М. Т. Ашордия, Н. А. Кекелия, О корректности задачи Коши для линейных систем обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечном промежутке, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 4, 443–454

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 4, с. 443–454

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБОБЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

© 2004 г. М. Т. Ашордия, Н. А. Кекелия

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, а $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ – соответственно матричная и векторная функции, элементы которых имеют ограниченные полные вариации на каждом компактном подпромежутке промежутка $\mathbb{R}_+$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$. Для системы линейных обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрим задачу Коши

$$dx(t) = dA(t)\cdot x(t) + df(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = c_0. \tag{1.2}$$

В настоящей работе установлены достаточные условия, гарантирующие корректность (непрерывную зависимость решений от правых частей и начальных данных) задачи (1.1), (1.2) на бесконечном промежутке, а также исследован вопрос о связи между устойчивостью системы (1.1) и корректностью задачи (1.1), (1.2). Результаты аналогичного характера для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в работах [1, 2].

В отличие от [1, 2] в ранее выполненных работах (см., например, [3–13] и указанную в них библиографию) корректность начальных и краевых задач (линейных и нелинейных) как для обыкновенных дифференциальных [3–7], так и для обобщенных дифференциальных систем [8–13] исследуется на компактном промежутке. При этом для последних систем предполагается либо непрерывность матричной функции A в начальной точке t_0, либо точка t_0 не возмущается. В настоящей работе для линейных задач вида (1.1), (1.2) рассматривается общий случай без учета указанных ограничений.

Системы вида (1.1), в частности, позволяют с единой точки зрения исследовать как обыкновенные линейные дифференциальные системы, так и линейные импульсные системы

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x + q(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.3}$$

$$x(t_j+) - x(t_j-) = G_j x(t_j-) + g_j \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{1.4}$$

где $Q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$, $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $g_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, $\lim\limits_{j\to+\infty} t_j = +\infty$, и линейные разностные системы

$$y(k+1) - y(k) = G(k)y(k) + g(k) \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.5}$$

где $G(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(k) \in \mathbb{R}^n$.

В работе приняты следующие обозначения и определения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\widetilde{\mathbb{N}} = \{0, 1, \ldots\}$; $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, I – конечный или бесконечный промежуток действительной оси; $\mathbb{R}^{n\times m}$ – пространство вещественных $n \times m$-матриц $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ с нормой $\|X\| = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |x_{ij}|$; $|X| = (|x_{ij}|)_{i,j=1}^{n,m}$; $O_{n\times m}$ (или O) – нулевая $n \times m$-матрица; $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ – пространство вещественных n-мерных вектор-столбцов $x = (x_i)_{i=1}^n$; $\det(X)$ и X^{-1} – детерминант и обратная матрица матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$; I_n – единичная $n\times n$-матрица.

Матричная функция называется непрерывной, интегрируемой, неубывающей и т.д., если таковыми соответственно являются все ее компоненты.

Если $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times m}$, то $\vee_a^b(X)$ – сумма полных вариаций ее компонент x_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ на сегменте $[a,b]$; $\vee_0^{+\infty}(X)=\sup\{\vee_a^b(X) :\ a,b\in\mathbb{R}_+\}$; $V(X)(t)=(v(x_{ij})(t))_{i,j=1}^{n,m}$, где $v(x_{ij})(0)=0$ и $v(x_{ij})(t)=\vee_0^t(x_{ij})$ при $t>0$ $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$; $X(t-)$ и $X(t+)$ – соответственно левый и правый пределы в точке t ($X(0-)=X(0)$); $d_1X(t)=X(t)-X(t-)$, $d_2X(t)=X(t+)-X(t)$; $\mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество матричных функций $X:[a,b]\to\mathbb{R}^{n\times m}$, для которых $\vee_a^b(X)<+\infty$; $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество матричных функций $X:I\to\mathbb{R}^{n\times m}$, для которых $\vee_a^b(X)<+\infty$ при $a,b\in I$; $L(I;\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество суммируемых по Лебегу матричных функций $X:I\to\mathbb{R}^{n\times m}$; $L_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество матричных функций $X:I\to\mathbb{R}^{n\times m}$, суммируемых по Лебегу на каждом компактном подпромежутке промежутка I; $\widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(I;\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество матричных функций $X:I\to\mathbb{R}^{n\times m}$, абсолютно непрерывных на каждом компактном подпромежутке промежутка I; $\widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(I\setminus\{t_j\}_{j=1}^{+\infty};\mathbb{R}^{n\times m})$, где $t_j\in I$, $t_j<t_{j+1}$ $(j=1,2,\ldots)$ – множество матричных функций $X:I\to\mathbb{R}^{n\times m}$, сужение которых на $]t_j,t_{j+1}[$ принадлежит множеству $\widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(]t_j,t_{j+1}[;\mathbb{R}^{n\times m})$ для любого $j\in\{1,2,\ldots\}$.

Далее введем оператор $s_0:\ \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R})\to\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ равенством

$$s_0(x)(t)\equiv x(t)-\sum_{a<\tau\le t}d_1x(\tau)-\sum_{a\le\tau<t}d_2x(\tau).$$

Если $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неубывающая функция, $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $s<t$, то

$$\int_s^t x(\tau)\,dg(\tau)=\int_{]s,t[}x(\tau)\,ds_0(g)(\tau)+\sum_{s<\tau\le t}x(\tau)\,d_1g(\tau)+\sum_{s\le\tau<t}x(\tau)\,d_2g(\tau),$$

где под $\int_{]s,t[}x(\tau)\,ds_0\,g(\tau)$ понимается интеграл в смысле Лебега–Стилтьеса на открытом интервале $]s,t[$ по мере, порожденной функцией $s_0(g)$ на том же интервале $(\int_s^s x(\tau)\,dg(\tau)=0)$; если $g(t)\equiv g_1(t)-g_2(t)$, где g_1 и g_2 – неубывающие функции, то

$$\int_s^t x(\tau)\,dg(\tau)=\int_s^t x(\tau)\,dg_1(\tau)-\int_s^t x(\tau)\,dg_2(\tau).$$

Если $G=(g_{ik})_{i,k=1}^{l,n}\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^{l\times n})$ и $X=(x_{kj})_{k,j=1}^{n,m}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times m}$, то

$$\int_s^t dG(\tau)\cdot X(\tau)=\left(\sum_{k=1}^n\int_s^t x_{kj}(\tau)\,dg_{ik}(\tau)\right)_{i,j=1}^{l,m}\quad\text{при}\quad s\le t,$$

а если $X\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $Y\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times m})$, то

$$\mathcal{A}(X,Y)(t)\equiv Y(t)+\sum_{0<\tau\le t}d_1X(\tau)\cdot(I_n-d_1X(\tau))^{-1}\,d_1Y(\tau)-\sum_{0\le\tau<t}d_2X(\tau)\cdot(I_n+d_2X(\tau))^{-1}\,d_2Y(\tau).$$

Через $E(\widetilde{\mathbb{N}};\mathbb{R}^{n\times m})$ обозначим множество матричных функций $Y:\widetilde{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{n\times m}$.

Под решением системы (1.1) понимается векторная функция $x\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$ такая, что $x(t)=x(s)+\int_s^t dA(\tau)\cdot x(\tau)+f(t)-f(s)$ при $0\le s\le t$.

Будем предполагать, что $A\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $A(0)=O_{n\times n}$, $f\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$ и

$$\det(I_n+(-1)^jd_jA(t))\neq0\quad\text{при}\quad t\in\mathbb{R}_+\quad(j=1,2).\tag{1.6}$$

Заметим, что условие (1.6) гарантирует однозначную разрешимость задачи Коши (1.1), (1.2) (см., например, [15, с. 106]).

Пусть x – единственное решение задачи (1.1), (1.2). Наряду с исходной задачей (1.1), (1.2) рассмотрим возмущенную задачу Коши

$$dy(t) = d\widetilde{A}(t) \cdot y(t) + d\widetilde{f}(t), \tag{1.7}$$

$$y(\widetilde{t}_0) = \widetilde{c}_0, \tag{1.8}$$

где $\widetilde{A} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\widetilde{f} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. Задача (1.1), (1.2) называется корректной, если для любых сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и сколь угодно большого $\rho > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{A} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям

$$|t_0 - \widetilde{t}_0| < \delta, \quad \begin{array}{ll} \|(I_n - d_1A(t_0))c_0 - \widetilde{c}_0\| < \delta & \text{при} \quad \widetilde{t}_0 < t_0, \\ \|c_0 - \widetilde{c}_0\| < \delta & \text{при} \quad \widetilde{t}_0 = t_0, \\ \|(I_n + d_2A(t_0))c_0 - \widetilde{c}_0\| < \delta & \text{при} \quad \widetilde{t}_0 > t_0, \end{array} \tag{1.9}$$

$$\|(A(t) - A(t_0)) - (\widetilde{A}(t) - \widetilde{A}(t_0))\| < \delta, \quad \|(f(t) - f(t_0)) - (\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(t_0))\| < \delta \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.10}$$

$$\bigvee_0^{+\infty} (A - \widetilde{A}) < \rho, \tag{1.11}$$

задача (1.7), (1.8) имеет единственное решение y и выполняется оценка

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.12}$$

Определение 1.2. Задача (1.1), (1.2) называется слабо корректной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{A} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям (1.9) и

$$\bigvee_0^{+\infty} (A - \widetilde{A}) < \delta, \quad \bigvee_0^{+\infty} (f - \widetilde{f}) < \delta, \tag{1.13}$$

задача (1.7), (1.8) имеет единственное решение y и выполняется оценка (1.12).

Теорема 1.1. *Если*

$$A \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

то задача (1.1), (1.2) является корректной.

Определение 1.3. Пусть $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая неубывающая функция, что $\xi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Решение x_0 системы (1.1) называется ξ-экспоненциально асимптотически устойчивым, если существует такое $\eta > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что любое решение x системы (1.1), удовлетворяющее условию $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \delta$ при некотором $t_0 \in \mathbb{R}_+$, допускает оценку $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(t_0)))$ при $t \geq t_0$.

Устойчивость, равномерная устойчивость, асимптотическая устойчивость и экспоненциально асимптотическая устойчивость решений системы (1.1) определяются таким же образом, как для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [2, 7]). Отметим также, что экспоненциальная асимптотическая устойчивость является частным случаем ξ-экспоненциальной асимптотической устойчивости, если предположить, что $\xi(t) \equiv t$.

Определение 1.4. Система (1.1) называется устойчивой в том или ином смысле, если каждое ее решение является устойчивым в том же смысле.

Очевидно, что устойчивость в том или ином смысле системы (1.1) равносильна устойчивости в том же смысле как какого-нибудь ее решения, так и тривиального решения соответствующей однородной системы

$$dx(t) = dA(t) \cdot x(t). \tag{1.1$_0$}$$

Следовательно, устойчивость является общим свойством для всех решений системы (1.1), а свободный член f не влияет на нее. Она полностью обусловлена матричной функцией A, поэтому естественно ввести следующее

Определение 1.5. Матричная функция $A \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ называется устойчивой в том или ином смысле, если система (1.1_0) является устойчивой в том же смысле.

Эффективные условия, гарантирующие устойчивость в том или ином смысле матричной функции A, содержатся, например, в работах [16, 17].

Теорема 1.2. *Пусть* $A \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ *и* $f \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n})$ *таковы, что*

$$\limsup_{t\to+\infty} \bigvee_{t}^{\nu(\xi)(t)} \mathcal{A}(A,A) < +\infty, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \bigvee_{t}^{\nu(\xi)(t)} \mathcal{A}(A,f) = 0, \tag{1.16}$$

где

$$\nu(\xi)(t) = \sup\{\tau \ge t : \quad \xi(\tau) \le \xi(t+) + 1\}. \tag{1.17}$$

Тогда ξ *-экспоненциально асимптотическая устойчивость матричной функции* A *гарантирует корректность задачи (1.1), (1.2).*

Теорема 1.3. *Пусть* $A \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$,

$$f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n}). \tag{1.18}$$

Тогда равномерная устойчивость матричной функции A *гарантирует слабую корректность задачи (1.1), (1.2).*

Импульсные системы. Под решением импульсной системы (1.3), (1.4) (см., например, [14]) понимается непрерывная слева векторная функция $x \in \widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \setminus T;\mathbb{R}^n)$, $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$, удовлетворяющая системе (1.3) почти всюду на промежутке $]t_j, t_{j+1}[$ и условию (1.4) в точке t_j для любого $j \in \{1,2,\ldots\}$. Ясно, что векторная функция $x \in \widetilde{C}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \setminus T;\mathbb{R}^n)$ является решением импульсной системы (1.3), (1.4) тогда и только тогда, когда она является решением системы (1.1), где $A(t) \equiv \int_0^t Q(\tau)\,d\tau + \sum_{0\le t_j<t} G_j$, $f(t) \equiv \int_0^t q(\tau)\,d\tau + \sum_{0\le t_j<t} g_j$. При этом условие (1.6) равносильно условию $\det(I_n + G_j) \ne 0$ $(j = 1,2,\ldots)$, что мы будем и предполагать.

Опираясь на сказанное, мы конкретизируем данные выше определения и утверждения для линейных импульсных систем вида (1.3), (1.4).

Пусть x – единственное решение импульсной задачи Коши (1.3), (1.4), (1.2). Наряду с этой задачей рассмотрим возмущенную задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = \widetilde{Q}(t)y + \widetilde{q}(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.19}$$

$$y(\widetilde{t}_j+) - y(\widetilde{t}_j-) = \widetilde{G}_j y(\widetilde{t}_j-) + \widetilde{q}_j \quad (j = 1,2,\ldots), \tag{1.20}$$

$$y(\widetilde{t}_0) = \widetilde{c}_0, \tag{1.21}$$

где $\widetilde{Q} \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\widetilde{q} \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n})$, $\widetilde{G}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 1,2,\ldots)$, $\widetilde{g}_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1,2,\ldots)$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{t}_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 0,1,\ldots)$, $0 < \widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2 < \ldots$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \widetilde{t}_j = +\infty$, $\widetilde{T} = \{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2, \ldots\}$.

Определение 1.6. Задача (1.3), (1.4), (1.2) называется корректной, если для любых сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и сколь угодно большого $\rho > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{Q} \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\widetilde{q} \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n})$, $\widetilde{G}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 1,2,\ldots)$, $\widetilde{t}_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 0,1,\ldots)$, $0 < \widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2 < \ldots$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \widetilde{t}_j = +\infty$, удовлетворяющих условиям

$$|t_0 - \widetilde{t}_0| < \delta, \qquad \begin{array}{ll} \|c_0 - \widetilde{c}_0\| < \delta, & \text{если} \quad \widetilde{t}_0 \le t_0 \quad \text{или} \quad \widetilde{t}_0 \notin T, \\ \|(I_n + G_j)c_0 - \widetilde{c}_0\| < \delta, & \text{если} \quad \widetilde{t}_0 = t_j > t_0 \quad (j = 1,2,\ldots), \end{array} \tag{1.22}$$

$$\left\|\int_0^t (Q(\tau)-\widetilde{Q}(\tau))\,d\tau + \sum_{0\le t_j<t} G_j - \sum_{0\le \widetilde{t}_j<t} \widetilde{G}_j\right\| < \delta \quad \text{при} \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$\left\|\int_0^t (q(\tau)-\widetilde{q}(\tau))\,d\tau + \sum_{0\le t_j<t} g_j - \sum_{0\le \widetilde{t}_j<t} \widetilde{g}_j\right\| < \delta \quad \text{при} \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$\int_0^{+\infty} \|Q(t)-\widetilde{Q}(t)\|\,dt + \sum_{i=1,\ t_i\notin\widetilde{T}}^{+\infty} \|G_i\| + \sum_{j=1,\ \widetilde{t}_j\notin T}^{+\infty} \|\widetilde{G}_j\| + \sum_{i,j=1;\ t_i=\widetilde{t}_j}^{+\infty} \|G_i-\widetilde{G}_j\| < \rho,$$

задача (1.19)–(1.21) имеет единственное решение y и выполняется оценка (1.12).

Определение 1.7. Задача (1.3), (1.4), (1.2) называется слабо корректной, если для произвольного $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0\in\mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0\in\mathbb{R}^n$, $\widetilde{Q}\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\widetilde{q}\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{G}_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(j=1,2,\ldots)$, $\widetilde{t}_j\in\mathbb{R}_+$ $(j=0,1,\ldots)$, $0<\widetilde{t}_1<\widetilde{t}_2<\ldots$, $\lim\limits_{j\to+\infty}\widetilde{t}_j=+\infty$, удовлетворяющих условиям (1.22),

$$\int_0^{+\infty} \|Q(t)-\widetilde{Q}(t)\|\,dt + \sum_{i=1,\ t_i\notin\widetilde{T}}^{+\infty} \|G_i\| + \sum_{j=1,\ \widetilde{t}_j\notin T}^{+\infty} \|\widetilde{G}_j\| + \sum_{i,j=1;\ t_i=\widetilde{t}_j}^{+\infty} \|G_i-\widetilde{G}_j\| < \delta,$$

$$\int_0^{+\infty} \|q(t)-\widetilde{q}(t)\|\,dt + \sum_{i=1,\ t_i\notin\widetilde{T}}^{+\infty} \|g_i\| + \sum_{j=1,\ \widetilde{t}_j\notin T}^{+\infty} \|\widetilde{g}_j\| + \sum_{i,j=1;\ t_i=\widetilde{t}_j}^{+\infty} \|g_i-\widetilde{g}_j\| < \delta,$$

задача (1.19)–(1.21) имеет единственное решение y и выполняется оценка (1.12).

Теорема 1.4. *Пусть $Q\in L(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q\in L(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, $\sum_{j=1}^{+\infty}\|G_j\|<+\infty$ и $\sum_{j=1}^{+\infty}\|g_j\|<$ $<+\infty$. Тогда задача (1.3), (1.4), (1.2) является корректной.*

Устойчивость в том или ином смысле импульсной системы (1.3), (1.4) определяется, как выше. При этом предполагается, что функция $\xi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ является и непрерывной слева. Сказанное относится также и к устойчивости самой системы (1.3), (1.4). С другой стороны, соответствующая однородная система определяется парой $(Q,\{G_j\}_{j=1}^{+\infty})$. Поэтому вместо фигурирующей в определении 1.5 устойчивости матричной функции A будем говорить об устойчивости этой пары.

Теорема 1.5. *Пусть $Q\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, $G_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(j=1,2,\ldots)$ и $g_j\in\mathbb{R}^n$ $(j=1,2,\ldots)$ таковы, что*

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_t^{\nu(\xi)(t)}\|Q(\tau)\|\,d\tau<+\infty,\qquad \lim_{t\to+\infty}\int_t^{\nu(\xi)(t)}\|q(\tau)\|\,d\tau=0,$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{t\le t_j<\nu(\xi)(t)}\|(I_n+G_j)^{-1}G_j\|<+\infty,\qquad \lim_{t\to+\infty}\sum_{t\le t_j<\nu(\xi)(t)}\|(I_n+G_j)^{-1}g_j\|=0,$$

где функция $\nu(\xi)(t)$ определена равенством (1.17). Тогда ξ-экспоненциально асимптотическая устойчивость пары $(Q,\{G_j\}_{j=1}^{+\infty})$ гарантирует корректность задачи (1.3), (1.4), (1.2).

Теорема 1.6. *Пусть $Q\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, $G_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $(j=1,2,\ldots)$, а постоянные векторы $g_j\in\mathbb{R}^n$ $(j=1,2,\ldots)$ таковы, что $\sum_{j=1}^{+\infty}\|g_j\|<+\infty$. Тогда равномерная устойчивость пары $(Q,\{G_j\}_{j=1}^{+\infty})$ гарантирует слабую корректность задачи (1.3), (1.4), (1.2).*

Разностные системы. Пусть $k_0 \in \widetilde{\mathbb{N}}$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$. Для системы (1.5) рассмотрим задачу Коши
$$y(k_0) = c_0. \tag{1.23}$$

Ясно, что если $y \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^n)$ – решение разностной задачи (1.5), (1.23), то векторная функция $x \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$, определенная равенствами $x(0) = y(0)$, $x(t) = y(k)$ при $k-1 < t \le k$ $(k \in \mathbb{N})$, будет решением импульсной задачи (1.3), (1.4), (1.2), где $Q(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$; $t_j = j$, $G_j = G(j-1)$, $g_j = g(j-1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $t_0 = k_0$. Наоборот, если x – решение отмеченной импульсной системы, то ее сужение на $\widetilde{\mathbb{N}}$ будет решением системы (1.5). Предполагается, что $\det(I_n + G(k)) \ne 0$ при $k \in \widetilde{\mathbb{N}}$. В силу сказанного справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4′. *Пусть матричная и векторная функции $G \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^{n\times n})$ и $g \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^n)$ таковы, что $\sum_{m=1}^{+\infty}(\|G(m)\| + \|g(m)\|) < +\infty$. Тогда задача (1.5), (1.23) является корректной.*

Теорема 1.5′. *Пусть матричная и векторная функции $G \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^{n\times n})$ и $g \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^n)$ таковы, что*
$$\limsup_{k\to+\infty} \sum_{m=k}^{\nu(\xi)(k)-1} \|(I_n + G(m-1))^{-1} G(m-1)\| < +\infty,$$
$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=k}^{\nu(\xi)(k)-1} \|(I_n + G(m-1))^{-1} g(m-1)\| = 0,$$

где $\nu(\xi)(k) = \sup\{m \ge k+1 : \xi(m) \le \xi(k+1) + 1\}$, а $\xi : \widetilde{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ такая неубывающая функция, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \xi(k) = +\infty$. Тогда ξ-экспоненциально асимптотическая устойчивость матричной функции G гарантирует корректность задачи (1.5), (1.23).

Теорема 1.6′. *Пусть $G \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^{n\times n})$, а $g \in E(\widetilde{\mathbb{N}}; \mathbb{R}^n)$ такова, что $\sum_{m=1}^{+\infty} \|g(m)\| < +\infty$. Тогда равномерная устойчивость матричной функции G гарантирует слабую корректность задачи (1.5), (1.23).*

2. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1.1. Ввиду (1.6) задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $x \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n})$ и
$$x(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} dA(\tau)\cdot x(\tau) + f(t) - f(t_0) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Покажем, что
$$x \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n}). \tag{2.2}$$
Действительно, в силу (1.14) ряды $\sum_{t\in\mathbb{R}_+} \|d_j A(t)\|$ $(j = 1, 2)$ суммируемы. Поэтому для каждого $j \in \{1, 2\}$ неравенство $\|d_j A(t)\| \ge 1/2$ выполняется только для конечного числа точек $t_{j1}, \ldots, t_{jm_j}$ из $\mathbb{R}_+$, т.е.
$$\|d_j A(t)\| < 1/2 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad t \ne t_{ji} \quad (j = 1, 2; \quad i = \overline{1, m_j}). \tag{2.3}$$
Поэтому найдется такое $r > 0$, что
$$\|(I_n + (-1)^j d_j A(t))^{-1}\| < r \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (j = 1, 2). \tag{2.4}$$

Ввиду (2.1), (2.4) и (1.14) имеем $x(t) = c_0 + d_1 A(t)\cdot x(t) + \int_{t_0}^{t} dB(\tau)\cdot x(\tau) + f(t) - f(t_0)$ и $\|x(t)\| \le r(\|c_0\| + \rho_1 + \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\|V(B)(\tau)\|)$ при $t \ge t_0$, где $B(t) \equiv A(t-)$, $\rho_1 = \bigvee_0^{+\infty} f < +\infty$. Отсюда, согласно лемме Гронуолла–Беллмана (см. [15, теорема I.4.30]), имеем $\|x(t)\| \le$ $\le r(\|c_0\| + \rho_1)\exp(r \bigvee_{t_0}^{t} A) \le \rho_3 < +\infty$ при $t \ge t_0$, где $\rho_3 = r(\|c_0\| + \rho_1)\exp(r\rho_2)$, $\rho_2 = \bigvee_0^{+\infty} A$. Аналогично доказывается последняя оценка и при $0 \le t \le t_0$, т.е. $\|x(t)\| \le \rho_3 < +\infty$ при

$t \in \mathbb{R}_+$. Учитывая это, из (2.1) имеем $\rho_0 \le \rho_1 + \rho_2\rho_3 < +\infty$, где $\rho_0 = \bigvee_0^{+\infty} x$. Тем самым включение (2.2) доказано.

Положим $\omega(\eta) = \max\{\omega_1(\eta), \omega_2(\eta)\}$, где $\omega_1(\eta) = \sup\{\|x(t) - x(s-)\| : t, s \in \mathbb{R}_+;\ s - \eta < t < s\}$, а $\omega_2(\eta) = \sup\{\|x(t) - x(s+)\| : t, s \in \mathbb{R}_+;\ s < t < s + \eta\}$. Тогда ввиду (2.2)

$$\lim_{\eta \to 0+} \omega_j(\eta) = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{2.5}$$

Согласно (1.6) и (2.3), найдется $\delta_0 \in]0, 1/4[$ такое, что $\|d_jA(t) - d_j\widetilde{A}(t)\| < 2\delta_0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1, 2)$, $\|d_j\widetilde{A}(t)\| < 1/2 + 2\delta_0 < 1$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $t \ne t_{ji}$ $(j = 1, 2;\ i = \overline{1, m_j})$ и $\det(I_n + (-1)^j d_j\widetilde{A}(t_{ji})) \ne 0$ $(j = 1, 2;\ i = \overline{1, m_j})$ для каждой матричной функции $\widetilde{A} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n})$, которая удовлетворяет условию $\|A(t) - A(t_0) - (\widetilde{A}(t) - \widetilde{A}(t_0))\| < \delta_0$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, найдется $\widetilde{r} > 1$ такое, что

$$\det(I_n + (-1)^j d_j\widetilde{A}(t)) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (j = 1, 2), \tag{2.6}$$

$$\|(I_n + (-1)^j d_j\widetilde{A}(t))^{-1}\| < \widetilde{r} \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (j = 1, 2). \tag{2.7}$$

В силу (2.5) для произвольно заданных $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ найдется такое $\delta \in]0, \delta_0[$, что

$$\widetilde{r}[(3 + 2\|c_0\| + 6\rho_0)\delta + \omega(\delta)] \exp(\widetilde{r}(\rho + \rho_2)) < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Рассмотрим задачу (1.7), (1.8), где $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{A} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n\times n})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям (1.9)–(1.11). Ввиду (2.6) она однозначно разрешима.

Пусть y – решение задачи (1.7), (1.8), $z(t) \equiv y(t) - x(t)$ и $\varphi(t) \equiv \widetilde{f}(t) - f(t)$. Тогда

$$z(t) = z(\widetilde{t}_0) + \int_{\widetilde{t}_0}^{t} d\widetilde{A}(\tau) \cdot z(\tau) + \int_{\widetilde{t}_0}^{t} d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau)) \cdot x(\tau) + \varphi(t) - \varphi(\widetilde{t}_0) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.9}$$

Согласно формуле интегрирования по частям (см. [15, теорема I.4.33]),

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t} d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau)) \cdot x(\tau) = [(\widetilde{A}(t) - \widetilde{A}(\widetilde{t}_0)) - (A(t) - A(\widetilde{t}_0))]x(t) -$$

$$- \int_{\widetilde{t}_0}^{t} [(\widetilde{A}(\tau) - \widetilde{A}(\widetilde{t}_0)) - (A(\tau) - A(\widetilde{t}_0))]\, dx(\tau) + \sum_{\widetilde{t}_0 < \tau \le t} (d_1\widetilde{A}(\tau) - d_1A(\tau))\, d_1x(\tau) -$$

$$- \sum_{\widetilde{t}_0 \le \tau < t} (d_2\widetilde{A}(\tau) - d_2A(\tau))\, d_2x(\tau) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

С другой стороны, ввиду (1.10) $\|(\widetilde{A}(t) - \widetilde{A}(\widetilde{t}_0)) - (A(t) - A(\widetilde{t}_0))\| < 2\delta$, $\|d_j\widetilde{A}(t) - d_jA(t)\| < 2\delta$ $(j = 1, 2)$ и $\|\varphi(t) - \varphi(\widetilde{t}_0)\| < 2\delta$ при $t \in \mathbb{R}_+$, поэтому

$$\left\| \int_{\widetilde{t}_0}^{t} d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau)) \cdot x(\tau) \right\| \le 2\delta\left(\|x(t)\| + 2 \bigvee_0^{+\infty} x \right) \le 2\delta(\|c_0\| + 3\rho_0) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.10}$$

Из (2.9) следует, что $z(t) = z(\widetilde{t}_0) + d_1\widetilde{A}(t) \cdot z(t) + \int_{\widetilde{t}_0}^{t} d\widetilde{B}(\tau) \cdot z(\tau) + \int_{\widetilde{t}_0}^{t} d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau)) \cdot x(\tau) + \varphi(t) - \varphi(\widetilde{t}_0)$ при $t > \widetilde{t}_0$, где $\widetilde{B}(t) \equiv \widetilde{A}(t-)$. Отсюда ввиду (2.6), (2.7) и (2.10) имеем $\|z(t)\| \le$

$\leq \widetilde{r}(\|z(\widetilde{t}_0)\| + 2\delta(1 + \|c_0\| + 3\rho_0) + \int_{\widetilde{t}_0}^t \|z(\tau)\| \, d\|V(\widetilde{B})(\tau)\|)$ при $t \geq \widetilde{t}_0$. Следовательно, в силу леммы Гронуолла–Беллмана $\|z(t)\| \leq \widetilde{r}(\|z(\widetilde{t}_0)\| + 2\delta(1 + \|c_0\| + 3\rho_0)) \exp(\widetilde{r} \vee_{t_0}^t \widetilde{B}) \leq \widetilde{r}(\|z(\widetilde{t}_0)\| + 2\delta(1 + \|c_0\| + 3\rho_0)) \exp(\widetilde{r} \vee_0^{+\infty} \widetilde{A})$ при $t \geq t_0$. Аналогично убедимся в справедливости этой оценки и при $0 \leq t < t_0$. Поэтому $\|z(t)\| \leq \widetilde{r}(\|z(\widetilde{t}_0)\| + 2\delta(1 + \|c_0\| + 3\rho_0)) \exp(\widetilde{r}(\rho + \rho_2))$ при $t \in \mathbb{R}_+$, ибо, согласно (1.11), $\vee_0^{+\infty} \widetilde{A} \leq \rho + \rho_2$. Кроме того, в силу (1.9) $\|z(\widetilde{t}_0)\| \leq \leq \|(I_n - d_1 A(t_0))c_0 - \widetilde{c}_0\| + \|x(\widetilde{t}_0) - x(t_0-)\| < \delta + \omega_1(\delta)$ при $\widetilde{t}_0 < t_0$, $\|z(\widetilde{t}_0)\| \leq \|(I_n + d_2 A(t_0))c_0 - \widetilde{c}_0\| + \|x(\widetilde{t}_0) - x(t_0+)\| < \delta + \omega_2(\delta)$ при $\widetilde{t}_0 > t_0$ и $\|z(\widetilde{t}_0)\| = \|\widetilde{c}_0 - c_0\| < \delta$ при $\widetilde{t}_0 = t_0$. Следовательно, $\|z(t)\| \leq \widetilde{r}[(3 + 2\|c_0\| + 6\rho_0)\delta + \omega(\delta)] \exp(\widetilde{r}(\rho + \rho_2))$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда с учетом (2.8) вытекает оценка (1.12). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится следующее

Предложение 2.1. *Пусть матричная функция* $A \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n \times n})$ ξ*-экспоненциально асимптотически устойчива, а векторная функция* $f \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ *такова, что выполняется (1.16), где функция* $\nu(\xi)(t)$ *определена равенством (1.17). Тогда любое решение* x *системы (1.1) удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0. \tag{2.11}$$

Доказательство. Ввиду ξ-экспоненциальной асимптотической устойчивости матричной функции A найдутся такие положительные числа η и ρ_0, что для матрицы Коши U системы (1.1_0) справедлива оценка

$$\|U(t, \tau)\| \leq \rho_0 \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(\tau))) \quad \text{при} \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{2.12}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда в силу (1.16) для достаточно большого $t_0 > 0$

$$\bigvee_{t}^{\nu(\xi)(t)} \mathcal{A}(A, f) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \tag{2.13}$$

Пусть x – решение системы (1.1). Согласно формулам вариации постоянных и интегрирования по частям [15, теоремы I.4.33 и III.2.13],

$$x(t) = U(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau) \, d\mathcal{A}(A, f)(\tau) \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Отсюда в силу (2.12) имеем $|x(t)| \leq R_0 \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(t_0)))|x(t_0)| + J(t)$ при $t \geq t_0$, где $J(t) \equiv R_0 \int_{t_0}^t \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(\tau))) \, dV(\mathcal{A}(A, f))(\tau)$, а R_0 такая $n \times n$-матрица, каждая компонента которой равна ρ_0. С другой стороны, учитывая оценку (2.13), легко видеть (см. [16], доказательство теоремы 1), что $J(t) \leq 2\varepsilon R_0 \exp(2\eta)(\exp(\eta) - 1)^{-1}$ при $t \geq t_0$. Поэтому $|x(t)| \leq R_0 \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(t_0)))|x(t_0)| + 2\varepsilon R_0 \exp(2\eta)(\exp(\eta) - 1)^{-1}$ при $t \geq t_0$. Следовательно, выполняется условие (2.11), ибо $\xi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, а ε – любое положительное число. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $c_0 \in \mathbb{R}^n$ произвольно фиксированы, а x – решение задачи (1.1), (1.2). В силу ξ-экспоненциальной асимптотической устойчивости A, условия (1.15) и предложения 2.1 имеем: i) решение x удовлетворяет условию (2.11); ii) найдутся такие $\rho_0 > 0$ и $\eta > 0$, что матрица Коши U системы (1.1_0) допускает оценку (2.12); iii) найдется такое $\rho_1 > 0$, что (см. [16], доказательство теоремы 1)

$$\int_{t_0}^{t} \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(\tau))) \, d\|V(\mathcal{A}(A, A))(\tau)\| \leq \rho_1 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.14}$$

В силу (2.12) и равенства $U(t,t-) = (I_n - d_1 A(t))^{-1}$ существует такое $r > 0$, что

$$\|(I_n - d_1 A(t))^{-1}\| < r \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.15}$$

Ввиду (2.11) для любых $\varepsilon \in]0,1[$ и $\rho > 0$ найдется такое $t^* = t^*(\varepsilon,\rho) > t_0 + 1$, что

$$\|x(t)\| < \varepsilon(12\rho_0\rho r_1)^{-1}\exp(-3\rho_0\rho r_1) \quad \text{при} \quad t \geq t^*, \tag{2.16}$$

где $r_1 = 1 + \rho_0/(1+r)$. Положим $I = [0,t^*]$ и

$$\delta_0 = \min\{(6(1+\rho_0+r))^{-1}, \varepsilon(4(1+\rho_0\rho_1)r_1)^{-1}\exp(-3\rho_0\rho r_1)\}. \tag{2.17}$$

Согласно теореме 1.1, найдется $\delta \in]0,\delta_0[$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{A} \in \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям (1.9),

$$\|(A(t)-A(t_0)) - (\widetilde{A}(t)-\widetilde{A}(t_0))\| < \delta, \quad \|(f(t)-f(t_0)) - (\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(t_0))\| < \delta \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.18}$$

$$\bigvee_0^{+\infty}(A - \widetilde{A}) < \rho, \tag{2.19}$$

задача (1.7), (1.8) на I имеет единственное решение y и выполняется неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon(4\rho_0 r_1)^{-1}\exp(-3\rho_0\rho r_1) \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{2.20}$$

Для доказательства теоремы остается показать, что задача (1.7), (1.8) на $\mathbb{R}_+$ имеет единственное решение y и

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t > t^*. \tag{2.21}$$

Установим единственность. Ввиду (2.15), (2.17) и (2.18) ясно, что $\|d_1 A(t) - d_1\widetilde{A}(t)\| < < 2\delta_0 \leq (1/3)(1+r+\rho_0)^{-1}$ и $\|(I_n - d_1A(t))^{-1}(d_1A(t) - d_1\widetilde{A}(t))\| < 1/3$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда, согласно равенству $I_n - d_1\widetilde{A}(t) = (I_n - d_1A(t))(I_n + (I_n - d_1A(t))^{-1}(d_1A(t) - d_1\widetilde{A}(t)))$, имеем $\det(I_n - d_1\widetilde{A}(t)) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, задача (1.7), (1.8) имеет единственное решение на $\mathbb{R}_+$, ибо для любых двух решений y_1 и y_2 этой задачи имеем $y_1(t) = y_2(t)$ при $t \in I$.

Пусть $z(t) \equiv x(t) - y(t)$. Тогда z будет решением системы $dz(t) = dA(t)\cdot z(t) + dg(t)$, где

$$\begin{gathered} g(t) = g_0(t) + g_1(t) + g_2(t), \quad g_0(t) = \int_{t^*}^{t} d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\cdot z(\tau), \\ g_1(t) = \int_{t^*}^{t} d(A(\tau) - \widetilde{A}(\tau))\cdot x(\tau), \quad g_2(t) = f(t) - \widetilde{f}(t). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Отсюда в силу формулы вариации постоянных имеем

$$z(t) = U(t,t^*)z(t^*) + g(t) - g_2(t^*) - \int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau)\cdot(g(\tau) - g_2(t^*)) \quad \text{при} \quad t \geq t^*. \tag{2.23}$$

Ввиду формулы интегрирования по частям и предложения III.2.15 из [15] имеем

$$\int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau)\cdot g_0(\tau) = g_0(t) - \int_{t^*}^{t} U(t,\tau)\,d(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\cdot z(\tau) + \sum_{t^*<\tau\leq t} d_1U(t,\tau)\cdot d_1(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\cdot z(\tau) -$$

$$- \sum_{t^* \le \tau < t} d_2 U(t,\tau) \cdot d_2(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau)) \cdot z(\tau) \quad \text{при} \quad t \ge t^*, \tag{2.24}$$

$$\int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau) \cdot g_1(\tau) = g_1(t) - \int_{t^*}^{t} U(t,\tau)\, d(A(\tau) - \widetilde{A}(\tau)) \cdot x(\tau) + \sum_{t^* < \tau \le t} d_1 U(t,\tau) \cdot d_1(A(\tau) - \widetilde{A}(\tau)) \cdot x(\tau) -$$

$$- \sum_{t^* \le \tau < t} d_2 U(t,\tau) \cdot d_2(A(\tau) - \widetilde{A}(\tau)) \cdot x(\tau) \quad \text{при} \quad t \ge t^*, \tag{2.25}$$

$$\int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau) \cdot (g_2(\tau) - g_2(t^*)) = - \int_{t^*}^{t} U(t,\tau)\, d\mathcal{A}(A,A)(\tau) \cdot (g_2(\tau) - g_2(t^*)) \quad \text{при} \quad t \ge t^*. \tag{2.26}$$

Согласно (2.12), (2.14) и (2.16)–(2.19), из (2.24)–(2.26) получаем

$$\left\| g_0(t) - \int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau) \cdot g_0(\tau) \right\| \le \rho_0 \int_{t^*}^{t} d\|V(\widetilde{A} - A)(\tau)\| \cdot \|z(\tau)\| + 2\rho_0 \Bigg(\sum_{t^* < \tau \le t} \|d_1(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\|\, \|z(\tau)\| +$$

$$+ \sum_{t^* \le \tau < t} \|d_2(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\|\, \|z(\tau)\| \Bigg) = \int_{t^*}^{t} \|z(\tau)\|\, da(\tau) \quad \text{при} \quad t \ge t^*, \tag{2.27}$$

$$\left\| g_1(t) - \int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau) \cdot g_1(\tau) \right\| \le \varepsilon (12\rho_0 \rho r_1)^{-1} \exp(-3\rho_0 \rho r_1)(a(t) - a(t^*)) <$$

$$< \varepsilon (4 r_1)^{-1} \exp(-3\rho_0 \rho r_1) \quad \text{при} \quad t \ge t^*, \tag{2.28}$$

$$\left\| g_2(t) - g_2(t^*) - \int_{t^*}^{t} d_\tau U(t,\tau) \cdot (g_2(\tau) - g_2(t^*)) \right\| \le$$

$$\le 2\delta + 2\delta\rho_0 \int_{t^*}^{t} \exp(-\eta(\xi(t) - \xi(\tau)))\, d\|V(\mathcal{A}(A,A))(\tau)\| \le$$

$$\le 2(1 + \rho_0 \rho_1)\delta < \varepsilon (2 r_1)^{-1} \exp(-3\rho_0 \rho r_1) \quad \text{при} \quad t \ge t^*, \tag{2.29}$$

где

$$a(t) \equiv \rho_0 \Bigg(\|V(\widetilde{A} - A)(t)\| + 2 \sum_{0 < \tau \le t} \|d_1(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\| + 2 \sum_{0 \le \tau < t} \|d_2(\widetilde{A}(\tau) - A(\tau))\| \Bigg). \tag{2.30}$$

Кроме того, из неравенств (2.12) и (2.20) следует, что $\|U(t,t^*)z(t^*)\| \le \rho_0 \|z(t^*)\| < \varepsilon(4r_1)^{-1} \times \times \exp(-3\rho_0 \rho r_1)$ при $t \ge t^*$. Согласно этому, с учетом неравенств (2.27)–(2.29) из (2.23) получаем оценку $\|z(t)\| < \varepsilon \exp(-3\rho_0 \rho r_1)/r_1 + \int_{t^*}^{t} \|z(\tau)\|\, da(\tau)$ при $t \ge t^*$. С другой стороны, ввиду (2.17) и (2.18) имеем $0 \le d_1 a(t) < 6\rho_0 \delta \le \rho_0 (1 + \rho_0 + r)^{-1} < 1$ и $(1 - d_1 a(t))^{-1} < r_1$ при $t \ge t^*$. Отсюда в силу леммы Гронуолла–Беллмана и (2.19) вытекает, что $\|z(t)\| \le \le \varepsilon \exp(-3\rho_0 \rho r_1) \exp(3\rho_0 r_1 \bigvee_0^t (\widetilde{A} - A)) < \varepsilon$ при $t \ge t^*$. Следовательно, справедлива оценка (2.21). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $c_0 \in \mathbb{R}^n$ произвольно фиксированы, x – решение задачи (1.1), (1.2), а U – матрица Коши системы (1.1_0). Ввиду равномерной устойчивости матричной функции A и условия (1.18) на основании формулы вариации постоянных легко убедиться в существовании такого числа $\rho_0 > 1$, что

$$\|x(t)\| \le \rho_0 \quad \text{при} \quad t \ge 0 \quad \text{и} \quad \|U(t,\tau)\| \le \rho_0 \quad \text{при} \quad t \ge \tau \ge 0. \tag{2.31}$$

В силу (2.31) существует (см. доказательство теоремы 1.2) такое число $r > 0$, для которого справедлива оценка (2.15). Положим $r_1 = 1 + \rho_0/(1+r)$.

Пусть $t^* = t_0 + 1$ и $\delta_0 = \min\{(6(1+\rho_0+r))^{-1}, \varepsilon(12\rho_0^2 r_1)^{-1}\exp(-3\rho_0 r_1)\}$. Согласно теореме 1.1, для произвольно заданного $\varepsilon \in]0,1[$ найдется $\delta \in]0,\delta_0[$ такое, что для любых $\widetilde{t}_0 \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{A} \in \mathrm{BV_{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{BV_{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям (1.9) и (1.13), задача (1.7), (1.8) на $[0,t^*]$ имеет единственное решение y и справедлива оценка

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon(2\rho_0 r_1)^{-1}\exp(-3\rho_0 r_1) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t^*. \tag{2.32}$$

Наша цель – показать, что задача (1.7), (1.8) на $\mathbb{R}_+$ также имеет единственное решение y и выполняется оценка (2.21). Существование и единственность доказываются, как в теореме 1.2.

Пусть $z(t) \equiv x(t) - y(t)$. Тогда имеют место представления (2.23)–(2.25), где $g(t)$ и $g_j(t)$ $(j = 0,1,2)$ определены равенствами (2.22). Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла $\int_{t^*}^t d_\tau U(t,\tau)\cdot(g_2(\tau) - g_2(t^*))$ и учитывая (1.13), (2.24), (2.25), (2.31) и (2.32), из (2.23) находим

$$\|z(t)\| \le \rho_0\|z(t^*)\| + \int\limits_{t^*}^{t} \|z(\tau)\|\,da(\tau) + 3\rho_0^2\delta + 3\rho_0\delta < \frac{\varepsilon\exp(-3\rho_0 r_1)}{r_1} + \int\limits_{t^*}^{t} \|z(\tau)\|\,da(\tau) \quad \text{при} \quad t \ge t^*,$$

где функция $a(t)$ определена равенством (2.30). Отсюда, как и выше, ввиду леммы Гронуолла–Беллмана, условия (1.13) и определения δ_0 имеем

$$\|z(t)\| \le \varepsilon\exp\Big(-3\rho_0 r_1 + 3\rho_0 r_1 \bigvee_{t^*}^{t}(\widetilde{A} - A)\Big) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \ge t^*.$$

Следовательно, справедлива оценка (2.21). Теорема доказана.

Работа поддержана CRDF–Georgia (проект 3318).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kiguradze I.* // Georgian Math. J. 1996. V. 3. № 5. P. 475–484.
2. *Кигурадзе И.Т.* Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Тбилиси, 1997.
3. *Красносельский М.А., Крейн С.Г.* // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. № 3. С. 147–152.
4. *Курцвейль Я., Ворел З.* // Чехосл. мат. журн. 1957. Т. 7. № 4. С. 568–583.
5. *Кигурадзе И.Т.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
6. *Ashordia M.* // Georgian Math. J. 1994. V. 1. № 2. P. 115–126.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
8. *Kurzweil J.* // Czechosl. Math. J. 1957. V. 7. № 82. P. 418–449.
9. *Schwabik Št.* Generalized ordinary differential equations. Singapure, 1992.
10. *Ashordia M.* // Georgian Math. J. 1994. V. 1. № 4. P. 343–351.

11. *Ашордия М.Т.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 382–392.
12. *Ashordia M.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1995. V. 6. P. 1–57.
13. *Ashordia M.* // Czechosl. Math. J. 1996. V. 49. № 121. P. 385–404.
14. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
15. *Schwabik Št., Tvrdý M., Vejvoda D.* Differential and integral equations: boundary value problems and adjoint. Praha, 1979.
16. *Ashordia M., Kekelia N.* // Georgian Math. J. 2001. V. 8. № 4. P. 645–664.
17. *Ashordia M., Kekelia N.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2001. V. 23. P. 147–151.

Институт прикладной математики им. И.Н. Векуа
Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили,
Сухумский филиал Тбилисского государственного
университета им. И. Джавахишвили

Поступила в редакцию
25.03.2003 г.