Г. К. Берикелашвили, О скорости сходимости разностного решения одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 2003, том 39, номер 7, 896–903

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 7, с. 896–903

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.632.4

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2003 г. Г. К. Берикелашвили

1. Введение. Обобщение нелокальной задачи Бицадзе–Самарского [1] исследовалось многими авторами (см., например, [2–6]). В [5] в случае уравнения Пуассона исследована разностная схема, сходящаяся в сеточной норме W_2^2 со скоростью $O(h^2)$ к точному решению из класса $C^4(\bar{\Omega})$.

В настоящей работе нелокальная краевая задача типа Бицадзе–Самарского рассматривается в единичном квадрате Ω для эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нелокального условия используется предложенная в [5] аппроксимация. Исследование соответствующей разностной схемы ведется в весовых соболевских пространствах, и в предположении принадлежности решения исходной задачи пространству Соболева–Слободецкого получены оценки скорости сходимости вида

$$\|y-u\|_{W_2^k(\omega,r)} \le ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad s\in(k,k+2], \quad k=1,2, \tag{1.1}$$

где $r=r(x_1)=1-x_1$, ω – квадратичная сетка в Ω с шагом h.

Основная идея заключается во введении вспомогательной (эквивалентной r) весовой функции $\rho(x_1)$, позволяющей установить положительную определенность оператора разностной схемы, а также справедливость первого (энергетического) и второго основных неравенств. Скалярное произведение указанного типа и индуцированная им норма впервые были применены в [2, с. 10–14] для доказательства единственности классического, а затем и разностного решения [4] нелокальных краевых задач.

Для оценки погрешности аппроксимации применена известная методика [7, гл. 3, 4], использующая обобщение леммы Брэмбла–Гильберта [8].

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega=\{(x_1,x_2):\ 0<x_k<1,\ k=1,2\}$ – квадрат с границей Γ; $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ – произвольные действительные числа; $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$ – фиксированные точки из $(0,1)$, при этом $0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_m<1$, $\xi_0=0$, $\xi_{m+1}=1$,

$$\Gamma_{(i)}=\{(\xi_i,x_2):\ 0<x_2<1\}, \quad i=\overline{1,m+1}, \quad \Gamma_*=\Gamma_{(m+1)}, \quad \Gamma_0=\Gamma\setminus\Gamma_*.$$

Будем рассматривать нелокальную краевую задачу

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-a_0u=f(x), \quad x\in\Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x)=0, \quad x\in\Gamma_0, \quad u(1,x_2)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u(\xi_k,x_2), \quad 0<x_2<1. \tag{2.2}$$

Предполагаем, что выполнены условия

$$\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}t_it_j\ge\nu_1(t_1^2+t_2^2), \quad \nu_1>0, \quad a_{ij},a_0=\text{const}, \quad a_0\ge0, \quad \sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|\sqrt{\xi_k}=\varkappa<1. \tag{2.3}$$

В работе [5] приведено ограничение другого вида на параметры нелокального условия, которое в ряде случаев эффективнее накладываемого нами, но иной раз уступает ему.

Как показано в [6], при $f(x) \in L_2(\Omega, r)$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2), принадлежащее пространству $W_2^2(\Omega, r)$. Ниже будем предполагать, что функция $f(x)$ обеспечивает однозначную разрешимость задачи (2.1), (2.2) в классе $W_2^s(\Omega)$, $1 < s \leq 4$.

Введем сеточные области: $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h : i_\alpha = \overline{0, n}, \ h = 1/n\}$, $\omega_\alpha = \bar{\omega}_\alpha \cap (0,1)$, $\omega_\alpha^+ = \bar{\omega}_\alpha \cap (0,1]$, $\alpha = 1,2$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, $\gamma_0 = \Gamma_0 \cap \bar{\omega}$, $\omega_{1,k} = \{x_1 : x_1 = ih, i = \overline{1, n_k}\}$.

Пусть $\xi_k = (n_k + \theta_k)h$, $0 \leq \theta_k < 1$, $k = \overline{1,m}$, где n_k – неотрицательные целые числа: $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m < n$, равенство между которыми имеет место, если в соответствующем подынтервале (между соседними точками сетки ω_1) содержится более одной точки ξ_k.

Предполагаем, что

$$h/2 \leq 1 - \xi_m - \nu, \quad \text{где} \quad \nu > 0 \text{ – фиксированное число.} \tag{2.4}$$

Определим усредняющие операторы Стеклова

$$S_k^{\pm} u = \int\limits_{(-1\pm1)/2}^{(1\pm1)/2} u(x_1 + (2-k)th, x_2 + (k-1)th)\,dt, \quad k = 1,2,$$

усредняющие операторы, введенные в [7, с. 58]:

$$T_1 u = \int\limits_{-1}^{1} (1 - |t|) u(x_1 + th, x_2)\,dt, \quad T_2 u = \int\limits_{-1}^{1} (1 - |t|) u(x_1, x_2 + th)\,dt,$$

и операторы проектирования

$$G_k u = (1 - \theta_k) \int\limits_{0}^{\theta_k} u(n_k h + th, x_2)\,dt + \theta_k \int\limits_{\theta_k}^{1} u(n_k h + th, x_2)\,dt, \quad k = \overline{1, n_m}.$$

Для этих операторов справедливы тождества

$$T_k\, \partial^2 u/\partial x_k^2 = u_{\bar{x}_k x_k}, \quad T_k\, \partial u/\partial x_k = S_k^+ u_{\bar{x}_k} = S_k^- u_{x_k}, \quad k = 1,2,$$

$$G_k\, \partial^2 u/\partial x_1^2 = h^{-2}((1-\theta_k)u(n_k h, x_2) + \theta_k u(n_k h + h, x_2) - u(\xi_k, x_2)), \quad k = \overline{1, n_m}.$$

Через $Y_k(x_2)$, $Z_k(x_2)$, $\bar{Z}_k(x_2)$, $\widetilde{Z}(x_2)$ будем обозначать выражения $Y_k(x_2) = (1-\theta_k) y(n_k h, x_2) + \theta_k y(n_k h + h, x_2)$ и т.д. Задачу (2.1), (2.2) аппроксимируем разностной схемой

$$L_h y = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad \varphi = T_1 T_2 f, \tag{2.5}$$

$$y = 0, \quad x \in \gamma_0, \quad y(1, x_2) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k Y_k(x_2), \quad x_2 \in \omega_2, \tag{2.6}$$

где $L_h y = a_{11} y_{\bar{x}_1 x_1} + a_{12}(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + a_{22} y_{\bar{x}_2 x_2} - a_0 y$.

3. Корректность разностной схемы. Пусть H – пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}$ и удовлетворяющих условиям (2.6), со скалярным произведением и нормой $(y,v)_r = \sum_\omega h^2 r(x_1) y(x) v(x)$, $\|y\|_r^2 = (y,y)_r$ соответственно. Пусть, кроме того, $\|y]|_r^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2} h^2 \bar{r} y^2$, $\|y|]_r^2 = \sum_{\omega_1 \times \omega_2^+} h^2 r y^2$, $\|y]]_r^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h^2 \bar{r} y^2$, $|y|_{1,\omega,r}^2 = \|y_{\bar{x}_1}]|_r^2 + \|y_{\bar{x}_2}|]_r^2$, $\|y\|_{1,\omega,r}^2 = \|y\|_r^2 + |y|_{1,\omega,r}^2$, $|y|_{2,\omega,r}^2 = \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_r^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_r^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}]]_r^2$, $\|y\|_{2,\omega,r}^2 = |y|_{2,\omega,r}^2 + \|y\|_{1,\omega,r}^2$,

$\|y\|^2 = \sum_\omega h^2y^2$, $\|y]|^2 = \sum_{\omega_1^+\times\omega_2} h^2y^2$, $\|y|]^2 = \sum_{\omega_1\times\omega_2^+} h^2y^2$, $\|y]]^2 = \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} h^2y^2$, $\|y\|_*^2 = = \sum_{\omega_2} hy^2$, $\|y|]_*^2 = \sum_{\omega_2^+} hy^2$, $\bar r(x_1) = (r(x_1) + r(x_1 - h))/2$.

Введем вспомогательную весовую функцию

$$\rho(x_1) = \begin{cases} \rho_i(x_1), & \xi_i \le x_1 < \xi_{i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ r(x_1), & \xi_m \le x_1 \le 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\rho_i(x_1) = r(x_1) - \varkappa \sum_{k=i+1}^m |\alpha_k|\xi_k^{-1/2} r_k(x_1)$, $r_k(x_1) = \xi_k - x_1$. Тогда

$$(1 - \varkappa^2)r(x_1) \le \rho(x_1) \le r(x_1). \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем считать, что скалярное произведение и нормы, содержащие в индексе ρ, имеют аналогичный выражению с индексом r смысл.

Через $\Phi(y)$ обозначим функционал вида

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} h\left(\sum_{k=1}^m \varkappa \frac{|\alpha_k|}{\sqrt{\xi_k}} Y_k^2(x_2) - y^2(1, x_2)\right). \tag{3.3}$$

Для того чтобы полученные в этом пункте результаты использовать и в дальнейшем для априорной оценки погрешности метода (когда нелокальное условие уже не будет однородным), оценки для функции $y(x)$ будем получать в таком виде, в котором нелокальное условие пока не будет учтено. Через $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать не зависящие от h положительные постоянные с возможно различными значениями в разных контекстах.

Лемма 3.1. *Для любой сеточной функции $y(x)$, определенной на $\bar\omega$ и обращающейся в нуль при $x_1 = 0$, справедлива оценка*

$$(-y_{\bar x_1 x_1}, y)_\rho \ge \|y_{\bar x_1}]|_\rho^2 + \Phi(y). \tag{3.4}$$

Доказательство. Можно проверить, что

$$\rho_{\bar x_1 x_1}(ih) = -\sum_{k=1}^m \frac{\varkappa|\alpha_k|}{h\sqrt{\xi_k}}((1-\theta_k)\delta(n_k, i) + \theta_k\delta(n_k + 1, i)), \tag{3.5}$$

где $\delta(\cdot,\cdot)$ – символ Кронекера. В результате простых вычислений находим

$$-\sum_{\omega_1} h\rho y_{\bar x_1 x_1} y = \sum_{\omega_1^+} h\bar\rho y_{\bar x_1}^2 - \frac{1}{2}y^2(1, x_2) - \sum_{\omega_1} \frac{h}{2} y^2 \rho_{\bar x_1 x_1},$$

или, учитывая (3.5),

$$-\sum_{\omega_1} h\rho y_{\bar x_1 x_1} y = \sum_{\omega_1^+} h\bar\rho y_{\bar x_1}^2 - \frac{1}{2}y^2(1, x_2) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \varkappa\frac{|\alpha_k|}{\sqrt{\xi_k}}((1-\theta_k)y^2(n_k h, x_2) + \theta_k y^2(n_k h + h, x_2)).$$

Учитывая здесь, что

$$(1-\theta_k)y^2(n_k h, x_2) + \theta_k y^2(n_k h + h, x_2) = Y_k^2(x_2) + h^2\theta_k(1-\theta_k)y_{x_1}^2(n_k h, x_2) \ge Y_k^2(x_2),$$

убеждаемся в справедливости леммы 3.1.

Аналогично доказывается

Лемма 3.2. *Для любой сеточной функции $y(x)$, определенной на $\bar\omega$ и обращающейся в нуль на γ_*, справедлива оценка*

$$(y_{\bar x_1 x_1}, y_{\bar x_2 x_2})_\rho \ge \|y_{\bar x_1 \bar x_2}]]_\rho^2 + \Phi(y_{\bar x_2}). \tag{3.6}$$

Лемма 3.3. *Для любой сеточной функции* $y(x)$, *определенной на* $\bar{\omega}$ *и обращающейся в нуль на* γ_*, *справедливы оценки*

$$a_{11}\Phi(y) + (4\nu_1/5)\|y\|^2_{1,\omega,\rho} \le (-L_h y, y)_\rho, \tag{3.7}$$

$$c_1\Phi(y) + c_2\Phi(y_{\bar{x}_2}) + c_3\|y\|^2_{2,\omega,\rho} \le \|L_h y\|^2_\rho, \quad c_1, c_2, c_3 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.8}$$

При этом если $y(x)$ *удовлетворяет и нелокальному условию (2.6), то в левых частях (3.7), (3.8) слагаемые с функционалом* Φ *можно опустить.*

Доказательство. Если умножим $(-L_h y)$ скалярно на y и применим оценку (3.4), после несложных преобразований получим

$$(-L_h y, y)_\rho \ge \frac{1}{2}\sum_{\omega^+} h^2\rho \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\alpha} y_{\bar{x}_\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\omega^-} h^2\rho \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} y_{x_\alpha} y_{x_\beta} + a_{11}\Phi(y)$$

или с учетом условия эллиптичности (2.3)

$$a_{11}\Phi(y) + \nu_1 |y|^2_{1,\omega,\rho} \le (-L_h y, y)_\rho. \tag{3.9}$$

Далее $2|y(x)| \le \sum_{\omega_2^+} h|y_{\bar{x}_2}|$, поэтому $4\|y\|^2_\rho \le |y|^2_{1,\omega,\rho}$, что вместе с (3.9) доказывает оценку (3.7).

Очевидным следствием из оценки (3.7) является неравенство

$$\Phi(y) + |y|^2_{1,\omega,\rho} \le (-\Delta_h y, y)_\rho, \quad \Delta_h y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}. \tag{3.10}$$

Запишем для y тождество

$$(L_h y, \Delta_h y)_\rho = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y), \tag{3.11}$$

где

$$I_1(y) = \sum_\omega h^2\rho\left(a_{11}y^2_{\bar{x}_1x_1} + a_{12}(y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2})y_{\bar{x}_1x_1} + a_{22}\left(\frac{y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}}{2}\right)^2\right) +$$

$$+ \sum_\omega h^2\rho\left(a_{22}y^2_{\bar{x}_2x_2} + a_{12}(y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2})y_{\bar{x}_2x_2} + a_{11}\left(\frac{y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}}{2}\right)^2\right),$$

$$I_2(y) = (a_{11} + a_{22})\sum_\omega h^2\rho\left(y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2} - \left(\frac{y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}}{2}\right)^2\right), \quad I_3(y) = -a_0\sum_\omega h^2\rho y\Delta_h y.$$

В силу условия эллиптичности (2.3) получаем $I_1(y) \ge \nu_1(\|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho)$. Далее $\sum_\omega h^2\rho((y_{\bar{x}_1x_2} + y_{x_1\bar{x}_2})/2)^2 \le \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]]^2_\rho$, что вместе с (3.6) дает $I_2(y) \ge (a_{11} + a_{22})\Phi(y_{\bar{x}_2})$. А в силу (3.10) имеем $I_3(y) \ge a_0\Phi(y)$. Следовательно, из (3.11) получаем неравенство $\nu_1(\|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + {}$ $+ \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho) + (a_{11} + a_{22})\Phi(y_{\bar{x}_2}) + a_0\Phi(y) \le (L_h y, \Delta_h y)_\rho$, из которого, поскольку $(L_h y, \Delta_h y)_\rho \le$ $\le (1/\nu_1)\|L_h y\|^2_\rho + (\nu_1/2)(\|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho)$, имеем

$$(\nu_1/2)(\|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho) + (a_{11} + a_{22})\Phi(y_{\bar{x}_2}) + a_0\Phi(y) \le (1/\nu_1)\|L_h y\|^2_\rho. \tag{3.12}$$

С другой стороны, в силу (3.6) $2\Phi(y_{\bar{x}_2}) + 2\|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2_\rho \le \|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho$ и $2\Phi(y_{\bar{x}_2}) + |y|^2_{2,\omega,\rho} \le$ $\le 2(\|y_{\bar{x}_1x_1}\|^2_\rho + \|y_{\bar{x}_2x_2}\|^2_\rho)$. Поэтому из (3.12) находим

$$\nu_1((a_{11} + a_{22})\Phi(y_{\bar{x}_2}) + a_0\Phi(y)) + (\nu_1^2/2)\Phi(y_{\bar{x}_2}) + (\nu_1^2/4)|y|^2_{2,\omega,\rho} \le \|L_h y\|^2_\rho. \tag{3.13}$$

Далее, из (3.9) выводим, что

$$a_{11}\Phi(y)+\nu_1|y|^2_{1,\omega,\rho}\le(1/(8\nu_1))\|L_hy\|^2_\rho+2\nu_1\|y\|^2_\rho. \tag{3.14}$$

Складывая неравенство $(3\nu_1/5)(4\|y\|^2_\rho-|y|^2_{1,\omega,\rho})\le 0$ с (3.14), получаем

$$8a_{11}\nu_1\Phi(y)+(16\nu_1^2/5)\|y\|^2_{1,\omega,\rho}\le\|L_hy\|^2_\rho. \tag{3.15}$$

Отсюда и из (3.13) следует неравенство (3.8).

Если $y(x)$ удовлетворяет и нелокальному условию (2.6), то

$$y^2(1,x_2)=\left(\sum_{k=1}^m(\xi_k\alpha_k^2)^{1/4}(\alpha_k^2/\xi_k)^{1/4}Y_k(x_2)\right)^2\le\sum_{k=1}^m\varkappa\frac{|\alpha_k|}{\sqrt{\xi_k}}Y_k^2(x_2)$$

и аналогично

$$(y_{\bar x_2}(1,x_2))^2\le\sum_{k=1}^m\varkappa\frac{|\alpha_k|}{\sqrt{\xi_k}}(Y_{k\bar x_2}(x_2))^2.$$

В силу последних неравенств $\Phi(y)\ge 0$, $\Phi(y_{\bar x_2})\ge 0$, поэтому содержащими эти величины слагаемыми в (3.7), (3.8) можно пренебречь. Лемма 3.3 полностью доказана.

На основе оценки (3.8) для решения разностной схемы (2.5), (2.6) получаем $\|y\|_{2,\omega,r}\le$ $\le c\|\varphi\|_r$, что означает корректность разностной схемы в метрике пространства $W_2^2(\omega,r)$.

4. Априорная оценка погрешности метода. Для изучения вопроса сходимости и точности разностной схемы (2.5), (2.6) рассмотрим погрешность метода $z=y-u$, где y – решение разностной схемы, а $u=u(x)$ – решение исходной задачи. Подставив $y=z+u$ в разностную схему (2.5), (2.6), получим

$$L_hz=\psi,\quad x\in\omega,\quad z=0,\quad x\in\gamma_0,\quad z(1,x_2)=\sum_{k=1}^m\alpha_kZ_k+R,\quad x_2\in\omega_2, \tag{4.1}$$

где $\psi=a_{11}\eta_{11\bar x_1x_1}+a_{12}\eta_{12\bar x_1x_2}+a_{22}\eta_{22\bar x_2x_2}+a_0\eta_0$, $R=\sum_{k=1}^m\alpha_kR_k$, $R_k=h^2G_k\,\partial^2u/\partial x_1^2$, $\eta_{\alpha\alpha}=T_{3-\alpha}u-u$, $\alpha=1,2$, $\eta_{12}=2S_1^+S_2^-u(x)-u(x)-u(x_1+h,x_2-h)$, $\eta_0=u-T_1T_1u$.

Представим решение z задачи (4.1) в виде суммы $z=\bar z+\tilde z$ решений следующих двух задач:

$$L_h\bar z=0,\quad x\in\omega,\quad \bar z=0,\quad x\in\gamma_0,\quad \bar z(1,x_2)=\sum_{k=1}^m\alpha_k\bar Z_k+R,\quad x_2\in\omega_2, \tag{4.2}$$

$$L_h\widetilde z=\psi,\quad x\in\omega,\quad \widetilde z=0,\quad x\in\gamma_0,\quad \widetilde z(1,x_2)=\sum_{k=1}^m\alpha_k\widetilde Z_k,\quad x_2\in\omega_2. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Для определенного в (3.3) функционала Φ справедливы оценки*

$$-2\Phi(\bar z)\le(1+\varkappa/(\varepsilon_1\sqrt{\nu}))\|R\|^2_*+(\varkappa\varepsilon_1/\sqrt{\nu})\|\bar z\|^2_{1,\omega,r}\quad\forall\varepsilon_1>0, \tag{4.4}$$

$$-2\Phi(\bar z_{\bar x_2})\le(1+\varkappa/(\varepsilon_2\sqrt{\nu}))\|R_{\bar x_2}\|^2_*+(\varkappa\varepsilon_2/\sqrt{\nu})\|\bar z\|^2_{2,\omega,r}\quad\forall\varepsilon_2>0, \tag{4.5}$$

где $\bar z$ – решение задачи (4.2).

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливы неравенства

$$|\bar Z_k|\le\sqrt{\xi_k/\nu}\left(\sum_{\omega_1^+}h\bar r\bar z^2_{\bar x_1}\right)^{1/2},\quad |\bar Z_{k\bar x_2}|\le\sqrt{\xi_k/\nu}\left(\sum_{\omega_1^+}h\bar r\bar z^2_{\bar x_1\bar x_2}\right)^{1/2}. \tag{4.6}$$

В самом деле,

$$|Z_k(x_2)| \le \left|\sum_{i=1}^{n_k} h\bar{z}_{\bar{x}_1}(ih,x_2)\right| + \theta_k h|\bar{z}_{\bar{x}_1}(n_kh+h,x_2)| \le \sqrt{n_kh}\left(\sum_{i=1}^{n_k} h\bar{z}^2_{\bar{x}_1}(ih,x_2)\right)^{1/2} +$$

$$+\sqrt{\theta_k h}(h\bar{z}^2_{\bar{x}_1}(n_kh+h,x_2))^{1/2} \le (n_kh+\theta_kh)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n_k+1} h\bar{z}^2_{\bar{x}_1}(ih,x_2)\right)^{1/2} \tag{4.7}$$

и так как в силу (2.4) $\bar{r}(ih) \ge (1-ih+h/2) \ge (1-(n_m+1)h+h/2) > \nu$, $i=\overline{1,n_m+1}$, то из (4.7) получается первое из неравенств (4.6); аналогично доказывается и второе неравенство.

Воспользуемся теперь нелокальным условием (4.2). Тогда

$$-2\Phi(\bar{z}) \le \sum_{\omega_2} h\left(R^2 + 2R\sum_{k=1}^m \alpha_k\bar{Z}_k\right), \quad -2\Phi(\bar{z}_{\bar{x}_2}) \le \sum_{\omega_2^+} h\left(R^2_{\bar{x}_2} + 2R_{\bar{x}_2}\sum_{k=1}^m \alpha_k\bar{Z}_{k\bar{x}_2}\right).$$

Поэтому в силу (4.6)

$$-2\Phi(\bar{z}) \le \|R\|^2_* + (2\varkappa/\sqrt{\nu})\|R\|_*\,\|\bar{z}_{\bar{x}_1}]|_r, \quad -2\Phi(\bar{z}_{\bar{x}_2}) \le \|R_{\bar{x}_2}|]^2_* + (2\varkappa/\sqrt{\nu})\|R_{\bar{x}_2}|]_*\,\|\bar{z}_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]|_r,$$

откуда и следует справедливость оценок (4.4), (4.5). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Для решения разностной задачи (4.1) справедлива априорная оценка*

$$\|z\|_{1,\omega,r} \le c(\|R\|_* + \|\eta_{11\bar{x}_1}]| + \|\eta_{12\bar{x}_1}|] + \|\eta_{22\bar{x}_2}|] + \|\eta_0\|), \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. На основе (3.2), (3.7) для решения задачи (4.2) получаем

$$a_{11}\Phi(\bar{z}) + (4\nu_1(1-\varkappa^2)/5)\|\bar{z}\|^2_{1,\omega,r} \le 0,$$

что вместе с (4.4) (подходящим образом выбранным ε_1) дает

$$\|\bar{z}\|_{1,\omega,r} \le c\|R\|_*. \tag{4.9}$$

Применяя неравенство (3.7) для решения задачи (4.3), с учетом (3.2) получаем

$$(4\nu_1(1-\varkappa^2)/5)\|\widetilde{z}\|^2_{1,\omega,r} \le \nu_2(|(\eta_{11\bar{x}_1x_1},\widetilde{z})_\rho| + |(\eta_{12\bar{x}_1x_2},\widetilde{z})_\rho| + |(\eta_{22\bar{x}_2x_2},\widetilde{z})_\rho|) + a_0(\eta_0,\widetilde{z})_\rho. \tag{4.10}$$

Оценка слагаемых, содержащих η_{12}, η_{22} в правой части (4.10), не представляет труда:

$$|(\eta_{\alpha2\bar{x}_\alpha x_2},\widetilde{z})_\rho| \le \|\eta_{\alpha2\bar{x}_\alpha}|]\,\|\widetilde{z}_{\bar{x}_2}|]_r, \quad \alpha=1,2. \tag{4.11}$$

Если для второго слагаемого в правой части равенства

$$(\eta_{11\bar{x}_1x_1},\widetilde{z})_\rho = (\eta_{11\bar{x}_1x_1},\widetilde{z})_r - \sum_{k=1}^m \varkappa\frac{|\alpha_k|}{\sqrt{\xi_k}}\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2r_k\eta_{11\bar{x}_1x_1}\widetilde{z} \tag{4.12}$$

применить формулы суммирования по частям, получим

$$\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2r_k\eta_{11\bar{x}_1x_1}\widetilde{z} = Q_1 + Q_2, \tag{4.13}$$

где $Q_1 = -\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2r_k\eta_{11\bar{x}_1}\widetilde{z}_{\bar{x}_1}$, $Q_2 = \sum_{\omega_{1,k-1}\times\omega_2} h^2\eta_{11x_1}\widetilde{z} + \sum_{\omega_2}\theta_kh^2\eta_{11x_1}(n_kh,x_2)\widetilde{z}(n_kh,x_2)$.

Учитывая соотношения $r_k < \xi_k r < \xi_k$ и применяя неравенство Коши, после некоторых преобразований заключаем, что

$$|Q_1| \leq \xi_k \Big(\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2 r \widetilde{z}^2_{\bar{x}_1} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2 \eta^2_{11\bar{x}_1} \Big)^{1/2},$$

$$|Q_2| \leq \xi_k \Big(\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2 r \widetilde{z}^2_{\bar{x}_1} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2 \eta^2_{11x_1} \Big)^{1/2},$$

в силу чего

$$\Big| \sum_{\omega_{1,k}\times\omega_2} h^2 r_k \eta_{11\bar{x}_1 x_1} \widetilde{z} \Big| \leq 2\xi_k \|\widetilde{z}_{\bar{x}_1}]|_r \, \|\eta_{11\bar{x}_1}]|. \tag{4.14}$$

Нетрудно показать также справедливость оценки

$$|(\eta_{11\bar{x}_1 x_1}, \widetilde{z})_r| \leq 2\|\widetilde{z}_{\bar{x}_1}]|_r \, \|\eta_{11\bar{x}_1}]|. \tag{4.15}$$

Окончательно с учетом (4.14), (4.15) из (4.12) следует оценка

$$|(\eta_{11\bar{x}_1 x_1}, \widetilde{z})_\rho| \leq 2(1+\varkappa^2)\|\widetilde{z}_{\bar{x}_1}]|_r \, \|\eta_{11\bar{x}_1}]|, \tag{4.16}$$

так как $r(x_1) < \bar{r}(x_1)$. Применяя (4.10), (4.11), (4.16), убеждаемся в справедливости оценки

$$(4\nu_1(1-\varkappa^2)/5)\|\widetilde{z}\|_{1,\omega,r} \leq \nu_2(2(1+\varkappa^2)\|\eta_{11\bar{x}_1}]| + \|\eta_{12\bar{x}_1}|] + \|\eta_{22\bar{x}_2}|]) + a_0\|\eta_0\|_\rho. \tag{4.17}$$

Непосредственным следствием оценок (4.9), (4.17) является оценка (4.8). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Для решения разностной задачи (4.1) справедлива априорная оценка*

$$\|z\|_{2,\omega,r} \leq c(\|R\|_* + \|R_{\bar{x}_2}|]_* + \|\eta_{11\bar{x}_1 x_1}\| + \|\eta_{12\bar{x}_1 x_2}\| + \|\eta_{22\bar{x}_2 x_2}\| + \|\eta_0\|). \tag{4.18}$$

Доказательство. Умножим (4.4), (4.5) соответственно на $c_1/2$, $c_2/2$ и сложим с записанным для $\bar{z}$ неравенством (3.8). Выбирая затем в правой части полученного неравенства ε_1, ε_2 достаточно малыми, находим

$$\|\bar{z}\|_{2,\omega,r} \leq c(\|R\|_* + \|R_{\bar{x}_2}|]_*). \tag{4.19}$$

Далее, в силу (3.8) для решения задачи (4.3) имеем

$$c_3\|\widetilde{z}\|_{2,\omega,r} \leq \nu_2(\|\eta_{11\bar{x}_1 x_1}\| + \|\eta_{12\bar{x}_1 x_2}\| + \|\eta_{22\bar{x}_2 x_2}\|) + a_0\|\eta_0\|,$$

что вместе с (4.19) завершает доказательство леммы.

5. Оценка скорости сходимости. Из лемм 4.2, 4.3 вытекает, что для получения оценок скорости сходимости разностной схемы (2.5), (2.6) достаточно оценить соответствующие нормы R и η_{11}, η_{12}, η_{22}, η_0.

Покажем, что

$$\|R\|_* \leq ch^{s-1}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad s \in (1,3]. \tag{5.1}$$

Пусть $e_k = (n_k h, n_k h + h) \times (x_2 - h/2, x_2 + h/2)$, $\Omega_k = (n_k h, n_k h + h) \times (0,1)$. Представим R_k в виде суммы

$$R_k = (h^2 G_k\, \partial^2 u/\partial x_1^2 - h^2 G_k S_2^-\, \partial^2 u/\partial x_1^2) + h^2 G_k S_2^-\, \partial^2 u/\partial x_1^2 = R_k' + R_k'', \quad k = \overline{1, n_m}.$$

Заметим, что величина R_k' обращается в нуль на многочленах второй степени и ограничена в $W_2^s(\Omega)$, $s > 1$, вследствие чего с помощью леммы Брэмбла–Гильберта получим

$$|R_k'| \leq ch^{s-1}|u|_{W_2^s(e_k)}, \quad \|R_k'\|_* \leq ch^{s-1}|u|_{W_2^s(\Omega)}, \quad s \in (1,3]. \tag{5.2}$$

Величина R_k'' обращается в нуль на многочленах первой степени и ограничена в $W_2^s(\Omega)$, $s>1$. Поэтому с учетом леммы Брэмбла–Гильберта для нее получается оценка

$$\|R_k''\|_* \le ch^{s-1}|u|_{W_2^s(\Omega)}, \quad s\in(1;2.5]. \tag{5.3}$$

В случае $s>2.5$

$$\|R_k''\|_*^2 \le c\sum_{\omega_2} h^3 \int_{e_k}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 dx \le ch^3\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\|^2_{L_2(\Omega_k)},$$

и так как $\partial^2 u/\partial x_1^2\in W_2^{s-2}(\Omega)$, $s-2>0.5$, то можно применить оценку L_2-нормы функции в приграничной полосе через ее W_2^{s-2}-норму в области (см. [7, с. 26; 9, с. 47]): $\|\partial^2 u/\partial x_1^2\|_{L_2(\Omega_k)}\le$ $\le ch^{1/2}\|\partial^2 u/\partial x_1^2\|_{W_2^{s-2}(\Omega)}$, $0.5<s-2\le 1$. Следовательно, получаем оценку $\|R_k''\|_*\le ch^2|u|_{W_2^s(\Omega)}$, $s\in(2.5;3]$, которая вместе с (5.2), (5.3) доказывает справедливость неравенства (5.1).

Нетрудно также убедиться, что $\|R_{\bar x_2}|]_*\le ch^{s-2}|u|_{W_2^s(\Omega)}$, $s\in(2,4]$.

Принимая также во внимание хорошо известные оценки для η_{11}, η_{12}, η_{22}, η_0 и их разностных производных (см., например, [7, с. 148]), на основе оценок (4.8), (4.18) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Если выполнены условия (2.3) и функция $f(x)$ обеспечивает принадлежность решения $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) классу $W_2^s(\Omega)$, $s>1$, то скорость сходимости разностной схемы (2.5), (2.6) определяется оценкой $\|y-u\|_{W_2^k(\omega,r)}\le ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}$, $s\in(k,k+2]$, $k=1,2$, где положительная постоянная c не зависит от $u(x)$ и h.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 215. № 4. С. 739–740.
2. *Гордезиани Д.Г.* О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Тбилиси, 1981.
3. *Скубачевский А.Л.* // Мат. сб. 1982. Т. 117 (159). № 4. С. 548–558.
4. *Гордезиани Д.Г.* // Тр. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. 1987. Т. 19. С. 20–25.
5. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 598–611.
6. *Berikelashvili G.* // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 1999. V. 119. P. 3–11.
7. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
8. *Dupont T., Scott R.* // Math. Comput. 1980. V. 34. P. 441–463.
9. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979.

Математический институт им. А.М. Размадзе АН Грузии,
г. Тбилиси

Поступила в редакцию
11.03.2002 г.