М. Т. Ашордия, О краевых задачах для систем линейных обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями, *Дифференц. уравнения*, 2006, том 42, номер 3, 291–301

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 3, с. 291–301

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.7

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

© 2006 г. **М. Т. Ашордия**

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть n_1 и n_2 – натуральные числа, $-\infty < a \le a_i < b_i \le b < +\infty$, $A_{ik} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $f_i \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n_i})$, $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(i,k = 1,2)$, а $l_i : \mathrm{BV}([a_1,b_1];\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{BV}([a_2,b_2];\mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1,2)$ суть линейные ограниченные операторы. В настоящей работе исследуется вопрос о существовании решения системы линейных обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i(t) = dA_{i1}(t)\cdot x_1(t) + dA_{i2}(t)\cdot x_2(t) + df_i(t) \quad (i = 1,2), \tag{1.1}$$

удовлетворяющего общим краевым условиям

$$l_i(x_1,x_2) = c_i \quad (i = 1,2). \tag{1.2}$$

Известно, что (см., например, [1–3]) если $A_{ik} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $f_i \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i})$ $(i,k = 1,2)$, то задача (1.1), (1.2) является фредгольмовой, т.е. для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача

$$dx_i(t) = dA_{i1}(t)\cdot x_1(t) + dA_{i2}(t)\cdot x_2(t) \quad (i = 1,2), \tag{1.1$_0$}$$

$$l_i(x_1,x_2) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{1.2$_0$}$$

имела только нулевое решение. В случае, когда система (1.1) в точках a и b имеет сингулярности, т.е. $A_{ik} \notin \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $f_i \notin \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i})$ при некоторых $i,k \in \{1,2\}$, вопрос о фредгольмовости задачи (1.1), (1.2) оставался открытым. Восполнению этого пробела и посвящена настоящая работа. Мы воспользуемся методами исследования сингулярных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанными в [4–6].

Полученные в работе результаты конкретизированы для случая, когда краевые условия (1.2) имеют вид

$$\sum_{k=1}^{m}[B_{1ik}x_1(t_{1ik}) + B_{2ik}x_2(t_{2ik})] = c_i \quad (i = 1,2), \tag{1.3}$$

где $B_{jik} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ $(i,j = 1,2;\ k = \overline{1,m})$.

Ниже приняты следующие обозначения и определения: $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$, $[a,b]$ и $]a,b[$ – соответственно замкнутый и открытый интервалы $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$; $\mathbb{R}^{n\times m}$ – пространство вещественных $n\times m$-матриц $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ с нормой $\|X\| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |x_{ij}|$; $O_{n\times m}$ (или O) – нулевая $n\times m$-матрица; $|X| = (|x|_{ik})_{i,k=1}^{n,m}$; $\det X$ и X^{-1} – соответственно детерминант и обратная матрица матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$; I_n – единичная $n\times n$-матрица; $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ – пространство n-мерных вектор-столбцов $x = (x_i)_{i=1}^n$.

Если $X : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ – матричная функция, то $\bigvee_a^b(X)$ – сумма полных вариаций ее компонент x_{ij} $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ на $[a,b]$; $V(X)(t) = (v(x_{ij})(t))_{i,j=1}^{n,m}$, где $v(x_{ij})(a_0) = 0$, $v(x_{ij})(t) = \bigvee_{a_0}^t(x_{ij})$ при $a_0 < t \le b$, $v(x_{ij})(t) = -\bigvee_t^{a_0}(x_{ij})$ при $a \le t < a_0$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, а $a_0 = a_2$; $X(t-)$ и $X(t+)$ – левый и правый пределы в точке $t \in [a,b]$ $(X(a-) = X(a)$,

$X(b+) = X(b)$); $d_1X(t) = X(t) - X(t-)$, $d_2X(t) = X(t+) - X(t)$; $\mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n\times m})$ – банахово пространство матричных функций $X : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ $(\bigvee_a^b(X) < \infty)$ с нормой $\|X\|_v = \|X(a_0)\| + \bigvee_a^b(X)$; $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n\times m})$ – множество матричных функций $X :]a,b[\to \mathbb{R}^{n\times m}$, для которых $\bigvee_\alpha^\beta(X) < +\infty$ при $a < \alpha < \beta < b$; в случае существования правого (левого) предела матричной функции X в точке a (в точке b) этот предел будем принимать за $X(a)$ (за $X(b)$) и, следовательно, будем считать X непрерывной в упомянутой точке; $s_j : \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}) \to \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R})$ $(j = 0,1,2)$ – операторы, определенные равенствами $s_0(g)(t) \equiv g(t) - s_1(g)(t) - s_2(g)(t)$, $s_1(g)(a_0) = s_2(g)(a_0) = 0$, $s_1(g)(t) = \sum_{a_0<\tau\le t} d_1g(\tau)$ и $s_2(g)(t) = \sum_{a_0\le\tau<t} d_2g(\tau)$ при $a_0 < t < b$; $s_1(g)(t) = -\sum_{t<\tau\le a_0} d_1g(\tau)$ и $s_2(g)(t) = -\sum_{t\le\tau<a_0} d_2g(\tau)$ при $a < t < a_0$.

Если $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ – неубывающая функция, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $s < t$, то

$$\int_s^t x(\tau)\,dg(\tau) = \int_{]s,t[} x(\tau)\,ds_0(g)(\tau) + \sum_{s<\tau\le t} x(\tau)\,d_1g(\tau) + \sum_{s\le\tau<t} x(\tau)\,d_2g(\tau),$$

где под $\int_{]s,t[} x(\tau)\,ds_0(g)(\tau)$ понимается интеграл в смысле Лебега–Стилтьеса на открытом интервале $]s,t[$ по мере, порожденной функцией $s_0(g)$ на том же интервале ($\int_s^s x(\tau)\,dg(\tau) = 0$); если $g(t) \equiv g_1(t) - g_2(t)$, где g_1 и g_2 – неубывающие функции, то

$$\int_s^t x(\tau)\,dg(\tau) = \int_s^t x(\tau)\,dg_1(\tau) - \int_s^t x(\tau)\,dg_2(\tau).$$

Если $G = (g_{ik})_{i,k=1}^{l,n} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{l\times n})$ и $X = (x_{kj})_{k,j=1}^{n,m} : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, то

$$\int_s^t dG(\tau)\cdot X(\tau) = \left(\sum_{k=1}^n \int_s^t x_{kj}(\tau)\,dg_{ik}(\tau)\right)_{i,j=1}^{l,m} \quad \text{при} \quad s \le t.$$

Если $f \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$, $g \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R})$ и $a < s \le t < b$, то

$$\mathcal{F}_0(f,g)(t,s) = -\sum_{j=0}^2 \int_s^t w_j(f)(\tau,a)w_j(\tau,b)\,ds_j(v(g))(\tau),$$

$$\mathcal{F}_l(f,g)(t,s) = (-1)^{l+1}\sum_{j=0}^2 \int_s^t w_j(f)(\tau,(2-l)a + (l-1)b)\,ds_j(v(g))(\tau) \quad (l = 1,2),$$

$$\mathcal{F}_l(f,g)(s,t) = -\mathcal{F}_l(f,g)(t,s) \quad (l = 0,1,2),$$

где $w_0(f)(t,s) = v(f)(t) - v(f)(s)$, $w_1(f)(t,s) = v(f)(t-) - v(f)(s)$, $w_2(f)(t,s) = v(f)(t+) - v(f)(s)$ при $t,s \in]a,b[$.

Если $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^{m_1,m_2} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{m_1\times m_2})$, $Y = (y_{j,k})_{j,k=1}^{m_2,m_3} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{m_2\times m_3})$, то

$$\mathcal{F}_l(X,Y)(t,s) = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2}\sum_{k=1}^{m_3} \mathcal{F}_l(x_{ij},y_{jk})(t,s) \quad \text{при} \quad t,s \in]a,b[\quad (l = 0,1,2).$$

Если $X \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\det(I_n + (-1)^j d_jX(t)) \ne 0$ при $t \in]a,b[$ $(j = 1,2)$, а $Y \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n\times m})$, то $\mathcal{A}(X,Y)(t,t) = O_{n\times m}$ при $t \in]a,b[$,

$$\mathcal{A}(X,Y)(t,s) = Y(t) - Y(s) +$$

$$+\sum_{s<\tau\le t} d_1X(\tau)\cdot(I_n-d_1X(\tau))^{-1}\,d_1Y(\tau)-\sum_{s\le\tau<t} d_2X(\tau)\cdot(I_n+d_2X(\tau))^{-1}\,d_2Y(\tau),$$

$\mathcal{A}(X,Y)(s,t)=-\mathcal{A}(X,Y)(t,s)$ при $a<s<t<b$.

Под решением системы (1.1) (системы обобщенных дифференциальных неравенств $dx_i(t)\le dA_{i1}(t)\cdot x_1(t)+dA_{i2}(t)\cdot x_2(t)+df_i(t)$ $(i=1,2)$) понимается векторная функция $x=(x_i)_{i=1}^2$, $x_i\in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_i})$ $(i=1,2)$ такая, что

$$x_i(t)-x_i(s)=\sum_{j=1}^{2}\int_s^t dA_{ij}(\tau)\cdot x_j(\tau)+f_i(t)-f_i(s)\ (\le)\quad\text{при}\quad a<s\le t<b\quad (i=1,2).$$

Решение системы (1.1) $x=(x_i)_{i=1}^2$ называется решением задачи (1.1), (1.2), если $x_i\in \mathrm{BV}([a_i,b_i];\mathbb{R}^{n_i})$, $i=1,2$, и выполнены равенства (1.2).

Если $\alpha\in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$ такова, что $1+(-1)^jd_j\alpha(t)\ne 0$ при $t\in[a,b]$ $(j=1,2)$, то через $\gamma_\alpha(t,t_0)$ мы будем обозначать единственное решение задачи Коши $d\gamma(t)=\gamma(t)d\alpha(t)$, $\gamma(t_0)=1$. Известно, что (см. [7, 8])

$$\gamma_\alpha(t,t_0)=\exp(s_0(\alpha)(t)-s_0(\alpha)(t_0))\prod_{t_0<\tau\le t}(1-d_1\alpha(\tau))^{-1}\prod_{t_0\le\tau<t}(1+d_2\alpha(\tau))\quad\text{при}\quad t>t_0,$$

$$\gamma_\alpha(t,t_0)=\gamma_\alpha^{-1}(t_0,t)\quad\text{при}\quad t<t_0.$$

Ниже предполагается, что

$$\det(I_{n_i}+(-1)^jd_jA_{ii}(t))\ne 0\quad\text{при}\quad t\in]a,b[\quad (j=1,2).\tag{1.4}$$

Для каждого $i\in\{1,2\}$ через X_i обозначим фундаментальную матрицу системы $dx_i(t)= =dA_{ii}(t)\cdot x_i(t)$, удовлетворяющую условию $X_i(a_0)=I_{n_i}$ (существование обеспечивается условием (1.3) (см. [3, с. 111])).

Используя лемму 2.2 из [9], формулу интегрирования по частям, равенства

$$X_i^{-1}(t)-X_i^{-1}(s)=-X_i^{-1}(t)A_{ii}(t)+X_i^{-1}(s)A_{ii}(s)+\int_s^t dX_i^{-1}(\tau)\cdot A_{ii}(\tau)\quad\text{при}\quad a<s<t<b\quad (i=1,2)$$

(см. [3, с. 48, 120]) и определение оператора $\mathcal{A}$, нетрудно убедиться в том, что посредством преобразования

$$x_i(t)=X_i(t)y_i(t)\quad (i=1,2)\tag{1.5}$$

задачи (1.1), (1.2) и (1.1_0), (1.2_0) сводятся к задачам

$$dy_i(t)=dA_i(t)\cdot y_{3-i}(t)+d\widetilde{f}_i(t)\quad (i=1,2),\tag{1.6}$$

$$\widetilde{l}_i(y_1,y_2)=c_i\quad (i=1,2)\tag{1.7}$$

и

$$dy_i(t)=dA_i(t)\cdot y_{3-i}(t)\quad (i=1,2),\tag{1.6_0}$$

$$\widetilde{l}_i(y_1,y_2)=0\quad (i=1,2),\tag{1.7_0}$$

где

$$\begin{aligned}A_i(t)&\equiv\int_{a_0}^t X_i^{-1}(\tau)\,d\mathcal{A}(A_{ii},A_{i3-i})(\tau,a_0)\cdot X_{3-i}(\tau),\\ \widetilde{f}_i(t)&\equiv\int_{a_0}^t X_i^{-1}(\tau)\,d\mathcal{A}(A_{ii},f_i)(\tau,a_0)\quad (i=1,2),\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$\widetilde{l}_i(y_1, y_2) = l_i(X_1 y_1, X_2 y_2) \quad (i = 1, 2). \tag{1.9}$$

Будем предполагать, что

$$1 - \| |d_j A_1(t)| \cdot V(A_2)(t) \| \neq 0 \quad \text{при} \quad (-1)^j (t - a_0) < 0 \quad (j = 1, 2). \tag{1.10}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $a_1 = a,\ \ b_1 = b,\ \ a_2 \in]a, b[,\ \ b_2 \in]a_2, b[,\ \ a_0 = a_2,\ \ b_0 = b_2;$

$$l_i : \mathrm{BV}([a, b]; \mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{BV}([a_0, b_0]; \mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i} \quad (i = 1, 2) \text{ – *линейные ограниченные операторы*}, \tag{1.11}$$

$$\bigvee_a^b (A_{11}) + \bigvee_a^b (A_1) + \bigvee_a^b (f_1) < +\infty. \tag{1.12}$$

Пусть, кроме того, выполняются условия (1.4), (1.10) и

$$\mathcal{F}_0(A_1, A_2)(b-, a+) < +\infty, \quad \mathcal{F}_0(A_1, \widetilde{f}_2)(b-, a+) < +\infty. \tag{1.13}$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы задача (1.1_0), (1.2_0) *имела только тривиальное решение. С другой стороны, задача* (1.1_0), (1.2_0) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда задача* (1.6_0), (1.7_0) *имеет только тривиальное решение.*

Теорема 1.2. *Пусть* $a_1 = a,\ \ b_1 \in]a, b[,\ \ a_2 \in]a, b_1[,\ \ b_2 = b,\ \ a_0 = a_2,\ \ b_0 = b_1;$

$$l_i : \mathrm{BV}([a, b_0]; \mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{BV}([a_0, b]; \mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i} \quad (i = 1, 2) \text{ – *линейные ограниченные операторы*}, \tag{1.14}$$

$$\bigvee_a^{a_0} (A_{11}) + \bigvee_a^{a_0} (A_1) + \bigvee_a^{a_0} (f_1) < +\infty, \quad \bigvee_{a_0}^b (A_{22}) + \bigvee_{a_0}^b (A_2) + \bigvee_{a_0}^b (f_1) < +\infty. \tag{1.15}$$

Пусть, кроме того, выполняются условия (1.4), (1.10) и

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1(A_1, A_2)(a_0, a+) < +\infty, \quad \mathcal{F}_1(A_1, \widetilde{f}_2)(a_0, a+) < +\infty, \\ &\mathcal{F}_2(A_1, A_2)(b-, a_0) < +\infty, \quad \mathcal{F}_2(A_1, \widetilde{f}_2)(b-, a_0) < +\infty. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.1.

Замечание 1.1. Из доказанной ниже леммы 2.5 вытекает, что если соблюдены условия (1.4), (1.10), (1.12), (1.13) (условия (1.4), (1.10), (1.15), (1.16)), то операторы l_i $(i = 1, 2)$ определены на множестве всех решений системы (1.1) и, следовательно, в этом случае постановка задачи (1.1), (1.2) является естественной.

Следствие 1.1. *Пусть либо* $t_{1ik} \in [a, b]$, $t_{2ik} \in]a, b[$ $(i = 1, 2;\ k = \overline{1, m})$ *и выполнены условия (1.4), (1.10), (1.12), (1.13), либо* $t_{1ik} \in [a, b[$, $t_{2ik} \in]a, b]$ $(i = 1, 2;\ k = \overline{1, m})$ *и выполнены условия (1.4), (1.10), (1.15), (1.16), где* $a_0 = a_2$. *Тогда для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.3) необходимо и достаточно, чтобы система* (1.1_0) *при краевых условиях*

$$\sum_{k=1}^m [B_{1ik} x_1(t_{1ik}) + B_{2ik} x_2(t_{2ik})] = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.3$_0$}$$

имела только тривиальное решение. С другой стороны, задача (1.1_0), (1.3_0) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда система* (1.6_0) *при краевых условиях*

$$\sum_{k=1}^m [B_{1ik} X_1(t_{1ik}) y_1(t_{1ik}) + B_{2ik} X_2(t_{2ik}) y_2(t_{2ik})] = 0 \quad (i = 1, 2)$$

имеет только тривиальное решение.

Следствие 1.2. *Пусть* $A_{ik} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i\times n_k})$, $f_i \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_i})$ $(i,k=1,2)$ *и выполнены условия (1.4), (1.10). Тогда задача (1.1), (1.2) является фредгольмовой.*

Замечание 1.2. В ранее выполненных работах (см., например, [1–3]), где устанавливается фредгольмовость задачи (1.1), (1.2) в регулярном случае, вместо условий (1.4) и (1.10) требуется условие $\det(I_n + (-1)^j d_j A(t)) \neq 0$ при $t \in [a,b]$ $(j=1,2)$, где $A(t) \equiv (A_{ik}(t))_{i,k=1}^2$.

2. Вспомогательные предложения. Частным случаем леммы 2.4 из [10] является

Лемма 2.1. *Пусть* $t_0 \in [a,b]$, $c_0 \in \mathbb{R}$, *а функция* $\beta \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям* $1 + (-1)^j d_j\beta(t) \neq 0$ *и* $1 - (-1)^j d_{3-j}\beta(t) > 0$ *при* $(-1)^j(t-t_0) < 0$ $(j=1,2)$. *Пусть, кроме того, функция* $v \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$ *такова, что* $(dv(t) - v(t)d\beta(t) - df(t))\,\mathrm{sgn}(t-t_0) \leq 0$ *при* $t \in [a,b]$, $(-1)^j(d_jv(t_0) - c_0 d_j\beta(t_0) - d_jf(t_0)) \leq 0$ $(j=1,2)$ *и* $v(t_0) \leq c_0$. *Тогда* $v(t) \leq x(t)$ *при* $t \in [a,b]$, *где* x *– решение задачи* $dx(t) = x(t)d\beta(t) + df(t)$ *при* $t \in [a,b]$, $x(t_0) = c_0$.

Аналогом леммы Гронуолла является

Лемма 2.2. *Пусть* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *– неубывающая функция,* $t_0 \in]a,b[$, $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $v \in \mathrm{BV}(]a,b[;\mathbb{R}_+)$, $1 - d_j\alpha(t) \neq 0$ *при* $(-1)^j(t-t_0) < 0$ $(j=1,2)$ *и*

$$u(t) \leq c_0 + \left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\alpha(\tau)\right| \quad \textit{при} \quad t \in]a,b[. \tag{2.1}$$

Тогда для любого $\varepsilon \in]0,1[$ *существует не более чем конечное число точек* $t_{ji} \in [a,b]$ $(j=1,2;$ $i=\overline{1,m_j})$ *таких, что* $t_{2m_2} < \ldots < t_{22} < t_{21} < t_0 < t_{11} < t_{12} < \ldots < t_{1m_1}$,

$$d_j\alpha(t_{ji}) \geq \varepsilon \quad (j=1,2; \quad i=\overline{1,m_j}), \tag{2.2}$$

$$u(t) \leq c_{jk}\gamma(t)\gamma^{-1}(t_{jk}) \quad \textit{при} \quad (t-t_{jk})(t-t_{jk+1}) < 0 \quad (j=1,2; \quad k=\overline{1,m_j}), \tag{2.3}$$

где $t_{10} = t_{20} = t_0$, $t_{1m_1+1} = b$, $t_{2m_2+1} = a$, $c_{10} = c_{20} = c_0$, $c_{jk+1} = c_{jk}[\gamma(t_{jk+1}) + (-1)^j d_j\gamma(t_{jk+1})]\gamma^{-1}(t_{jk}) + u(t_{jk+1})d_j\alpha(t_{jk+1})$ $(j=1,2;$ $k=\overline{0,m_j})$, *а* $\gamma(t) \equiv \gamma_\alpha(t,t_0)$.

Доказательство. Положим $v(t) = c_0 + |\int_{t_0}^t u(\tau)\,d\alpha(\tau)|$ при $t \in]a,b[$. Пусть $j=1$, и рассмотрим промежуток $[t_0,b[$. В силу неубываемости функции α найдется возрастающая последовательность точек $t_{1i} \in]t_0,b]$ $(i=\overline{1,m_1})$, для которых выполняются неравенства (2.2) и

$$d_1\alpha(t) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in]t_0,b] \setminus \{t_{11},\ldots,t_{1m_1}\}. \tag{2.4}$$

Пусть δ – достаточно малое положительное число. Легко видеть, что на $[t_0, t_{11}-\delta]$ имеют место условия леммы 2.1, где $f(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv \alpha(t)$, ибо в силу условия (2.1) $u(t) \leq v(t)$ и $0 \leq v(t) - v(s) \leq \int_s^t v(\tau)d\alpha(\tau)$ при $t_0 \leq s < t \leq b$. Следовательно,

$$v(t) \leq c_0\gamma(t) \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_{11} - \delta. \tag{2.5}$$

С другой стороны, согласно (2.4), $(1 - d_1\alpha(t))^{-1} \geq 1$ при $t \in]t_0,t_{11}[$, ибо $\varepsilon < 1$ и α – неубывающая функция. Отсюда в свою очередь вытекает неубываемость функции γ (см. определение) на $]t_0,t_{11}[$. Поэтому существует $\gamma(t_{11}-)$. Из (2.5) с учетом произвольности δ заключаем, что $u(t) \leq v(t) \leq c_0\gamma(t) \leq c_0\gamma(t_{11})$ при $t \in]t_0,t_{11}[$. Тем самым оценка (2.3) доказана при $j=1$ и $k=0$.

Рассмотрим теперь промежуток $]t_{11},t_{12}[$. Учитывая равенство $d_1v(t_{11}) = u(t_{11})d_1\alpha(t_{11})$, из последних оценок получаем неравенство $v(t_{11}) \leq c_{11}$, где $c_{11} = c_0\gamma(t_{11}-) + u(t_{11})d_1\alpha(t_{11})$. Как и выше, покажем, что $u(t) \leq v(t) \leq c_{11}\gamma(t)\gamma^{-1}(t_{11}) \leq c_{11}\gamma(t_{12}-)\gamma^{-1}(t_{11})$ при $t \in]t_{11},t_{12}[$ и $v(t_{12}) \leq c_{12}$, где $c_{12} = c_{11}\gamma(t_{12}-)\gamma^{-1}(t_{11}) + u(t_{12})d_1\alpha(t_{12})$.

Продолжая этот процесс m_1+1 раз, легко убедиться в справедливости оценок (2.3) при $j=1$.

Аналогично доказываются оценки (2.3) и при $j=2$. Отметим лишь, что в этом случае $f(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv -\alpha(t)$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Из оценок (2.3), в частности, следует, что u – ограниченная на $]a,b[$ функция.

Лемма 2.3. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *и* $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ *– такие неубывающие функции, что*

$$g(t) \le 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, a+\delta[, \tag{2.6}$$

$$g(t) \ge 0 \quad \textit{при} \quad t \in]b-\delta, b[, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{F}_0(f,g)(b-, a+) < +\infty, \tag{2.8}$$

где δ *– некоторое достаточно малое положительное число. Тогда существуют конечные односторонние пределы*

$$\phi(a+) > -\infty \quad \textit{и} \quad \phi(b-) < +\infty, \tag{2.9}$$

где

$$\phi(t) = \operatorname{sgn}(t-c) \int\limits_c^t g(\tau)\, df(\tau) \quad \textit{при} \quad t \in]a,b[, \tag{2.10}$$

а $c \in]a,b[$ *– произвольная точка.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $c \in]a+\delta, b-\delta[$. Докажем существование конечного одностороннего предела $\phi(a+)$. Пусть $b^* = \inf\{t : f(s) = f(b)$ при $a \le t \le s \le b\}$. Если $b^* = a$, то утверждение леммы очевидно, ибо $\phi(t) \equiv 0$.

Предположим теперь, что $b^* > a$. Тогда, согласно определению b^*, имеем $f(b^*-) \le f(b^*) \le \le f(b^*+) = f(b)$ и $f(t) < f(b)$ при $a \le t < b^*$. Следовательно, $0 < f(b) - f(b_*) < f(b) - f(t+) \le \le f(b) - f(t) \le f(b) - f(t-)$ при $a < t < b_*$, где $b_* = \min\{a+\delta, (a+b^*)/2, c\}$. Отсюда с учетом (2.8) для любого $\varepsilon \in]0, b_* - a[$ получаем цепочку неравенств $\infty > \mathcal{F}_0(f,g)(b-, a+) \ge \ge \mathcal{F}_0(f,g)(b_*, a+\varepsilon) \ge (f(b) - f(b_*))\mathcal{F}_1(f,g)(b_*, a+\varepsilon)$ и, следовательно,

$$M_1 \equiv \mathcal{F}_1(f,g)(b_*, a+\varepsilon) < \infty. \tag{2.11}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\mathcal{F}_1(f,g)(b_*, a+\varepsilon) = (f(t) - f(a)) \cdot s_0(g)(t)\big|_{a+\varepsilon}^{b_*} - \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} s_0(g)(t)\, df(t) + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} (f(t-) - f(a))\, ds_1(g)(t) +$$

$$+ \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} (f(t+) - f(a))\, ds_2(g)(t) = (f(t) - f(a)) \cdot s_0(g)(t)\big|_{a+\varepsilon}^{b_*} - \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} g(t)\, df(t) +$$

$$+ \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} (s_1(g)(t) + s_2(g)(t))\, df(t) + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} (f(t-) - f(a))\, ds_1(g)(t) + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b_*} (f(t+) - f(a))\, ds_2(g)(t) =$$

$$= (f(b_*) - f(a))g(b_*) - (f(a+\varepsilon) - f(a))g(a+\varepsilon) - \phi(a+\varepsilon) + \phi(b_*).$$

Отсюда ввиду (2.6) и (2.11) получаем, что

$$\phi(a+\varepsilon) - \phi(b_*) = (f(b_*) - f(a))g(b_*) - (f(a+\varepsilon) - f(a))g(a+\varepsilon) - M_1 \ge (f(b) - f(a))g(b_*) - M_1 > -\infty.$$

Поэтому существует конечный односторонний предел $\phi(a+)$, ибо функция ϕ не убывает на $]a, b_*[$.

Докажем теперь существование конечного одностороннего предела $\phi(b-)$. Пусть $a^* = = \sup\{t : f(s) = f(a)$ при $a \le s \le t \le b\}$. Если $a^* = b$, то утверждение леммы очевидно, ибо $\phi(t) \equiv 0$.

Предположим теперь, что $a^* < b$. Тогда $f(a^*+) \ge f(a^*) \ge f(a^*-) = f(a)$ и $f(t) > f(a)$ при $a^* < t \le b$. Следовательно, $0 < f(a_*) - f(a) < f(t-) - f(a) \le f(t) - f(a) \le f(t+) - f(a)$ при $a_* < t < b$, где $a_* = \max\{b-\delta, (a^*+b)/2, c\}$. Отсюда с учетом (2.8) для любого $\varepsilon \in]0, b-a_*[$

получаем $\infty > \mathcal{F}_0(f,g)(b-,a+) \geq \mathcal{F}_0(f,g)(b-\varepsilon,a_*) \geq (f(a_*)-f(a)) \cdot \mathcal{F}_2(f,g)(b-\varepsilon,a_*)$ и, следовательно,

$$M_2 \equiv \mathcal{F}_2(f,g)(b-\varepsilon,a_*) < \infty. \tag{2.12}$$

Как и выше, легко убедиться в том, что

$$\mathcal{F}_2(f,g)(b-\varepsilon,a_*) = (f(b)-f(b-\varepsilon))g(b-\varepsilon) - (f(b)-f(a_*))g(a_*) + \phi(b-\varepsilon) - \phi(a_*).$$

Отсюда с учетом (2.7) и (2.12) находим

$$\phi(b-\varepsilon)-\phi(a_*) = M_2 - (f(b)-f(b-\varepsilon))g(b-\varepsilon) + (f(b)-f(a_*))g(a_*) \leq M_2 + (f(b)-f(a_*))g(a_*),$$

что и гарантирует существование $\phi(b-)$, ибо функция ϕ не убывает на $]a_*,b[$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. При выполнении условий леммы 2.3 функцию ϕ в точках a и b, благодаря (2.9), будем доопределять по непрерывности, т.е. будем полагать $\phi(a) = \phi(a+)$ и $\phi(b) = \phi(b-)$. При этом условие (2.8) будет означать, что $\phi \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$.

Лемма 2.4. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ – такие неубывающие функции, что выполняются условие (2.6) (условие (2.7)) и*

$$\mathcal{F}_1(f,g)(b_*,a+) < +\infty \quad (\mathcal{F}_2(f,g)(b-,a_*) < +\infty), \tag{2.13}$$

где δ – некоторое достаточно малое положительное число, а a_* и $b_* \in]a,b[$. Пусть, кроме того, функция ϕ определена равенством (2.10), где $c \in]a,b[$ – произвольная точка. Тогда существует конечный односторонний предел $\phi(a+)$ (односторонний предел $\phi(b-)$).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.3. Отметим лишь, что в первом случае доказательство надо начинать с оценки (2.11), а во втором – с оценки (2.12).

Замечание 2.3. Если выполнены условия леммы 2.4, то в первом случае функцию ϕ будем доопределять по непрерывности в точке a, т.е. $\phi(a) = \phi(a+)$, а во втором случае в точке b, т.е. $\phi(b) = \phi(b-)$. При этом в первом случае условие (2.13) будет означать, что $\phi \in \mathrm{BV}([a,b_*];\mathbb{R})$, а во втором – $\phi \in \mathrm{BV}([a_*,b];\mathbb{R})$.

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия (1.4), (1.10), (1.12), (1.13) (условия (1.4), (1.10), (1.15), (1.16)). Тогда, какое бы ни было решение $(x_i)_{i=1}^2$ системы (1.1), $x_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ ($x_1 \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}([a,b[;\mathbb{R}^{n_1})$, а $x_2 \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b];\mathbb{R}^{n_2})$).*

Доказательство. Рассмотрим первый случай, т.е. когда выполнены условия (1.4), (1.10), (1.15), (1.16). Тогда матричная функция X является невырожденной на $[a,b]$ и $X_1, X_1^{-1} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1\times n_1})$.

Пусть $x = (x_i)_{i=1}^2$ – любое решение системы (1.1), а $y = (y_i)_{i=1}^2$ – решение системы (1.6), связанное с x равенствами (1.5). Ввиду сказанного выше условие $x_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ равносильно условию $y_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$.

Пусть $A_1, A_2, \widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ определены равенствами (1.8). Ясно, что

$$y_1(t) = y_{10}(t) + \int\limits_{a_0}^{t} dA_1(\tau) \cdot \left(\int\limits_{a_0}^{\tau} dA_2(s) \cdot y_1(s) \right) \quad \text{при} \quad a < t < b, \tag{2.14}$$

где $y_{10}(t) = y_1(a_0) + \widetilde{f}_1(t) - \widetilde{f}_1(a) + (A_1(t) - A_1(a_0))y_2(a_0) + f(t)$, $f(t) = \int_{a_0}^t dA_1(\tau)\cdot(\widetilde{f}_2(\tau) - \widetilde{f}_2(a_0))$.

Для любого $t \in]a,b[$ положим $\alpha(t) = \| \int_{a_0}^t dV(A_1)(s) \cdot |V(A_2)(s)| \|$, $v(t) = (v_k(t))_{k=1}^n$, $u(t) = \|v(t)\|$, где $v_k(t) = \sup\{|y_{1k}(s)| : 0 \leq (s-a_0)\,\mathrm{sgn}(t-a_0) \leq |t-a_0|\}$. Согласно условиям (1.12), (1.13) и лемме 2.3 (см. замечание 2.2), имеем $A_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1\times n_2})$, $\widetilde{f}_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$, $f \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ и $\alpha \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$ $(\alpha(a) = \alpha(a+),\ \alpha(b) = \alpha(b-))$. Поэтому $y_{10} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$. Кроме того, если $y_i = (y_{ik})_{k=1}^{n_i}$, $A_i = (a_{ijk})_{j,k=1}^{n_i,n_{3-i}}$, $f_i = (f_{ik})_{k=1}^{n_i}$ и $\widetilde{f}_i = (\widetilde{f}_{ik})_{k=1}^{n_i}$ $(i=1,2)$, а $y_{10} = (y_{10k})_{k=1}^{n_1}$, то из (2.14) следует, что

$$|y_{1k}(t)| \leq |y_{10k}(t)| + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} \left| \int\limits_{a_0}^{t} \left(\int\limits_{a_0}^{\tau} y_{1j}(s)\, da_{1ij}(s) \right) da_{1ki}(\tau) \right| \quad \text{при} \quad a < t < b \quad (k = 1,\dots,n_i).$$

Отсюда заключаем, что $0 \leq u(t) \leq \|y_{10}\|_v + |\int_{a_0}^t u(\tau)\,d\alpha(\tau)|$ при $t \in]a,b[$. Следовательно, в силу условия (1.10) справедливы условия леммы 2.2. Согласно этой лемме (см. замечание 2.1), найдется ρ_0 такое, что $u(t) \leq \rho_0$ при $a < t < b$. Поэтому $\|y(t)\| \leq \rho_0$ при $a < t < b$. Тогда из (2.14) получаем, что $\|y_1(t) - y_{10}(t) - (y_1(s) - y_{10}(s))\| \leq \rho_0(\alpha(t) - \alpha(s))$ при $a < s < t < b$. Отсюда ввиду непрерывности функции α в точках a и b вытекает существование односторонних пределов $y_1(a+)$ и $y_1(b-)$ и включение $y_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$.

Аналогично доказывается эта лемма и в случае, когда выполнены условия (1.15) и (1.16). Отметим лишь, что в этом случае нужно воспользоваться леммой 2.4 и замечанием 2.3. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1. В силу условий (1.11), (1.12) и равенств (1.8), (1.9) матричная функция $X_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1\times n_1})$, $\widetilde{l}_i : \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{BV}([a_0,b_0];\mathbb{R}^{n_2}) \to \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1,2)$ являются линейными ограниченными операторами и $\widetilde{f}_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$. Кроме того, с учетом преобразований (1.5) задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (1.6), (1.7), а задача (1.1_0), (1.2_0) – задаче (1.6_0), (1.7_0). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что задача (1.6), (1.7) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда задача (1.6_0), (1.7_0) имеет только нулевое решение.

Положим $\gamma(t) = 1 + \|V(A_2)(t)\| + \|V(f_2)(t)\|$ и $\gamma_0(t) = \mathrm{sgn}(t - t_0)\int_{a_0}^t \gamma(\tau)\,d\|V(A_1)(\tau)\|$ при $t \in]a,b[$. Согласно лемме 2.3, существуют односторонние пределы $\gamma_0(a+)$ и $\gamma_0(b-)$. Следовательно, доопределяя функцию γ_0 по непрерывности в точках a и b, имеем $\gamma_0 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R})$. Очевидно, что γ_0 – неубывающая функция, $\gamma_0(t) - \gamma_0(a_0) \geq 0$ при $t \in [a,a_0]$ и $\gamma_0(b) - \gamma_0(t) \geq 0$ при $t \in [a_0,b]$. Поэтому функция ε, заданная равенством $\varepsilon(t) = [(\gamma_0(t) - \gamma_0(a_0))(\gamma_0(b) - \gamma_0(t))]^{1/2}$ при $t \in [a,b]$, имеет смысл и

$$\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0, \quad \lim_{t\to b} \varepsilon(t) = 0. \tag{3.1}$$

Пусть $\widetilde{a} = \sup\{t \in [a,a_0] : \gamma_0(t) = \gamma_0(a)\}$, $\widetilde{b} = \inf\{t \in [a_0,b] : \gamma_0(t) = \gamma_0(b)\}$, $a_* = \sup\{t \in]a,a_0] : A_1(t) = A_1(a+)\}$, $b_* = \inf\{t \in [a_0,b[: A_1(t) = A_1(b-)\}$ ($a_* = a$ или $b_* = b$, если соответствующих t не существует). Ввиду определения γ и γ_0 легко проверить, что $\widetilde{a} = a_*$ и $\widetilde{b} = b_*$. Нетрудно убедиться в том, что $\varepsilon(t) > 0$ при $t \in]\widetilde{a},\widetilde{b}[$. Поэтому следующее определение функции δ корректно: $\delta(t) = \gamma(t)/\varepsilon(t)$ при $t \in]\widetilde{a},\widetilde{b}[$ и $\delta(t) = 0$ при $t \in [a,\widetilde{a}] \cup [\widetilde{b},b]$.

Покажем теперь, что

$$\varrho \equiv \left|\int\limits_a^b \delta(t)\,d\|V(A_1)(t)\|\right| < +\infty. \tag{3.2}$$

Для этого в свою очередь достаточно показать, что

$$\left|\int\limits_{\widetilde{a}+}^{a_0} \delta(t)\,d\|V(A_1)(t)\|\right| < +\infty, \quad \left|\int\limits_{a_0}^{\widetilde{b}-} \delta(t)\,d\|V(A_1)(t)\|\right| < +\infty. \tag{3.3}$$

Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\left|\int\limits_{\widetilde{a}+}^{a_0} \delta(t) d\|V(A_1)(t)\|\right| = \int\limits_{\widetilde{a}+}^{a_0} \varepsilon^{-1}(t)\,d\gamma_0(t) \leq (\gamma_0(b-) - \gamma(a_0))^{-1/2} \int\limits_{\widetilde{a}+}^{a_0} \eta^{-1}(t)\,d\eta^2(t) =$$

$$= (\gamma_0(b-) - \gamma(a_0))^{-1/2}\Bigg(2(\eta(a_0) - \eta(\widetilde{a}+)) - \sum_{\widetilde{a}<t\leq a_0} \eta^{-1}(t)(d_1\eta(t))^2 + \sum_{\widetilde{a}\leq t<a_0} \eta^{-1}(t)(d_2\eta(t))^2\Bigg) \leq$$

$$\leq (\gamma_0(b-) - \gamma(a_0))^{-1/2}\Bigg(2(\eta(a_0) - \eta(\widetilde{a}+)) + \sum_{\widetilde{a}\leq t<a_0} \eta^{-1}(t)(d_2\eta(t))^2\Bigg),$$

где $\eta(t) = (\gamma_0(t) - \gamma(\widetilde{a}+))^{-1/2}$. Ясно, что фигурирующую здесь сумму можно представить в виде числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1}-\xi_k)^2$, где $\xi_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – некоторая неубывающая ограниченная последовательность. Легко видеть, что этот ряд сходится. В самом деле, пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$, а k_0 – такое натуральное число, что $0 < \xi/2 \le \xi_k \le \xi$ при $k > k_0$. Учитывая это, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1} - \xi_k)^2 \le \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1} - \xi_k)^2 + 2\xi^{-1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\xi_{k+1} - \xi_k)^2 <$$

$$< \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1} - \xi_k)^2 + 2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\xi_{k+1} - \xi_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1} - \xi_k)^2 + 2(\xi - \xi_{k_0+1}) < \infty.$$

Следовательно, первая оценка (3.3) доказана. Аналогично доказывается и вторая оценка (3.3). Тем самым оценка (3.2) доказана.

Пусть $\mathrm{BV}_\delta(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_2})$ – банахово пространство векторных функций $x :]a,b[\to \mathbb{R}^{n_2}$, имеющих ограниченные с весом $1/\delta$ полные вариации, с нормой

$$\|x\|_\delta = \sup\{(\|x(a_0)\| + \|V(x)(t)\|)/\delta(t) : t \in]a,b[\,\},$$

а $\mathcal{B}$ – банахово пространство векторов $y = (y_i)_{i=1}^4$ с компонентами $y_1 \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$, $y_2 \in \mathrm{BV}_\delta(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_2})$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_4 \in \mathbb{R}^{n_2}$ и нормой $\|y\|_{\mathcal{B}} = \|y_1\|_v + \|y_2\|_\delta + \|y_3\| + \|y_4\|$. Для любого $y = (y_i)_{i=1}^4 \in \mathcal{B}$ положим

$$h_1(y)(t) = y_3 + \int_{a_0}^{t} dA_1(\tau)\cdot y_2(\tau), \quad h_2(y)(t) = y_4 + \int_{a_0}^{t} dA_2(\tau)\cdot y_1(\tau),$$

$$h_3(y) = y_3 - \widetilde{l}_1(y_1, y_2), \quad h_4(y) = y_4 - \widetilde{l}_2(y_1, y_2), \quad h(y) = (h_i(y))_{i=1}^4.$$

Легко видеть, что $h(y) \in \mathcal{B}$ при $y \in \mathcal{B}$. В самом деле, ясно, что $\|h_1(y)(t) - h_1(y)(s)\| \le \le |\int_s^t \|y_2(\tau)\|\, d\|V(A_1)(\tau)\|\,| \le \|y_2\|_\delta |\int_s^t \delta(\tau)\, d\|V(A_1)(\tau)\|\,|$ при $a < s < t < b$. Поэтому ввиду (3.2) существуют односторонние пределы $h_1(y)(a+)$ и $h_1(y)(b-)$. Доопределяя $h_1(y)$ по непрерывности в a и b, получаем, что $h_1(y) \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$, ибо

$$\bigvee_a^b (h_1(y)) \le \|y_2\|_\delta \left| \int_a^b \delta(\tau)\, d\|V(A_1)(\tau)\| \right| < \infty.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\|V(h_2(y))(t)\| \le \left| \int_{a_0}^{t} \|y_1(\tau)\|\, d\|V(A_2)(\tau)\| \right| \le \|y_1\|_v \|V(A_2)(t)\| \quad \text{при} \quad t \in]a,b[\,.$$

Учитывая это, имеем $\|h_2(y)\|_\delta \le r\|y\|_{\mathcal{B}}$, где в силу (3.1)

$$r \equiv \sup\bigl\{\varepsilon(t) : \ t \in]a,b[\,\bigr\} < +\infty. \tag{3.4}$$

Следовательно, $h_2(y) \in \mathrm{BV}_\delta(]a,b[\,;\mathbb{R}^{n_2})$.

В пространстве $\mathcal{B}$ рассмотрим операторное уравнение

$$y = h(y) + y_0, \tag{3.5}$$

где $y_0 = (y_{0i})_{i=1}^4$, $y_{01}(t) = \widetilde{f}_1(t) - \widetilde{f}_1(a_0)$, $y_{02}(t) = \widetilde{f}_2(t) - \widetilde{f}_2(a_0)$, $y_{03} = c_1$, $y_{04} = c_2$.

Покажем, что h является вполне непрерывным оператором. Пусть последовательность $y_k = (y_{ki})_{i=1}^4$ $(k=1,2,\ldots)$ такова, что $\|y_k\|_{\mathcal{B}} \le 1$ $(k=1,2,\ldots)$. Согласно теореме Хелли, из нее можно выбрать такую подпоследовательность $z_k = (z_{ki})_{i=1}^4$ $(k=1,2,\ldots)$, что

$$\lim_{k\to\infty} z_{ki}(t) = z_{0i}(t) \quad \text{при} \quad t \in J_i \quad (i=1,2), \quad \lim_{k\to\infty} z_{ki} = z_{0i} \quad (i=3,4), \tag{3.6}$$

где $J_1 = [a,b]$, $J_2 =]a,b[$, $z_{01} \in \mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$, $\|z_{01}\|_v \le 1$, $z_{02} \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n_2})$, $z_{03} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_{04} \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Покажем, что $h_1(z_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $h_2(z_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ являются фундаментальными последовательностями соответственно в пространствах $\mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$ и $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(]a,b[;\mathbb{R}^{n_2})$.

Пусть η – достаточно малое положительное число. В силу (3.1) найдется такое натуральное число $m_0(\eta)$, что $a + 1/m < a_0 < b - 1/m$ и

$$\varepsilon(t) < \eta \quad \text{при} \quad t \in [a, a+1/m] \cup [b, b-1/m] \quad (m \ge m_0(\eta)). \tag{3.7}$$

Зафиксируем $m \ge m_0(\eta)$. С учетом (3.2), (3.7) и неравенства $\gamma(t) \ge 1$ имеем

$$\|h_1(z_k) - h_1(z_l)\|_v \le \|z_{k3} - z_{l3}\| + \int_a^b \|z_{k2}(t) - z_{l2}(t)\|\, d\|V(A_1)(t)\| \le$$

$$\le \|z_{k3} - z_{l3}\| + \int_a^{a+1/m} \|z_{k2}(t) - z_{l2}(t)\|\varepsilon(t)\delta(t)\, d\|V(A_1)(t)\| +$$

$$+ \int_{a+1/m}^{b-1/m} \|z_{k2}(t) - z_{l2}(t)\|\varepsilon(t)\delta(t)\, d\|V(A_1)(t)\| + \int_{b-1/m}^{b} \|z_{k2}(t) - z_{l2}(t)\|\varepsilon(t)\delta(t)\, d\|V(A_1)(t)\| \le$$

$$\le \|z_{k3} - z_{l3}\| + 4\eta\varrho + \int_{a+1/m}^{b-1/m} \|z_{k2}(t) - z_{l2}(t)\|\varepsilon(t)\delta(t)\, d\|V(A_1)(t)\|.$$

Отсюда, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и соотношениям (3.6), вытекает существование такого натурального числа $m_1(\eta) \ge m_0(\eta)$, что $\|h_1(z_k) - h_1(z_l)\|_v < 2\eta(1+2\varrho)$ при $k,l \ge m_1(\eta)$. Поэтому последовательность $h_1(z_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ фундаментальна в $\mathrm{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n_1})$.

С другой стороны, согласно (3.4) и (3.7), $\delta^{-1}(t) \le \varepsilon(t) \le r$ при $t \in]a,b[$,

$$\|V(h_2(z_k - z_l))(t)\|\delta^{-1}(t) \le \delta^{-1}(t) \int_{a_0}^t \|z_{k1}(\tau) - z_{l1}(\tau)\|\, d\|V(A_2)(\tau)\| \le$$

$$\le 2\varepsilon(t)\gamma^{-1}(t)\|V(A_2)(t)\| \le 2\varepsilon(t) < 2\eta \quad \text{при} \quad t \in]a, a+1/m[\cup]b-1/m, b[$$

и $\|V(h_2(z_k - z_l))(t)\|\delta^{-1}(t) \le r \int_{a+1/m}^{b-1/m} \|z_{k1}(\tau) - z_{l1}(\tau)\| d\|V(A_2)(\tau)\|$ при $t \in [a+1/m, b-1/m]$. Следовательно, последовательность $h_2(z_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ фундаментальна в $\mathrm{BV}_\delta(]a,b[;\mathbb{R}^{n_2})$, ибо, согласно указанной теореме Лебега и (3.6), найдется такое натуральное число $m_2(\eta) \ge$ $\ge m_1(\eta)$, что $\|h_2(z_k) - h_2(z_l)\|_\delta \le 2\eta(1+r)$ при $k,i \ge m_2(\eta)$. Тем самым полная непрерывность оператора h доказана.

Согласно альтернативе Фредгольма для операторных уравнений (см. [11, с. 499] или [12]), операторное уравнение (3.5) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение

$$y = h(y) \tag{3.5$_0$}$$

имеет только нулевое решение. С другой стороны, операторное уравнение (3.5) эквивалентно задаче (1.6), (1.7), ибо $y = (y_i)_{i=1}^4 \in \mathcal{B}$ является решением уравнения (3.5) тогда и только тогда, когда $(y_i)_{i=1}^2$ есть решение задачи (1.6), (1.7) и $y_3 = y_1(a_0)$, $y_4 = y_2(a_0)$. Аналогично уравнение (3.5_0) равносильно задаче (1.6_0), (1.7_0). Следовательно, для однозначной разрешимости задачи (1.6), (1.7) необходимо и достаточно, чтобы задача (1.6_0), (1.7_0) имела только тривиальное решение. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2 аналогично доказательству теоремы 1.1. Отметим лишь, что в этом случае соответствующим образом строятся функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_{10}(t)$, $\varepsilon_1(t)$ и $\delta_1(t)$ при $t \in [a,b[$, функции $\gamma_2(t)$, $\gamma_{20}(t)$, $\varepsilon_2(t)$ и $\delta_2(t)$ при $t \in]a,b]$, банаховы пространства $\mathrm{BV}_{\delta_1}([a,b[\,;\mathbb{R}^{n_1})$ и $\mathrm{BV}_{\delta_2}(]a,b];\mathbb{R}^{n_2})$, а $\mathcal{B} = \mathrm{BV}_{\delta_1}([a,b[\,;\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{BV}_{\delta_2}(]a,b];\mathbb{R}^{n_2}) \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.

Следствия 1.1 и 1.2 непосредственно вытекают из теорем 1.1 и 1.2.

Работа поддержана фондом CRDF–Georgia (проект 3318).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ashordia M.* // Functional Differ. Equat. 2000. V. 7. № 1–2. P. 39–64.
2. *Schwabik Š., Tvrdý M.* // Czechoslovak Math. J. 1979. V. 29. № 104. P. 451–477.
3. *Schwabik Š., Tvrdý M., Vejvoda O.* Differential and integral equations. Praha, 1979.
4. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
5. *Кигурадзе И.Т.* Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1997.
6. *Кигурадзе И.Т.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 198–209.
7. *Groh J.* // Illinois J. Math. 1982. V. 24. № 2. P. 244–263.
8. *Hildebrandt T.H.* // Illinois J. Math. 1959. V. 3. № 3. P. 352–373.
9. *Ashordia M.* // Czechoslovak Math. J. 1996. V. 49. № 121. P. 385–404.
10. *Ashordia M.* // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 1995. V. 6. P. 1–57.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
12. *Никольский С.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7. № 3. С. 147–153.

Тбилисский государственный университет
им. И.А. Джавахишвили

Поступила в редакцию
30.08.2004 г.