M. Bakuradze, M. A. Jibladze, The rings $K(s)^*(BG)$ for the groups $G_{38},\dots,G_{41}$ of order 32, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2011, Volume 66, Issue 5, 185–186

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9428

Кольца $K(s)^*(BG)$ для групп $G_{38},\dots,G_{41}$ порядка 32

М. Бакурадзе, М. Джибладзе

Конечная группа G называется хорошей [1], если кольцо K-теории Моравы $K(s)^*(BG)$ порождено образами классов Эйлера при трансфере. Основным инструментом для вычисления аддитивной структуры являются спектральные последовательности Атьи–Хирцебруха [2], [3] и Серра [4]. Однако, даже если аддитивная структура вычислена, описание мультипликативной структуры является трудной задачей. Более того, мультипликативная структура не всегда определяется теорией представлений. Описание колец $K(s)^*(BG)$, использующее формальные группы и принцип расщепления, не всегда удобно. Здесь мы рассматриваем четыре группы $G=G_{38},\dots,G_{41}$ порядка 32 из списка Уолла–Сениора. В [5] доказано, что кольцо $K(s)^*(BG)$ порождено элементами четной размерности, а при $s=2$ оно порождено трасфер-образами характеристических классов Чженя. В статье [5] также можно найти подробное обсуждение кольцевых структур для всех остальных групп порядка 32, известных по предыдущим работам. Для описания порождающих соотношений мы используем формулу для трасфер-образов классов Чженя из [6] и следуем плану, который уже был успешно реализован для 2-групп D, SD, QD, Q в [7].

Пусть G – одна из групп $G_{38},\dots,G_{41}$, и пусть H – максимальная абелева подгруппа индекса два, т. е. $\langle \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}^2\rangle\cong C_4\times C_2\times C_2$ для $G=G_{38}$ и $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\cong C_4\times C_4$ в остальных случаях. Рассмотрим одномерные комплексные расслоения λ, μ и ν над BH, индуцированные из канонических одномерных расслоений при помощи проекций на первый, второй и третий сомножитель соответственно в случае $H\lhd G_{38}$ и индуцированные при помощи проекций на первый и второй сомножители соответственно в остальных случаях. При факторизации группы G по центру получается $C_2\times C_2\times C_2$. Проекции на сомножители индуцируют три одномерных расслоения α, β и γ соответственно. Определим x_i как $c_i(\mathrm{Ind}_H^G(\lambda))$ для $G=G_{39},G_{40}$ и как $c_i(\mathrm{Ind}_H^G(\nu))$ для $G=G_{38},G_{41}$; y_i как $c_i(\mathrm{Ind}_H^G(\nu))$ для $G=G_{39},G_{40}$ и как $c_i(\mathrm{Ind}_h^G(\lambda))$ для $G=G_{38},G_{41}$; a как $c_1(\alpha)$ для $G=G_{38},G_{41}$ и как $c_1(\alpha\beta)$ для $G=G_{39},G_{40}$; b как $c_1(\beta)$ для $G=G_{38},G_{39},G_{40}$ и как $c_1(\alpha\beta)$ для $G=G_{41}$ и c как $c_1(\gamma)$ в о всех случаях. Пусть $\mathrm{Tr}^*\colon K(s)^*(BH)\to K(s)^*(BG)$ – гомоморфизм трансфера [8], соответствующий двойному накрытию $\rho\colon BH\to BG$. Положим $T=\mathrm{Tr}^*(c_1(\lambda)c_1(\nu))$. Наш основной результат заключается в следующем.

Теорема. *Пусть G – одна из групп $G_{38},\dots,G_{41}$. Тогда*:

1) $K(s)^*(BG)\cong K(s)^*[a,b,c,x_2,y_2,T]/R$, *где идеал R порожден элементами*

$$a^{2^s},\quad b^{2^s},\quad c^{2^s},\quad c\biggl(c+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr),\quad c\biggl(c+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr),$$

$$a\biggl(a+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}a^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr),\quad b\biggl(b+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}b^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr),$$

$$\biggl(c+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr)\biggl(b+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}b^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr)+v_sb^{2^s-1}T,$$

$$\biggl(c+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr)\biggl(a+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}a^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr)+v_sa^{2^s-1}T,$$

Работа выпонена при поддержке гранта GNSF/ST08/3-387. Первый автор поддержан также Volkswagen Foundation, Ref.: I/84 328.

$$T^2+Tx_1y_1+x_2y_1\biggl(c+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr)+x_1y_2\biggl(c+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr),$$

$$T\biggl(a+x_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}a^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}\biggr)+v_sa^{2^s-1}x_2(c+y_1),$$

$$T\biggl(b+y_1+v_s\sum_{i=1}^{s-1}b^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}\biggr)+v_sb^{2^s-1}y_2(c+x_1),\quad cT$$

и

$$v_s^2x_2^{2^s}+\begin{cases}a^2+b^2+ac+v_sabc^{2^s-1} & \textit{для } G=G_{39},G_{40},G_{41},\\ c^2+ac & \textit{для } G=G_{38},\end{cases}$$

$$v_s^2y_2^{2^s}+\begin{cases}a^2+bc+v_sabc^{2^s-1} & \textit{для } G=G_{38},G_{41},\\ b^2+bc & \textit{для } G=G_{39},\\ b^2+c^2+bc & \textit{для } G=G_{40},\end{cases}$$

где

$$x_1=v_s\bigl(x_2+v_sx_1x_2^{2^{s-1}}\bigr)^{2^{s-1}}+\begin{cases}a & \textit{для } G=G_{38},\\ b+c+v_s(bc)^{2^{s-1}} & \textit{для } G=G_{39},G_{40},G_{41},\end{cases}$$

$$y_1=v_s\bigl(y_2+v_sy_1y_2^{2^{s-1}}\bigr)^{2^{s-1}}+\begin{cases}c & \textit{для } G=G_{39},\\ 0 & \textit{для } G=G_{40},\\ a+b+c+v_s(ab+bc+ac)^{2^{s-1}} & \textit{для } G=G_{38},G_{41};\end{cases}$$

2) $a^2c=ac^2$, $b^2c=bc^2$, $x_1^{2^s}=a^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}$, $y_1^{2^s}=b^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}$.

Известно [5], что для всех рассматриваемых нами групп эйлерова характеристика равна $\chi_{s,2}=16^s/2+8^s-4^s/2$. Теперь остается лишь проверить, что наш набор образующих и соотношений действительно является полным. Рассмотрим спектральную последовательность Серра для расширения $1\to H\to G\to G/H=C_2\to 1$, где группа H описана выше. Тогда $E_2=H^*(G/H,K(s)^*(BH))\cong\mathscr{F}^{C_2}\oplus\mathscr{T}\otimes H^*(C_2,\mathbb{F}_2)$, где $K(s)^*(BH)=\mathscr{F}\oplus\mathscr{T}$ – разложение на свободный и тривиальный модули. Имеется лишь один нетривиальный дифференциал, вычисляемый в явном виде. Фактор по нему имеет требуемый $K(s)^*$-ранг.

Список литературы

[**1**] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn, D. C. Ravenel, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 553–594. [**2**] В. М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **78**:2 (1969), 307–320. [**3**] В. М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **83**:1 (1970), 61–76. [**4**] I. Kriz, *Topology*, **36**:6 (1997), 1247–1273. [**5**] B. Schuster, *Algebr. Geom. Topol.*, **11**:1 (2011), 503–521. [**6**] M. Bakuradze, S. Priddy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:6 (2004), 1855–1860. [**7**] M. Bakuradze, V. V. Vershinin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), 3707–3714. [**8**] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. Math. Stud., **90**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1978, 214 pp.

М. Бакурадзе (M. Bakuradze)
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: malkhaz.bakuradze@tsu.ge

М. Джибладзе (M. Jibladze)
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: jib@rmi.acnet.ge

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
25.04.2011