)$.

В конкретных задачах следует доказать ограниченность операторов $A^{-1/2}K$ и $A^{-1}KA^{1/2}$. Ограниченность $A^{-1/2}K$ следует из (3.1), которое в конкретном случае нужно доказать. Ограниченность $A^{-1}KA^{1/2}$ можно доказать следующим образом. Вводим оператор $L \equiv A^{1/2}K - KA^{1/2}$. Если докажем, что оператор $A^{-1}L$ ограничен, тогда и оператор $A^{-1}KA^{1/2} = A^{-1/2}K - A^{-1}L$ будет ограниченным.

Из (1.1) следует, что

$$(I + KA^{-1})Au = f, \quad Au \in H, \quad f \in H, \tag{3.5}$$

а приближенное решение $\tilde{u}_h$ удовлетворяет уравнению

$$(I + KP_hA^{-1})A\tilde{u}_h = f, \tag{3.6}$$

что проверяется подстановкой выражения $\tilde{u}_h$. Из (3.5) и (3.6) вытекает

$$(I + KP_hA^{-1})(Au - A\tilde{u}_h) = -KP^hu.$$

Когда оператор $I + KA^{-1}$ обратим в H и $\|KP^hA^{-1}\| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow 0$, то аналогично (2.3) получается

$$Au - A\tilde{u}_{h,\,l} = (I + KP_hA^{-1})^{-1}(-KP^hA^{-1})\dots(I + KP_hA^{-1})^{-1}(-KP^hu), \quad P^h \equiv I - P_h. \tag{3.7}$$

В обыкновенном МКЭ имеем $\|K\Pi^hA^{-1}g\| \le \|KA^{-1/2}\|A^{1/2}(\Pi^hA^{-1}g)\|$, $\Pi^h \equiv I - \Pi_h$, Π_h – ортопроектор в H_A, $\|A^{1/2}(\Pi^hA^{-1}g)\| = \|\Pi^hA^{-1}g\|_{H_A} \le \|A^{-1}g - (A^{-1}g)_I\|_{H_A}$, $\|A^{-1}g - (A^{-1}g)_I\|_m \le C_mh^{2m-m}\|A^{-1}g\|_{2m} \le$ $\le C_m\tilde{C}h^m\|g\|_H$, поэтому оценку для $Au - A\tilde{u}_{h,\,l}$ легко получить (см. [8, с. 50]).

Для предложенной проекционно-итерационной схемы следует оценить $\|KP^hA^{-1}g\|_H$, $P^h = I - P_h$, P_h – ортопроектор в H. Оценим эту норму, когда Ω есть p-мерный единичный куб.

Из (3.2) при $s = 0$, $k = 2m$ имеем

$$\|P_hA^{-1}g - (A^{-1}g)_I\| \le \|A^{-1}g - P_hA^{-1}g\| + \|A^{-1}g - (A^{-1}g)_I\| \le 2\|A^{-1}g - (A^{-1}g)_I\| \le 2C_0h^{2m}\|A^{-1}g\|_{2m}. \tag{3.8}$$

Выражение $P_hA^{-1}g - (A^{-1}g)_I$ кусочно-полиномиальное, поэтому для него справедлива оценка (2.14) из [8, с. 37]:

$$|u_I - u_h|^2_{\alpha+1} \le 4pC^2(k-1)h^{-2}|u_I - u_h|^2_{\alpha},$$

где $|\cdot|$ – полунорма. Из этой оценки, учитывая $\|\cdot\|^2_{\alpha} = \Sigma^{\alpha}_{k=0}|\cdot|^2_k$, получаем

$$\|P_hA^{-1}g - (A^{-1}g)_I\|^2_m \le [2^{-2} + 4pC^2(k-1)]^{2m}]\|P_hA^{-1}g - (A^{-1}g)_I\|^2_0. \tag{3.9}$$

Обозначим $D_m \equiv [2^{-2} + 4pC^2(k-1)]^m$.

Из (3.2),(3.8) и (3.9) имеем

$$\|A^{-1}g - P_hA^{-1}g\|_m \le \|A^{-1}g - (A^{-1}g)_I\|_m + \|(A^{-1}g)_I - P_hA^{-1}g\|_m \le (C_m + 2C_0D_m)h^m\|A^{-1}g\|_{2m}. \tag{3.10}$$

В эллиптических задачах выполняется неравенство (см. [3, с. 196]) $\|A^{-1}g\|_{2m} \le \tilde{C}\|g\|_0$. Из (3.10) получаем

$$\|A^{-1}g - P_hA^{-1}g\|_m \le E_mh^m\|g\|, \tag{3.11}$$

где $E_m \equiv (C_m + 2C_0D_m)\tilde{C}$. Далее, $\|KP^hA^{-1}\| \le \|KA^{-1/2}\|\|A^{1/2}P^hA^{-1}\|$.

В эллиптических задачах $\|\cdot\|_{H_A} \le \tilde{\tilde{C}}\|\cdot\|_m$ (когда коэффициенты оператора A непрерывны). Поэтому из (3.11) получается оценка

$$\|KP^hA^{-1}\| = O(h^m). \tag{3.12}$$

Справедлива

Теорема 2. *Если оператор $I + KA^{-1}$ обратим в H, точное решение $u \in D(A) \subset W_2^{2m}$, $2m$ – порядок дифференциального оператора A, базисные функции $\varphi_k^h \in H_A$, $k = 1, 2, \dots, n(h)$, Ω есть p-мерный единичный куб, сетка равномерная, число проекционно-итерационных циклов l фиксиро-*

вано, $h \longrightarrow 0$, *то справедлива оценка*

$$\|Au - A\tilde{u}_{h,l}\| = O(h^{m(l+1)}), \quad l = 0, 1, \ldots. \tag{3.13}$$

Эта оценка получается из формулы (3.7) на основании оценки (3.12).

Из мультипликативных неравенств и теорем вложения следует неравенство (см. [9, с. 46])

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \le C\|v\|_0^{1-p/(4m)}\|v\|_{2m}^{p/(4m)} \ \forall v \in W_2^{2m}(\Omega), \tag{3.14}$$

$4m > p$, p – размерность области Ω, $\|\cdot\|_0 \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{2m} \equiv \|\cdot\|_{W_2^{2m}(\Omega)}$.

Следствие. Из (3.14) на основании (3.4) и (3.13) получается равномерная оценка

$$\|u - \tilde{u}_{h,l}\|_{C(\bar{\Omega})} = O(h^{m(l+3)-p/2}),$$

$4m > p$, $l = 0, 1, \ldots$ фиксировано, $h \longrightarrow 0$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ

В [4] даны определения устойчивости проекционно-итерационной схемы для уравнения II рода $(I + T)u = f$, $u, f \in H$. При j-м цикле невозмущенное уравнение имеет вид

$$u_n^j = P_nTu_n^j = P_nr_{j-1}, \quad u_n^j \in H_n, \quad j = 0, 1, \ldots, l,$$

$$r_{-1} = f, \quad u_n^0 = u_n, \quad r_{j-1} \equiv f - \tilde{u}_{n,j-1} - T\tilde{u}_{n,j-1},$$

а возмущенное уравнение – вид

$$(I + P_nT + \Delta_n)v_n^j = P_nr_{j-1} + P_n(\bar{r}_{j-1} - r_{j-1}) + \Delta(P_nr_{j-1}),$$

$$v_n^j \in H_n, \quad j = 0, 1, \ldots, l, \quad v_n^0 = v_n, \quad \bar{r}_{j-1} \equiv f - \tilde{v}_{n,j-1} - T\tilde{v}_{n,j-1}, \quad \bar{r}_{-1} = r_{-1} = f. \tag{4.1}$$

$$\tilde{v}_{n,j-1} \equiv \tilde{v}_n + \tilde{v}_n^{(1)} + \ldots + \tilde{v}_n^{(j-1)}, \quad \tilde{v}_n^{(j)} = -A^{-1}Kv_n^{(j)} + \bar{r}_{j-1}.$$

Оператору $(I + P_nT) : H_n \longrightarrow H_n$ соответствует матрица $B_n \equiv ((I + T)\varphi_k, \varphi_i)_{i,k=1}^{(n)}$, а оператору Δ_n : $H_n \longrightarrow H_n$ соответствует матрица погрешности $\Gamma_n \equiv (\gamma_{ki})_{i,k=1}^{(n)}$. Они не зависят от номера цикла j.

Приведем определение 2 из [4]: проекционно–итерационный метод называется устойчивым из пространства $l_2^{(n)}$ в H, если существуют такие не зависящие от n постоянные $r > 0$, $C_1^{(l)} > 0$ и $C_2^{(l)} > 0$, что при $\|\Gamma_n\| \le r$ возмущенные уравнения (4.1) имеют единственные решения v_n^j, $j = 0$, $1, \ldots, l$, и справедлива оценка

$$\|\tilde{v}_{n,l} - \tilde{u}_{n,l}\|_H \le C_1^{(l)} \max_{-1 \le k \le l-1} \|\bar{\delta}^{(n,k)}\|_{l_2^{(n)}} + C_2^{(l)}\|\Gamma_n\|_{l_2^{(n)}}, \tag{4.2}$$

вектор $\tau^{(n)} \in l_2^{(n)}$, норма $\|\tau^{(n)}\| = (\Sigma_{k=1}^n\tau_k^2)^{1/2}$, норма матрицы $\|\Gamma_n\| \le (\Sigma_{i,k=1}^n\gamma_{ki}^2)^{1/2}$, $\bar{\delta}^{(n,k)}$ – погрешность скалярных произведений $(\bar{r}_k, \varphi_1), \ldots, (\bar{r}_k, \varphi_n)$, $k = -1, 0, \ldots, l-1$. Случай $l = 0$, $k = -1$ – это устойчивость исходного проекционного метода без итерации.

Теорема 3 (см. [4]). *Равномерная линейная независимость* (*почти ортонормированность*) *базисной системы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *в* H *достаточна для устойчивости проекционно-итерационного метода в смысле определения* 2.

Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $n = n(h)$, равномерно линейно независимы, т.е. собственные значения симметрических матриц $(\varphi_k, \varphi_i)_{i,k=1}^{(n)}$ $\forall n(h)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \lambda_0 \le \lambda_1^{(n)} \le \ldots \le \lambda_n^{(n)} \le \Lambda_0,$$

то число обусловленности этих матриц $\kappa_n = \lambda_n^{(n)}/\lambda_1^{(n)} \le \Lambda_0\lambda_0^{-1}$ $\forall n(h)$. Наоборот, если число обусловленности матриц $(\varphi_k, \varphi_i)_{i,k=1}^{(n)}$ имеет вид $\kappa_n \le \kappa \, \forall n(h)$, то функции $\hat{\varphi}_k \equiv (\lambda_1^{(n)})^{-1/2}\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n(h)$, равномерно линейно независимы. Действительно, собственные значения $\bar{\lambda}_k^{(n)}$ матриц $(\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_i)_{i,k=1}^{(n)}$ ограничены снизу: $\bar{\lambda}_1^{(n)} = \lambda_1^{(n)}/\lambda_1^{(n)} = 1$, и сверху: $\bar{\lambda}_n^{(n)} = \lambda_n^{(n)}/\lambda_1^{(n)} = \kappa_n \le \kappa\ \forall n(h)$.

Нормировка базисных функций не меняет приближенных решений u_n^j, v_n^j, $j = 0, 1, \ldots, l$; меняются лишь решения алгебраических систем.

Теорема 4. *Если числа обусловленности матриц, порожденных оператором A, ограничены в совокупности, оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в H, в качестве базисных взяты функции $\hat{\varphi}_k = (\lambda_1^{(n)})^{-1/2}\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n(h)$, то будут выполнены условия теоремы* 3 *и поэтому предложенная на основе метода Галеркина–Петрова проекционно-итерационная схема устойчива.*

5. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу

$$-u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Берем пространство $H \equiv L_2(0, 1)$. Оператор $Au \equiv -u''(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, оператор $Ku \equiv p_1u' + p_2u$. Скалярное произведение в энергетическом пространстве H_A есть

$$[u, v] = \int_0^1 u'v'dx.$$

Пусть $p_1', p_2 \in C[0, 1]$. Для всех $u, v \in H_A$ имеем $(Ku, v) = (p_1u' + p_2u, v) = (-p_1v' + (p_2 - p_1')v, u)$, т.е. $K^*v = -p_1v' + (p_2 - p_1')v$ (u, v удовлетворяют граничным условиям).

Далее,

$$\|K^*v\| \le \left(\bar{p}_1 + (\bar{p}_2 + \bar{p}_1')\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|v'\| \ \ \forall v \in H_A,$$

где $\bar{p}_1 \equiv \max_{x \in [0, 1]} |p_1(x)|$ аналогичны $\bar{p}_2$ и $\bar{p}_1'$. Поэтому операторы $K^*A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}K$ ограничены.

Функция Грина оператора $Au = -u''(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ имеет вид

$$G(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & t \le x, \\ x(1-t), & t \ge x, \quad x, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Введем оператор

$$Lv = KA^{1/2}v - A^{1/2}Kv \ \ \forall v \in D(A).$$

Оператор $A^{1/2}v = iv'$, $Av = A^{1/2}A^{1/2}v = -v''$ (здесь $i = \sqrt{-1}$),

$$Lv = A^{1/2}Kv - KA^{1/2}v = -i(p_1'v' + p_2'v), \quad A^{-1}Lv = \int_0^1 G(x, t)[-i(p_1'v' + p_2'v)]dt.$$

Учитывая, что $|G_t'(x, t)| \le 1$, $|G(x, t)| \le 1$, $x, t \in [0, 1]$, получаем

$$\|A^{-1}Lv\| \le (\bar{p}_1' + \bar{p}_1'' + \bar{p}_2')\|v\| \ \ \forall v \in D(A).$$

Поэтому при p_1'', $p_2' \in C[0, 1]$ оператор $A^{-1}KA^{1/2}$ ограничен.

Берем равномерную сетку $h = 1/n$ и кусочно-линейные финитные функции

$$\varphi_k \equiv \varphi_k^{(h)} = \begin{cases} h^{-1}(x - x_{k-1}), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ h^{-1}(x_{k+1} - x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, \quad x \overline{\in} [x_{k-1}, x_{k+1}]. \end{cases}$$

Находим

$$A^{-1}\varphi_k = \int_0^1 G(x, t)\varphi_k(t)dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad n = h^{-1}.$$

Получается следующее:

1) при $x \le x_{k-1}$

$$A^{-1}\varphi_k = x[h^2(-k) + h],$$

2) при $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$A^{-1}\varphi_k = h^{-1}\left\{-\frac{1}{6}x^3 + \frac{x_{k-1}}{2}x^2 + x\left[h^3(-k) + \frac{h^2}{2}(-k^2 + 2k + 1)\right] + \frac{1}{6}x_{k-1}^3\right\},$$

3) при $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$A^{-1}\varphi_k = h^{-1}\left\{\frac{1}{6}x^3 - \frac{x_{k+1}}{2}x^2 + x\left[(h^3(-k) + \frac{h^2(k+1)^2}{2}\right] - \frac{1}{3}h^3k^3 + \frac{1}{6}h^3(k-1)^3\right\},$$

4) при $x \ge x_{k+1}$

$$A^{-1}\varphi_k = (1 - x)h^2k.$$

Дальше рассмотрим конкретный пример $Kv \equiv tv' + v$, $f = -4x^3 + 3x^2 + 6x - 2$, $u = x^2 - x^3$, когда задача имеет единственное решение.

Имеем

$$A^{-1}f = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + \frac{1}{20}x.$$

Берем шаг $h = 1/4$. Тогда

$$A^{-1}\varphi_1 = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{16}x, & x \in [0, h], \\ \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{7}{16}x - \frac{1}{48}, & x \in [h, 2h], \\ \frac{1}{16} - \frac{1}{16}x, & x \in [2h, 1], \end{cases}$$

$$A^{-1}\varphi_2 = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & x \in [0, h], \\ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{96}, & x \in [h, 2h], \\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{5}{32}, & x \in [2h, 3h], \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x, & x \in [3h, 1], \end{cases}$$

$$A^{-1}\varphi_3 = \begin{cases} \frac{1}{16}x, & x \in [0, 2h], \\ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{7}{16}x + \frac{1}{12}, & x \in [2h, 3h], \\ \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{29}{16}x - \frac{23}{48}, & x \in [3h, 1]. \end{cases}$$

Для составления алгебраической системы (1.3) нужны матрицы

$$M_1 \equiv (\varphi_k, \varphi_i)_{i,k=1}^{(3)}, \quad M_2 \equiv (t\varphi_k', A^{-1}\varphi_i)_{i,k=1}^{(3)}, \quad M_3 \equiv (A^{-1}\varphi_k, \varphi_i)_{i,k=1}^{(3)}.$$

Матрица M_1 известна (см. [1, с. 104]), M_2 и M_3 вычисляем. Получается

$$M \equiv M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} \frac{79}{30\times 16} & \frac{373}{30\times 16^2} & \frac{3}{16^2} \\ \frac{134}{15\times 16^2} & \frac{647}{15\times 16^2} & \frac{244}{15\times 16^2} \\ -\frac{1}{16} & \frac{273}{30\times 16^2} & \frac{692}{15\times 16^2} \end{pmatrix}.$$

Правая часть алгебраической системы

$$b^{(3)} \equiv (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}, \quad b_i = (A^{-1}f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $b_1 = 0.015137$, $b_2 = 0.033545$, $b_3 = 0.033396$; вычисления произведены с точностью 10^{-6}. Для алгебраической системы

$$Ma^{(3)} = b^{(3)}$$

решение

$$a_1 = 0.042240, \quad a_2 = 0.129767, \quad a_3 = 0.160635.$$

Третье приближение, по методу Галеркина–Петрова,

$$u_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k\varphi_k.$$

Для итерации имеем

$$\tilde{u}_3 = -A^{-1}Ku_3 + A^{-1}f = -\sum_{k=1}^{3} a_k(A^{-1}t\varphi_k' + A^{-1}\varphi_k)A^{-1}f.$$

Выражения $A^{-1}t\varphi_k'$ определены для каждого промежутка $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Окончательно имеем следующее:

1) при $x \in [0, h]$

$$A^{-1}Ku_3 = a_1\left(-\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{16}x\right) + a_2\frac{x}{8} + a_3\frac{3x}{16},$$

2) при $x \in [h, 2h]$

$$A^{-1}Ku_3 = a_1\left(\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{48}\right) + a_2\left(-\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\right) + a_3\frac{3x}{16},$$

Таблица

x_i	u	u_3	$\tilde{u}_3$	$u - u_3$	$u - \tilde{u}_3$
1/8	0.013672	0.021120	0.013854	−0.007448	−0.000182
1/4	0.046875	0.042240	0.047229	0.004635	−0.000354
3/8	0.087891	0.086004	0.088254	0.001887	−0.000363
1/2	0.125000	0.129767	0.125533	0.004767	−0.000533
5/8	0.146484	0.145202	0.147134	0.001282	−0.000650
3/4	0.140625	0.160635	0.141996	−0.020010	−0.001371
7/8	0.095703	0.080318	0.095756	0.015385	−0.000053

3) при $x \in [2h, 3h]$

$$A^{-1}Ku_3 = a_1\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\right) + a_2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{5}{32}\right) + a_3\left(-\frac{4}{3}x^3 + x^2 + \frac{3x}{16} - \frac{1}{2}\right),$$

4) при $x \in [3h, 1]$

$$A^{-1}Ku_3 = a_1\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\right) + a_2\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\right) + a_3\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{23}{48}\right).$$

Добавляется $A^{-1}f$.

Для u_3 и $\tilde{u}_3$ получили выражения в зависимости от промежутка $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, 4$, что естественно и для обыкновенного метода конечных элементов.

Если вместо φ_k взять $\hat{\varphi}_k = h^{-1/2}\varphi_k$, то приближенные решения $u_3(x)$ и $\tilde{u}_3(x)$ не изменятся. Равномерная линейная независимость существует. Вместо матрицы M_1 будет $h^{-1}M_1$, аналогично имеем $h^{-1}M_2$ и $h^{-1}M_3$; в правой части $h^{-1/2}b^{(3)}$. Наблюдаются их возмущения. Условие устойчивости из [4] будет соблюдено. В $L_2(0, 1)$ порядок сходимости будет $O(h^{3+l})$, $l = -1, 0, \ldots$; в $W_2^2(0, 1)$ будет $O(h^{1+l})$, $l = 0, 1, \ldots$; в $C[0, 1]$ будет $O(h^{3+l-1/2})$, $l = 0, 1, \ldots$; l – число проекционно-итерационных циклов.

В таблице даны в дискретных точках x_i значения точного решения u, приближенного решения u_3, приближенного решения с одной итерацией $\tilde{u}_3$, соответствующие погрешности $u - u_3$ и $u - \tilde{u}_3$. На концах интервала они равны нулю.

В норме пространства $L_2(0, 1)$ относительные погрешности

$$\|u - u_3\|/\|u\| \approx 9.9\%, \quad \|u - \tilde{u}_3\|/\|u\| \approx 0.6\%.$$

Численные расчеты проделаны А.И. Сванидзе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
3. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
4. *Джишкариани А.В.* Устойчивость проекционно-итерационного метода// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 7. С. 1074–1084.
5. *Джишкариани А.В.* О быстроте сходимости проекционно-итерационного метода// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 6. С. 663–669.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
7. *Porter D., Stirling D.S.G.* The re-iterated Galerkin method// IMA J. Numer. Analys. 1993. V. 13. P. 125–139.
8. *Dzhishkariani A., Svanidze A.* On the residual convergence in projective and projective-iterative methods // Proc. A. Razmadze Math. Inst. Tbilisi, 2000. V. 124. P. 31–54.
9. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.